

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

Μαθηματικά



Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Μέρος Α'

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α' Λυκείου Προσανατολισμού

Α' τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Α΄ Λυκείου Προσανατολισμού, Α΄ Τεύχος

| | | |
|-----------------------|--|--|
| Συγγραφή Α΄ έκδοσης: | Αθανασίου Ανδρέας Αντωνιάδης Μάριος Γιασουμής Νικόλας Έλληνα Αγγέλα Λοϊζιάς Σωτήρης Ματθαίου Κυριάκος | Μαυροκορδάτου Μερόπη Μουσουλίδου – Νικολαΐδου Μαριλένα Παπαγιάννης Κωνσταντίνος Τιμοθέου Σάββας Φιλίππου Ανδρέας |
| Συγγραφή Δ΄ έκδοσης: | Λοϊζιάς Σωτήρης | Τιμοθέου Σάββας |
| Επιμέλεια: | Πίκας Μάριος | Σαλονικίδης Ιωάννης |
| Συντονισμός: | Χρίστου Κωνσταντίνος, <i>Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου</i> Βίδρας Αλέκος, <i>Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου</i> | |
| Εποπτεία: | Παπαγιάννη Όλγα, <i>Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης</i> Χατζηχρίστου Χρυσούλα, <i>Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης</i> Ιωάννου Ιωάννης, <i>Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης</i> Μεγάλεμος Ιωάννης, <i>Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης</i> | |
| Σχεδιασμός εξωφύλλου: | Σιαμμάς Χρύσης, <i>Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων</i> | |
| Επιμέλεια έκδοσης: | Ιωάννου-Άστρα Μαρίνα, <i>Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων</i> | |
| Συντονισμός έκδοσης: | Παρπούνας Χρίστος, <i>Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων</i> | |

Α΄ έκδοση 2013

Β΄ έκδοση 2014

Γ΄ έκδοση 2016

Δ΄ Έκδοση 2020

Εκτύπωση: Proteas Press Ltd

© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ISBN: 978-9963-54-256-7



Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε δύο τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Α΄ Λυκείου», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Στην αρχή κάθε ενότητας γίνεται παράθεση των στόχων και οι μαθητές/τριες προϋδεάζονται ως προς το τι «θα μάθουμε». Ακολουθεί, στο «Έχουμε μάθει ...», η παρουσίαση της αναγκαίας προϋπάρχουσας γνώσης που οι μαθητές/τριες πρέπει να διαθέτουν, κάτι που βοηθά τους/τις εκπαιδευτικούς στον καταρτισμό καλύτερης διαγνωστικής και διαμορφωτικής αξιολόγησης. Στη συνέχεια, οι νέες μαθηματικές έννοιες διερευνώνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών/τριών, όπως ορίζουν οι αρχές των Εκσυγχρονισμένων Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών. Η προσπάθεια κλιμακώνεται με παραδείγματα και διαβαθμισμένες δραστηριότητες, με έμφαση στη λύση προβλήματος και στην ανάδειξη της τεχνολογίας ως αναπόσπαστου μέρους της Μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όλες οι εκδόσεις για τα Μαθηματικά των τελευταίων χρόνων βρίσκονται υπό συνεχή αξιολόγηση, διαμόρφωση και βελτίωση στη βάση της ανατροφοδότησης και των παρατηρήσεων που προέρχονται και από τους/τις μάχιμους/ες καθηγητές/τριες των Μαθηματικών. Αναμένω από τους διδάσκοντες/ουσες να εκφράσουν τις απόψεις τους και να υποβάλουν τις εισηγήσεις τους, τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο του βιβλίου και το επίπεδο των ασκήσεων και δραστηριοτήτων όσο και σε σχέση με τον τρόπο προσέγγισης της ύλης.

Όλο το υλικό που παράγεται για το μάθημα των Μαθηματικών αποσκοπεί στη βοήθεια τόσο των μαθητών/τριών, όσο και των καθηγητών/τριών, στην πορεία τους μέσα από τα Εκσυγχρονισμένα Αναλυτικά Προγράμματα, με στόχο το καλύτερο αποτέλεσμα. Είναι εμποτισμένο με τον σύγχρονο τρόπο σκέψης και προσηλωμένο στην προαγωγή και στην ανάδειξη των βασικών δεξιοτήτων των μαθητών/τριών μας, που αποτελεί πρώτιστο μέλημά μας. Η προσπάθεια συνεχίζεται και οι προοπτικές είναι λαμπρές.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τον κύριο Κωνσταντίνο Χρίστου, Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Δρ Κυπριανός Δ. Λούης

Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

| ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ | Σελίδα |
|---|---------------|
| Επανάληψη | 7 |
| Από το Γυμνάσιο στο Λύκειο | 8 |
| 1. Πραγματικοί Αριθμοί | 13 |
| 1.1 Η έννοια της νιοστής ρίζας | 15 |
| 1.2 Ιδιότητες νιοστής ρίζας | 25 |
| 1.3 Δυνάμεις με ρητό εκθέτη | 32 |
| 1.4 Μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό | 37 |
| 1.5 Διάταξη πραγματικών αριθμών | 42 |
| 2. Τριγωνομετρία | 63 |
| 2.1 Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών | 65 |
| 2.2 Γωνία σε κανονική θέση | 70 |
| 2.3 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας σε κανονική θέση | 76 |
| 2.4 Τριγωνομετρικός κύκλος | 81 |
| 2.5 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις – Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών που έχουν άθροισμα ή διαφορά $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ | 94 |
| 2.6 Τριγωνομετρικές ταυτότητες | 110 |
| 3. Κύκλος | 133 |
| 3.1 Σχετική θέση δύο κύκλων | 137 |
| 3.2 Εγγεγραμμένες – Επίκεντρες γωνίες | 146 |
| 3.3 Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης | 159 |
| 4. Διανύσματα | 179 |
| 4.1 Η έννοια του διανύσματος | 180 |
| 4.2 Πράξεις με διανύσματα | 191 |
| 4.3 Διανυσματική ακτίνα σημείου – Διανύσματα σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων | 201 |
| ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ | 225 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ | 247 |

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

ΑΠΟ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

16. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x + 2)^2$

(β) $(2x - 3y)^2$

(γ) $\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2$

(δ) $(x - 3)(x + 3)$

(ε) $(x + 4)^3$

(στ) $(2x - 1)(2x + 1)$

17. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(a + 1)^2 - (a + 1)(a - 1) = 2(a + 1)$.

18. Αν $a + \beta = -\frac{1}{3}$ και $a\beta = -\frac{7}{3}$, να αποδείξετε ότι:

(α) $a^2 + \beta^2 = \frac{43}{9}$

(β) $(3a + 1)^2 + (3\beta + 1)^2 + 10(a + \beta) = \frac{119}{3}$

(γ) $a^3 + \beta^3 = -\frac{64}{27}$

19. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $2x^3 - 2x$

(β) $y^2 - x^2 - 10y + 25$

(γ) $a^3x^3 - \beta^3x^3 + a^3 - \beta^3$

(δ) $(x - 2y)^2 - (x + 3y)^2$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $3x^2 - 15x = 0$

(β) $x^2 + x = 6$

(γ) $(a - 2)(2a + 8) = -10$

(δ) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

21. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2}$

(β) $\frac{(a + 1)(a - 2)^2 - 4(a + 1)}{a^3 + a^2}$

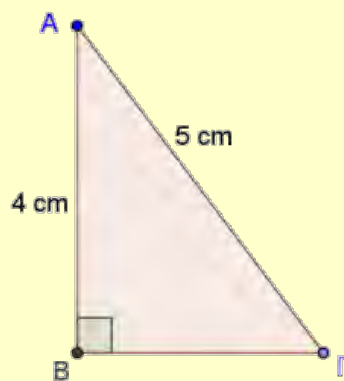
22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x - 1} - \frac{4}{x^2 - 1} = 0$

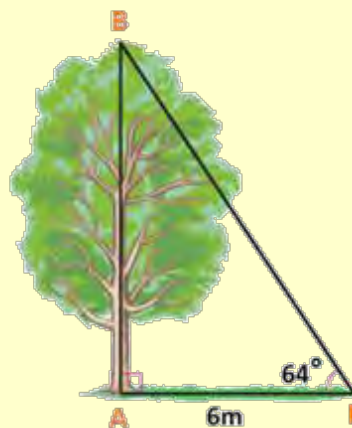
(β) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{x + 2}{x + 3}$

(γ) $\frac{2x - 19}{x^2 + x - 6} - \frac{x}{2 - x} = \frac{5}{x + 3}$

23. Να βρείτε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, των οποίων τα τετράγωνα να έχουν άθροισμα 145.
24. Να δείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τη βάση του.
25. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις της $B\Gamma$ παίρνουμε σημεία E, Z , έτσι ώστε $BE = \Gamma Z$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.
26. Με βάση το πιο κάτω σχήμα, να βρείτε:
 (α) ποιος τριγωνομετρικός αριθμός της \hat{A} είναι ίσος με $\frac{4}{5}$;
 (β) ποιος τριγωνομετρικός αριθμός της $\hat{\Gamma}$ είναι ίσος με $\frac{4}{5}$;

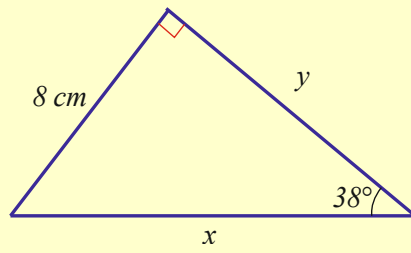


27. Να υπολογίσετε το συνθ και την εφθ οξείας γωνίας θ ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$.
28. Ο κύριος Αβραάμ θέλει να υπολογίσει το ύψος του δέντρου στον κήπο του. Τοποθέτησε τον εξάντα σε απόσταση 6 m από τον κορμό του δέντρου και υπολόγισε ότι το μέγεθος της γωνίας προς την κορυφή του δέντρου ήταν 64° . Να υπολογίσετε το ύψος του δέντρου.
 (Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί να υπολογιστούν κατά προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων).

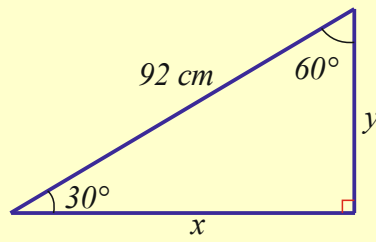


29. Να υπολογίσετε τους άγνωστους x και y στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α)



(β)



ΕΝΟΤΗΤΑ 01

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 1.1 Η έννοια της νιοστής ρίζας
- 1.2 Ιδιότητες νιοστής ρίζας
- 1.3 Δυνάμεις με ρητό εκθέτη
- 1.4 Μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό
- 1.5 Διάταξη πραγματικών αριθμών

Έχουμε μάθει...

- Να ορίζουμε την τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a .
 $\sqrt{a} = \beta \Leftrightarrow \beta^2 = a$, όπου $a \geq 0$, $\beta \geq 0$.
- Να ορίζουμε την κυβική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a .
 $\sqrt[3]{a} = \beta \Leftrightarrow \beta^3 = a$, όπου $a \geq 0$, $\beta \geq 0$.
- Τις ιδιότητες των δυνάμεων.

Αν $a > 0$, $\beta > 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{Z} - \{0\}$, τότε:

$$a^\mu \cdot a^\nu = a^{\mu+\nu}, \quad \frac{a^\mu}{a^\nu} = a^{\mu-\nu}, \quad (a^\mu)^\nu = a^{\mu\nu}$$

$$a^\nu \cdot \beta^\nu = (a \cdot \beta)^\nu, \quad \frac{a^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{a}{\beta}\right)^\nu$$

$$a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu}, \quad \nu > 0$$

- Τις ιδιότητες ανισοτήτων:
 $a > \beta \Leftrightarrow a + \gamma > \beta + \gamma$
(Μπορούμε να προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό.)
 $a > \beta \Leftrightarrow a - \gamma > \beta - \gamma$
(Μπορούμε να αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό.)
 $a > \beta \Leftrightarrow a\gamma > \beta\gamma$ ή $\frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$, όταν $\gamma > 0$.
(Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, χωρίς να αλλάξει η φορά της ανισότητας.)
 $a > \beta \Leftrightarrow a\gamma < \beta\gamma$ ή $\frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$, όταν $\gamma < 0$.
(Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, αρκεί να αλλάξουμε τη φορά της ανισότητας.)

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΝΙΟΣΤΗΣ ΡΙΖΑΣ

Εξερεύνηση

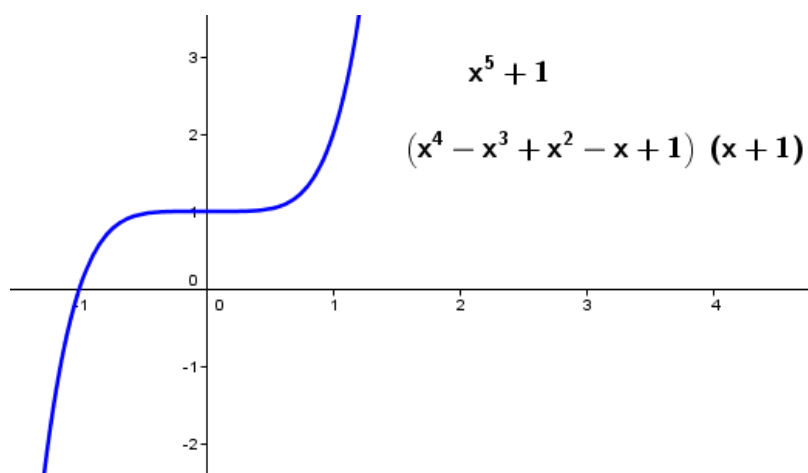
- Ποιος φυσικός αριθμός βρίσκεται «πιο κοντά» στον αριθμό $a = \sqrt{89}$;
- Πώς μπορείτε να εξηγήσετε την απάντησή σας χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανής;
- Να επαναλάβετε τα πιο πάνω ερωτήματα για τον αριθμό $\beta = \sqrt[3]{89}$.

Διερεύνηση 1

- Να βρείτε δύο αριθμούς τέτοιους, ώστε το τετράγωνο του ενός να είναι ίσο με τον κύβο του άλλου. Να εξηγήσετε τον τρόπο σκέψης σας.
- Να βρείτε δύο αριθμούς τέτοιους, ώστε το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ίσο με το τετράγωνο ενός άλλου αριθμού.

Διερεύνηση 2

- Να ανοίξετε το αρχείο «[ALyk_En01_RizesPolyonymou.ggb](#)».



- Να δώσετε κατάλληλες τιμές στα « ν » και « a », για να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις της μορφής $f(x) = x^\nu + a$ που αναπαριστούν τα αντίστοιχα πολυώνυμα $P(x)$. Στη συνέχεια, να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, σύμφωνα με το παράδειγμα.

| Πολυώνυμο $x^\nu + a$ | Εξίσωση $x^\nu + a = 0$ | ν | Λύσεις εξίσωσης |
|--------------------------|----------------------------|-------|--------------------|
| $P(x) = x^2 - 1$ | $x^2 = 1$ | 2 | $x = 1, x = -1$ |
| $P(x) = x^3 + 1$ | | | |
| $P(x) = x^3 - 1$ | | | |
| $P(x) = x^4 - 1$ | | | |
| $P(x) = x^5 - 1$ | | | |
| $P(x) = x^5 + 1$ | | | |

- Τι παρατηρείτε ως προς το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^\nu = 1$ στις περιπτώσεις για τις οποίες το ν είναι άρτιος ή περιττός αριθμός;
- Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, χωρίς να κάνετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

| Πολυώνυμο $x^\nu + a$ | Πολυώνυμο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων | Εξίσωση $x^\nu + a = 0$ | ν | Λύσεις εξίσωσης |
|--------------------------|---|----------------------------|-------|--------------------|
| $P(x) = x^4 - 16$ | $P(x) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$ | $x^4 = 16$ | | |
| | $P(x) = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$ | | | |
| | $P(x) = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$ | | | |
| | $P(x) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$ | | | |
| $P(x) = x^3 + 125$ | | | | |
| $P(x) = x^6 - 1$ | | | | |

- Τι παρατηρείτε;

Έχουμε μάθει στο Γυμνάσιο τα βασικά Αριθμοσύνολα:

Φυσικοί αριθμοί: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Ακέραιοι αριθμοί: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

Ρητοί αριθμοί: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{\beta}, \beta \neq 0, a, \beta \in \mathbb{Z} \right\}$

Παρατηρήσαμε ότι $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Δηλαδή, κάθε φυσικός αριθμός είναι επίσης ακέραιος και κάθε ακέραιος είναι και ρητός. Ειδικά για το σύνολο των ρητών, είδαμε ότι κάθε ρητός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων ή ως περιοδικός δεκαδικός (να έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία και από ένα ψηφίο και μετά αποτελείται από έναν επαναλαμβανόμενο τμήμα που λέγεται και περιοδικό τμήμα.).

Για παράδειγμα, ρητοί αριθμοί είναι οι

$$\frac{1}{5}, -\frac{2}{11}, +8, -4, 0$$

αλλά και οι δεκαδικοί:

$$0,4, -0,231, 0,\bar{4} = 0,444444 \dots = \frac{4}{9}, 0,\overline{234} = 0,234234234 \dots = \frac{234}{999} = \frac{26}{111}$$

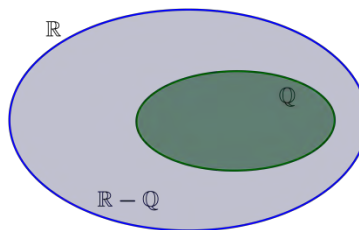
Υπάρχουν και αριθμοί, οι οποίοι δεν μπορούν να γραφούν ως κλάσματα με όρους ακέραιους αριθμούς. Δηλαδή, δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή:

$$\frac{a}{\beta}, \beta \neq 0, a, \beta \in \mathbb{Z}$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν αριθμοί, οι οποίοι δεν είναι ρητοί, τους οποίους ονομάζουμε **άρρητους**. Το σύνολο των άρρητων αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

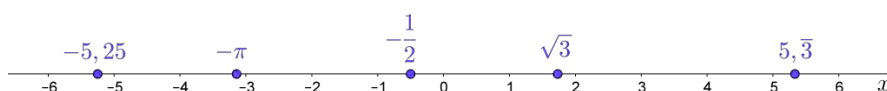
Για παράδειγμα, τέτοιοι αριθμοί είναι οι $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sqrt[3]{7}$, π κτλ.

Η ένωση του συνόλου των ρητών αριθμών με τους άρρητους αριθμούς μας δίνει το σύνολο των **πραγματικών αριθμών**, το οποίο συμβολίζεται με \mathbb{R} . Δηλαδή, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.



Οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν πάνω σε μια ευθεία, όπου σε κάθε σημείο της αντιστοιχεί ένας και μόνον ένας πραγματικός αριθμός.

Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα βλέπουμε την αναπαράσταση των αριθμών $-5, 25, -\pi, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}$ και $5, \bar{3}$ πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.



Έχουμε μάθει στο Γυμνάσιο τις έννοιες της τετραγωνικής και κυβικής ρίζας. Συγκεκριμένα, για $a \geq 0, \beta \geq 0$:

$$\sqrt{a} = \beta \Leftrightarrow \beta^2 = a$$

Από το πιο πάνω, έχουμε:

$$\sqrt{a} = \sqrt{\beta^2} = \beta, \quad a, \beta \geq 0$$

Για παράδειγμα, ισχύει $\sqrt{25} = 5$, αφού $5^2 = 25$.

Είναι γνωστό ότι υπάρχει ακόμα ένας αριθμός, ο οποίος αν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει το 25. Έχουμε ότι $(-5)^2 = 25$, αλλά **δεν** γράφουμε ποτέ ότι $\sqrt{25} = \pm 5$. Διακρίνουμε, δηλαδή ότι το αποτέλεσμα της $\sqrt{25}$ είναι διαφορετικό από τις λύσεις της εξίσωσης $x^2 = 25$.

Συγκεκριμένα, οι λύσεις της εξίσωσης είναι **δύο**, οι $x_1 = \sqrt{25} = 5$ και $x_2 = -\sqrt{25} = -5$, ενώ η $\sqrt{25}$ είναι **μοναδική** και είναι ίση με 5.

Επεκτείνοντας τις έννοιες της τετραγωνικής και της κυβικής ρίζας, μπορούμε με ανάλογο τρόπο να ορίσουμε την έννοια της νιοστής ρίζας και για άλλους φυσικούς αριθμούς.

Ορισμός

Η **νιοστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού a , όπου n θετικός ακέραιος, είναι ο μη αρνητικός αριθμός β ο οποίος, όταν υψωθεί σε δύναμη με εκθέτη n , δίνει τον αριθμό a .

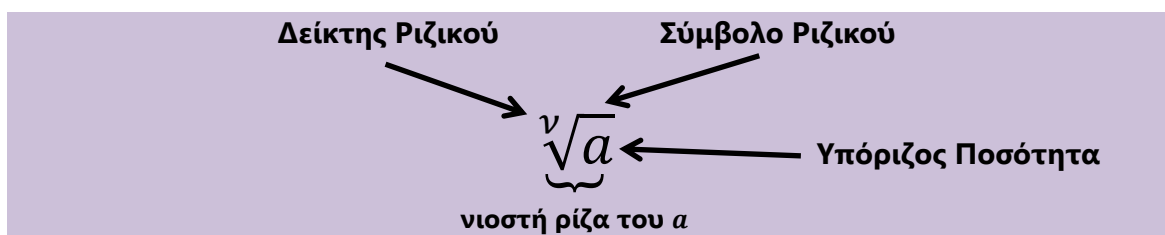
Συμβολίζεται με $\sqrt[n]{a}$ και ισχύει ότι:

$$\sqrt[n]{a} = \beta \Leftrightarrow \beta^n = a \quad (a \geq 0 \text{ και } \beta \geq 0, n \in \mathbb{N})$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι:

- $\sqrt{25} = 5$, διότι $5^2 = 25$.
- $\sqrt[3]{8} = 2$, διότι $2^3 = 8$.
- $\sqrt[4]{81} = 3$, διότι $3^4 = 81$.
- $\sqrt[5]{-32}$ δεν ορίζεται, διότι το υπόριζο είναι αρνητικό.
- $\sqrt[6]{-64}$ δεν ορίζεται, διότι το υπόριζο είναι αρνητικό.

Η επεξήγηση του συμβολισμού της νιοστής ρίζας μη αρνητικού πραγματικού αριθμού δίνεται πιο κάτω:



Παρατηρήσεις

- Από τον πιο πάνω ορισμό, και για $a \geq 0$, έχουμε:
 - $\sqrt[n]{a} = a$
 - $\sqrt[n]{a} = 0 \Leftrightarrow a = 0$
 - $\sqrt[n]{1} = 1$
 - $\sqrt[n]{a^n} = a$
- Μπορούμε πιο εύκολα να υπολογίσουμε μια νιοστή ρίζα, όταν το υπόριζο γράφεται ως δύναμη με εκθέτη n .

Για παράδειγμα:

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$\sqrt[6]{x^{30}} = \sqrt[6]{(x^5)^6} = x^5, \quad x \geq 0$$

Διερεύνηση της εξίσωσης $x^v = a$ (v θετικός ακέραιος)

Η έννοια της νιοστής ρίζας είναι άμεσα συνδεδεμένη με τη λύση της εξίσωσης που έχει τη μορφή $x^v = a$, $a \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}$.

Για παράδειγμα:

- Αν έχουμε την εξίσωση $x^2 = 16$, τότε από τον ορισμό της ρίζας παίρνουμε ότι $x = \sqrt{16} = 4$. Επομένως, η $x = 4$ είναι μία λύση ή ρίζα της εξίσωσης. Όμως, και το -4 είναι λύση της πιο πάνω εξίσωσης, αφού $(-4)^2 = 16$. Έτσι, όταν έχουμε την εξίσωση $x^2 = 16$, γράφουμε:

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

- Αν έχουμε την εξίσωση $x^4 = -16$, τότε προφανώς η εξίσωση δεν έχει λύση στο \mathbb{R} , αφού δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός που αν υψωθεί στην τέταρτη δύναμη, να δώσει αρνητικό αριθμό.
- Αν έχουμε την εξίσωση $x^3 = 8$, τότε από τον ορισμό της ρίζας παίρνουμε ότι $x = \sqrt[3]{8} = 2$. Επομένως, η $x = 2$ είναι μία λύση της εξίσωσης και μάλιστα μοναδική στο \mathbb{R} , διότι δεν υπάρχει άλλος πραγματικός αριθμός που αν υψωθεί στην τρίτη δύναμη, να δώσει τον αριθμό 8. Έτσι, όταν έχουμε την εξίσωση $x^3 = 8$, γράφουμε:

$$x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

- Αν έχουμε την εξίσωση $x^3 = -8$, τότε ο ορισμός της τρίτης ρίζας δεν μας επιτρέπει να γράψουμε $x = \sqrt[3]{-8}$, διότι το υπόριζο είναι αρνητικός αριθμός. Όμως, η πιο πάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση στο \mathbb{R} , την $x = -2$, διότι $(-2)^3 = -8$. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, γράφουμε:

$$x^3 = -8 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2$$

Γενικά:

- ✓ Αν **v περιττός**, τότε η εξίσωση $x^v = a$ έχει πάντα μία μόνο πραγματική λύση, ανεξάρτητα από το αν ο a είναι θετικός, αρνητικός ή ίσος με μηδέν.

Συγκεκριμένα, η μία μόνο πραγματική λύση της εξίσωσης είναι:

- $x = \sqrt[v]{a}$, όταν $a > 0$
- $x = -\sqrt[v]{-a}$, όταν $a < 0$. (Παρατηρούμε ότι ο $-a$, ως υπόριζο, είναι θετικός αριθμός.)
- $x = \sqrt[v]{a} = 0$, όταν $a = 0$.

Για παράδειγμα:

- Η εξίσωση $x^5 = 32$ έχει μόνο μία πραγματική λύση, τον αριθμό $x = \sqrt[5]{32} = 2$.
- Η εξίσωση $x^3 = -125$ έχει μόνο μία πραγματική λύση, τον αριθμό $x = -\sqrt[3]{125} = -5$.
- ✓ Αν **v άρτιος** τότε η εξίσωση $x^v = a$ ενδέχεται να έχει ή να μην έχει πραγματικές λύσεις, ανάλογα από το αν ο a είναι θετικός, αρνητικός ή ίσος με μηδέν.

Συγκεκριμένα, η εξίσωση $x^v = a$, v άρτιος:

- δεν έχει πραγματικές λύσεις, όταν $a < 0$
- έχει δύο πραγματικές λύσεις, τις $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$, όταν $a > 0$
- μία μόνο πραγματική λύση, τη $x = 0$, όταν $a = 0$.

Για παράδειγμα:

- Η εξίσωση $x^4 = 81$ έχει δύο πραγματικές λύσεις, τις $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$.
- Η εξίσωση $x^4 = -81$ δεν έχει πραγματικές λύσεις.
- Η $x^4 = 0$ έχει μία μόνο πραγματική λύση, τη $x = 0$.

Παρατήρηση

Σε πολλές εξισώσεις ενδέχεται η νιοστή ρίζα να μην είναι ρητός αριθμός. Σε τέτοια περίπτωση, η λύση της εξίσωσης γράφεται με το σύμβολο της νιοστής ρίζας ή υπολογίζεται με την υπολογιστική μηχανή με κατάλληλα δεκαδικά ψηφία, όταν αυτό ζητηθεί.

Για παράδειγμα:

- $x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$
- $x^6 = 13 \Rightarrow x = \pm\sqrt[6]{13}$
- $x^4 = -10$ (Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις, γιατί $x^4 \geq 0$ και $-10 < 0$.)
- $x^3 = 20 \Rightarrow x = \sqrt[3]{20}$
- $x^7 = -100 \Rightarrow x = -\sqrt[7]{100}$
- $x^2 = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$

Χρησιμοποιώντας την υπολογιστική μηχανή, οι πιο πάνω λύσεις σε προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων είναι:

- ✓ $\pm\sqrt{7} \approx \pm 2,65$
- ✓ $\pm\sqrt[6]{13} \approx \pm 1,53$
- ✓ $\sqrt[3]{20} \approx 2,71$
- ✓ $-\sqrt[7]{100} \approx -1,93$
- ✓ $\pm\sqrt{\frac{2}{5}} \approx \pm 0,63$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες:

(α) $\sqrt{36}$

(β) $\sqrt[3]{8}$

(γ) $\sqrt[4]{81}$

(δ) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

Λύση

$$(\alpha) \quad \sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$$

$$(\beta) \quad \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$(\gamma) \quad \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$(\delta) \quad \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 2

Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

$$(\alpha) \quad \sqrt{2^{14}}$$

$$(\beta) \quad \sqrt[3]{5^{30}}$$

$$(\gamma) \quad \sqrt[5]{32x^{10}}$$

$$(\delta) \quad \sqrt[4]{\frac{16}{a^{12}}}, \quad a > 0$$

Λύση

$$(\alpha) \quad \sqrt{2^{14}} = \sqrt{(2^7)^2} = 2^7$$

$$(\beta) \quad \sqrt[3]{5^{30}} = \sqrt[3]{(5^{10})^3} = 5^{10}$$

$$(\gamma) \quad \sqrt[5]{32x^{10}} = \sqrt[5]{(2x^2)^5} = 2x^2.$$

$$(\delta) \quad \text{Για } a > 0, \quad \sqrt[4]{\frac{16}{a^{12}}} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{a^3}\right)^4} = \frac{2}{a^3}.$$

Παράδειγμα 3

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

$$(\alpha) \quad x^3 = 8$$

$$(\beta) \quad x^3 = -8$$

$$(\gamma) \quad x^4 = 81$$

Λύση

$$(\alpha) \quad x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} \Rightarrow x = 2$$

$$(\beta) \quad x^3 = -8 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{8} \Rightarrow x = -2$$

$$(\gamma) \quad x^4 = 81 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{81} \Rightarrow x = \pm 3$$

Παράδειγμα 4

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

$$(\alpha) \quad \sqrt{x+1} = 4$$

$$(\beta) \quad \sqrt[5]{y+2} = 2$$

Λύση

(α) Για να έχει πραγματική λύση η εξίσωση $\sqrt{x+1} = 4$, πρέπει:

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

Υψώνουμε και τα δύο μέλη στη δεύτερη δύναμη:

$$\sqrt{x+1} = 4 \Rightarrow (\sqrt{x+1})^2 = 4^2 \Rightarrow x+1 = 16 \Rightarrow x = 15, \text{ δεκτή } (x > -1)$$

(β) Για να έχει πραγματική λύση η εξίσωση $\sqrt[5]{y+2} = 2$, πρέπει:

$$y+2 \geq 0 \Rightarrow y \geq -2$$

Υψώνουμε και τα δύο μέλη στη πέμπτη δύναμη:

$$\sqrt[5]{y+2} = 2 \Rightarrow (\sqrt[5]{y+2})^5 = 2^5 \Rightarrow y+2 = 32 \Rightarrow y = 30, \text{ δεκτή } (y \geq -2)$$

Παράδειγμα 5

Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^4 - 7} = 3$.

Λύση

Για να έχει πραγματική λύση η εξίσωση $\sqrt{x^4 - 7} = 3$, πρέπει $x^4 - 7 \geq 0$.

Υψώνουμε και τα δύο μέλη στη δεύτερη δύναμη. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^4 - 7} = 3 &\Rightarrow (\sqrt{x^4 - 7})^2 = 3^2 \Rightarrow x^4 - 7 = 9 \\ &\Rightarrow x^4 - 16 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \quad (x^2 + 4 \neq 0) \end{aligned}$$

Για $x = \pm 2$, τότε $x^4 - 7 = 9 \geq 0$. Άρα, και οι δύο τιμές του x είναι δεκτές.

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες:

(α) $\sqrt{100}$ (β) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ (γ) $\sqrt[4]{81} - \sqrt{81}$ (δ) $\sqrt[5]{0,00032}$

2. (α) Να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός $\sqrt[3]{25}$ δεν είναι ακέραιος αριθμός και να αναφέρετε τον μικρότερο ακέραιο αριθμό ο οποίος να είναι μεγαλύτερός του.

(β) Δίνεται ότι $x = \sqrt[3]{25}$ και $y = \sqrt{8}$. Χωρίς τη χρήση υπολογιστική μηχανής, να υπολογίσετε τους αριθμούς x^3, x^6, y^2 και y^6 .

(γ) Με βάση το (β), να συγκρίνετε τα x και y .

3. Ένας αριθμός, όταν υψωθεί στην $5^{\text{η}}$ δύναμη, μας δίνει 10.

(α) Να δώσετε τον κατάλληλο συμβολισμό για αυτόν τον αριθμό.

(β) Με χρήση της υπολογιστικής μηχανής, να γράψετε τον αριθμό κατά προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων.

4. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες, δίνοντας την απάντησή σας σε μορφή δύναμης:

(α) $\sqrt[3]{5^{36}}$ (β) $\sqrt{3^7 \cdot 3^4 \cdot 3^{19}}$ (γ) $\sqrt[4]{2^{31} + 2^{31}}$ (δ) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{7^{90}}}$

5. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt{3^{12}}$ (β) $\sqrt[3]{6^{60}}$ (γ) $\sqrt[5]{\frac{32}{x^{20}}}$ (δ) $\sqrt[6]{\frac{\beta^{18}}{1000000}}, \beta \geq 0$

6. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^4 = 16$ (β) $2x^3 = -54$ (γ) $3x^7 - 1 = 383$

7. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^6 = 1000000$ (β) $x^4 = -16$ (γ) $1 - 2x^6 = \frac{31}{32}$

8. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^3 = 2$ (β) $3x^4 + 5 = 11$ (γ) $x^5 + 20 = 10$

9. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $(x + 2)^4 = 81$ (β) $(1 - x)^5 = -1024$ (γ) $2x^3 + 1 = 129$

10. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt{2x + 3} = 5$ (β) $\sqrt[3]{3x} = 6$ (γ) $3\sqrt[4]{x} - 2 = 7$

11. Να βρείτε τον αριθμό, ο οποίος ελαττωμένος κατά 2, έχει κυβική ρίζα ίση με 10.

12. Ποσό €3000 ανατοκίζεται με επιτόκιο $\tau\%$ και σε 5 χρόνια γίνεται €3828,84. Να υπολογίσετε την τιμή του τ από την εξίσωση:

$$3000(1 + \tau)^5 = 3828,84$$

1.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΝΙΟΣΤΗΣ ΡΙΖΑΣ

Διερεύνηση

- Να εξηγήσετε γιατί **δεν** είναι ορθές οι πιο κάτω ισότητες:

(α) Για κάθε $a, \beta \geq 0$, ισχύει:

$$\sqrt{a + \beta} = \sqrt{a} + \sqrt{\beta}$$

(β) Για κάθε $a, \beta \geq 0$, $a \geq \beta$, ισχύει:

$$\sqrt{a - \beta} = \sqrt{a} - \sqrt{\beta}$$

- Να μελετήσετε τις πιο κάτω ισότητες και να αναφέρετε κατά πόσο είναι ορθές ή όχι:

(α) Για κάθε $a, \beta \geq 0$, ισχύει:

$$\sqrt{a\beta} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta}$$

(β) Για κάθε $a \geq 0$, $\beta > 0$, ισχύει:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{\beta}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\beta}}$$

Ιδιότητες ριζών πραγματικού αριθμού

Με βάση τον ορισμό της νιοστής ρίζας και των ιδιοτήτων των δυνάμεων, μπορούμε να αποδείξουμε βασικές ιδιότητες που ισχύουν για τις νιοστές ρίζες.

Ιδιότητα 1

Ισχύει ότι

$$(\sqrt[n]{a})^n = a,$$

για κάθε $a \geq 0$ και n θετικός ακέραιος.

Απόδειξη

Θέτουμε $\sqrt[n]{a} = x$. Από τον ορισμό, έχουμε ότι:

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$$

Έτσι, προκύπτει ότι $(\sqrt[n]{a})^n = x^n = a$.

Για παράδειγμα, έχουμε ότι $(\sqrt[5]{7})^5 = 7$.

Ιδιότητα 2

Ισχύει ότι

$$\sqrt[n]{a\beta} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\beta},$$

για κάθε $a, \beta \geq 0$ και n θετικός ακέραιος.

Απόδειξη

Από τις ιδιότητες των δυνάμεων, ισχύει ότι:

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\beta})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{\beta})^n = a\beta$$

Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας, προκύπτει ότι:

$$\sqrt[n]{a \cdot \beta} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\beta}$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι:

- $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{10}$
- $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{16 \cdot 2} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2} = 2 \sqrt[4]{2}$

Ιδιότητα 3

Ισχύει ότι

$$\sqrt[n]{\frac{a}{\beta}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{\beta}},$$

για κάθε $a \geq 0, \beta > 0$ και n θετικός ακέραιος.

Απόδειξη

Από τις ιδιότητες των δυνάμεων, ισχύει ότι:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{\beta}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{\beta})^n} = \frac{a}{\beta}$$

Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας, προκύπτει ότι:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{a}{\beta}}$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι:

- $\sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{32 \cdot 2} = \sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2$
- Για $\beta \neq 0$, $\sqrt[5]{\frac{100000}{\beta^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{100000}}{\sqrt[5]{\beta^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{10^5}}{\sqrt[5]{(\beta^2)^5}} = \frac{10}{\beta^2}$
- $\sqrt[3]{\frac{24}{27}} = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{3}}{3}$

Τις πιο πάνω ιδιότητες μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε, για να γράψουμε ριζικά σε απλούστερη μορφή.

Για παράδειγμα, έχουμε:

- $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
- $\sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$
- $\sqrt{12} + \sqrt{27} = \sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

Ιδιότητα 4

Ισχύει ότι

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \sqrt[\mu\nu]{a}$$

για κάθε $a \geq 0$ και μ, ν θετικοί ακέραιοι.

Απόδειξη

Από τις ιδιότητες των δυνάμεων, ισχύει ότι:

$$\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}}\right)^{\mu\nu} = \left[\left(\sqrt[\nu]{a}\right)^\mu\right]^\nu = \left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\nu\mu} = a$$

Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας, προκύπτει ότι:

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \sqrt[\mu\nu]{a}$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι:

- $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$
- $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} = \sqrt[8]{3}$

Ιδιότητα 5

Ισχύει ότι

$$\sqrt[\nu\rho]{a^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{a^\mu}$$

για κάθε $a \geq 0$ και μ, ν, ρ θετικοί ακέραιοι.

Απόδειξη

Με βάση την ιδιότητα 4, έχουμε ότι:

$$\sqrt[\nu\rho]{a^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{(a^\mu)^\rho}} = \sqrt[\nu]{a^\mu}$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι $\sqrt[10]{3^5} = \sqrt[2 \cdot 5]{3^5} = \sqrt{3}$.

Την πιο πάνω ιδιότητα μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε, για να γράψουμε ριζικά σε απλούστερη μορφή.

Για παράδειγμα, έχουμε ότι:

$$\sqrt[8]{5^{12}} = {}^{2 \cdot 4}\sqrt{5^{3 \cdot 4}} = \sqrt{5^3}$$

Παράδειγμα 1

Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt{2^{14}}$ (β) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$ (γ) $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}}$ (δ) $\sqrt{50}$

Λύση

(α) $\sqrt{2^{14}} = \sqrt{(2^7)^2} = 2^7$

(β) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5 \cdot 25} = \sqrt[3]{125} = 5$

(γ) $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = \sqrt{100} = 10$

(δ) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2}$

Παράδειγμα 2

Να γράψετε τα πιο κάτω ριζικά στην πιο απλή τους μορφή:

(α) $\sqrt{20}$ (β) $\sqrt[4]{2^5}$
(γ) $\sqrt[3]{5^5 \cdot 2^7}$ (δ) $\sqrt[5]{a^{15} \beta^7 \gamma^3}$, όπου $a, \beta, \gamma > 0$

Λύση

(α) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

(β) $\sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$

(γ) $\sqrt[3]{5^5 \cdot 2^7} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5^2 \cdot 2^6 \cdot 2} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{5^2 \cdot 2} = 5 \cdot 2^2 \cdot \sqrt[3]{50} = 20\sqrt[3]{50}$

(δ) $\sqrt[5]{a^{15} \cdot \beta^7 \cdot \gamma^3} = \sqrt[5]{a^{15} \cdot \beta^5 \cdot \beta^2 \cdot \gamma^3} = \sqrt[5]{(a^3)^5} \cdot \sqrt[5]{\beta^5} \cdot \sqrt[5]{\beta^2 \gamma^3} = a^3 \beta \cdot \sqrt[5]{\beta^2 \gamma^3}$

Παράδειγμα 3

Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\sqrt{50} - \sqrt{2}$ (β) $(5 - \sqrt{x})^2$, $x \geq 0$

(γ) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{5})(\sqrt{3} - 4\sqrt{5})$ (δ) $(7 - \sqrt{3})(7 + \sqrt{3})$

Λύση

$$(\alpha) \sqrt{50} - \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} = 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$(\beta) (5 - \sqrt{x})^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 = 25 + x - 10\sqrt{x}$$

$$(\gamma) (\sqrt{3} + 2\sqrt{5})(\sqrt{3} - 4\sqrt{5}) = 3 - 4\sqrt{15} + 2\sqrt{15} - 8 \cdot 5 = -37 - 2\sqrt{15}$$

$$(\delta) (7 - \sqrt{3})(7 + \sqrt{3}) = 7^2 - (\sqrt{3})^2 = 49 - 3 = 46$$

Παράδειγμα 4

Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$A = 4\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{200}$$

μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$(\alpha) a\sqrt{\beta}, \text{ με } a, \beta \in \mathbb{N}$$

$$(\beta) \sqrt{\gamma}, \gamma \in \mathbb{N}$$

Λύση

$$(\alpha) A = 4\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{200} = 4\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{100 \cdot 2} \\ = 12\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 7\sqrt{2} \quad (a = 7, \beta = 2)$$

(β) Από το (α) ερώτημα, έχουμε:

$$A = 7\sqrt{2} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98} \quad (\gamma = 98)$$

Παράδειγμα 5

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(\alpha) \sqrt{5} \cdot \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

$$(\beta) \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{4}}$$

$$(\gamma) \sqrt[3]{\sqrt{8}}$$

$$(\delta) \sqrt[6]{4x^4} \cdot \sqrt[6]{16x^2}, \quad x \geq 0$$

Λύση

$$(\alpha) \sqrt{5} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{5x}$$

$$(\beta) \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{4}} = \sqrt[4]{\frac{8}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

$$(\gamma) \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

$$(\delta) \sqrt[6]{4x^4} \cdot \sqrt[6]{16x^2} = \sqrt[6]{64x^6} = 2x$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες:

(α) $\sqrt{4 + 9 + 6^2}$

(β) $\sqrt{10^2 - 8^2}$

(γ) $\sqrt{(4 + \sqrt{5})^2}$

(δ) $\sqrt[3]{108:4}$

(ε) $\sqrt[4]{(\sqrt{6} - \sqrt{7})^4}$

(στ) $\sqrt[5]{16: \frac{1}{\sqrt{2}}}$

2. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt[3]{8x^3}, x > 0$

(β) $\sqrt{4x^4y^{14}}$

(γ) $\sqrt[4]{-16a^4}, a > 0$

(δ) $\sqrt[5]{2y} \cdot \sqrt[5]{8y^3} \cdot \sqrt[5]{\frac{2y}{27}}, y > 0$

3. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$

(β) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{128}$

(γ) $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{2}$

(δ) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}, a \geq 0$

(ε) $\sqrt[6]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^{10}}, x \geq 0$

(στ) $\sqrt{200} \cdot \sqrt{2} : \sqrt[5]{32}$

4. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

| | | |
|------|---|---------------|
| (α) | $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) | $\sqrt{90} = 9\sqrt{10}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) | $\sqrt[n]{x} \div \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}, (x, y > 0, n \text{ φυσικός})$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) | $\sqrt{3} + \sqrt{7} = \sqrt{10}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ε) | $\sqrt{32} \div \sqrt{2} = 4$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (στ) | $\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 = 7$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ζ) | $\sqrt{2^2 \cdot 5^4} = 100$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (η) | $\sqrt{12} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

5. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt[5]{64}$

(β) $\sqrt{18a^5}, a > 0$

(γ) $\sqrt[4]{\sqrt{x^{24}}}, x \geq 0$

(δ) $\sqrt[3]{16a^4}, a \geq 0$

(ε) $\sqrt{9a^2\beta^3\gamma^5}, a, \beta, \gamma \geq 0$

(στ) $\sqrt[3]{\frac{16}{x^6}}, x > 0$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{5}$

(β) $(2\sqrt{75} + 3\sqrt{48} - 9\sqrt{3} + \sqrt{27}) : \sqrt{27}$

(γ) $\sqrt{2 + \sqrt[3]{2^5 - 5} + \sqrt{121}}$

(δ) $\sqrt[3]{\sqrt{a^7 \beta^{18}}}$, $a, \beta > 0$

7. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{6}}$

(β) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}$

(γ) $\sqrt[40]{a^{16}}$, $a > 0$

(δ) $\sqrt{(7 + \sqrt{13})} \cdot \sqrt{(7 - \sqrt{13})}$

(ε) $(2\sqrt{3} + 3)^2$

(στ) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{16}}$

(ζ) $\sqrt{x^2 + 9 - 6\sqrt{x}}$, $x > 3$

8. Αν $x = 1 + \sqrt{2}$ και $y = 1 - \sqrt{2}$, να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $x + y$

(β) $x^2 - y^2$

(γ) xy

(δ) $x^2 + y^2$

9. Να δείξετε ότι η παράσταση $A = \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{320}$ μπορεί να πάρει τη μορφή:

(α) $a\sqrt[3]{\beta}$, με $a, \beta \in \mathbb{N}$

(β) $\sqrt[3]{\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{N}$.

10. Αν $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, να δείξετε ότι $\varphi^2 = \varphi + 1$.

11. Να αποδείξετε ότι ο $(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}})^2$ είναι ρητός, αν ο αριθμός a είναι θετικός ρητός.

12. Οι δύο κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου έχουν μήκη $(4 + \sqrt{2})$ και $(4 - \sqrt{2})$. Να αποδείξετε ότι το μήκος της υποτείνουσας του είναι φυσικός αριθμός.

1.3 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΡΗΤΟ ΕΚΘΕΤΗ

Διερεύνηση

Από τον ορισμό της ρίζας έχουμε για $x > 0, y > 0$ ότι:

$$x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$

Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω πρόταση, να συμπληρώσετε τα πιο κάτω και να αναφέρετε το συμπέρασμα σας.

$$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \dots \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{2}} = \dots$$

$$\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \dots \Rightarrow 5^{\frac{1}{3}} = \dots$$

Έχουμε ότι:

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a \Leftrightarrow a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad a > 0$$

Με ανάλογο τρόπο, έχουμε ότι:

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a \Leftrightarrow a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, \quad a > 0$$

Πρόταση

Για $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ και $v \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$a^{\frac{1}{v}} = \sqrt[v]{a}$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας μη αρνητικού πραγματικού αριθμού, παίρνουμε ότι:

$$\left(a^{\frac{1}{v}}\right)^v = a \Leftrightarrow a^{\frac{1}{v}} = \sqrt[v]{a}$$

Για παράδειγμα, έχουμε:

- $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$
- $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
- $11^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{11}$

Τα πιο πάνω μπορούμε να τα αντιμετωπίσουμε και με διαφορετικό τρόπο στην περίπτωση που η βάση γράφεται ως δύναμη με εκθέτη φυσικό αριθμό.

Για παράδειγμα, έχουμε:

- $9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3^1 = 3$
- $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 2^1 = 2$

Γενικά, αν ο εκθέτης μιας δύναμης είναι ο ρητός αριθμός

$$\frac{\mu}{\nu}, \mu, \nu \in \mathbb{Z}, \nu > 0$$

και η βάση είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός a , ($a > 0$), τότε η παράσταση της μορφής

$$a^{\frac{\mu}{\nu}}$$

ονομάζεται **δύναμη με ρητό εκθέτη**.

Τον αριθμό $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ μπορούμε να τον δούμε με δύο διαφορετικούς τρόπους

$$\begin{cases} a^{\frac{\mu}{\nu}} = (a^{\mu})^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}} \\ a^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(a^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu} = (\sqrt[\nu]{a})^{\mu} \end{cases}$$

Πρόταση

Για $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$, $\nu > 0$ ισχύει:

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}} = (\sqrt[\nu]{a})^{\mu}$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας μη αρνητικού πραγματικού αριθμού, παίρνουμε ότι:

$$\left(a^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu} = a^{\mu} \Leftrightarrow a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$$

Παρατηρήσεις

- Αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε ισχύει:

$$0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$$

- Για κάθε φυσικό ν και $a > 0$, ισχύει:

$$a^{-\frac{1}{\nu}} = (a^{-1})^{\frac{1}{\nu}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{a}}$$

- Γενικά, όταν $a > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, ισχύει ότι:

$$a^{-\frac{\mu}{\nu}} = (a^{-1})^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{a^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{a^{\mu}}}$$

Παράδειγμα1

Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $4^{\frac{1}{2}}$

(β) $9^{-\frac{1}{2}}$

(γ) $16^{\frac{3}{4}}$

Λύση

$$(\alpha) \quad 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$(\beta) \quad 9^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$(\gamma) \quad 16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

$$(\alpha) \quad 3^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{12}$$

$$(\beta) \quad 2^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{2}$$

$$(\gamma) \quad \sqrt{5} + 5^{\frac{3}{2}}$$

Λύση

$$(\alpha) \quad 3^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$$

$$(\beta) \quad 2^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{4}{3}} : 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$$

$$(\gamma) \quad \sqrt{5} + 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5} + \sqrt{5^3} = \sqrt{5} + \sqrt{5^2 \cdot 5} = \sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

Παράδειγμα 3

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

$$(\alpha) \quad x^{\frac{1}{2}} = 3, \quad x \geq 0$$

$$(\beta) \quad x^{\frac{2}{3}} = 9, \quad x \geq 0$$

$$(\gamma) \quad y^{-\frac{3}{2}} = 8, \quad y > 0$$

Λύση

(α) Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στη δύναμη 2, ώστε ο εκθέτης του x να γίνει 1. Για $x \geq 0$, έχουμε:

$$x^{\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x = 3^2 \Leftrightarrow x = 9$$

(β) Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στην $\frac{3}{2}$, ώστε ο εκθέτης του x να γίνει 1. Για $x \geq 0$, έχουμε:

$$x^{\frac{2}{3}} = 9 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = (3^2)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = 27$$

(γ) Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στην $-\frac{2}{3}$, ώστε ο εκθέτης του y να γίνει 1. Για $y > 0$, έχουμε:

$$y^{-\frac{3}{2}} = 8 \Leftrightarrow \left(y^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = 8^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow y = 8^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Δραστηριότητες

1. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω ριζικά σε δύναμη με ρητό εκθέτη:

(α) $\sqrt[3]{5^2}$

(β) $\sqrt{3}$

(γ) $\sqrt[5]{1000}$

2. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $16^{\frac{1}{2}}$

(β) $8^{\frac{1}{3}}$

(γ) $81^{\frac{1}{4}}$

(δ) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$

(ε) $9^{-\frac{1}{2}}$

(στ) $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{2}{5}}$

(ζ) $\sqrt{\left(\frac{81}{64}\right)^3}$

(η) $\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}}$

(θ) $8^{\frac{10}{6}}$

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = 2^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{2} + 3^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{27}$ είναι φυσικός αριθμός.

4. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

| | | |
|------|--|---------------|
| (α) | $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) | $4^{\frac{1}{2}} = 2$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) | $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) | $\sqrt[3]{5} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ε) | Η λύση της εξίσωσης $x^{\frac{1}{2}} = 3$, $x > 0$ είναι ο αριθμός $\sqrt{3}$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (στ) | Η εξίσωση $x^3 = -27$ είναι αδύνατη. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ζ) | $\sqrt[3]{(-8)^2} = (-8)^{\frac{2}{3}}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

5. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $5^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5}$

(β) $\sqrt[5]{2^{18}} \div 2^{\frac{1}{5}}$

(γ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot 24^{\frac{1}{3}}$

(δ) $2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{5}{2}}$

6. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για πραγματικές τιμές του x :

(α) $x^{\frac{1}{2}} = 5, x \geq 0$

(β) $x^{\frac{1}{3}} = 2, x > 0$

(γ) $1 + x^{\frac{2}{3}} = 5, x \geq 0$

(δ) $5(x + 1)^{\frac{1}{3}} = 20, x \geq -1$

7. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για πραγματικές τιμές του x :

(α) $x^{-\frac{1}{2}} = 4, x \geq 0$

(β) $x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{27}, x > 0$

8. Η απόσταση s (σε m) που διανύει ένα αυτοκίνητο το οποίο επιταχύνει δίνεται από τη σχέση $s(t) = 10t^{\frac{3}{2}}$, όπου t είναι ο χρόνος σε sec. Να υπολογίσετε τον χρόνο που κινήθηκε το αυτοκίνητο, αν η απόσταση που διάνυσε είναι 640 m.

9. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab}, \quad a, b \geq 0$$

1.4 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΑΡΡΗΤΟΥ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ ΣΕ ΡΗΤΟ

Διερεύνηση

Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να ισχύουν οι ισότητες στα πιο κάτω:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{(\dots)}{5}, \quad \frac{1}{3 - \sqrt{7}} = \frac{3 + \sqrt{7}}{(\dots \dots)}$$

Πώς μπορούμε ένα κλάσμα με άρρητο παρονομαστή να το μετατρέψουμε σε ισοδύναμό του με ρητό παρονομαστή; Πώς θα μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρονομαστή;

$$\frac{1}{\sqrt{7}} = \quad , \quad \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} =$$

Πολλές φορές χρειάζεται να μετατρέψουμε ένα κλάσμα με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμο με παρονομαστή ρητό. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό**. Ο λόγος που εφαρμόζουμε αυτή τη διαδικασία είναι το γεγονός ότι ο παρονομαστής ενός κλάσματος εκφράζει «σε πόσα μέρη χωρίζεται ο αριθμητής». Άρα, θέλουμε ο παρονομαστής να είναι φυσικός αριθμός.

Για παράδειγμα, έχουμε:

$$(α) \quad \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $\sqrt{2}$.

$$(β) \quad \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τη παράσταση $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $(a - \beta)(a + \beta) = a^2 - \beta^2$, μετατρέπουμε τον παρονομαστή από άρρητο σε ρητό.

Γενικά, όταν έχουμε την άρρητη παράσταση $A = a - \beta$, όπου a, β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε πολλαπλασιάζουμε με την άρρητη παράσταση $B = a + \beta$. Έτσι, μέσα από την εφαρμογή της ταυτότητας

$$(a - \beta)(a + \beta) = a^2 - \beta^2$$

οδηγούμαστε στη ρητή παράσταση $A \cdot B = a^2 - \beta^2$.

Οι δύο άρρητες παραστάσεις A και B λέγονται **συζυγείς**.

Στο παράδειγμα (β) πιο πάνω, η παράσταση $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ είναι η συζυγής της παράστασης $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

Παρατήρηση

- Αν a, β είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί και κ, λ είναι ρητοί πραγματικοί αριθμοί, τότε οι παραστάσεις A και B στον πιο κάτω πίνακα είναι συζυγείς.

| A | B | $A \cdot B$ |
|--|--|------------------------------|
| $\sqrt{a} + \sqrt{\beta}$ | $\sqrt{a} - \sqrt{\beta}$ | $a - \beta$ |
| $\sqrt{a} + \beta$ | $\sqrt{a} - \beta$ | $a - \beta^2$ |
| $a + \sqrt{\beta}$ | $a - \sqrt{\beta}$ | $a^2 - \beta$ |
| $\kappa\sqrt{\beta} + \lambda\sqrt{a}$ | $\kappa\sqrt{\beta} - \lambda\sqrt{a}$ | $\kappa^2\beta - \lambda^2a$ |

Παράδειγμα 1

Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

(α) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

(β) $\frac{2}{\sqrt{14}}$

(γ) $\frac{6}{3\sqrt{2}}$

Λύση

(α) $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

(β) $\frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{2 \cdot \sqrt{14}}{(\sqrt{14})^2} = \frac{2\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{7}$

(γ) $\frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{6\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2}$

Παράδειγμα 2

Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

(α) $\frac{5}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

(β) $\frac{3}{1 - \sqrt{2}}$

(γ) $\frac{2}{4 + \sqrt{3}} + \frac{2}{4 - \sqrt{3}}$

Λύση

$$(\alpha) \frac{5}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{5(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{1} = 5(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$(\beta) \frac{3}{1 - \sqrt{2}} = \frac{3}{1 - \sqrt{2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{3(1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = \frac{3(1 + \sqrt{2})}{1^2 - (\sqrt{2})^2}$$
$$= \frac{3(1 + \sqrt{2})}{1 - 2} = -3(1 + \sqrt{2})$$

$$(\gamma) \frac{2}{4 + \sqrt{3}} + \frac{2}{4 - \sqrt{3}} = \frac{2(4 - \sqrt{3}) + 2(4 + \sqrt{3})}{(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})} = \frac{8 - 2\sqrt{3} + 8 + 2\sqrt{3}}{4^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{16}{16 - 3} = \frac{16}{13}$$

Δραστηριότητες

- Δίνεται ο αριθμός $x = \sqrt{7} - \sqrt{2}$.
 (α) Να γράψετε τον αριθμό y , ο οποίος είναι συζυγής αριθμός με τον x .
 (β) Να δείξετε ότι το γινόμενο xy είναι ακέραιος αριθμός.
- Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

| | | |
|-----|---|---------------|
| (α) | Ο αριθμός $3 + \sqrt{2}$ έχει συζυγή τον αριθμό $\sqrt{3} + 2$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) | Ένα κλάσμα με ρητό παρονομαστή, το οποίο είναι ισοδύναμο με το $\frac{2}{7\sqrt{6}}$, είναι και το $\frac{\sqrt{6}}{21}$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) | Οι αριθμοί $(\sqrt{15} - \sqrt{13})$ και $(\frac{2}{\sqrt{15} + \sqrt{13}})$ είναι ίσοι. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) | Οι αριθμοί $(\sqrt{17} + 4)$ και $(\sqrt{17} - 4)$ είναι αντίστροφοι αριθμοί. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ε) | Αν $x \geq 0$, τότε ισχύει ότι: $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2} = \sqrt{x} - 2$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

- Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

| | |
|---------------------------|---|
| (α) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ | (β) $\frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}}$ |
| (γ) $\frac{20}{\sqrt{5}}$ | (δ) $\frac{9}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}$ |
| (ε) $\sqrt{\frac{5}{6}}$ | |

- Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

| | |
|---|--|
| (α) $\frac{5}{1 + \sqrt{2}}$ | (β) $\frac{3}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$ |
| (γ) $\frac{2}{\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}}}$ | (δ) $\frac{9}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}$ |
| (ε) $\frac{1-a}{1-\sqrt{a}}, a > 0, a \neq 1$ | $\frac{(x-y)^2}{x+y+2\sqrt{xy}}, x, y > 0, x \neq y$ |

5. Να δείξετε ότι το άθροισμα

$$A = \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{16}{\sqrt{8}}$$

μπορεί να γραφεί στην μορφή $k\sqrt{2}$, όπου το k είναι ένας φυσικός αριθμός.

6. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω αθροίσματα:

(α) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{12 - \sqrt{2}}{2}$

(β) $\frac{1}{3 - \sqrt{5}} + \frac{1}{3 + \sqrt{5}}$

(γ) $\frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$

(δ) $\frac{1}{\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

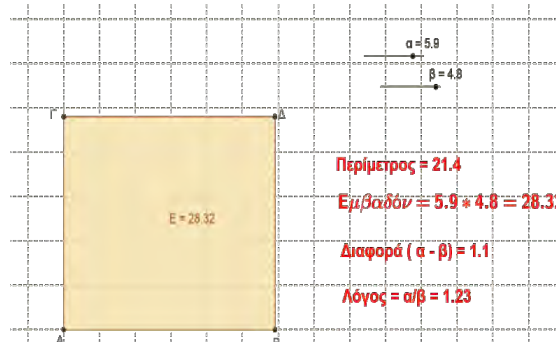
7. Να δείξετε ότι:

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} + \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 4$$

1.5 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «Alyk_En01_Anisotita.ggb».



Οι δρομείς «α» και «β», όπου $1 \leq \alpha \leq 6$, $2 \leq \beta \leq 5$, μεταβάλλουν τις διαστάσεις του ορθογώνιου παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

- Να δώσετε διάφορες τιμές στα α και β , για να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

| α | β | $\Pi = 2(\alpha + \beta)$ | $E = \alpha\beta$ |
|----------|---------|---------------------------|-------------------|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

- Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή:
(α) της περιμέτρου (Π) του ορθογώνιου παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$
(β) του εμβαδού (E) του ορθογώνιου παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
- Τι παρατηρείτε;
- Αν $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $1 \leq x \leq 6$, $2 \leq y \leq 5$, να υπολογίσετε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή των $x - y$ και $\frac{x}{y}$.
- Τι παρατηρείτε;

Έχουμε μάθει...

Έχουμε μάθει στο Γυμνάσιο να επιλύουμε ανισώσεις α' βαθμού, οι οποίες στηρίχθηκαν σε βασικές ιδιότητες της διάταξης των πραγματικών αριθμών. Συγκεκριμένα, είδαμε πως κατά την επίλυση μιας ανίσωσης, γίνεται χρήση ιδιοτήτων των ανισοτήτων όπως:

- $a > b \Leftrightarrow a + \gamma > b + \gamma$
(Μπορούμε να προσθέσουμε και στα μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό.)
Για παράδειγμα, έχουμε ότι αν $x - 2 > 8 \Rightarrow x - 2 + 2 > 8 + 2 \Rightarrow x > 10$.
- $a > b \Leftrightarrow a - \gamma > b - \gamma$
(Μπορούμε να αφαιρέσουμε από τα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό.)
Για παράδειγμα, έχουμε ότι αν $x + 2 > 8 \Rightarrow x + 2 - 2 > 8 - 2 \Rightarrow x > 6$.
- $a > b \Leftrightarrow a\gamma > b\gamma$ ή $\frac{a}{\gamma} > \frac{b}{\gamma}$, όταν $\gamma > 0$.
(Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, χωρίς να αλλάξει η φορά της ανισότητας.)
Για παράδειγμα, έχουμε ότι αν $2x > 8 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2x > \frac{1}{2} \cdot 8 \Rightarrow x > 4$.
- $a > b \Leftrightarrow a\gamma < b\gamma$ ή $\frac{a}{\gamma} < \frac{b}{\gamma}$, όταν $\gamma < 0$.
(Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, αρκεί να αλλάξουμε τη φορά της ανισότητας.)
Για παράδειγμα, έχουμε ότι αν $-2x > 8 \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot (-2x) < \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 8 \Rightarrow x < -4$.

Στο σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών, το υποσύνολο του \mathbb{R}^+ είναι οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε βασικές ιδιότητες διάταξης που ισχύουν στους πραγματικούς αριθμούς. Όλες οι ιδιότητες διάταξης είναι συνέπεια τριών αξιωμάτων.

Τα **τρία αξιώματα** που χρησιμοποιούμε είναι τα ακόλουθα:

1. Για κάθε δύο θετικούς αριθμούς, έχουμε ότι και το άθροισμα τους είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή, αν:

$$x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (x + y) \in \mathbb{R}^+$$

2. Για κάθε δύο θετικούς αριθμούς έχουμε ότι και το γινόμενο τους είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή, αν:

$$x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (xy) \in \mathbb{R}^+$$

3. Αν μας δοθεί ένας πραγματικός αριθμός, τότε είτε είναι θετικός, είτε αρνητικός, είτε μηδέν. Δηλαδή, αν:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R}^+ \text{ ή } (-x) \in \mathbb{R}^+ \text{ ή } x = 0$$

Ιδιότητες διάταξης πραγματικών αριθμών

Ιδιότητα 1 (Μεταβατική Ιδιότητα)

Αν $x > y$ και $y > z$, τότε $x > z$, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Αν $x > y$, τότε $x - y > 0$ και αν $y > z$, τότε $y - z > 0$.

Ως άθροισμα θετικών αριθμών (πρώτο αξίωμα), έχουμε ότι:

$$(x - y) + (y - z) > 0 \Rightarrow x - z > 0 \Rightarrow x > z$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι αν $A > 6$ και $6 > B$, τότε $A > B$.

Ιδιότητα 2

Αν $a > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $a + \gamma > \beta + \delta$ για κάθε $a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Αν $a > \beta$, τότε $a - \beta > 0$ και αν $\gamma > \delta$, τότε $\gamma - \delta > 0$.

Ως άθροισμα θετικών αριθμών (πρώτο αξίωμα), έχουμε ότι:

$$(a - \beta) + (\gamma - \delta) > 0 \Rightarrow a + \gamma > \beta + \delta$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι:

- από τις ανισώσεις $2 > 1$ και $1 > -2$, παίρνουμε ότι $2 + 1 > 1 + (-2)$
- από τις ανισώσεις $2 > 1$ και $1 > -2$, δεν παίρνουμε ότι $2 - 1 > 1 - (-2)$.

Ιδιότητα 3

Αν $a > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$, τότε $a\gamma > \beta\delta$.

Απόδειξη

Αν $a > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$, τότε $a\gamma > \beta\gamma$ και $\beta\gamma > \beta\delta$, αφού $\beta, \gamma > 0$.

Άρα:

$$a\gamma > \beta\delta \quad (\text{Μεταβατική ιδιότητα})$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι:

- από τις ανισώσεις $3 > 2$ και $1 > \frac{1}{5}$, παίρνουμε ότι $3 \cdot 1 > 2 \cdot \frac{1}{5}$.
- από τις ανισώσεις $3 > 2$ και $1 > \frac{1}{5}$, δεν παίρνουμε ότι $\frac{3}{1} > \frac{2}{\frac{1}{5}}$.

Ιδιότητα 4

Ισχύει ότι $a^2 \geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό a .

Απόδειξη

Αν $a \geq 0$, τότε $a \cdot a \geq a \cdot 0 = 0$. Άρα, $a^2 \geq 0$.

Αν $a < 0 \Rightarrow -a > 0$. Άρα, $(-a) \cdot (-a) > 0 \Leftrightarrow a^2 > 0$.

Για παράδειγμα, έχουμε ότι $(2x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ιδιότητα 5

Αν a, β είναι ομόσημοι, τότε:

$$a \leq \beta \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{\beta}$$

Απόδειξη

Αφού a, β είναι ομόσημοι, τότε ισχύει $a\beta > 0$. Άρα:

$$a \leq \beta \Leftrightarrow \frac{a}{a\beta} \leq \frac{\beta}{a\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{a}$$

(Στο ευθύ διαιρούμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με τον θετικό αριθμό $a\beta$, ενώ στο αντίστροφο πολλαπλασιάζουμε με τον θετικό αριθμό $a\beta$.)

Για παράδειγμα, έχουμε ότι:

- $5 < 6 \Leftrightarrow \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$
- $-1 < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 > -2$

Ιδιότητα 6

Αν $a, \beta > 0, n \in \mathbb{N}$, τότε:

$$a > \beta \Leftrightarrow a^n > \beta^n$$

Απόδειξη

Ευθύ (\Rightarrow)

Αν $a > \beta, a > \beta, \dots, a > \beta$ (n φορές), τότε:

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ φορές}} > \underbrace{\beta \cdot \beta \cdots \beta}_{n \text{ φορές}} \Leftrightarrow a^n > \beta^n \quad (\text{Με χρήση της ιδιότητας 3})$$

Αντίστροφο (\Leftarrow)

Αν $a^n > \beta^n$, τότε διακρίνουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

$$a < \beta, a = \beta, a > \beta$$

- Υποθέτουμε ότι $a < \beta$. Τότε, σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη, θα έπρεπε να ισχύει $a^v < \beta^v$, το οποίο δεν ισχύει (άτοπο).
- Υποθέτουμε ότι $a = \beta$. Τότε, θα έπρεπε να ισχύει $a^v = \beta^v$, το οποίο δεν ισχύει (άτοπο).

Άρα, ισχύει ότι $a > \beta$.

Σημείωση

Για την παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο της **εις άτοπον απαγωγής** (απαγωγή σε άτοπο). Στη μέθοδο αυτή, όταν θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση, υποθέτουμε ότι ισχύει η αντίθετή της. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας γνωστές ιδιότητες καταλήγουμε σε μια πρόταση, η οποία δεν ισχύει (άτοπο). Επομένως, θα ισχύει η πρόταση που θέλαμε να αποδείξουμε.

Ιδιότητα 7

Αν $a, \beta \geq 0$ και v θετικός ακέραιος, τότε:

$$a < \beta \Leftrightarrow \sqrt[v]{a} < \sqrt[v]{\beta}$$

Απόδειξη

Με χρήση της ιδιότητας 6, έχουμε ότι:

$$\sqrt[v]{a} < \sqrt[v]{\beta} \Leftrightarrow (\sqrt[v]{a})^v < (\sqrt[v]{\beta})^v \Leftrightarrow a < \beta$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι $8 < 27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow 2 < 3$.

Ιδιότητα 8

Αν $a > 1$ και $\mu < v$, όπου μ, v θετικοί ακέραιοι, τότε:

$$\sqrt[\mu]{a} > \sqrt[v]{a}$$

Απόδειξη

Έχουμε ότι

$$\frac{\sqrt[\mu]{a}}{\sqrt[v]{a}} = \frac{\sqrt[\mu v]{a^v}}{\sqrt[\mu v]{a^\mu}} = \sqrt[\mu v]{\frac{a^v}{a^\mu}} = \sqrt[\mu v]{a^{v-\mu}} > 1,$$

αφού $v - \mu > 0$ και $a > 1 \Rightarrow a^{v-\mu} > 1 \Rightarrow \sqrt[\mu v]{a^{v-\mu}} > 1$.

Επομένως:

$$\frac{\sqrt[\mu]{a}}{\sqrt[v]{a}} > 1 \Leftrightarrow \sqrt[\mu]{a} > \sqrt[v]{a}$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι $\sqrt{16} > \sqrt[4]{16}$.

Ιδιότητα 9

Αν $0 < a < 1$ και $\mu < \nu$, όπου μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε:

$$\sqrt[\mu]{a} < \sqrt[\nu]{a}$$

Απόδειξη

Έχουμε ότι:

$$\frac{\sqrt[\mu]{a}}{\sqrt[\nu]{a}} = \frac{\sqrt[\mu\nu]{a^\nu}}{\sqrt[\mu\nu]{a^\mu}} = \sqrt[\nu]{\frac{a^\nu}{a^\mu}} = \sqrt[\nu]{a^{\nu-\mu}} < 1,$$

αφού $\nu - \mu > 0$ και $a < 1 \Rightarrow a^{\nu-\mu} < 1 \Rightarrow \sqrt[\nu]{a^{\nu-\mu}} < 1$.

Επομένως:

$$\frac{\sqrt[\mu]{a}}{\sqrt[\nu]{a}} < 1 \Leftrightarrow \sqrt[\mu]{a} < \sqrt[\nu]{a}$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι $\sqrt{\frac{1}{16}} < \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$.

Παράδειγμα 1

Αν $x_1 < x_2$, να συγκρίνετε τις παραστάσεις:

(α) $3x_1 + 5, 3x_2 + 5$

(β) $\frac{-2x_2 + 3}{7}, \frac{-2x_1 + 3}{7}$

Λύση

Για να συγκρίνουμε τις πιο πάνω παραστάσεις, παίρνουμε τη δεδομένη σχέση $x_1 < x_2$ και εφαρμόζουμε ιδιότητες των ανισοτικών σχέσεων. Έχουμε ότι:

(α) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3x_1 < 3x_2$ ($a < b \Leftrightarrow ay < by, \gamma > 0$)
 $\Leftrightarrow 3x_1 + 5 < 3x_2 + 5$ ($a < b \Leftrightarrow a + \gamma < b + \gamma$)

(β) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -2x_1 > -2x_2$ ($a < b \Leftrightarrow ay > by, \gamma < 0$)
 $\Leftrightarrow -2x_1 + 3 > -2x_2 + 3$ ($a > b \Leftrightarrow a + \gamma > b + \gamma$)
 $\Leftrightarrow \frac{-2x_1 + 3}{7} > \frac{-2x_2 + 3}{7}$ ($a < b \Leftrightarrow \frac{a}{\gamma} < \frac{b}{\gamma}, \gamma > 0$)

Παράδειγμα 2

Αν $3 < x < 4$ και $-5 < y < -3$, να βρείτε το μικρότερο δυνατό διάστημα, στο οποίο ανήκουν οι πραγματικοί αριθμοί:

(α) $x + y$

(β) $x - y$

(γ) xy

(δ) $\frac{x}{y}$

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3 < x < 4 \\ -5 < y < -3 \end{cases} &\Rightarrow 3 + (-5) < x + y < 4 + (-3) && (a > \beta, \gamma > \delta \Rightarrow a + \gamma > \beta + \delta) \\ &\Rightarrow -2 < x + y < 1 \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3 < x < 4 \\ -5 < y < -3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3 < x < 4 \\ 3 < -y < 5 \end{cases} && (a < \beta \Leftrightarrow a\gamma > \beta\gamma, \gamma < 0) \\ &\Rightarrow 3 + 3 < x + (-y) < 4 + 5 && (a > \beta, \gamma > \delta \Rightarrow a + \gamma > \beta + \delta) \\ &\Rightarrow 6 < x - y < 9 \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Αν το κάθε μέρος της ανισότητας $a < x < \beta$ πολλαπλασιαστεί με (-1) , τότε η ανισότητα μετατρέπεται σε $-\beta < -x < -a$.

(γ) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3 < x < 4 \\ -5 < y < -3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3 < x < 4 \\ 3 < -y < 5 \end{cases} && (a < \beta \Leftrightarrow a\gamma > \beta\gamma, \gamma < 0) \\ &\Rightarrow 3 \cdot 3 < x(-y) < 4 \cdot 5 && (a > \beta > 0, \gamma > \delta > 0 \Rightarrow a\gamma > \beta\delta) \\ &\Rightarrow 9 < x(-y) < 20 \\ &\Rightarrow 9 < -xy < 20 \\ &\Rightarrow -20 < xy < -9 && (a < \beta \Leftrightarrow a\gamma > \beta\gamma, \gamma < 0) \end{aligned}$$

(δ) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3 < x < 4 \\ -5 < y < -3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3 < x < 4 \\ 3 < -y < 5 \end{cases} && (a < \beta \Leftrightarrow a\gamma > \beta\gamma, \gamma < 0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} 3 < x < 4 \\ \frac{1}{5} < -\frac{1}{y} < \frac{1}{3} \end{cases} && (a > \beta > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{a}) \\ &\Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{5} < x \left(-\frac{1}{y} \right) < 4 \cdot \frac{1}{3} && (a > \beta > 0, \gamma > \delta > 0 \Rightarrow a\gamma > \beta\delta) \\ &\Rightarrow \frac{3}{5} < -\frac{x}{y} < \frac{4}{3} \\ &\Rightarrow -\frac{4}{3} < \frac{x}{y} < -\frac{3}{5} && (a < \beta \Leftrightarrow a\gamma > \beta\gamma, \gamma < 0) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3

Να ερμηνεύσετε λεκτικά τον αριθμό $\sqrt[3]{20}$ και στη συνέχεια να τον συγκρίνετε με την πέμπτη ρίζα του 30.

Λύση

Ο αριθμός $\sqrt[3]{20}$ είναι ο πραγματικός αριθμός, ο οποίος όταν υψωθεί στη τρίτη δύναμη, τότε θα είναι ίσος με 20. Δηλαδή, αν $x = \sqrt[3]{20}$, τότε $x^3 = 20$.

Παρατηρούμε ότι ο πραγματικός αυτός αριθμός βρίσκεται εντός του διαστήματος $(2, 3)$, αφού ισχύει ότι $2^3 < 20 < 3^3$. Έτσι:

$$2 < \sqrt[3]{20} < 3$$

Η πέμπτη ρίζα του 30 ($\sqrt[5]{30}$) είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός y , με $y^5 = 30$. Παρατηρούμε ότι $1^5 < 30 < 2^5$. Έτσι:

$$1 < \sqrt[5]{30} < 2$$

Επομένως, έχουμε τελικά ότι $\sqrt[5]{30} < \sqrt[3]{20}$.

Παράδειγμα 4

Αν $0 < a < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$a < \sqrt{a\beta} < \beta$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\frac{\sqrt{a\beta}}{a} = \frac{\sqrt{a\beta}}{\sqrt{a^2}} = \sqrt{\frac{a\beta}{a^2}} = \sqrt{\frac{\beta}{a}} > 1,$$

αφού $\frac{\beta}{a} > 1$. Έτσι:

$$\sqrt{a\beta} > a \tag{1}$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$\frac{\sqrt{a\beta}}{\beta} = \frac{\sqrt{a\beta}}{\sqrt{\beta^2}} = \sqrt{\frac{a\beta}{\beta^2}} = \sqrt{\frac{a}{\beta}} < 1,$$

αφού $\frac{a}{\beta} < 1$. Έτσι:

$$\sqrt{a\beta} < \beta \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται το ζητούμενο.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

| | | |
|------|--|---------------|
| (α) | Αν $a > 3$ και $\beta > 2$, τότε $a\beta > 6$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) | Αν $\kappa > 5$ και $\lambda > -2$, τότε $\kappa + \lambda > 1$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) | Αν $a > -3$, τότε $a^2 > 9$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) | Αν $\frac{a}{\beta} > 3$, τότε $a > 3\beta$, $a, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ε) | Αν $a - \beta > 0$ και $a, \beta \in \mathbb{R}^+$, τότε $a^2 - \beta^2 > 0$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (στ) | Αν $a < \beta < 0$, τότε $a^2 < \beta^2$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ζ) | Αν $a^2 > a\beta$, τότε $a > \beta$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (η) | Αν $a > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $a - \gamma > \beta - \delta$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (θ) | Αν $x > y$, τότε $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ ($x, y \geq 0$, ν φυσικός). | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ι) | Αν $0 < a < \beta$, τότε $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{\beta}$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

(α) Αν $a, \beta \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\beta > 0$, τότε:

A. $-a\beta > 0$ **B.** $a - \beta > 0$ **Γ.** $a\beta < 0$ **Δ.** $\frac{a}{\beta} > 0$

(β) Αν $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq -1$, $y \geq 8$, τότε:

A. $xy \leq 8$ **B.** $xy \geq -8$ **Γ.** $x + y \geq 7$ **Δ.** $x - y \leq -9$

(γ) Αν $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$, με $x \geq 4$ και $y \leq -5$, τότε:

A. $xy < 0$ **B.** $\frac{1}{x} \geq 4$ **Γ.** $x + y \leq -1$ **Δ.** $x - y \leq 9$

(δ) Αν $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$, με $x \geq 4$ και $y \leq -5$, τότε:

A. $x^2 \leq 9$ **B.** $y^2 \leq 9$ **Γ.** $x - y \leq 6$ **Δ.** $\frac{1}{x} > 0$

3. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $<$, $=$, $>$, ώστε οι σχέσεις που θα προκύψουν να είναι αληθείς και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας:

(α) $24^{\frac{3}{5}} \dots \dots 15^{\frac{3}{5}}$ (β) $17^{-\frac{3}{5}} \dots \dots 15^{-\frac{3}{5}}$ (γ) $0,7^{\frac{5}{7}} \dots \dots 0,4^{\frac{5}{7}}$

(δ) $0,3^{-\frac{3}{5}} \dots \dots 0,5^{-\frac{3}{5}}$ (ε) $-\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{11}{2}} \dots \dots -\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{11}{2}}$

4. Αν $a = \sqrt[6]{10}$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt[3]{3}$, τότε:
A. $a < \beta < \gamma$ **B.** $a < \gamma < \beta$ **Γ.** $\gamma < a < \beta$ **Δ.** $\beta < \gamma < a$ **Ε.** $\beta < a < \gamma$
5. Να συγκρίνετε τους πιο κάτω αριθμούς, αν ισχύει ότι a, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, με $a < \beta$:
- (α) $A = 10a - 3$, $B = 10\beta - 3$
- (β) $\Gamma = 4 - 3a$, $\Delta = 4 - 3\beta$
- (γ) $E = 2a^2 + 3$, $Z = 2\beta^2 + 3$
- (δ) $H = \frac{5}{a} - 1$, $\theta = \frac{5}{\beta} - 1$
- (ε) $K = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $\Lambda = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$
6. Αν $0 < a < 1$, τότε να αποδείξετε ότι $a^2 < a$.
7. Αν x, y είναι θετικοί ακέραιοι και $x < y$, τότε να διατάξετε τους αριθμούς
 $1, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$
από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.
8. Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 5$, τότε να αποδείξετε ότι:
(α) $3 < x + y < 8$ (β) $4 < 2x + y < 11$ (γ) $-4 < x - y < 1$
9. Αν $x > 2$ και $y > 3$, να αποδείξετε ότι:
(α) $xy > 6$ (β) $(x - 2)(y - 3) > 0$
10. Αν $x > 3$ και $y < 2$, τότε να αποδείξετε ότι $(x - 3)(y - 2) < 0$. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι $xy + 6 < 2x + 3y$.
11. Αν $1 < x < 2$ και $-2 < y < -1$, τότε να βρείτε το μικρότερο διάστημα στο οποίο βρίσκονται οι πραγματικοί αριθμοί:
 $2x + 3y, xy, \frac{x}{y}, -\frac{2x}{3y}$
12. Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει 32 m μήκος και 20 m πλάτος. Αν το λάθος στις μετρήσεις δεν ξεπερνά τα 10 cm για κάθε διάσταση, τότε να υπολογίσετε:
(α) μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η περίμετρος του οικοπέδου
(β) μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται το εμβαδόν του οικοπέδου.

13. Να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα, για να δείξετε ότι δεν ισχύουν οι πιο κάτω προτάσεις:

(α) Αν $a < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε ισχύει:

$$a - \gamma < \beta - \delta, \quad a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

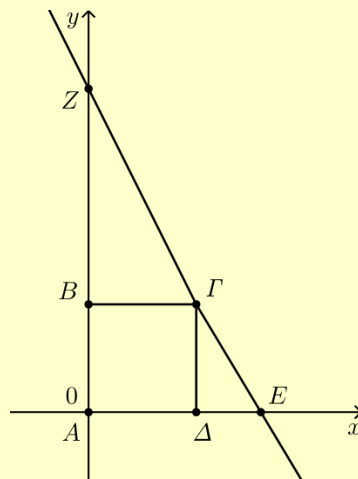
(β) Αν $a < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε ισχύει:

$$\frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\delta}, \quad a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \text{με } a, \gamma \neq 0$$

14. Αν $x < y < \omega$, τότε να αποδείξετε ότι $(x - y)(y - \omega)(\omega - x) > 0$.

15. Να δείξετε ότι $3 < \sqrt[3]{30} < 4$. Στη συνέχεια, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$.

16. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά 5 cm. Πάνω στις ημιευθείες AB και $A\Delta$ παίρνουμε σημεία E και Z , τέτοια ώστε $DE = 3$ cm και $BZ = 10$ cm, αντίστοιχα. Να εξετάσετε κατά πόσο τα σημεία Z, Γ και E είναι συνευθειακά, υπολογίζοντας και συγκρίνοντας τα μήκη των πλευρών $Z\Gamma, \Gamma E$ και ZE .



Περίληψη

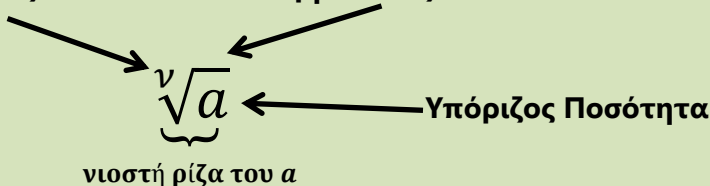
1. Η **νιοστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού a , όπου n θετικός ακέραιος, είναι ο μη αρνητικός αριθμός β , ο οποίος, όταν υψωθεί σε δύναμη με εκθέτη n , δίνει τον αριθμό a .

Συμβολίζεται με $\sqrt[n]{a}$ και ισχύει ότι:

$$\sqrt[n]{a} = \beta \Leftrightarrow \beta^n = a \quad (a \geq 0 \text{ και } \beta \geq 0, n \in \mathbb{N})$$

Δείκτης Ριζικού

Σύμβολο Ριζικού



2. Από τον πιο πάνω ορισμό, και για $a \geq 0$, έχουμε:

- $\sqrt[n]{a} = a$
- $\sqrt[n]{a} = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $\sqrt[n]{1} = 1$
- $\sqrt[n]{a^n} = a$

3. **Διερεύνηση της εξίσωσης $x^n = a$ (n θετικός ακέραιος)**

| | |
|---------|--|
| $a > 0$ | Αν $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ (n περιττός), τότε: $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$ |
| | Αν $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ (n άρτιος), τότε: $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$ ή $x = -\sqrt[n]{a}$ |
| $a < 0$ | Αν $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ (n περιττός), τότε: $x^n = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[n]{ a } = -\sqrt[n]{-a}$ |
| | Αν $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ (n άρτιος), τότε η εξίσωση $x^n = a$ είναι αδύνατη. |
| $a = 0$ | $x^n = a \Leftrightarrow x = 0$ |

4. **Ιδιότητες ριζών**

- $(\sqrt[n]{a})^n = a$, για κάθε $a \geq 0$ και n θετικός ακέραιος.
- $\sqrt[n]{a\beta} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\beta}$, για κάθε $a, \beta \geq 0$ και n θετικός ακέραιος.
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{a}{\beta}}$, για κάθε $a \geq 0, \beta > 0$ και n θετικός ακέραιος.

5. Μια παράσταση της μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος ($\nu > 1$), ονομάζεται **δύναμη με ρητό εκθέτη**.

Ισχύει ότι:

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$$

6. Αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε:

$$0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$$

7. Για κάθε φυσικό ν και $a \geq 0$ ισχύει:

$$a^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a}$$

8. Για κάθε φυσικό ν και $a > 0$ ισχύει:

$$a^{-\frac{1}{\nu}} = (a^{-1})^{\frac{1}{\nu}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{a}}$$

9. Γενικά, όταν $a > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, ισχύει ότι:

$$a^{-\frac{\mu}{\nu}} = (a^{-1})^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{a^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{a^{\mu}}}$$

10. Πολλές φορές χρειάζεται να μετατρέψουμε ένα κλάσμα με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμο με παρονομαστή ρητό. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό**.

Γενικά, όταν έχουμε την άρρητη παράσταση $A = a - \beta$, όπου a, β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε πολλαπλασιάζουμε με την άρρητη παράσταση $B = a + \beta$. Έτσι, μέσα από την εφαρμογή της ταυτότητας

$$(a - \beta)(a + \beta) = a^2 - \beta^2$$

οδηγούμαστε στη ρητή παράσταση $A \cdot B = a^2 - \beta^2$.

Οι δύο άρρητες παραστάσεις A και B λέγονται **συζυγείς**.

Παρατήρηση

- Αν a, β είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί και κ, λ είναι ρητοί πραγματικοί αριθμοί, τότε οι παραστάσεις A και B στον πιο κάτω πίνακα είναι συζυγείς.

| A | B | $A \cdot B$ |
|--|--|------------------------------|
| $\sqrt{a} + \sqrt{\beta}$ | $\sqrt{a} - \sqrt{\beta}$ | $a - \beta$ |
| $\sqrt{a} + \beta$ | $\sqrt{a} - \beta$ | $a - \beta^2$ |
| $a + \sqrt{\beta}$ | $a - \sqrt{\beta}$ | $a^2 - \beta$ |
| $\kappa\sqrt{\beta} + \lambda\sqrt{a}$ | $\kappa\sqrt{\beta} - \lambda\sqrt{a}$ | $\kappa^2\beta - \lambda^2a$ |

11. Ιδιότητες διάταξης πραγματικών αριθμών

- Αν $x > y$ και $y > z$, τότε $x > z$, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- Αν $a > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $a + \gamma > \beta + \delta$ για κάθε $a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.
- Αν $a > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$, τότε $a\gamma > \beta\delta$.
- Ισχύει ότι $a^2 \geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό a .
- Αν a, β είναι ομόσημοι, τότε:

$$a \leq \beta \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{\beta}$$

- Αν $a, \beta > 0, n \in \mathbb{N}$, τότε:

$$a > \beta \Leftrightarrow a^n > \beta^n$$

- Αν $a, \beta \geq 0$ και n θετικός ακέραιος, τότε:

$$a < \beta \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{\beta}$$

- Αν $a > 1$ και $\mu < \nu$, όπου μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε:

$$\sqrt[\mu]{a} > \sqrt[\nu]{a}$$

- Αν $0 < a < 1$ και $\mu < \nu$, όπου μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε:

$$\sqrt[\mu]{a} < \sqrt[\nu]{a}$$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να κάνετε τις πράξεις και να δώσετε την απάντησή σας στη μορφή $a + b\sqrt{3}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$:

(α) $(8 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$ (β) $\frac{26}{4 + \sqrt{3}}$

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$6\sqrt{81} - 3^3\sqrt{27} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{16}$$

3. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\sqrt{200} - 2\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + 4\sqrt{50}$$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{32} - \sqrt{18})$ (β) $(3\sqrt{6} + \sqrt{24} + \sqrt{96}) : \sqrt{150}$

(γ) $\sqrt[3]{5 + \sqrt{7 + \sqrt[4]{16}}}$ (δ) $\frac{16}{\sqrt{5}} + \frac{9}{\sqrt{5}}$

5. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt[6]{a^5} \cdot (\sqrt[6]{a})^7$ (β) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[6]{\kappa^{36}}}}$

6. Να συγκρίνετε τους πιο κάτω αριθμούς:

(α) $\sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$ (β) $5 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{5}$ (γ) $\sqrt{10 + 2\sqrt{15}}, \sqrt{5} + \sqrt{3}$

7. Αν $A = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ και $B = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, τότε να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $A - B$ (β) $A^2 - B^2$

(γ) $A^2 + B^2$

8. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt{x} = 9$ (β) $\sqrt{x - 2} = 5$

(γ) $\sqrt{4 - x^2} - 2 = 0$ (δ) $\sqrt{x - 5} = -2$

9. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt[3]{5-x} = 3$

(β) $\sqrt[4]{x-1} = 1$

10. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^4 - 81 = 0$

(β) $2x^3 + 16 = 0$

(γ) $x^3 - 4x = 0$

11. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt{x+10} = 2 - x$

(β) $\sqrt{3x} - x + 6 = 0$

(γ) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x-2} = 0$

(δ) $\sqrt[4]{x+3} = \sqrt{x+1}$

12. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω αριθμητικές παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $100^{\frac{1}{2}}$

(β) $25^{\frac{3}{2}}$

(γ) $9^{-\frac{1}{2}} - 27^{-\frac{1}{3}}$

(δ) $\sqrt{3} \cdot 12^{\frac{1}{2}}$

13. Να εκτελέσετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $4^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

(β) $(81k^8)^{\frac{1}{4}}, k \geq 0$

(γ) $3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$

(δ) $(100x^4)^{\frac{1}{2}}, x \geq 0$

14. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\frac{10}{\sqrt{5}}$

(β) $\frac{3}{2 - \sqrt{3}}$

(γ) $\frac{12}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$

(δ) $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$

(ε) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^7}}, x > 0$

15. Αν $3 < x < 8$, τότε να βρείτε το μικρότερο δυνατό διάστημα στο οποίο ανήκουν οι πιο κάτω αριθμοί:

(α) $2x$

(β) $-3x + 10$

(γ) $x^2 + 1$

(δ) $\frac{1}{x}$

(ε) $-\frac{36}{x+1}$

(στ) $\frac{1}{x^2 - 2}$

16. Αν μ και ν φυσικοί αριθμοί με $\mu < \nu$, τότε να συγκρίνετε τους πιο κάτω αριθμούς:

(α) $A = -3\mu + 10, B = -3\nu + 10$

(β) $\Gamma = 2\mu^2 + 1, \Delta = 2\nu^2 + 1$

(γ) $E = \frac{3}{8 - \mu^3}, Z = \frac{3}{8 - \nu^3}$

17. Αν $a_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ και $a_2 = 3 - 2\sqrt{2}$, τότε να αποδείξετε ότι:

(α) $a_1 > a_2$

(β) $a_1 a_2 = 1$

(γ) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 6$

18. Αν $4 \leq x \leq 6$ και $-8 \leq y \leq -4$, τότε να βρείτε το μικρότερο δυνατό διάστημα στο οποίο ανήκουν οι πιο κάτω αριθμοί:

(α) $x + y$

(β) $x - 2y$

(γ) xy

(δ) $\frac{x}{y}$

(ε) $2x - 3y + 5$

(στ) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 10$

19. Αν $4 < x < 6$ και $-3 < y < -1$, τότε να αποδείξετε ότι:

(α) $-1 < 2x + 3y < 9$

(β) $6 < x - 2y < 12$

(γ) $1 < y - xy < 17$

(δ) $40 < x^2 + 4y^2 - 4xy + 4 < 148$

(ε) $-18 < \frac{3x}{y} < -4$

20. Δίνονται οι πραγματικοί θετικοί αριθμοί κ, λ με $\kappa < \lambda$. Να συγκρίνετε τους πιο κάτω αριθμούς:

(α) $3\kappa - 8, 3\lambda - 8$

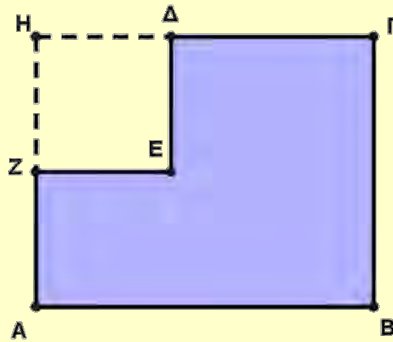
(β) $4 - \frac{1}{2}\kappa, 4 - \frac{1}{2}\lambda$

(γ) $5\kappa^2 + 7, 5\lambda^2 + 7$

(δ) $\frac{3}{8 - \kappa^3}, \frac{3}{8 - \lambda^3}$

Να συγκρίνετε όλους τους πιο πάνω αριθμούς σε όλες τις περιπτώσεις, όταν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ είναι αρνητικοί.

21. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το ορθογώνιο $ABGH$ με διαστάσεις $AB = x$ και $BH = 2y$, από το οποίο έχουμε αφαιρέσει το τετράγωνο $DEZH$ με πλευρά y .



- (α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του σκιασμένου εμβαδού $ABGDEZ$ δίνεται από τη σχέση $\Pi = 2x + 4y$.
- (β) Αν ισχύει ότι $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του γραμμοσκιασμένου σχήματος.
22. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις $A = (\sqrt{2})^6$, $B = (\sqrt[3]{3})^6$, $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$.
- (α) Να δείξετε ότι $A + B + \Gamma = 23$.
- (β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
23. Δίνονται οι αριθμοί $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$.
- (α) Να δείξετε ότι $A - B = 4$.
- (β) Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:
 $\sqrt{2}, 1, \sqrt[3]{2}$
24. Να υπολογίσετε το x^2 , αν $x - 4\sqrt{6} = \sqrt{6}$.
25. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2$ είναι ρητός, αν γνωρίζετε ότι ο αριθμός a είναι θετικός ρητός.
26. Να διατάξετε τους αριθμούς a , β , γ από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο, αν ισχύει ότι:
- $$2016a = 2017\beta = 2018\gamma, \quad a, \beta, \gamma > 0$$
27. Αν $a > \beta$, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $3a - 4\gamma$ και $3\beta - 4\gamma$.
28. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{6 + \sqrt{11}}$, $\sqrt{6 - \sqrt{11}}$.
- Αν $\kappa = \sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}}$, τότε:
- (α) να αποδείξετε ότι $\kappa^2 = 2$
- (β) να υπολογίσετε τα $(\kappa + \sqrt{2})^{106}$, $(\kappa - \sqrt{2})^{106}$.

Λύση Προβλήματος

ΛΕΙΧΗΝΕΣ

Ένα από τα επακόλουθα της υπερθέρμανσης του πλανήτη μας είναι το λιώσιμο των πάγων. Δώδεκα χρόνια μετά το λιώσιμο των πάγων, αρχίζουν να αναπτύσσονται στους βράχους μικροσκοπικά φυτά που ονομάζονται λειχήνες.

Κάθε λειχήνα αναπτύσσεται σε σχήμα περίπου κυκλικό.

Ο παρακάτω τύπος χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η διάμετρος (δ) της λειχήνας σε σχέση με την ηλικία της.

$$\delta = 7,0\sqrt{t - 12}, \quad t \geq 12,$$

όπου (δ) η διάμετρος της λειχήνας σε mm και t ο αριθμός των ετών που έχουν περάσει μετά το λιώσιμο των πάγων.

Ερώτηση 1: ΛΕΙΧΗΝΕΣ

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο, να υπολογίσετε τη διάμετρο που θα έχει μια λειχήνα, 16 έτη μετά το λιώσιμο των πάγων. Να γράψετε την απάντησή σας στον χώρο που ακολουθεί.

.....

Ερώτηση 2: ΛΕΙΧΗΝΕΣ

Η Άννα μέτρησε τη διάμετρο μιας λειχήνας που βρήκε σε κάποιο μέρος και είδε ότι ήταν 35 mm.

Πόσα χρόνια έχουν περάσει από το λιώσιμο των πάγων σε αυτό το μέρος;

Να εξηγήσετε πώς βρήκατε την απάντησή σας.

.....

Ερώτηση 3: ΛΕΙΧΗΝΕΣ

Σε πόσα χρόνια από σήμερα, μια λειχήνα που τώρα έχει διάμετρο 35 mm θα έχει διπλασιάσει τη διάμετρό της; Να εξηγήσετε πώς βρήκατε την απάντησή σας.

.....

PISA 2000

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρανομαστή:

$$A = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}}, \quad B = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}}}$$

2. Να δείξετε ότι ο αριθμός $5 + \sqrt{3}$ είναι η τετραγωνική ρίζα του αριθμού $28 + 10\sqrt{3}$.
3. Να δείξετε ότι ο αριθμός $2 - \sqrt{2}$ είναι η κυβική ρίζα του αριθμού $20 - 14\sqrt{2}$.
4. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός, δηλαδή ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί a και β ώστε $\frac{a}{\beta} = \sqrt{2}$.
5. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για πραγματικές τιμές του x :

(α) $x^{\frac{5}{6}} - x^{\frac{1}{6}} = 0$

(β) $x^{\frac{4}{5}} - 9x^{\frac{2}{5}} = 0$

(γ) $x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{6}} = 0$

6. Αν ο n είναι φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Με τη βοήθεια του πιο πάνω, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} = 9$$

7. Αν $a, \beta > 0$ και $a \neq \beta$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a\sqrt{a} - \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{a} - \sqrt{\beta}} = a + \beta + \sqrt{a\beta}$$

8. Με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι παραστάσεις, να υπολογίσετε τις τιμές των x, y, z , όταν:

$$\sqrt{2x + 4y + 5z} + \sqrt{y - 3} + \sqrt{z - 2} = 0$$

9. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

10. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $a = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2}$ και $\beta = \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$.
- (α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί $a\beta$ και $(a^3 - \beta^3)$ είναι φυσικοί.
- (β) Αν $x = a - \beta$, να δείξετε ότι ο πραγματικός αριθμός x επαληθεύει την εξίσωση $x^3 + 3x - 4 = 0$.
- (γ) Να δείξετε ότι $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 1$.
11. Αν x, y, z είναι τρεις πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε $x + y + z = 0$, τότε:
- (α) να αποδείξετε ότι $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$
- (β) να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό $x = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$, χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α).
12. Αν a πραγματικός θετικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = 10$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
- (α) $a + \frac{1}{a}$
- (β) $a^3 + \frac{1}{a^3}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 02

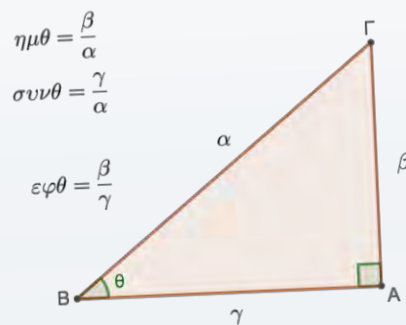
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 2.1 Το ακτίσιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών
- 2.2 Γωνία σε κανονική θέση
- 2.3 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας σε κανονική θέση
- 2.4 Τριγωνομετρικός κύκλος
- 2.5 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις – Σχέσεις τριγωνομετρικών αριθμών σε συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες
 - 2.5.1 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
 - 2.5.2 Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών που έχουν άθροισμα ή διαφορά $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$
- 2.6 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Έχουμε μάθει ...

- Να ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας και να χρησιμοποιούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς στη λύση ασκήσεων και πραγματικών προβλημάτων.



- Να επιλύουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, δηλαδή να υπολογίζουμε τα κύρια στοιχεία του, όταν δίνονται επαρκή στοιχεία του.

2.1 ΤΟ ΑΚΤΙΝΙΟ ΩΣ ΜΟΝΑΔΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΓΩΝΙΩΝ

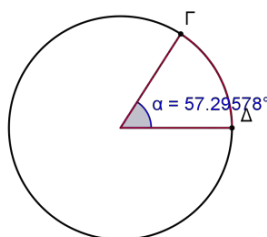
Εξερεύνηση

- Για ποιο λόγο, κατά τη γνώμη σας, μία πλήρης στροφή έχει οριστεί να έχει μέτρο 360° ;
- Μήπως θα μπορούσε να είχε οριστεί με διαφορετικό μέτρο από 360° ;
- Αν είχε οριστεί μια πλήρης γωνία να ήταν 1000° , τότε πόσες μοίρες θα ήταν μια ορθή γωνία;
- Τι κοινό παρουσιάζει μία ορθή γωνία, όταν η πλήρης γωνία είναι 360° ή 1000° ;

Διερεύνηση

- Δίνεται κύκλος με ακτίνα R . Να υπολογίσετε το μέτρο μιας γωνίας θ που αντιστοιχεί σε τόξο μήκους ίσο με R . Πόσα τέτοια τόξα μήκους R μπορούν να συμπληρώσουν όλο το μήκος του κύκλου;
- Να ανοίξετε το αρχείο «[ALyk_En02_Rad.ggb](#)».

$R = 2,9$



- Να επιλέξετε τον δρομέα με την ένδειξη « R », για να αλλάξετε την ακτίνα του κύκλου.
- Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $\Gamma\Delta$ για διάφορες τιμές της ακτίνας « R » και να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

| a° | R | $\gamma = \widehat{\Gamma\Delta} = 2\pi R \cdot \frac{a^\circ}{360^\circ}$ |
|------------------|-----|--|
| $57,29578^\circ$ | 2,3 | 2,3 |
| | | |
| | | |
| | | |

Τι παρατηρείτε για το μήκος του τόξου;

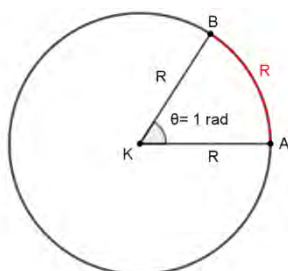
Όπως κάθε γεωμετρικό μέγεθος έτσι και η γωνία και το τόξο έχουν τις δικές τους μονάδες μέτρησης οι οποίες είναι η μοίρα και το ακτίνιο.

Ιστορική αναφορά

Η παρατήρηση από τους Βαβυλωνίους της κίνησης των ουράνιων σωμάτων, από το 1800 πΧ οδήγησε τελικά στην διαίρεση του κύκλου σε 360° . Επομένως, $1^\circ = \frac{1}{360}$ μιας πλήρους περιστροφής.

Ορισμός

Ακτίνιο είναι μονάδα μέτρησης μιας επίπεδης γωνίας, η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε κύκλο, ορίζει τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα του και συμβολίζεται με 1 rad.



Παρατηρήσεις

Από τον ορισμό του ακτινίου προκύπτει ότι:

1. Ένας κύκλος έχει μέτρο 2π ακτίνια. Το μήκος Γ του κύκλου ακτίνας R είναι $\Gamma = 2\pi R$. Κάθε κύκλος διαιρείται σε $\frac{2\pi R}{R}$ ακτίνες του, δηλαδή 2π rad.
2. Το ακτίνιο είναι σταθερό, ανεξάρτητο από το μήκος της ακτίνας του κύκλου, και είναι περίπου ίσο με $57,3^\circ$:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \Rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57,3^\circ$$

Η σχέση μοίρας και ακτινίου δίνεται από την πιο κάτω πρόταση.

Πρόταση

Αν μ° είναι το μέτρο σε μοίρες και a το μέτρο σε ακτίνια (rad) ενός τόξου ή μιας γωνίας, τότε ισχύει:

$$\frac{a}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ}$$

Απόδειξη

Έστω μία γωνία θ , η οποία έχει μέτρο σε μοίρες και ακτίνια μ° και a rad, αντίστοιχα. Σε κύκλο ακτίνας R , το μήκος του κύκλου είναι ίσο με $2\pi R$. Επομένως, η γωνία των 360° είναι ίση με 2π rad. Οπότε, η γωνία 1 rad είναι ίση με $\frac{360}{2\pi}$ μοίρες και έτσι η γωνία θ με μέτρο a rad είναι ίση με $a \cdot \frac{360}{2\pi}$ μοίρες. Επομένως:

$$\mu^\circ = a \cdot \frac{360}{2\pi} \Leftrightarrow \mu^\circ = a \cdot \frac{180}{\pi} \Leftrightarrow \frac{a}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ}$$

Παράδειγμα 1

Να μετατρέψετε τη γωνία $\theta = 60^\circ$ σε ακτίνια.

Λύση

Θέτουμε στον τύπο

$$\frac{a}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ}$$

όπου $\mu^\circ = 60^\circ$ και έχουμε:

$$\frac{a}{\pi} = \frac{60^\circ}{180^\circ} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{3}$$

Επομένως, έχουμε ότι $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ rad.

Παράδειγμα 2

Να μετατρέψετε τη γωνία $a = 2$ rad σε μοίρες.

Λύση

Θέτουμε στον τύπο

$$\frac{a}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ}$$

όπου $a = 2$ και έχουμε:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ} \Leftrightarrow \mu^\circ = \frac{180^\circ \cdot 2}{\pi} \simeq 114,6^\circ$$

Επομένως, έχουμε ότι 2 rad $\simeq 114,6^\circ$.

Παράδειγμα 3

Να μετατρέψετε τη γωνία $a = \frac{12\pi}{5}$ rad σε μοίρες.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι 2π rad = 360° . Άρα, π rad = 180° . Επομένως:

$$\frac{12\pi}{5} \text{ rad} = \frac{12 \cdot 180^\circ}{5} = 432^\circ$$

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε το μήκος τόξου σε κύκλο ακτίνας $R = 5$ m που έχει επίκεντρη γωνία $\theta = 3$ rad.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι γωνία 1 rad βαίνει σε τόξο μήκους $R = 5$ m. Επομένως, η γωνία $\theta = 3$ rad βαίνει σε τόξο μήκους $3R = 15$ m.

Παράδειγμα 5

Να αποδείξετε ότι το μήκος τόξου S μέτρου a rad σε κύκλο ακτίνας R είναι $S = Ra$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το μήκος του τόξου S είναι

$$\gamma_S = 2\pi R \cdot \frac{\mu^\circ}{360^\circ},$$

όπου μ° το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας σε μοίρες.

Επιπλέον, έχουμε ότι:

$$\frac{a}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180} \Rightarrow \mu^\circ = \frac{a \cdot 180^\circ}{\pi}$$

Επομένως:

$$\gamma_S = 2\pi R \cdot \frac{\mu^\circ}{360^\circ} = 2\pi R \cdot \frac{\frac{a \cdot 180^\circ}{\pi}}{360^\circ} = Ra$$

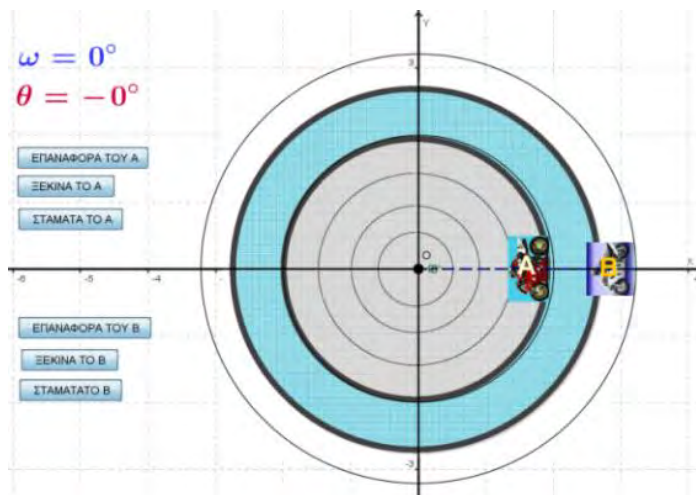
Δραστηριότητες

1. Να μετατρέψετε τις γωνίες 30° , 45° , 90° , 120° σε ακτίνια.
2. Να μετατρέψετε τις γωνίες $\frac{5\pi}{3}$ rad, $\frac{7\pi}{6}$ rad, $\frac{3\pi}{2}$ rad, 5π rad σε μοίρες.
3. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη) των γωνιών $\frac{\pi}{3}$ rad, $\frac{\pi}{4}$ rad και $\frac{\pi}{6}$ rad, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.
4. Πόσες μοίρες είναι η επίκεντρη γωνία, η οποία αντιστοιχεί σε τόξο 3 rad;
5. Τα σημεία A και B ανήκουν σε κύκλο (K, R) , έτσι ώστε το μήκος του τόξου AB να είναι ίσο με $1,8R$. Να υπολογίσετε το μέτρο της επίκεντρης γωνίας AKB σε ακτίνια.
6. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου, στον οποίο η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί σε τόξο μήκους 16 cm είναι 80° .
7. Αν σε κύκλο (K, R) το τόξο AB αντιστοιχεί σε θ rad, τότε να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του κυκλικού τομέα KAB είναι ίσο με $\frac{1}{2}R^2\theta$.
8. Μια πέτρα δένεται σε σχοινί μήκους 200 cm και περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα. Κάθε δευτερόλεπτο καλύπτει μήκος τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 2 rad. Να υπολογίσετε τη γραμμική ταχύτητα της πέτρας.

2.2 ΓΩΝΙΑ ΣΕ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΘΕΣΗ

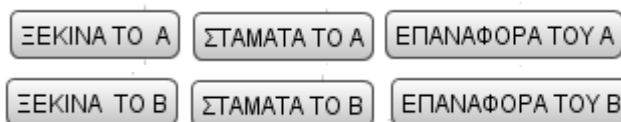
Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «[ALyk_En02_Motorcycles.ggb](#)».



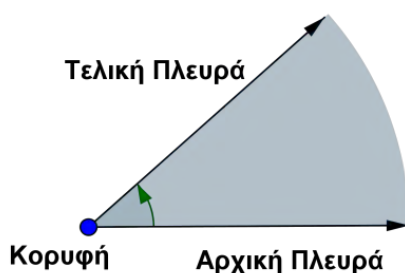
Οι μοτοσικλετιστές A και B βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία στον θετικό ημιάξονα Ox και κινούνται κυκλικά γύρω από την αρχή των αξόνων O .

Τα κουμπιά ξεκινούν και σταματούν την κίνηση των μοτοσικλετιστών.



- Να επιλέξετε τα πιο πάνω κουμπιά διαδοχικά και να περιγράψετε τη θέση του κάθε μοτοσικλετιστή και τον τρόπο που κινείται.

Στην Τριγωνομετρία, οι γωνίες στο επίπεδο δημιουργούνται από την περιστροφή μίας ημιευθείας γύρω από την κορυφή της, ξεκινώντας από την αρχική της θέση. Η αρχική θέση της ημιευθείας ονομάζεται **αρχική πλευρά** της γωνίας και η τελική θέση της ημιευθείας ονομάζεται **τελική πλευρά**. Οι γωνίες αυτές μπορούν να αναφέρονται και ως **τριγωνομετρικές γωνίες**.

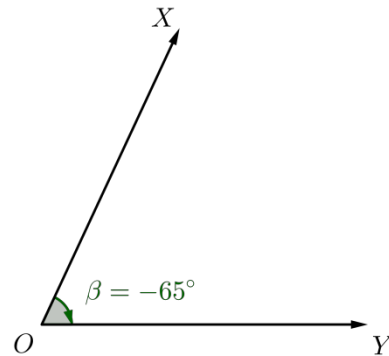
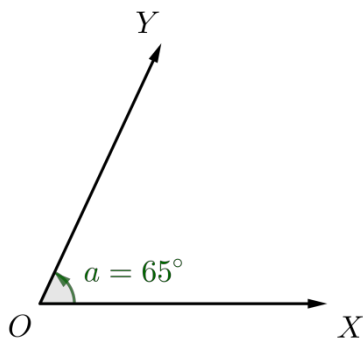


Ανάλογα με τη φορά που κινείται η αρχική πλευρά προς την τελική πλευρά η γωνία διακρίνεται σε **θετική φορά** (αριστερόστροφη) ή γωνία με **αρνητική φορά** (δεξιόστροφη). Γωνία με καθορισμένη φορά λέγεται **προσανατολισμένη**.

Ορισμός – Αλγεβρική τιμή τριγωνομετρικής γωνίας

Αλγεβρική τιμή μιας τριγωνομετρικής γωνίας είναι ο αριθμός που προκύπτει, όταν μετρήσουμε τη γωνία με μια μονάδα μέτρησης (π.χ μοίρα ή ακτίνιο) και βάλουμε στο εξαγόμενο πρόσημο θετικό ή αρνητικό, αν η φορά διαγραφής της γωνίας είναι η θετική ή η αρνητική, αντίστοιχα.

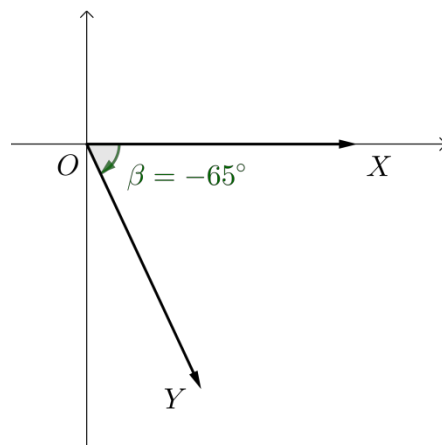
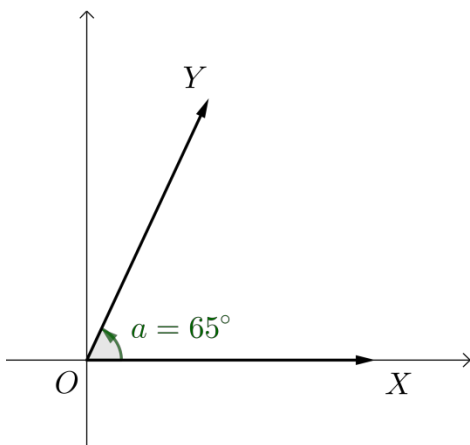
Για παράδειγμα, η αλγεβρική τιμή της γωνίας α είναι $+65^\circ$ και η αλγεβρική τιμή της γωνίας β είναι -65° .



Ορισμός

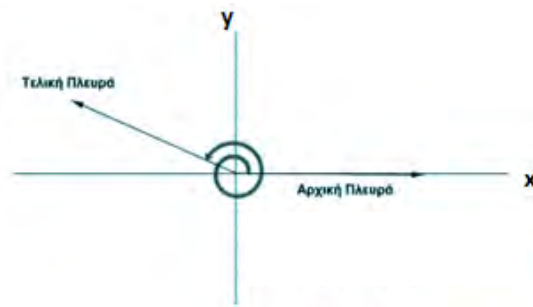
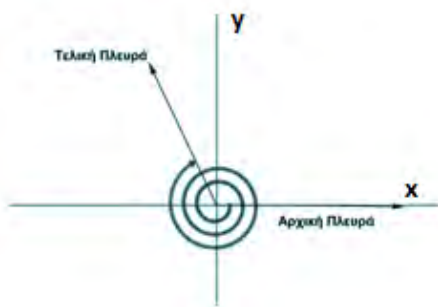
Μία τριγωνομετρική γωνία είναι σε **κανονική θέση**, όταν η κορυφή της βρίσκεται στην αρχή των αξόνων του ορθοκανονικού συστήματος και η αρχική πλευρά της συμπίπτει με τον θετικό ημιάξονα των τετμημένων.

Για παράδειγμα, στα πιο κάτω σχήματα φαίνονται οι γωνίες α και β , οι οποίες είναι τοποθετημένες σε κανονική θέση και έχουν αλγεβρική τιμή $+65^\circ$ και -65° αντίστοιχα.





Γωνίες μεγαλύτερες μιας πλήρους περιστροφής

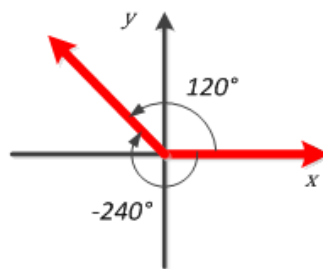


Παράδειγμα 1

Να γράψετε δύο ζεύγη γωνιών οι οποίες να είναι στην κανονική τους θέση και να έχουν την ίδια τελική πλευρά. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Η γωνία 120° έχει την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία -240° , αφού $-240^\circ = -360^\circ + 120^\circ$.



Η γωνία 315° έχει την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία 675° , αφού $675^\circ = 360^\circ + 315^\circ$.



Παράδειγμα 2

Δύο θετικές γωνίες $x, y < 720^\circ$ βρίσκονται σε κανονική θέση και έχουν την ίδια τελική πλευρά. Αν το μέτρο της μίας είναι τριπλάσιο από το μέτρο της άλλης, να βρείτε τις γωνίες x και y .

Λύση

Το μέτρο της μίας γωνίας είναι τριπλάσιο από το μέτρο της άλλης. Άρα:

$$x = 3y$$

Οι δύο θετικές γωνίες έχουν την ίδια τελική πλευρά. Αφού $x, y < 720^\circ$, τότε:

$$x = 360^\circ + y$$

Έτσι, από τις πιο πάνω σχέσεις, παίρνουμε ότι:

$$3y = 360^\circ + y \Rightarrow 2y = 360^\circ \Rightarrow y = 180^\circ, \quad x = 540^\circ$$

Δραστηριότητες

- Να ορίσετε πότε μια γωνία είναι:
 - σε κανονική θέση
 - σε κανονική θέση και είναι προσανατολισμένη.
- Να κατασκευάσετε τις πιο κάτω γωνίες σε κανονική θέση:

| | | | |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------|------------------|
| (α) 100° | (β) -45° | (γ) 450° | (δ) -210° |
| (ε) $\frac{\pi}{6}$ rad | (στ) $\frac{4\pi}{3}$ rad | (ζ) $-\frac{7\pi}{6}$ rad | (η) -1 rad |
- Να γράψετε δύο γωνίες που έχουν την ίδια τελική πλευρά με τις πιο κάτω γωνίες:

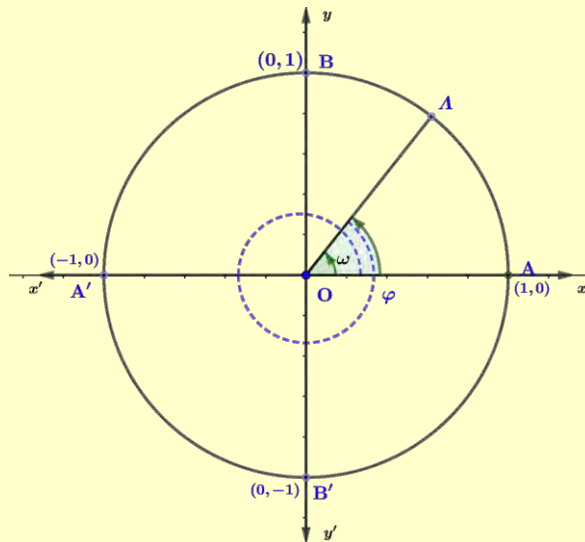
| | | |
|--------------------------|---------------------------|-----------------------|
| (α) 135° | (β) -20° | (γ) 240° |
| (δ) $\frac{2\pi}{3}$ rad | (ε) $-\frac{3\pi}{4}$ rad | (δ) $\frac{5}{2}$ rad |
- Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

| | | |
|------|--|---------------|
| (α) | Αν $A(1, 0)$, $O(0, 0)$ και $B(0, -1)$, τότε η προσανατολισμένη γωνία AOB ίση με 90° . | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) | Οι γωνίες $\alpha = -500^\circ$ και $\beta = 220^\circ$ όταν βρίσκονται σε κανονική θέση έχουν την ίδια τελική πλευρά. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) | Οι γωνίες $\alpha = 2\pi$ rad και $\beta = \pi$ rad όταν βρίσκονται σε κανονική θέση έχουν την ίδια τελική πλευρά. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) | Η γωνία σε κανονική θέση $\theta = \frac{3\pi}{4}$ rad διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες $A(-10, 10)$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ε) | Η γωνία σε κανονική θέση $\theta = (2\pi - 7)$ rad είναι αρνητική. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (στ) | Οι γωνίες $\alpha = (-\pi + 3)$ rad και $\beta = (\pi + 3)$ rad όταν βρίσκονται σε κανονική θέση έχουν την ίδια τελική πλευρά. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

- Δίνονται τα σημεία με συντεταγμένες $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(0, 3)$, $\Gamma(-4, 0)$, $\Delta(0, -1)$ και $E(2, 2)$. Να υπολογίσετε το μέτρο της θετικής γωνίας θ ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$), η οποία βρίσκεται σε κανονική θέση όταν η τελική πλευρά της γωνίας θ είναι η πλευρά:

(α) OA (β) OB (γ) OG (δ) OD (ε) OE

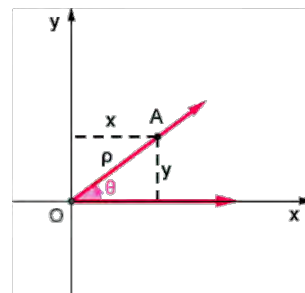
6. Δύο θετικές γωνίες $x, y < 720^\circ$ βρίσκονται σε κανονική θέση και έχουν την ίδια τελική πλευρά. Αν το μέτρο της μίας είναι τετραπλάσιο από το μέτρο της άλλης, να βρείτε τις γωνίες x και y .
7. Στο πιο κάτω σχήμα, φαίνονται οι γωνίες ω και φ .



- (α) Αν $\widehat{AOA} = \omega$, να εκφράσετε τη γωνία φ συναρτήσει της γωνίας ω .
- (β) Η γωνία $720^\circ + \omega$ είναι σε κανονική θέση. Να τοποθετήσετε την αρχική και την τελική της πλευρά.
- (γ) Η γωνία $-360^\circ + \omega$ είναι σε κανονική θέση. Να τοποθετήσετε την αρχική και την τελική της πλευρά.

2.3 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ ΣΕ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΘΕΣΗ

Στο διπλανό σχήμα, η γωνία θ είναι σε κανονική θέση και το σημείο $A(x, y)$ (το οποίο διαφέρει από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$) βρίσκεται πάνω στην τελική πλευρά της γωνίας.



Η απόσταση του σημείου $A(x, y)$ από την αρχή των αξόνων είναι ίση με ρ , όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho > 0$. Από το σχήμα, με τη βοήθεια του ορισμού των τριγωνομετρικών αριθμών σε ορθογώνιο τρίγωνο, παρατηρούμε ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας θ είναι:

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\upsilon\theta = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\varphi\theta = \frac{y}{x}$$

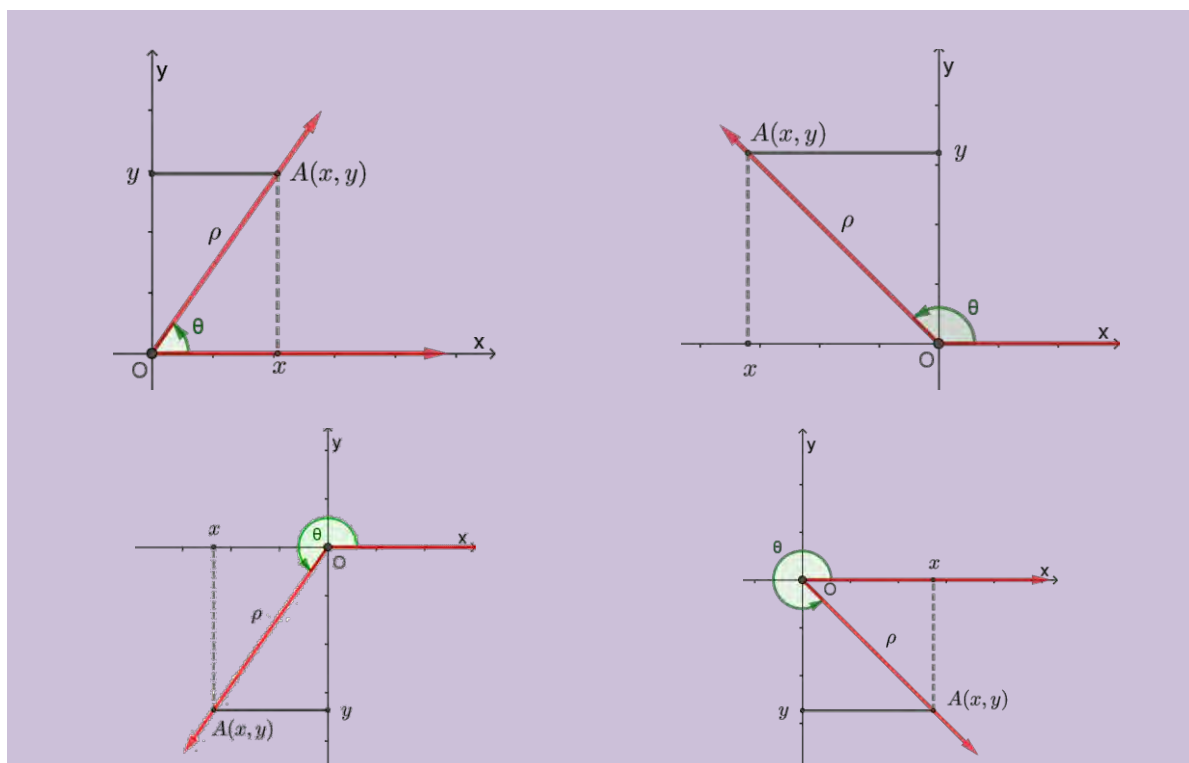
Γενικεύοντας τα πιο πάνω, ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς κάθε γωνίας θ , η οποία βρίσκεται σε κανονική θέση.

Ορισμός

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας θ , η οποία βρίσκεται σε κανονική θέση και $A(x, y)$ τυχαίο σημείο της τελικής πλευράς της, ορίζονται ως

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\upsilon\theta = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0),$$

όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho > 0$.



Συνεφαπτομένη της γωνίας θ ορίζουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό $\frac{x}{y}$, $y \neq 0$ και τον συμβολίζουμε με $\sigma\phi\theta$. Δηλαδή:

$$\sigma\phi\theta = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

Τέμνουσα της γωνίας θ ορίζουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό $\frac{\rho}{x}$, $x \neq 0$ και τον συμβολίζουμε με $\tau\epsilon\mu\theta$. Δηλαδή:

$$\tau\epsilon\mu\theta = \frac{\rho}{x}, \quad x \neq 0$$

Συντέμνουσα της γωνίας θ ορίζουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό $\frac{\rho}{y}$, $y \neq 0$ και τον συμβολίζουμε με $\sigma\tau\epsilon\mu\theta$. Δηλαδή:

$$\sigma\tau\epsilon\mu\theta = \frac{\rho}{y}, \quad y \neq 0$$

Παρατηρήσεις

- Με βάση τα πιο πάνω, έχουμε ότι:

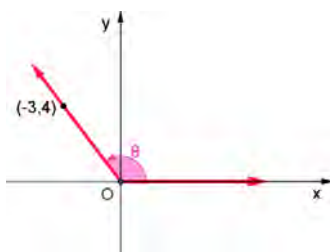
$$\sigma\phi\theta = \frac{1}{\epsilon\phi\theta}, \quad \tau\epsilon\mu\theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\upsilon\theta}, \quad \sigma\tau\epsilon\mu\theta = \frac{1}{\eta\mu\theta}$$

Δηλαδή, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\epsilon\phi\theta$ και $\sigma\phi\theta$, όταν αυτοί ορίζονται, είναι αντίστροφοι. Αντίστροφοι είναι και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\tau\epsilon\mu\theta$, $\sigma\upsilon\upsilon\theta$ και $\sigma\tau\epsilon\mu\theta$, $\eta\mu\theta$.

- Υπάρχουν άπειρες γωνίες σε κανονική θέση, οι οποίες έχουν την ίδια τελική πλευρά. Επομένως, όλες αυτές οι γωνίες έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

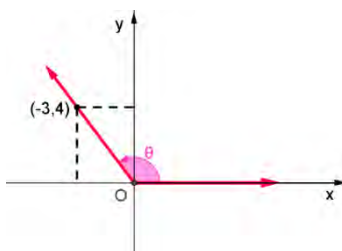
Παράδειγμα 1

Στο πιο κάτω σχήμα, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\theta}$.



Λύση

Έχουμε το σημείο $(-3, 4)$ με συντεταγμένες $x = -3$ και $y = 4$.



Για να υπολογίσουμε το $\eta\mu\theta$ και το $\sigma\upsilon\nu\theta$, υπολογίζουμε την απόσταση ρ του σημείου από την αρχή των αξόνων. Έχουμε:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ μονάδες}$$

Από τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών, έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{4}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}, \quad \epsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}, \quad \sigma\varphi\theta = \frac{1}{\epsilon\varphi\theta} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

Παράδειγμα 2

(α) Να αναφέρετε το μέτρο δύο γωνιών, που βρίσκονται σε κανονική θέση και η τελική πλευρά να διέρχεται από το σημείο:

- i. $A(2, 0)$ ii. $B(0, 3)$ iii. $\Gamma(-5, 0)$ iv. $\Delta(0, -1)$

(β) Να γράψετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των πιο πάνω γωνιών.

Λύση

(α) Για μία γωνία που βρίσκεται σε κανονική θέση:

- i. Για τελική πλευρά που διέρχεται από το σημείο $A(2, 0)$, έχουμε:

$$\theta_1 = 0^\circ, \quad \theta_2 = 360^\circ$$

- ii. Για τελική πλευρά που διέρχεται από το σημείο $B(0, 3)$, έχουμε:

$$\theta_1 = 90^\circ, \quad \theta_2 = -270^\circ$$

- iii. Για τελική πλευρά που διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-5, 0)$, έχουμε:

$$\theta_1 = 180^\circ, \quad \theta_2 = 540^\circ$$

- iv. Για τελική πλευρά που διέρχεται από το σημείο $\Delta(0, -1)$, έχουμε:

$$\theta_1 = 270^\circ, \quad \theta_2 = -90^\circ$$

(β) Σε κάθε περίπτωση, οι γωνίες θ_1 και θ_2 έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Έτσι, έχουμε:

- i. Για τελική πλευρά γωνίας που διέρχεται από το σημείο $A(2, 0)$, έχουμε:

$$\eta\mu\theta_1 = 0, \quad \sigma\upsilon\nu\theta_1 = 1, \quad \epsilon\varphi\theta_1 = 0, \quad \sigma\varphi\theta_1 \text{ (δεν ορίζεται)}$$

- ii. Για τελική πλευρά γωνίας που διέρχεται από το σημείο $B(0, 3)$, έχουμε:

$$\eta\mu\theta_1 = 1, \quad \sigma\upsilon\nu\theta_1 = 0, \quad \epsilon\varphi\theta_1 \text{ (δεν ορίζεται)}, \quad \sigma\varphi\theta_1 = 0$$

- iii. Για τελική πλευρά γωνίας που διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-5, 0)$, έχουμε:

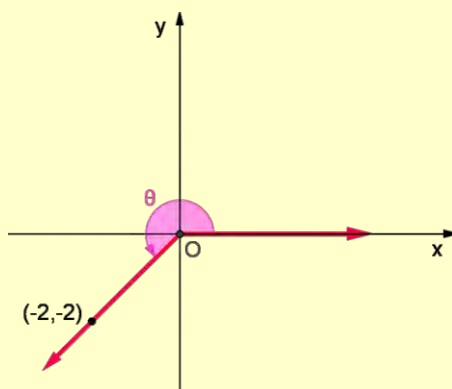
$$\eta\mu\theta_1 = 0, \quad \sigma\upsilon\nu\theta_1 = -1, \quad \epsilon\varphi\theta_1 = 0, \quad \sigma\varphi\theta_1 \text{ (δεν ορίζεται)}$$

- iv. Για τελική πλευρά γωνίας που διέρχεται από το σημείο $\Delta(0, -1)$, έχουμε:

$$\eta\mu\theta_1 = -1, \quad \sigma\upsilon\nu\theta_1 = 0, \quad \epsilon\varphi\theta_1 \text{ (δεν ορίζεται)}, \quad \sigma\varphi\theta_1 = 0$$

Δραστηριότητες

1. Στο πιο κάτω σχήμα, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .



2. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

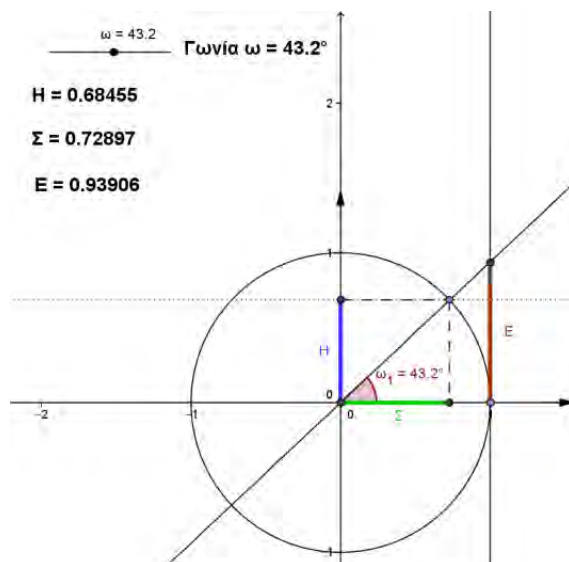
| | | |
|------|---|---------------|
| (α) | Για την τελική πλευρά μιας γωνίας θ , η οποία είναι σε κανονική θέση και διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες $A(a, \beta)$, ισχύει $\eta\mu\theta = \beta$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) | Για την τελική πλευρά μιας γωνίας ω , η οποία είναι σε κανονική θέση και διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες $A(\kappa, \lambda)$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}}$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) | Για τις γωνίες a και β , οι οποίες είναι σε κανονική θέση και έχουν τελικές πλευρές που διέρχονται από τα σημεία με συντεταγμένες $A(x, y)$ και $B(-x, -y)$, $x \neq 0$, αντίστοιχα, ισχύει ότι $\epsilon\varphi a = \epsilon\varphi\beta$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) | Για την προσανατολισμένη γωνία $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ rad ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ε) | Αν ισχύει $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$, τότε θα ισχύει και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{12}{13}$, για κάθε γωνία θ . | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (στ) | Μια γωνία θ βρίσκεται σε κανονική θέση και έχει τελική πλευρά που διέρχεται από το σημείο $A(-3, -3)$. Τότε, ισχύει $\sigma\varphi\theta = -1$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ζ) | Το σημείο με συντεταγμένες $A(\kappa, \lambda)$, $\kappa > 0$ ανήκει πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = 2x$. Τότε, για κάθε γωνία θ που είναι σε κανονική θέση και έχει τελική πλευρά που διέρχεται από το σημείο A , ισχύει ότι $\epsilon\varphi\theta = 2$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

3. Να αναφέρετε δύο διαφορετικά σημεία με ακέραιες συντεταγμένες, τα οποία να βρίσκονται στην τελική πλευρά μιας γωνίας ω σε κανονική θέση με μέτρο 135° . Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .
4. Μια γωνία θ σε κανονική θέση έχει τελική πλευρά, η οποία διέρχεται από το σημείο A . Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ , όταν το σημείο A έχει συντεταγμένες:
- (α) $A(1, -1)$
 (β) $A(-\sqrt{3}, 1)$
 (γ) $A(-10, 0)$
5. Να κατασκευάσετε γωνία με μέτρο $\frac{\pi}{4}$ rad, η οποία να βρίσκεται σε κανονική θέση. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κοινού σημείου της τελικής πλευράς της γωνίας και του κύκλου με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα ίση με μία μονάδα.
6. Για τη γωνία θ σε κανονική θέση, ισχύει ότι:
- $$\eta\mu\theta = \frac{4}{5}, \quad 90^\circ < \theta < 180^\circ$$
- Να βρείτε δύο διαφορετικά σημεία, τα οποία να βρίσκονται στην τελική πλευρά της γωνίας θ .
7. Η τελική πλευρά μιας γωνίας θ , η οποία βρίσκεται σε κανονική θέση, διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{3}, -1)$. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω:
- (α) $\eta\mu\theta$, $\sigma\upsilon\nu\theta$, $\epsilon\varphi\theta$
 (β) θ , με $-90^\circ < \theta < 0^\circ$
 (γ) θ , με $270^\circ < \theta < 360^\circ$
8. Για μια γωνία θ που είναι σε κανονική θέση, ισχύει ότι $\epsilon\varphi\theta = -4$.
- (α) Αν η τελική πλευρά της γωνίας θ διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες $A(x, y)$ με $x_A = -2$, να υπολογίσετε την τεταγμένη y_A του σημείου A .
 (β) Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, αν η τελική πλευρά της γωνίας θ διέρχεται από το σημείο $B\left(\kappa, -\frac{1}{2}\right)$.
 (γ) Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\theta$ και $\eta\mu\theta$ της γωνίας θ , η οποία έχει τελική πλευρά που διέρχεται από το σημείο $\Gamma(x, y)$ με $x > 0$.

2.4 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «ALyk_En02_TrigKyklos.ggb».



Δίνεται κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με μία ακέραια μονάδα.

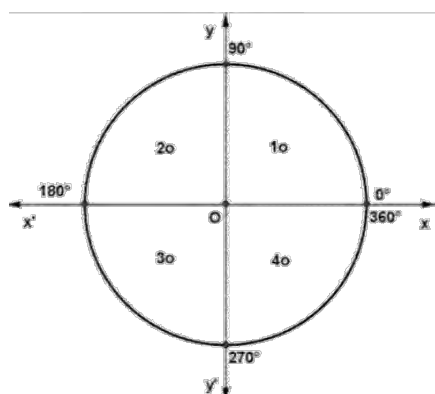
- Να επιλέξετε τον δρομέα « ω », για να δώσετε διάφορες τιμές στη γωνία ω .
- Να παρατηρήσετε τις τιμές των « H, Σ, E » και να τις συνδέσετε με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\omega, \sigma\omega$ και $\epsilon\omega$.

Ορισμός

Τριγωνομετρικός κύκλος ονομάζεται ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με μία μονάδα.

Παρατηρήσεις

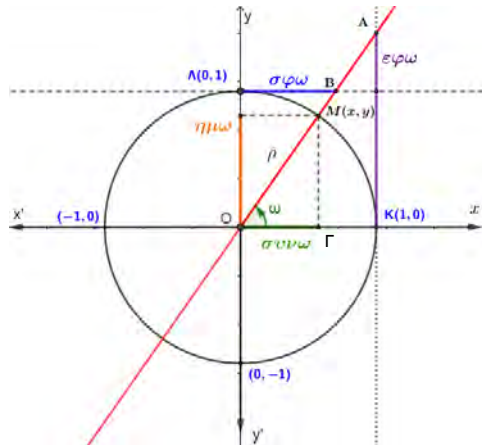
- Οι άξονες xx', yy' χωρίζουν τον κύκλο σε τέσσερα τεταρτημόρια, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



- Τα σημεία, τα οποία βρίσκονται στους άξονες, δεν ανήκουν σε κάποιο τεταρτημόριο. Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$ ($OM = \rho = 1$), τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $OM\Gamma$ έχουμε:

$$\text{συν}\omega = \frac{x}{1} = x, \quad \text{ημ}\omega = \frac{y}{1} = y$$

Στην Τριγωνομετρία ο άξονας των τετμημένων x' ονομάζεται και **άξονας των συνημιτόνων**, ενώ ο άξονας των τεταγμένων $y'y$ ονομάζεται και **άξονας των ημιτόνων**.



- Από τα πιο πάνω, προκύπτει ότι:

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\text{συν}\omega$ και $\text{ημ}\omega$ παίρνουν τιμές μόνο στο διάστημα $[-1, 1]$. Δηλαδή:

$$-1 \leq \text{συν}\omega \leq 1, \quad -1 \leq \text{ημ}\omega \leq 1$$

Για παράδειγμα, **δεν** μπορεί να υπάρξει γωνία ω , τέτοια ώστε να ισχύει

$$\text{συν}\omega = \frac{3}{2} \quad \text{ή} \quad \text{ημ}\omega = -2,$$

αφού οι τιμές $\frac{3}{2}$ και -2 βρίσκονται εκτός του διαστήματος $[-1, 1]$.

- Η προέκταση της τελικής πλευράς μιας γωνίας ω , η οποία τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$, τέμνει και την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $K(1, 0)$ στο σημείο A . Από το ορθογώνιο τρίγωνο KOA , έχουμε ότι:

$$\text{εφ}\omega = \frac{KA}{KO} = \frac{KA}{1} = KA$$

Η εφαπτομένη του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο $K(1, 0)$ ονομάζεται **άξονας των εφαπτομένων**.

- Η προέκταση της τελικής πλευράς της γωνίας ω , η οποία τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$, τέμνει την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $\Lambda(0, 1)$ στο σημείο B . Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΛOB , έχουμε ότι:

$$\text{σφ}\omega = \frac{AB}{\Lambda O} = \frac{AB}{1} = AB$$

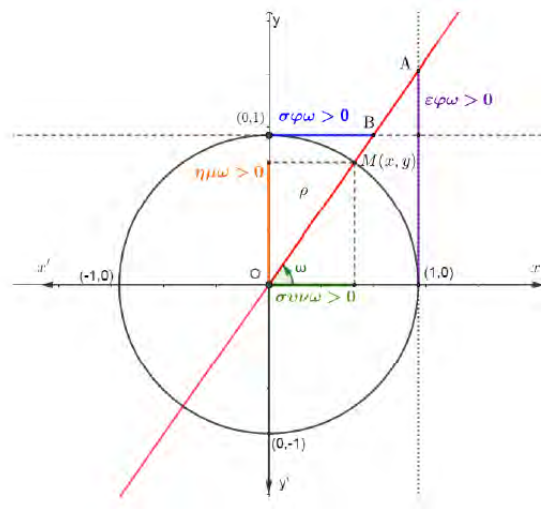
Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο $\Lambda(0, 1)$ ονομάζεται **άξονας των συνεφαπτομένων**.

Το πρόσημο του ημιτόνου και συνημιτόνου μπορεί να βρεθεί με την προβολή της τελικής πλευράς της γωνίας πάνω στους άξονες των ημιτόνων και συνημιτόνων, αντίστοιχα, και το πρόσημο της εφαπτομένης και συνεφαπτομένης με την τομή της προέκτασης της τελικής πλευράς της γωνίας με τους άξονες των εφαπτομένων και συνεφαπτομένων, αντίστοιχα.

- Αν η γωνία ω έχει τελική πλευρά στο 1^ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου, τότε το σημείο $M(x, y)$ έχει $x > 0$ και $y > 0$.

Συνεπώς:

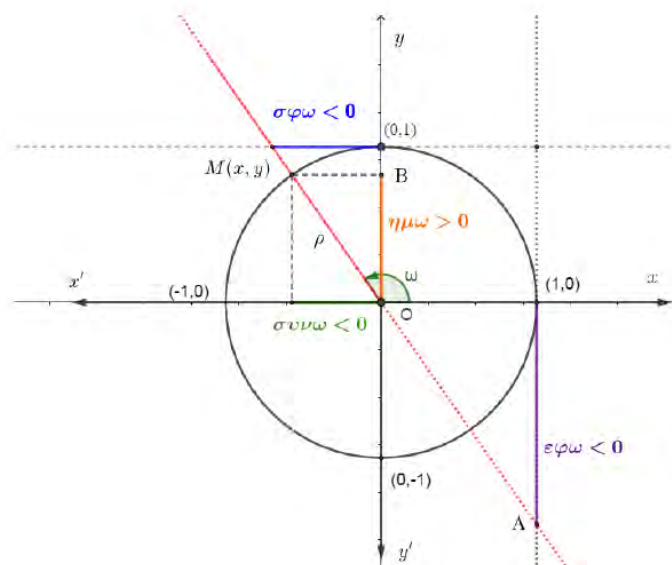
$$\eta\mu\omega > 0, \quad \sigma\upsilon\upsilon\omega > 0, \quad \epsilon\phi\omega > 0, \quad \sigma\phi\omega > 0$$



- Αν η γωνία ω έχει τελική πλευρά στο 2^ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου, τότε το σημείο $M(x, y)$ έχει $x < 0$ και $y > 0$.

Συνεπώς:

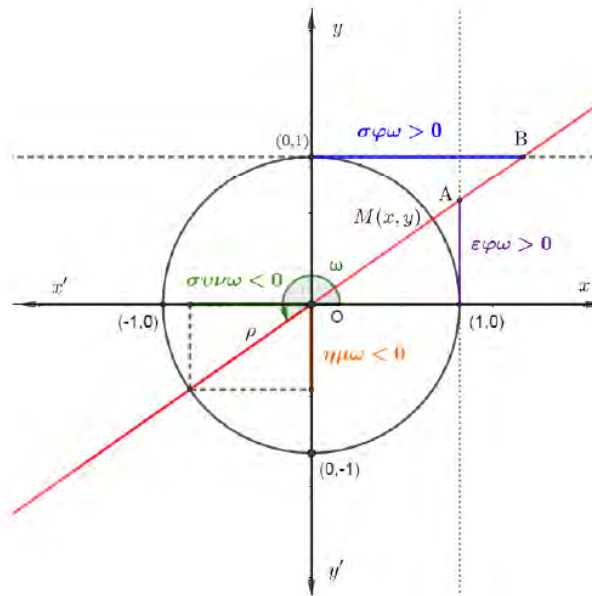
$$\eta\mu\omega < 0, \quad \sigma\upsilon\upsilon\omega < 0, \quad \epsilon\phi\omega < 0, \quad \sigma\phi\omega < 0$$



- Αν η γωνία ω έχει τελική πλευρά στο 3^ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου, τότε το σημείο $M(x, y)$ έχει $x < 0$ και $y < 0$.

Συνεπώς:

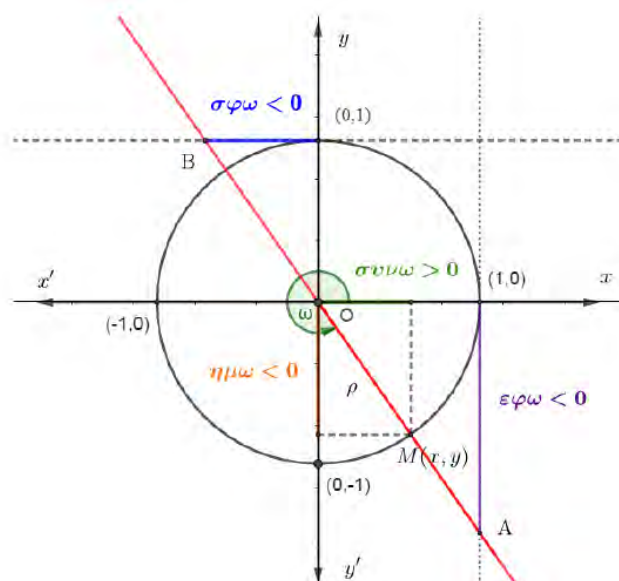
$$\eta\mu\omega < 0, \quad \sigma\upsilon\upsilon\omega < 0, \quad \epsilon\varphi\omega > 0, \quad \sigma\varphi\omega > 0$$



- Αν η γωνία ω έχει τελική πλευρά στο 4^ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου, τότε το σημείο $M(x, y)$ έχει $x > 0$ και $y < 0$.

Συνεπώς:

$$\eta\mu\omega < 0, \quad \sigma\upsilon\upsilon\omega > 0, \quad \epsilon\varphi\omega < 0, \quad \sigma\varphi\omega < 0$$



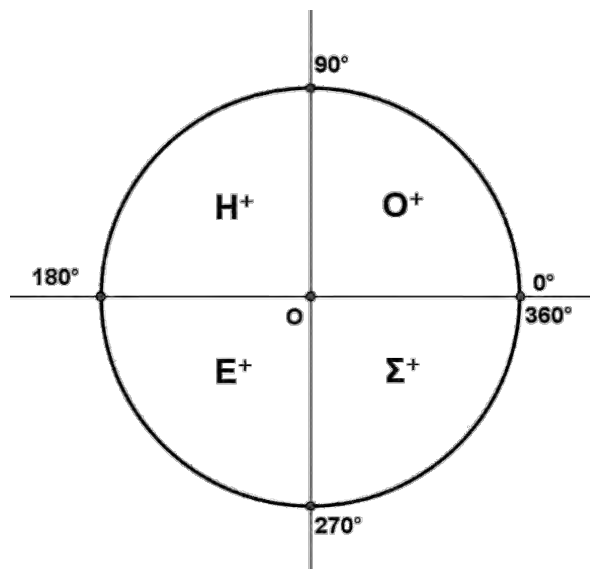
Όλα τα πιο πάνω συνοψίζονται στον πιο κάτω πίνακα.

| | 1° τεταρτημόριο | 2° τεταρτημόριο | 3° τεταρτημόριο | 4° τεταρτημόριο |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ημω | + | + | - | - |
| συνω | + | - | - | + |
| εφω | + | - | + | - |

- Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί στεμω, τεμω και σφω έχουν τα ίδια πρόσημα με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημω, συνω και εφω, αντίστοιχα, αφού:

$$\text{στεμω} = \frac{1}{\eta\mu\omega}, \quad \text{τεμω} = \frac{1}{\sigma\upsilon\eta\omega}, \quad \text{σφω} = \frac{1}{\epsilon\phi\omega}$$

- Με βάση τα πιο πάνω, η εύρεση του προσήμου των τριγωνομετρικών αριθμών συνοψίζεται στον πιο κάτω μνημονικό κανόνα, όπου:
 - Στο 1° τεταρτημόριο όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί.
 - Στο 2° τεταρτημόριο θετικό είναι μόνο το ημίτονο.
 - Στο 3° τεταρτημόριο θετική είναι μόνο η εφαπτομένη.
 - Στο 4° τεταρτημόριο θετικό είναι μόνο το συνημίτονο.

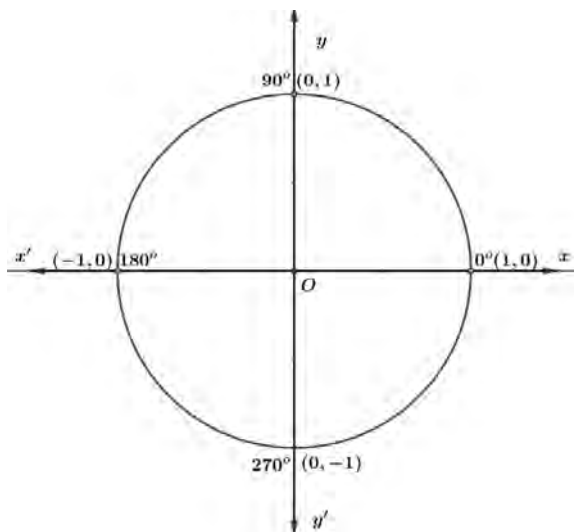


Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το ημίτονο και τα συνημίτονο των $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$.

Λύση

- Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο 0° τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $(1, 0)$. Άρα:
 $\eta\mu 0^\circ = 0$ (τεταγμένη του $(1, 0)$)
 $\sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1$ (τετμημένη του $(1, 0)$)
- Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο 90° τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $(0, 1)$. Άρα:
 $\eta\mu 90^\circ = 1$ (τεταγμένη του $(0, 1)$)
 $\sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0$ (τετμημένη του $(0, 1)$)
- Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο 180° τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $(-1, 0)$. Άρα:
 $\eta\mu 180^\circ = 0$ (τεταγμένη του $(-1, 0)$)
 $\sigma\upsilon\nu 180^\circ = -1$ (τετμημένη του $(-1, 0)$)
- Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο 270° τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $(0, -1)$. Άρα:
 $\eta\mu 270^\circ = -1$ (τεταγμένη του $(0, -1)$)
 $\sigma\upsilon\nu 270^\circ = 0$ (τετμημένη του $(0, -1)$)
- Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο 360° τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $(1, 0)$. Άρα:
 $\eta\mu 360^\circ = 0$ (τεταγμένη του $(1, 0)$)
 $\sigma\upsilon\nu 360^\circ = 1$ (τετμημένη του $(1, 0)$)



| | 0° | 90° | 180° | 270° | 360° |
|-----|-----------|------------|-------------|-------------|-------------|
| ημ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| συν | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |

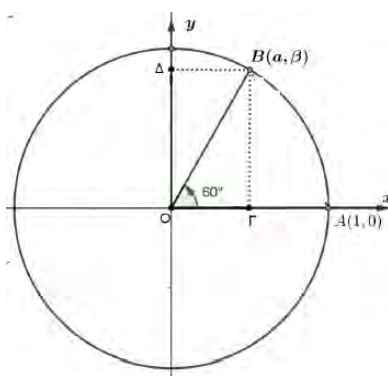
Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη των γωνιών 30° , 45° και 60° , με χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου.

Λύση

(α) Τριγωνομετρικοί αριθμοί των 60° :

Η τελική πλευρά της γωνίας (σε κανονική θέση) με μέτρο 60° τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $B(a, \beta)$.



Άρα:

$\eta\mu 60^\circ = \beta$ (τεταγμένη του B)

$\sigma\upsilon\eta 60^\circ = a$ (τετμημένη του B)

Το τρίγωνο OBG είναι ορθογώνιο με γωνία $\hat{G} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ και μήκος υποτείνουσας $(OB) = 1$. Άρα, $\hat{O} = 30^\circ$. Γνωρίζουμε ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο με μία οξεία γωνία ίση με 30° , η απέναντι πλευρά των 30° είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Επομένως, το μήκος της πλευράς OG είναι ίσο με:

$$(OG) = \frac{(OB)}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\eta 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο OBG , έχουμε:

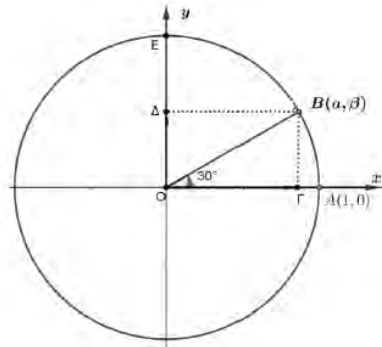
$$\begin{aligned} (OB)^2 &= (OG)^2 + (BG)^2 \Rightarrow 1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (BG)^2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} + \beta^2 \\ \Rightarrow \beta^2 &= \frac{3}{4} \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu 60^\circ \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\epsilon\varphi 60^\circ = \frac{\beta}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

(β) Τριγωνομετρικοί αριθμοί των 30° :

Η τελική πλευρά της γωνίας (σε κανονική θέση) με μέτρο 30° τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $B(a, \beta)$.



Άρα:

$$\eta\mu 30^\circ = \beta \text{ (τεταγμένη του } B)$$

$$\sigma\upsilon\nu 30^\circ = a \text{ (τετμημένη του } B)$$

Το τρίγωνο $OB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με γωνία $\hat{\Gamma} = 90^\circ, \hat{O} = 30^\circ$ και μήκος υποτείνουσας $(OB) = 1$. Γνωρίζουμε ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο με μία οξεία γωνία ίση με 30° , η απέναντι πλευρά των 30° είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Επομένως, το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ είναι ίσο με:

$$(B\Gamma) = \frac{(OB)}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $OB\Gamma$, έχουμε:

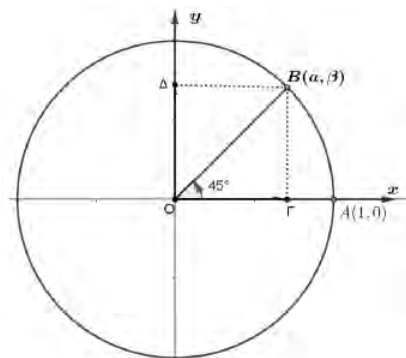
$$\begin{aligned} (OB)^2 &= (O\Gamma)^2 + (B\Gamma)^2 \Rightarrow 1^2 = (O\Gamma)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} + a^2 \\ \Rightarrow a^2 &= \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu 30^\circ \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\epsilon\phi 30^\circ = \frac{\beta}{a} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(γ) Τριγωνομετρικοί αριθμοί των 45° :

Η τελική πλευρά της γωνίας (σε κανονική θέση) με μέτρο 45° τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $B(a, \beta)$.



Άρα

$\eta\mu 45^\circ = \beta$ (τεταγμένη του B)

$\sigma\upsilon\nu 45^\circ = a$ (τετμημένη του B)

Το τρίγωνο $ΟΓΒ$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $(ΟΓ) = (ΒΓ)$ και το μέτρο της γωνίας $ΓΟΒ$ είναι ίσο με 45° . Επομένως:

$$(ΟΓ) = (ΒΓ) \Rightarrow a = \beta \Rightarrow \frac{\beta}{a} = 1 \Rightarrow \epsilon\varphi 45^\circ = 1$$

Με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΒΓ$, και δεδομένου ότι $a = \beta$, έχουμε:

$$\begin{aligned} (ΟΒ)^2 &= (ΟΓ)^2 + (ΒΓ)^2 \Rightarrow 1^2 = a^2 + \beta^2 \Rightarrow 1 = a^2 + a^2 \\ &\Rightarrow 1 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \beta \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Συνοψίζοντας τα πιο πάνω έχουμε τον πίνακα:

| | 30° | 45° | 60° |
|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\eta\mu$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\sigma\upsilon\nu$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\epsilon\varphi$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

Παράδειγμα 3

Να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών με μέτρο 117° , -55° και 420° .

Λύση

Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο 117° είναι στο 2° τεταρτημόριο.

Άρα:

$\eta\mu 117^\circ > 0$

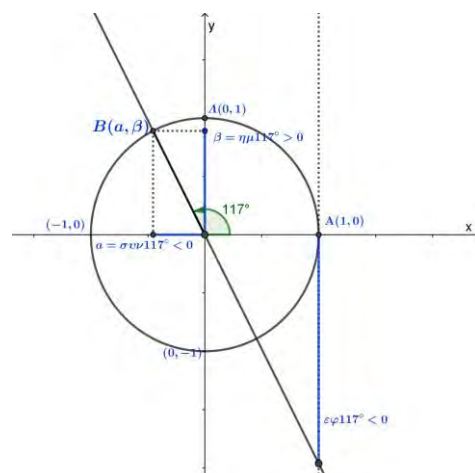
$\sigma\upsilon\nu 117^\circ < 0$

$\epsilon\varphi 117^\circ < 0$

$\sigma\tau\epsilon\mu 117^\circ > 0$

$\tau\epsilon\mu 117^\circ < 0$

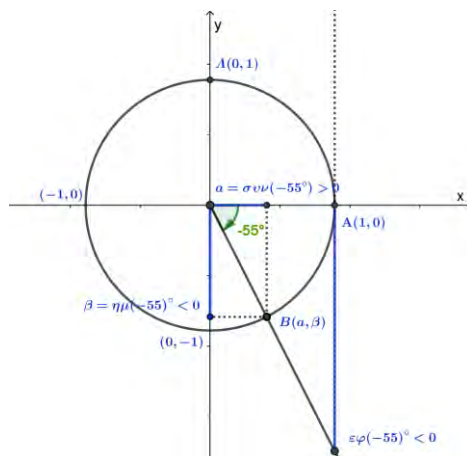
$\sigma\varphi 117^\circ < 0$



Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο -55° είναι στο 4^ο τεταρτημόριο.

Άρα:

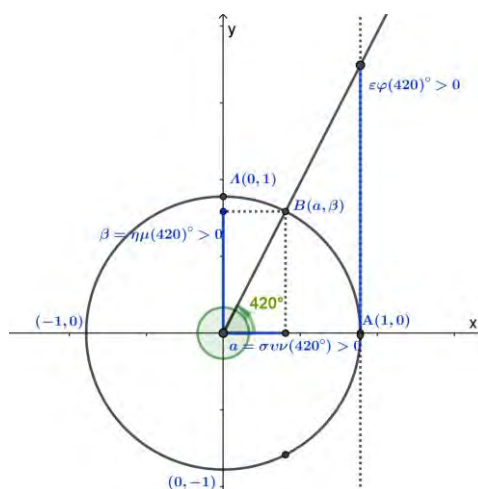
- $\eta\mu(-55^\circ) < 0$
- $\sigma\upsilon\nu(-55^\circ) > 0$
- $\epsilon\varphi(-55^\circ) < 0$
- $\sigma\tau\epsilon\mu(-55^\circ) < 0$
- $\tau\epsilon\mu(-55^\circ) > 0$
- $\sigma\varphi(-55^\circ) < 0$



Η τελική πλευρά της γωνίας με μέτρο 420° είναι στο 1^ο τεταρτημόριο.

Άρα:

- $\eta\mu 420^\circ > 0$
- $\sigma\upsilon\nu 420^\circ > 0$
- $\epsilon\varphi 420^\circ > 0$
- $\sigma\tau\epsilon\mu 420^\circ > 0$
- $\tau\epsilon\mu 420^\circ > 0$
- $\sigma\varphi 420^\circ > 0$



Παράδειγμα 4

Δίνεται το σημείο A με συντεταγμένες $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

- (α) Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο.
- (β) Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω που είναι σε κανονική θέση τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο A , να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\epsilon\varphi\omega$ και $\sigma\varphi\omega$.
- (γ) Να αναπαραστήσετε στον τριγωνομετρικό κύκλο τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\epsilon\varphi\omega$ και $\sigma\varphi\omega$.

Λύση

- (α) Για να ανήκει το σημείο $A(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ στον τριγωνομετρικό κύκλο, πρέπει να ισχύει $\rho = (OA) = 1$. Έχουμε:

$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

Συνεπώς, το σημείο A ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο.

- (β) Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$ ορίζονται ως η τεταγμένη και η τετμημένη του σημείου A , αντίστοιχα. Συνεπώς:

$$\eta\mu\omega = y_A = \frac{4}{5} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\omega = x_A = -\frac{3}{5}$$

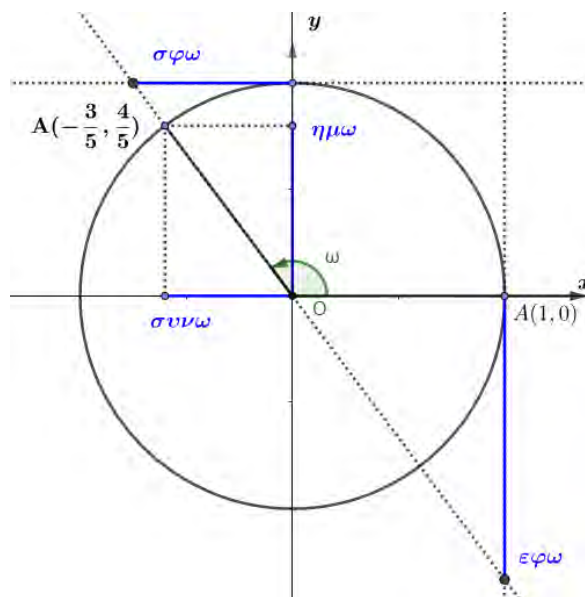
Ο τριγωνομετρικός αριθμός $\epsilon\varphi\omega$ ορίζεται ως το πηλίκο της τεταγμένης του σημείου A ως προς την τετμημένη του. Συνεπώς:

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{y_A}{x_A} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

Ο τριγωνομετρικός αριθμός $\sigma\varphi\omega$ ορίζεται ως το πηλίκο της τετμημένης του σημείου A ως προς την τεταγμένη του. Συνεπώς:

$$\sigma\varphi\omega = \frac{x_A}{y_A} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

- (γ) Η αναπαράσταση των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας ω με τελική πλευρά, η οποία τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $A\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, φαίνονται στο σχήμα.



Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

| | | |
|------|--|---------------|
| (α) | Το σημείο με συντεταγμένες $(1, 1)$ ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) | Αν το σημείο με συντεταγμένες $A(\kappa, \lambda)$ ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο και η τελική πλευρά μίας γωνίας θ , που είναι σε κανονική θέση, διέρχεται από το σημείο A , τότε ισχύει $\text{συν}\theta = \kappa$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) | Ισχύει $\text{συν}\left(-\frac{\pi}{7}\right) > 0$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) | Η τελική πλευρά της γωνίας $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$ rad, η οποία βρίσκεται σε κανονική θέση, τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο με συντεταγμένες $(0, 1)$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ε) | Το σημείο με συντεταγμένες $\left(\frac{\sqrt{19}}{5}, -\frac{\sqrt{6}}{5}\right)$ ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (στ) | Αν η γωνία $\theta = -2$ rad βρίσκεται σε κανονική θέση, τότε έχει τελική πλευρά που βρίσκεται στο τρίτο τεταρτημόριο. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ζ) | Το σημείο με συντεταγμένες $A(\kappa, \lambda)$, $\kappa > 0$ ανήκει πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = 2x$. Τότε, για κάθε γωνία θ , που βρίσκεται σε κανονική θέση και έχει τελική πλευρά που διέρχεται από το σημείο A , ισχύει $\epsilon\phi\theta = 2$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

2. Να εξετάσετε κατά υπάρχουν ή όχι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = -\frac{3}{2}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.
3. Να βρείτε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών με μέτρο $30^\circ, 236^\circ, -52^\circ, 370^\circ, -150^\circ$.
4. Η τελική πλευρά μίας γωνίας ω που είναι σε κανονική θέση τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο με συντεταγμένες $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega, \text{συν}\omega, \epsilon\phi\omega$ και $\sigma\phi\omega$.

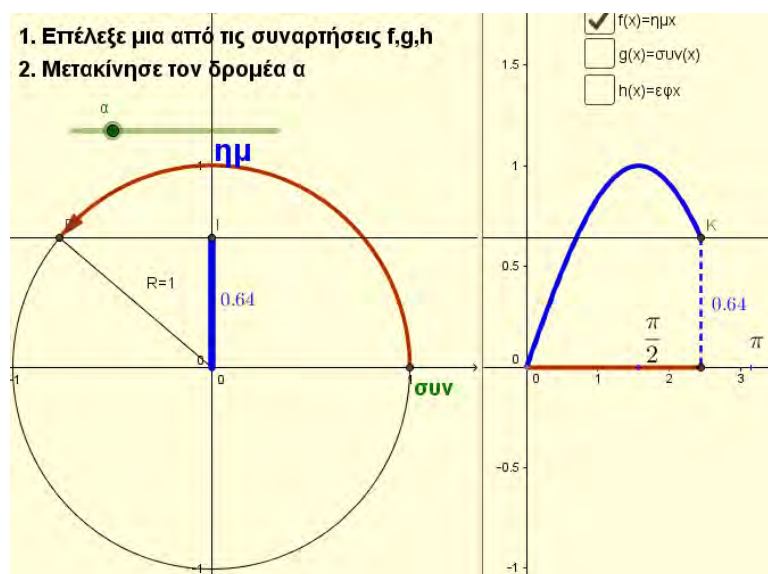
5. Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας θ , αν:
- (α) $\eta\mu\theta > 0$ και $\sigma\upsilon\upsilon\theta < 0$
 - (β) $\epsilon\phi\theta < 0$ και $\sigma\upsilon\upsilon\theta < 0$
 - (γ) $\sigma\phi\theta > 0$ και $\eta\mu\theta < 0$
6. Αν $180^\circ < x < 270^\circ$, να δείξετε ότι $\epsilon\phi x > \sigma\upsilon\upsilon x$.
7. Σε ποιο τεταρτημόριο ανήκει η γωνία ω , για την οποία ισχύει $\epsilon\phi\omega < 0$ και $\tau\epsilon\mu\omega > 0$;
8. Η τελική πλευρά μιας γωνίας ω που είναι σε κανονική θέση τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο A με συντεταγμένες (κ, λ) . Να εκφράσετε συναρτήσει των κ και λ τις παραστάσεις:
- (α) $\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\upsilon\omega$
 - (β) $\epsilon\phi\omega + \sigma\phi\omega$
 - (γ) $\frac{1}{\sigma\upsilon\upsilon^2\omega} - \frac{1}{\sigma\phi^2\omega}$

2.5 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑ Ή ΔΙΑΦΟΡΑ $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$

2.5.1 Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Διερεύνηση

- Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «[ALyk_En02_TrigonometrikiSynartisi.ggb](#)».



Δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος στο αριστερό μέρος της οθόνης.

- Να επιλέξετε το « $\eta\mu x$ » στο δεξιό μέρος της οθόνης.
- Να επιλέξετε τον δρομέα « a » και να δώσετε διάφορες τιμές για τη γωνία x . Στη συνέχεια, να επιλέξετε το «*Εμφάνιση Γραφικής Παράστασης*».
- Να παρατηρήσετε τη γραφική παράσταση που εμφανίζεται.
- Να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία, επιλέγοντας το « $\sigma\upsilon\nu x$ » και το « $\epsilon\varphi x$ » στο δεξιό μέρος της οθόνης και να παρατηρήσετε τη γραφική παράσταση που εμφανίζεται σε κάθε περίπτωση.
- Να δώσετε μια συγκεκριμένη τιμή στη γωνία x , έτσι ώστε $0^\circ < x < 90^\circ$ και να καταγράψετε τις τιμές των $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\epsilon\varphi x$ που εμφανίζονται στο αριστερό μέρος της οθόνης. Στη συνέχεια, να καταγράψετε τις τιμές των $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, $\epsilon\varphi x$ για γωνίες που έχουν άθροισμα ή διαφορά $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ με τη γωνία x . Τι παρατηρείτε σε κάθε περίπτωση;

- Δύο γωνίες οι οποίες έχουν την ίδια τελική πλευρά, διαφέρουν κατά $360^\circ \kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, ή $2\pi\kappa \text{ rad}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.
- Γωνίες με την ίδια τελική πλευρά έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Για παράδειγμα, ισχύει ότι:

$$\eta\mu\theta = \eta\mu(\theta + 360^\circ) = \eta\mu(\theta + 720^\circ) = \dots = \eta\mu(\theta + (-360^\circ)) = \dots$$

Παρατηρούμε ότι το 360° είναι ο πιο μικρός θετικός αριθμός, από όλους τους αριθμούς της μορφής $360^\circ \kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, για τον οποίο ισχύει:

$$\eta\mu\theta = \eta\mu(\theta + 360^\circ \kappa), \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

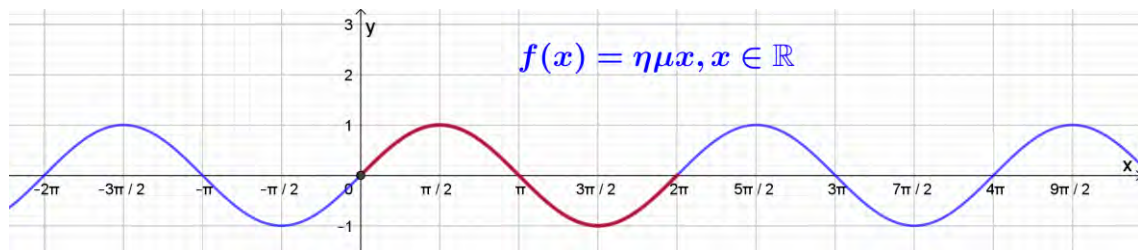
Ορισμός

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , $A \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

- (α) $(x + T) \in A$, $(x - T) \in A$ και
 (β) $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

Ο μικρότερος από τους θετικούς αριθμούς T , για τους οποίους ισχύουν τα πιο πάνω λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f .

Όπως έχει οριστεί το $\eta\mu x$ στον τριγωνομετρικό κύκλο, για κάθε τιμή της γωνίας x αντιστοιχεί μια μόνο τιμή του $\eta\mu x$. Έτσι, ορίζεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \eta\mu x$ με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$ ($-1 \leq \eta\mu x \leq 1$).



Από την πιο πάνω γραφική παράσταση, παρατηρούμε ότι το μέρος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$ επαναλαμβάνεται σε κάθε επόμενο (ή προηγούμενο) διάστημα πλάτους 2π .

Μπορούμε, δηλαδή, να έχουμε τις ίδιες τιμές της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ για τιμές του $x \in \mathbb{R}$, οι οποίες διαφέρουν μεταξύ τους απόσταση ίση με 2π .

Για παράδειγμα, στη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ αν πάρουμε ως τετμημένη την $x = \frac{\pi}{6}$, τότε είμαστε σε θέση να γράψουμε διάφορες τετμημένες, όπως $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6}$, $x_3 = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$ κτλ, οι οποίες να μας δίνουν ακριβώς τις ίδιες τιμές της συνάρτησης f . Ισχύει δηλαδή ότι:

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = f\left(\frac{13\pi}{6}\right) = f\left(\frac{25\pi}{6}\right) = f\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$$

Παρατηρούμε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$, ο αριθμός 2π είναι ο πιο μικρός θετικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $f(x) = f(x + 2\pi)$.

Επομένως, αυτός ο αριθμός αποτελεί την **περίοδο** της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή, η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο 2π , όπου 2π είναι ο **μικρότερος θετικός αριθμός**, για τον οποίο ισχύει:

$$f(x) = f(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ακόμα, έχουμε ότι:

$$f(x) = f(x + 2\pi) = f(x + 4\pi) = f(x + 6\pi) = \dots = f(x - 2\pi)$$

Παρατηρήσεις

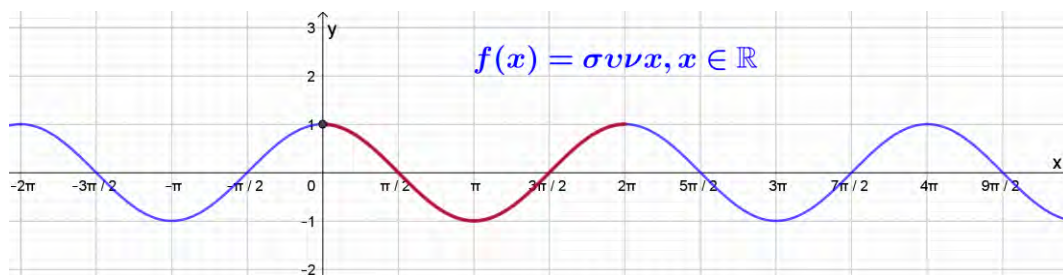
- Για τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι $\eta\mu \frac{\pi}{6} = \eta\mu \frac{5\pi}{6}$. Δεν μπορούμε όμως να ισχυριστούμε ότι η διαφορά $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ μπορεί να αποτελέσει περίοδο για τη συνάρτηση του ημιτόνου. Αυτό συμβαίνει, γιατί δεν ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ότι $\eta\mu x = \eta\mu \left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$, αφού, για παράδειγμα, $\eta\mu \frac{\pi}{2} \neq \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)$.
- Για $\kappa \in \mathbb{Z}$, ισχύει γενικά ότι:

$$\eta\mu x = \eta\mu(2\kappa\pi + x)$$

Έτσι, οι τιμές του $\eta\mu x$ επαναλαμβάνονται σε διαστήματα πλάτους 2π .

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε και τη συνάρτηση του συνημιτόνου.

Όπως έχει οριστεί το $\sigma\upsilon\nu x$ στον τριγωνομετρικό κύκλο, για κάθε τιμή της γωνίας x αντιστοιχεί μια μόνο τιμή του $\sigma\upsilon\nu x$. Έτσι, ορίζεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και σύνολο τιμών το διάστημα $[-1, 1]$ ($-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$).



Τα τόξα x και $2\kappa\pi + x$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ έχουν και πάλι τις ίδιες τιμές της συνάρτησης.

Επομένως, $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + x)$.

Δηλαδή, οι τιμές του $\sigma\upsilon\nu x$ επαναλαμβάνονται σε διαστήματα πλάτους 2π .

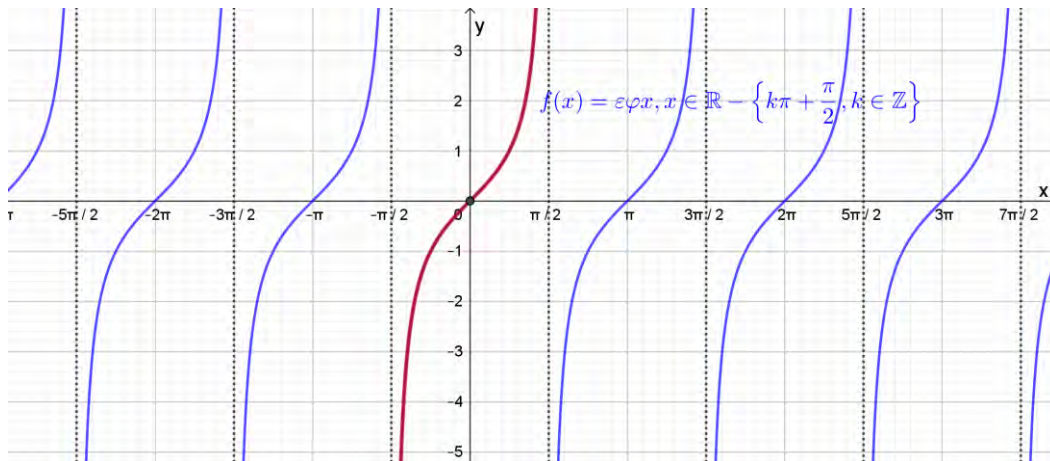
Επομένως, η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο 2π , όπου 2π είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει:

$$f(x) = f(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Από τον ορισμό της εφαπτομένης, ισχύει ότι σε κάθε γωνία x με $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, αντιστοιχεί ακριβώς ένας αριθμός y ως εφαπτομένη.

Έτσι, ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\varphi x$, $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \epsilon\varphi x$ είναι το \mathbb{R} .



Ισχύει ότι:

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi(x + k\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Έτσι, η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι **περιοδική με περίοδο π** .

2.5.2 Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών που έχουν άθροισμα ή διαφορά $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$

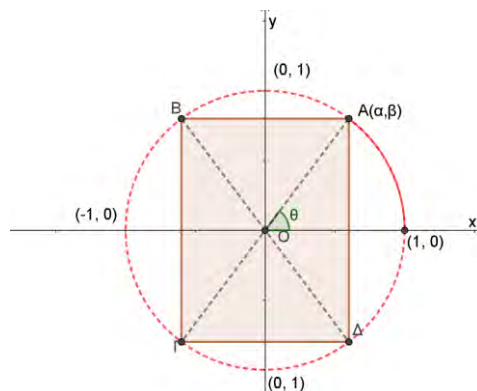
Εξερεύνηση

Δίνεται τυχαία γωνία θ σε κανονική θέση με τελική πλευρά, η οποία τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $A(a, \beta)$. Να εξετάσετε όλες τις πιο κάτω περιπτώσεις, όταν η γωνία θ βρίσκεται σε κάθε τεταρτημόριο ξεχωριστά:

- (α) Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η γωνία $(180^\circ - \theta)$;
- (β) Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η γωνία $(90^\circ - \theta)$;
- (γ) Ποιες είναι οι συντεταγμένες στον τριγωνομετρικό κύκλο των πιο πάνω δύο γωνιών στις περιπτώσεις (α) και (β);

Διερεύνηση 1

Στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι εγγεγραμμένο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Η κορυφή A έχει συντεταγμένες $A(a, \beta)$ και αντιστοιχεί τόξο μέτρου θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$).



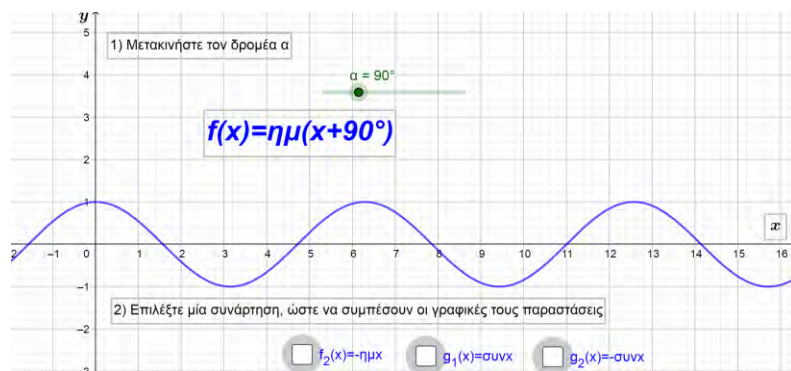
- Να συμπληρώσετε τα κενά στον πιο κάτω πίνακα:

| Κορυφή – Συντεταγμένες | Αντίστοιχη γωνία | Τριγωνομετρικοί αριθμοί |
|------------------------|------------------------|---|
| $A(a, \beta)$ | θ | $\text{συν}\theta = a, \text{ημ}\theta = \beta$ |
| $B(\dots, \dots)$ | $(180^\circ - \theta)$ | $\text{συν}(180^\circ - \theta) = \dots$ $\text{ημ}(180^\circ - \theta) = \dots$ |
| $\Gamma(\dots, \dots)$ | | |
| $\Delta(\dots, \dots)$ | | |

- Να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματα του πιο πάνω πίνακα και να γράψετε τη σχέση που συνδέει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $(180^\circ \pm \theta)$ και $(360^\circ \pm \theta)$, συναρτήσει των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας θ .

Διερεύνηση 2

- Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «[ALyk_En02_TrigonometrikiSynartisi2.ggb](#)».



Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu(x + a)$, όπου το a παίρνει τιμές από το σύνολο $\{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ\}$. Επιλέγοντας κατάλληλα ένα τετραγωνάκι μπορούμε να σχηματίσουμε τις συναρτήσεις $f_2(x) = -\eta\mu x$, $g_1(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g_2(x) = -\sigma\upsilon\nu x$.

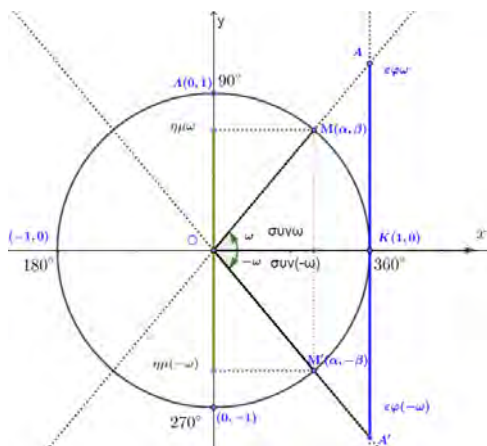
- Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, επιλέγοντας ως απάντηση μία από τις συναρτήσεις, f_2, g_1, g_2 (αν αυτό είναι εφικτό).

| | |
|-----|------------------------------------|
| (α) | $\eta\mu(x + 0^\circ) = \eta\mu x$ |
| (β) | $\eta\mu(x + 90^\circ) = \dots$ |
| (γ) | $\eta\mu(x + 180^\circ) = \dots$ |
| (δ) | $\eta\mu(x + 270^\circ) = \dots$ |
| (ε) | $\eta\mu(x + 360^\circ) = \dots$ |

- ✓ Τι παρατηρείτε στις πιο πάνω ισότητες;
- ✓ Σε ποιες περιπτώσεις η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(x + a), x \in \mathbb{R}$, μετατρέπεται σε συνάρτηση της μορφής $\pm \sigma\upsilon\nu x$ και σε ποιες όχι;

Γωνίες με άθροισμα 0° (Αντίθετες)

Παίρνουμε τις αντίθετες γωνίες ω και $-\omega$ σε κανονική θέση. Οι τελικές πλευρές των δύο γωνιών τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε σημεία M και M' συμμετρικά ως προς τον άξονα των συνημιτόνων, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Δηλαδή, αν το σημείο M έχει συντεταγμένες $M(a, \beta)$, τότε το M' έχει συντεταγμένες $M'(a, -\beta)$.



Για την προσανατολισμένη γωνία ω , η οποία έχει τελική πλευρά την OM , έχουμε:

$$\text{συν}\omega = a, \quad \eta\mu\omega = \beta$$

Για την προσανατολισμένη γωνία $-\omega$, η οποία έχει τελική πλευρά την OM' , έχουμε:

$$\text{συν}(-\omega) = a = \text{συν}\omega, \quad \eta\mu(-\omega) = -\beta = -\eta\mu\omega$$

Από την ισότητα των τριγώνων OKA και OKA' , προκύπτει ότι $KA = KA'$. Επομένως:

$$\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$$

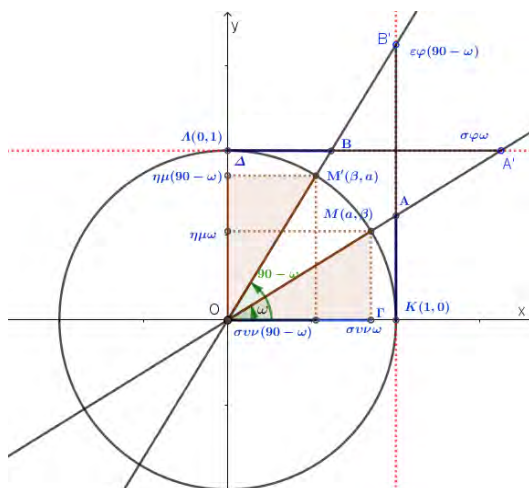
Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \eta\mu(-\omega) &= -\eta\mu\omega \\ \text{συν}(-\omega) &= \text{συν}\omega \\ \epsilon\varphi(-\omega) &= -\epsilon\varphi\omega \end{aligned}$$

Γωνίες με άθροισμα 90° (Συμπληρωματικές)

Παίρνουμε τις συμπληρωματικές γωνίες ω και $90^\circ - \omega$.

Από τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα OGM και ODM' ($OM = OM'$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Gamma\hat{O}M = M'\hat{O}\Delta$), έχουμε $M(a, \beta)$ και $M'(\beta, a)$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Για την προσανατολισμένη γωνία ω , η οποία έχει τελική πλευρά την OM , έχουμε:

$$\text{συν}\omega = a, \quad \eta\mu\omega = \beta$$

Για την προσανατολισμένη γωνία $90^\circ - \omega$, η οποία έχει τελική πλευρά την OM' , έχουμε:

$$\text{συν}(90^\circ - \omega) = \beta = \eta\mu\omega, \quad \eta\mu(90^\circ - \omega) = a = \text{συν}\omega$$

Από την ισότητα των τριγώνων OKB' και OLA' , προκύπτει ότι $KB' = LA'$. Επομένως:

$$\epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$$

Παρατηρούμε ότι:

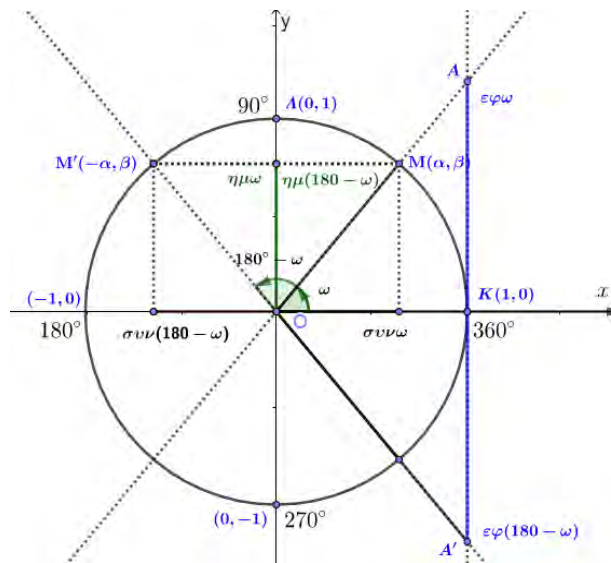
$$\eta\mu(90^\circ - \omega) = \text{συν}\omega$$

$$\text{συν}(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$$

Γωνίες με άθροισμα 180° (Παραπληρωματικές)

Παίρνουμε τις παραπληρωματικές γωνίες ω και $180 - \omega$ σε κανονική θέση. Οι τελικές πλευρές των δύο γωνιών τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία $M(a, \beta)$ και $M'(-a, \beta)$ γιατί τα σημεία M και M' είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα των ημιτόνων, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Για την προσανατολισμένη γωνία ω , η οποία έχει τελική πλευρά την OM , έχουμε:

$$a = \text{συν}\omega, \quad \beta = \eta\mu\omega$$

Για την προσανατολισμένη γωνία $180^\circ - \omega$, η οποία έχει τελική πλευρά την OM' , έχουμε:

$$\text{συν}(180^\circ - \omega) = -a = -\text{συν}\omega, \quad \eta\mu(180^\circ - \omega) = \beta = \eta\mu\omega$$

Από την ισότητα των τριγώνων OKA και OKA' , προκύπτει ότι $KA = KA'$. Επομένως:

$$\epsilon\varphi\omega = -\epsilon\varphi(180^\circ - \omega)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$

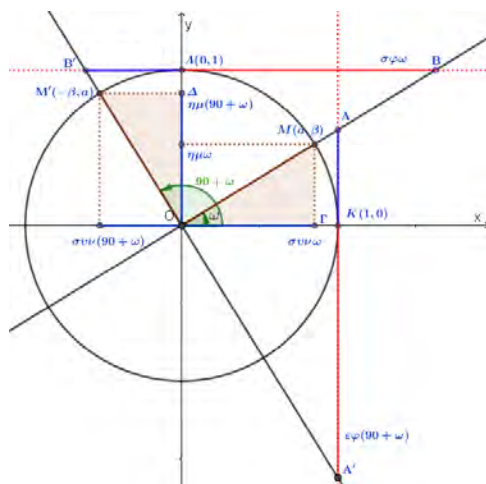
$$\text{συν}(180^\circ - \omega) = -\text{συν}\omega$$

$$\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$$

Γωνίες με διαφορά 90°

Παίρνουμε τις γωνίες ω και $90^\circ + \omega$. Οι τελικές τους πλευρές τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία M και M' αντίστοιχα.

Από τα ίσα τρίγωνα OGM και ODM' , έχουμε $M(a, \beta)$ και $M'(-\beta, a)$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Για την προσανατολισμένη γωνία ω , η οποία έχει τελική πλευρά την OM , έχουμε:

$$a = \text{συν}\omega, \quad \beta = \eta\mu\omega$$

Για την προσανατολισμένη γωνία $90^\circ + \omega$, η οποία έχει τελική πλευρά την OM' , έχουμε:

$$\text{συν}(90^\circ + \omega) = -\beta = -\eta\mu\omega, \quad \eta\mu(90^\circ + \omega) = a = \text{συν}\omega$$

Από την ισότητα των τριγώνων OKA' και OAB , προκύπτει ότι $KA' = AB$. Επομένως:

$$\epsilon\varphi(90^\circ + \omega) = -\sigma\varphi\omega$$

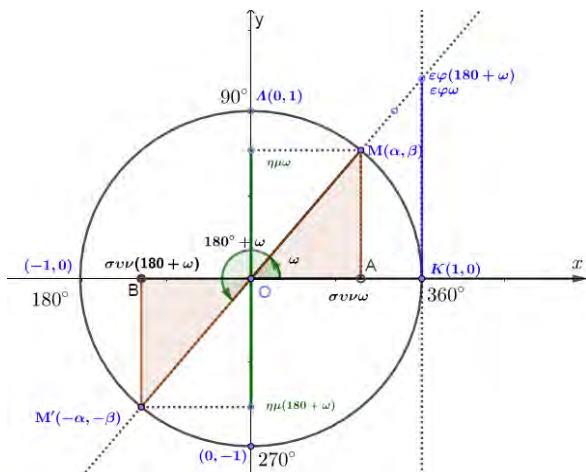
Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \eta\mu(90^\circ + \omega) &= \text{συν}\omega \\ \text{συν}(90^\circ + \omega) &= -\eta\mu\omega \\ \epsilon\varphi(90^\circ + \omega) &= -\sigma\varphi\omega \end{aligned}$$

Γωνίες με διαφορά 180°

Παίρνουμε τις γωνίες ω και $180^\circ + \omega$.

Από τα ίσα τρίγωνα OAM και OBM' , έχουμε $M(a, \beta)$ και $M'(-a, -\beta)$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Για την προσανατολισμένη γωνία ω , η οποία έχει τελική πλευρά την OM , έχουμε:

$$a = \text{συν}\omega, \quad \beta = \text{ημ}\omega$$

Για την προσανατολισμένη γωνία $180^\circ + \omega$, η οποία έχει τελική πλευρά την OM' , έχουμε:

$$\text{συν}(180^\circ + \omega) = -a = -\text{συν}\omega, \quad \text{ημ}(180^\circ + \omega) = -\beta = -\text{ημ}\omega$$

Η γωνία MOM' είναι ευθεία γωνία. Επομένως:

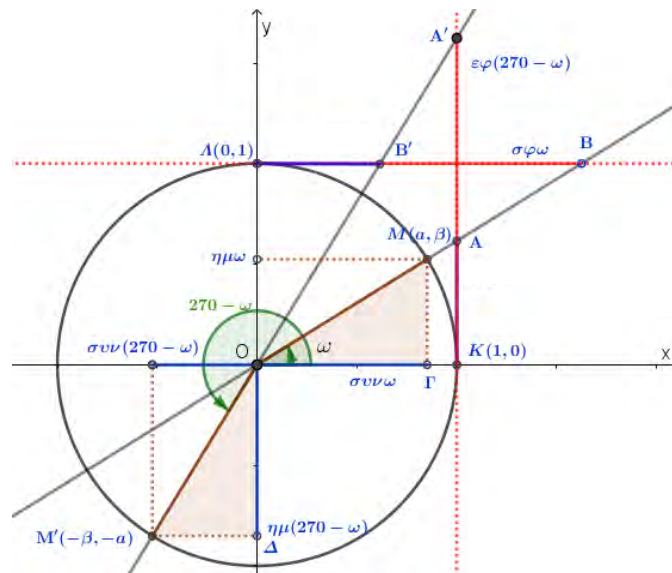
$$\text{εφ}(180^\circ + \omega) = \text{εφ}\omega$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \text{ημ}(180^\circ + \omega) &= -\text{ημ}\omega \\ \text{συν}(180^\circ + \omega) &= -\text{συν}\omega \\ \text{εφ}(180^\circ + \omega) &= \text{εφ}\omega \end{aligned}$$

Γωνίες με άθροισμα 270°

Παίρνουμε τις γωνίες ω και $270^\circ - \omega$. Από τα ίσα τρίγωνα $O\Gamma M$ και $O\Delta M'$, έχουμε $M(a, \beta)$ και $M'(-\beta, -a)$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Για την προσανατολισμένη γωνία ω , η οποία έχει τελική πλευρά την OM , έχουμε:

$$a = \text{συν}\omega, \quad \beta = \text{ημ}\omega$$

Για την προσανατολισμένη γωνία $270^\circ - \omega$, η οποία έχει τελική πλευρά την OM' , έχουμε:

$$\text{συν}(270^\circ - \omega) = -\beta = \text{ημ}\omega, \quad \text{ημ}(270^\circ - \omega) = -a = -\text{συν}\omega$$

Από την ισότητα των τριγώνων OKA' και $O\Delta B$, προκύπτει ότι $KA' = \Delta B$. Επομένως:

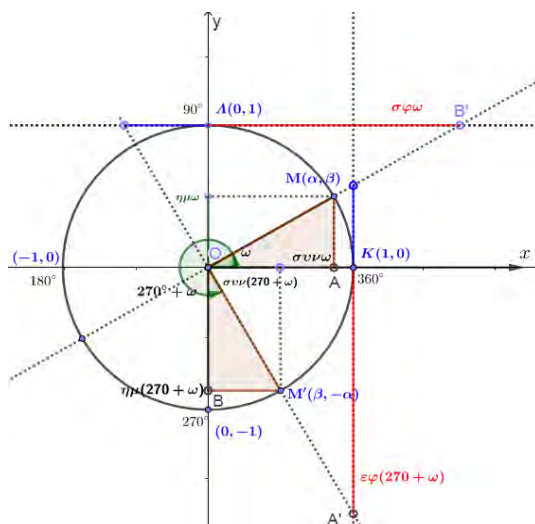
$$\text{εφ}(270^\circ - \omega) = \text{εφ}\omega$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \text{ημ}(270^\circ - \omega) &= -\text{συν}\omega \\ \text{συν}(270^\circ - \omega) &= -\text{ημ}\omega \\ \text{εφ}(270^\circ - \omega) &= \text{εφ}\omega \end{aligned}$$

Γωνίες με διαφορά 270°

Παίρνουμε τις γωνίες ω και $270^\circ + \omega$. Οι τελικές πλευρές των γωνιών τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε σημεία M και M' . Από τα ίσα τρίγωνα OAM και OBM' , έχουμε $M(a, \beta)$ και $M'(\beta, -a)$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Για την προσανατολισμένη γωνία ω , η οποία έχει τελική πλευρά την OM , έχουμε:

$$a = \text{συν}\omega, \quad \beta = \text{ημ}\omega$$

Για την προσανατολισμένη γωνία $270^\circ + \omega$, η οποία έχει τελική πλευρά την OM' , έχουμε:

$$\text{συν}(270^\circ + \omega) = \beta = \text{ημ}\omega, \quad \text{ημ}(270^\circ + \omega) = -a = -\text{συν}\omega$$

Από την ισότητα των τριγώνων OKA' και OLB' , προκύπτει ότι $KA' = LB'$. Επομένως:

$$\text{εφ}(270^\circ + \omega) = -\text{σφ}\omega$$

Παρατηρούμε ότι:

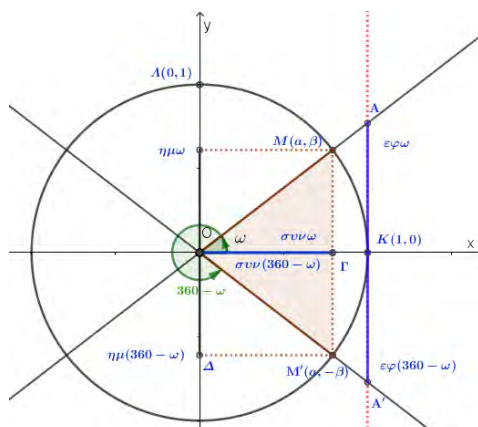
$$\text{ημ}(270^\circ + \omega) = -\text{συν}\omega$$

$$\text{συν}(270^\circ + \omega) = \text{ημ}\omega$$

$$\text{εφ}(270^\circ + \omega) = -\text{σφ}\omega$$

Γωνίες με άθροισμα 360°

Παίρνουμε τις γωνίες είναι της μορφής ω και $360^\circ - \omega$. Οι τελικές πλευρές των γωνιών τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε σημεία $M(a, \beta)$ και $M'(a, -\beta)$, συμμετρικά ως προς τον άξονα των συνημιτόνων, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Για την προσανατολισμένη γωνία ω , η οποία έχει τελική πλευρά την OM , έχουμε:

$$a = \text{συν}\omega, \quad \beta = \eta\mu\omega$$

Για την προσανατολισμένη γωνία $360^\circ - \omega$, η οποία έχει τελική πλευρά την OM' , έχουμε:

$$\text{συν}(360^\circ - \omega) = a = \text{συν}\omega, \quad \eta\mu(360^\circ - \omega) = -\beta = -\eta\mu\omega$$

Από την ισότητα των τριγώνων OKA και OKA' , προκύπτει ότι $KA = KA'$. Επομένως:

$$\epsilon\phi(360^\circ - \omega) = -\epsilon\phi\omega$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\eta\mu(360^\circ - \omega) = -\eta\mu\omega$$

$$\text{συν}(360^\circ - \omega) = \text{συν}\omega$$

$$\epsilon\phi(360^\circ - \omega) = -\epsilon\phi\omega$$

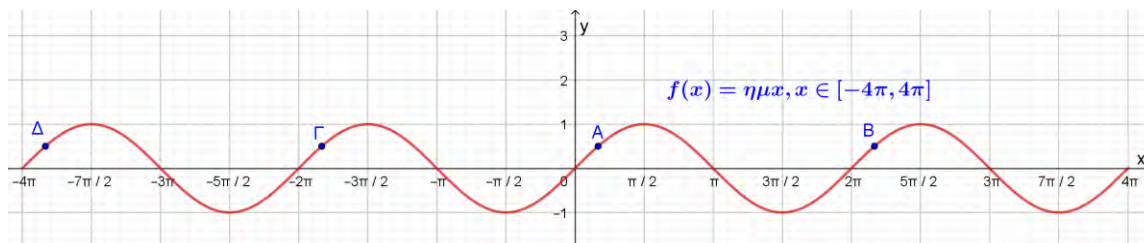
Σημείωση

Με τους πιο πάνω τύπους, μπορούμε να εκφράσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας με τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας.

Η διαδικασία αυτή λέγεται **αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο**.

Παράδειγμα 1

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$, $-4\pi \leq x \leq 4\pi$. Το σημείο A έχει συντεταγμένες $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$. Να γράψετε την τετμημένη των σημείων B, Γ και Δ , αν γνωρίζουμε ότι η τεταγμένη τους είναι ίση με $\frac{1}{2}$.



Λύση

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική και ισχύει ότι:

$$f(x) = f(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Τα σημεία A, B, Γ, Δ έχουν την ίδια τεταγμένη. Άρα, βρίσκονται στην τομή της ευθείας $y = \frac{1}{2}$ και της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$.

Ειδικότερα:

- Το σημείο B βρίσκεται 2π μονάδες δεξιά του σημείου A . Άρα, η τετμημένη του είναι ίση με $2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$.
- Το σημείο Γ βρίσκεται 2π μονάδες αριστερά του σημείου A . Άρα, η τετμημένη του είναι ίση με $-2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{-11\pi}{6}$.
- Το σημείο Δ βρίσκεται 4π μονάδες αριστερά του σημείου A . Άρα, η τετμημένη του είναι ίση με $-4\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{-23\pi}{6}$.

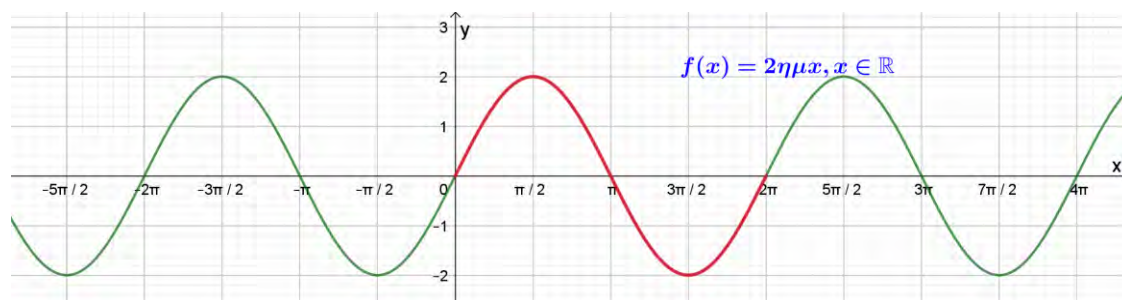
Παράδειγμα 2

Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις $f(x) = 2\eta\mu x, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x, x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την περίοδο της καθεμιάς.

Λύση

Για τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = 2\eta\mu x, x \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι τέμνει τον άξονα των τετμημένων ($y = 0$), όταν $\eta\mu x = 0$, δηλαδή όπως και η συνάρτηση $h(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$. Τα σημεία αυτά έχουν τετμημένη όλα τα ακέραια πολλαπλάσια του π , δηλαδή $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$. Έτσι, για τη συνάρτηση f θα ισχύει επίσης ότι $-2 \leq 2\eta\mu x \leq 2$. Επομένως, για όλες εκείνες τις τιμές για τις οποίες ισχύει $\eta\mu x = 1$ ή $\eta\mu x = -1$, ακριβώς για τις ίδιες τιμές θα έχουμε και $2\eta\mu x = 2$ ή $2\eta\mu x = -2$, αντίστοιχα.

Συνοψίζοντας τα πιο πάνω, έχουμε ότι σε κάθε σημείο $A(a, \beta)$, το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση της $h(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$, το αντίστοιχο σημείο της γραφικής παράστασης της $f(x) = 2\eta\mu x, x \in \mathbb{R}$ είναι το $A'(a, 2\beta)$. Έτσι, έχουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2\eta\mu x, x \in \mathbb{R}$.



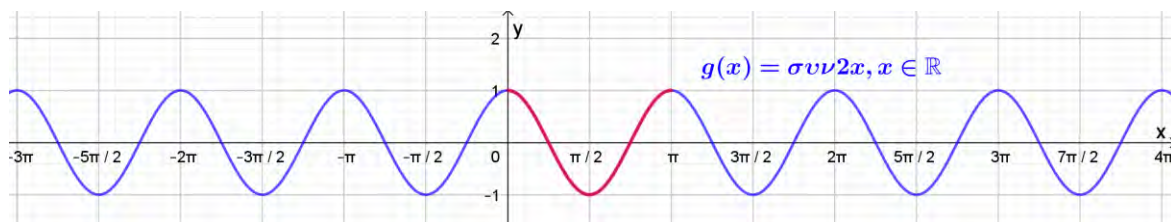
Αφού η περίοδος της $h(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$ είναι το 2π , τότε και η περίοδος της $f(x) = 2\eta\mu x, x \in \mathbb{R}$ θα είναι επίσης 2π , γιατί ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x + 2\pi) = 2\eta\mu(x + 2\pi) = 2\eta\mu x = f(x)$$

Για τη συνάρτηση με τύπο $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x, x \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι τέμνει τον άξονα των τετμημένων ($y = 0$), όταν $\sigma\upsilon\nu 2x = 0$, δηλαδή όταν $2x = \pm \frac{\pi}{2}, 2x = 2\pi \pm \frac{\pi}{2}$, δηλαδή στα σημεία με τετμημένη $\pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{7\pi}{4}$ κτλ. Επίσης, για $x = 0 \Rightarrow f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$, δηλαδή η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο με συντεταγμένες $(0, 1)$. Για τη συνάρτηση g ισχύει $-1 \leq \sigma\upsilon\nu 2x \leq +1$.

Γενικά παρατηρούμε ότι σε κάθε σημείο $A(a, \beta)$, το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση της $h(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$, το αντίστοιχο σημείο της γραφικής παράστασης της $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x, x \in \mathbb{R}$ είναι το $A'(\frac{a}{2}, \beta)$.

Έτσι, έχουμε τη γραφική παράσταση της $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x, x \in \mathbb{R}$.



Αν ο αριθμός $T > 0$ είναι η περίοδος της συνάρτησης g , τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} &\Rightarrow \sigma\upsilon\nu(2(x + T)) = \sigma\upsilon\nu(2x) \\ &\Rightarrow \sigma\upsilon\nu(2x + 2T) = \sigma\upsilon\nu(2x + 2\pi) \\ &\Rightarrow 2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi \end{aligned}$$

Επομένως, η περίοδος της συνάρτησης $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x, x \in \mathbb{R}$ είναι $T = \pi$.

Αυτό επαληθεύεται και από την αντίστοιχη γραφική της παράσταση, δηλαδή παρατηρούμε ότι το μέρος της γραφικής παράστασης για $0 \leq x \leq \pi$ επαναλαμβάνεται σε κάθε διάστημα (επόμενο ή προηγούμενο) πλάτους π .

Παράδειγμα 3

Να γίνει αναγωγή των πιο κάτω τριγωνομετρικών αριθμών στο 1° τεταρτημόριο:

- (α) $\eta\mu 187^\circ$ (β) $\sigma\upsilon\nu 294^\circ$ (γ) $\epsilon\phi 123^\circ$ (δ) $\tau\epsilon\mu(-125^\circ)$

Λύση

(α) $\eta\mu 187^\circ = \eta\mu(180^\circ + 7^\circ) = -\eta\mu 7^\circ$

Η γωνία 187° έχει την τελική πλευρά της στο 3° τεταρτημόριο. Άρα, το $\eta\mu 187^\circ$ είναι αρνητικό και γνωρίζουμε ότι $\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$.

(β) $1^\circ\varsigma$ τρόπος

$\sigma\upsilon\nu 294^\circ = \sigma\upsilon\nu(270^\circ + 24^\circ) = \eta\mu 24^\circ$

Η γωνία 294° έχει την τελική πλευρά της στο 4° τεταρτημόριο. Άρα, το $\sigma\upsilon\nu 294^\circ$ είναι θετικό και γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu(270^\circ + \omega) = \eta\mu\omega$.

$2^\circ\varsigma$ τρόπος

$\sigma\upsilon\nu 294^\circ = \sigma\upsilon\nu(360^\circ - 66^\circ) = \sigma\upsilon\nu 66^\circ$

Η γωνία 294° έχει την τελική πλευρά της στο 4° τεταρτημόριο. Άρα, το $\sigma\upsilon\nu 294^\circ$ είναι θετικό και γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu(360^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$.

(γ) $1^\circ\varsigma$ τρόπος

$\epsilon\phi 123^\circ = \epsilon\phi(180^\circ - 57^\circ) = -\epsilon\phi 57^\circ$

Η γωνία 123° έχει την τελική πλευρά της στο 2° τεταρτημόριο. Άρα, η $\epsilon\phi 123^\circ$ είναι αρνητική και γνωρίζουμε ότι $\epsilon\phi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\phi\omega$.

$2^\circ\varsigma$ τρόπος

$\epsilon\phi 123^\circ = \epsilon\phi(90^\circ + 33^\circ) = -\sigma\phi 33^\circ$

Η γωνία 123° έχει την τελική πλευρά της στο 2° τεταρτημόριο. Άρα, η $\epsilon\phi 123^\circ$ είναι αρνητική και γνωρίζουμε ότι $\epsilon\phi(90^\circ + \omega) = -\sigma\phi\omega$.

(δ) 1^{ος} τρόπος

$$\text{τεμ}(-125^\circ) = \frac{1}{\text{συν}(-125^\circ)} = \frac{1}{\text{συν}125^\circ} = \frac{1}{\text{συν}(90^\circ + 35^\circ)} = \frac{1}{-\text{ημ}35^\circ} = -\text{στεμ}35^\circ$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\text{τεμ}(-\omega) = \frac{1}{\text{συν}(-\omega)}$$

Η γωνία 125° έχει την τελική πλευρά της στο 2^ο τεταρτημόριο. Άρα, το $\text{συν}125^\circ$ είναι αρνητικό και γνωρίζουμε ότι $\text{συν}(90^\circ + \omega) = -\text{ημ}\omega$.

2^{ος} τρόπος

$$\text{τεμ}(-125^\circ) = \frac{1}{\text{συν}(-125^\circ)} = \frac{1}{\text{συν}125^\circ} = \frac{1}{\text{συν}(180^\circ - 55^\circ)} = \frac{1}{-\text{συν}55^\circ} = -\text{τεμ}55^\circ$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\text{τεμ}(-\omega) = \frac{1}{\text{συν}(-\omega)}$$

Η γωνία 125° έχει την τελική πλευρά της στο 2^ο τεταρτημόριο. Άρα, το $\text{συν}125^\circ$ είναι αρνητικό και γνωρίζουμε ότι $\text{συν}(180^\circ - \omega) = -\text{συν}\omega$.

Δραστηριότητες

1. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης A τον ίσο του τριγωνομετρικό αριθμό από τη στήλη B .

| A | | B | |
|-----|-------------------------------|----|-------------------------------|
| | | 1. | $\eta\mu 40^\circ$ |
| (α) | $\eta\mu 140^\circ$ | 2. | $\sigma\upsilon\nu 40^\circ$ |
| | | 3. | $\epsilon\varphi 40^\circ$ |
| (β) | $\sigma\upsilon\nu 140^\circ$ | 4. | $-\eta\mu 40^\circ$ |
| | | 5. | $-\sigma\upsilon\nu 40^\circ$ |
| (γ) | $\epsilon\varphi 140^\circ$ | 6. | $-\epsilon\varphi 40^\circ$ |

| (α) | (β) | (γ) |
|-----|-----|-----|
| | | |

2. Αν για τη γωνία x ισχύει $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$, να συμπληρώσετε τις πιο κάτω προτάσεις:
- (α) Αν $\eta\mu x = \eta\mu 60^\circ$, τότε $x = \dots\dots\dots$
- (β) Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu 20^\circ$, τότε $x = \dots\dots\dots$
- (γ) Αν $\epsilon\varphi x = -\epsilon\varphi 30^\circ$, τότε $x = \dots\dots\dots$
3. Να γράψετε τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς ως τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας:
- (α) $\eta\mu 375^\circ$ (β) $\epsilon\varphi(-80^\circ)$ (γ) $\sigma\upsilon\nu(-288^\circ)$ (δ) $\sigma\tau\epsilon\mu 220^\circ$
 (ε) $\tau\epsilon\mu(300^\circ)$ (στ) $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ (ζ) $\epsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ (η) $\sigma\varphi\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$
4. Να κάνετε τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις και να βρείτε την περίοδο της καθεμιάς.
- (α) $f(x) = \eta\mu(2x)$, $x \in \mathbb{R}$
 (β) $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$
5. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι πιο κάτω προτάσεις:
- (α) $\eta\mu\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
 (β) $\tau\epsilon\mu\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\tau\epsilon\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)$
 (γ) $\sigma\upsilon\nu(\theta - \pi) = -\sigma\upsilon\nu\theta$
 (δ) $\sigma\tau\epsilon\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) = -\tau\epsilon\mu\omega$

6. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(\alpha) \quad A = \eta\mu(180^\circ + a) - \sigma\upsilon\nu(90^\circ + a) + \sigma\upsilon\nu(360^\circ - a) + \epsilon\varphi(270^\circ - a)$$

$$(\beta) \quad B = \sigma\varphi(a - 2\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(a - \frac{3\pi}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu(a + 2\pi) - 2\eta\mu(a - \pi)$$

$$(\gamma) \quad \Gamma = \frac{\eta\mu(\pi - \omega) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega - 2\pi)}{\epsilon\varphi(\pi + \omega) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) \cdot \eta\mu(-\omega)}$$

7. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

| | | |
|------|--|---------------|
| (α) | Αν $\eta\mu\theta = 0,76$, τότε $\eta\mu(-\theta) = -0,76$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) | Αν $\sigma\upsilon\nu(360^\circ - \theta) = 0,28$, τότε $\sigma\upsilon\nu\theta = -0,28$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) | Αν $\epsilon\varphi\theta = 1,3$, τότε $\epsilon\varphi(\pi + \theta) = 1,3$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) | Αν $f(x) = \epsilon\varphi x$, τότε $f(x + \pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ε) | Αν $\sigma\upsilon\nu x = a$, τότε $\sigma\upsilon\nu(x + 3\pi) = a$, όπου $x \in \mathbb{R}$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (στ) | Αν τα σημεία $A\left(\frac{3\pi}{8}, a\right)$ και $B\left(-\frac{13\pi}{8}, \beta\right)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$, τότε $a = \beta$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ζ) | Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, τότε $f(x + 10\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (η) | Αν $\sigma\tau\epsilon\mu\theta > 0$, τότε $\sigma\tau\epsilon\mu(180^\circ + \theta) > 0$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\varphi x$, $x \in [-4\pi, 4\pi]$, με $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$. Τα σημεία A, B, Γ, Δ και E έχουν την ίδια τεταγμένη και η τετμημένη του σημείου A είναι $x = \frac{2\pi}{7}$. Η τετμημένη των σημείων B και Γ είναι θετική και η τετμημένη των σημείων Δ και E είναι αρνητική. Να βρείτε τις πιθανές τιμές των τετμημένων των σημείων B, Γ, Δ και E .

9. Αν A, B, Γ είναι γωνίες ενός τριγώνου $AB\Gamma$, να δείξετε ότι:

$$(\alpha) \quad \sigma\upsilon\nu(A + B) = -\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

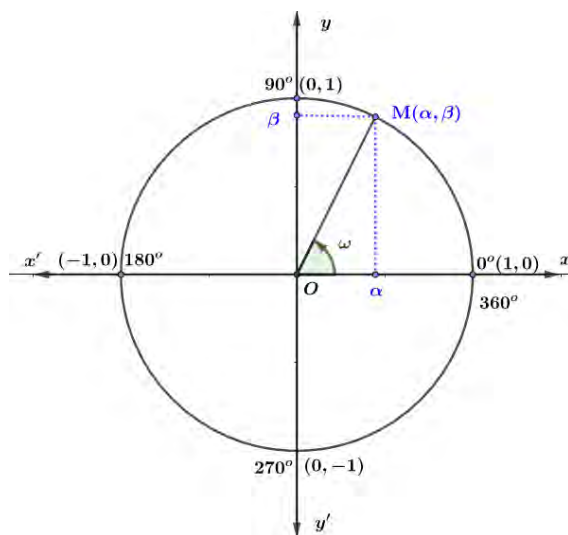
$$(\beta) \quad \epsilon\varphi(2A + 2\Gamma) = -\epsilon\varphi 2B$$

$$(\gamma) \quad \eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$$

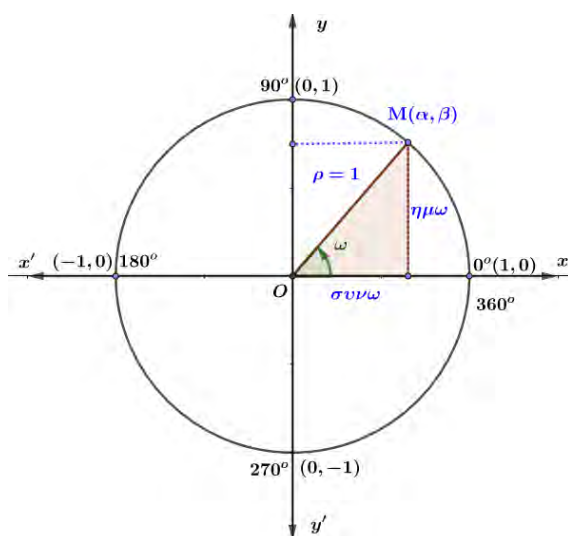
2.6 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Διερεύνηση

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος. Η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον κύκλο στο σημείο $M(\alpha, \beta)$.



- (α) Να εκφράσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$, συναρτήσεϊ των συντεταγμένων του σημείου M .
- (β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$.
- Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «[ALyk_En02_TrigTaut_ggb](#)».



Να μετακινήσετε το σημείο M και να ελέγξετε κατά πόσο η σχέση που βρήκατε στο ερώτημα (β) είναι δυνατόν να γενικευθεί και στις περιπτώσεις κατά τις οποίες η γωνία ω ανήκει στο 2° , 3° και 4° τεταρτημόριο.

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

Αποδεικνύεται ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί συνδέονται μεταξύ τους με κάποιες σχέσεις τις οποίες ονομάζουμε **τριγωνομετρικές ταυτότητες**.

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}, \quad \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

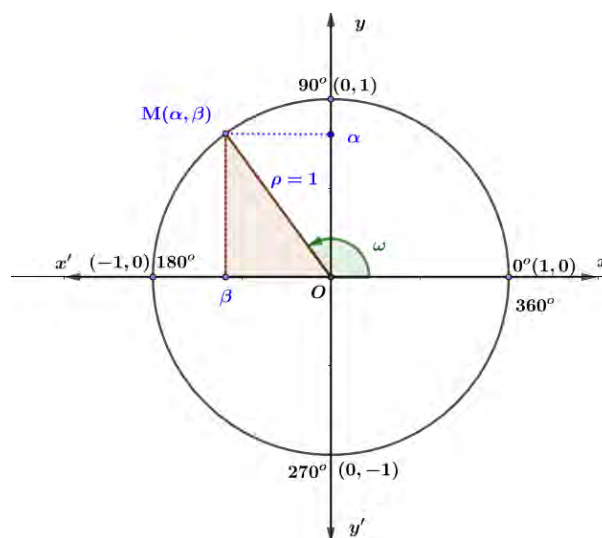
Απόδειξη

- Αν OM είναι η τελική πλευρά μια γωνίας ω και M είναι η τομή της με τον τριγωνομετρικό κύκλο με συντεταγμένες $M(a, \beta)$, έχουμε:

$$a = \sigma\upsilon\nu\omega, \quad \beta = \eta\mu\omega, \quad \frac{\beta}{a} = \varepsilon\varphi\omega$$

Επομένως,

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\beta}{a} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$



- Η συνεφαπτομένη της γωνίας ω ορίζεται ως:

$$\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

- Η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(a, \beta)$. Έχουμε ότι:

$$a = \sigma\upsilon\nu\omega, \quad \beta = \eta\mu\omega, \quad OM = 1, \quad (OM)^2 = \beta^2 + a^2 \Rightarrow 1 = \beta^2 + a^2$$

Έτσι:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1$$

$$\varepsilon\varphi^2\omega + 1 = \tau\epsilon\mu^2\omega, \quad 1 + \sigma\varphi^2\omega = \sigma\tau\epsilon\mu^2\omega$$

Απόδειξη

- $1 + \varepsilon\varphi^2\omega = 1 + \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \tau\epsilon\mu^2\omega$
- $1 + \sigma\varphi^2\omega = 1 + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} = \frac{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} = \frac{1}{\eta\mu^2\omega} = \sigma\tau\epsilon\mu^2\omega$

(Με χρήση της ταυτότητας $\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1$)

Παρατηρήσεις

- Η τριγωνομετρική ταυτότητα $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ ισχύει για εκείνες τις γωνίες ω , για τις οποίες το $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$. Για παράδειγμα, η ταυτότητα δεν ισχύει, όταν $\omega = \frac{\pi}{2}$.
- Η τριγωνομετρική ταυτότητα $\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ ισχύει για εκείνες τις γωνίες ω , για τις οποίες το $\eta\mu\omega \neq 0$. Για παράδειγμα, η ταυτότητα δεν ισχύει, όταν $\omega = 0$.
- Η τριγωνομετρική ταυτότητα $1 + \varepsilon\varphi^2\omega = \tau\epsilon\mu^2\omega$ ισχύει για εκείνες τις γωνίες ω , για τις οποίες ορίζεται η $\varepsilon\varphi\omega$ και η $\tau\epsilon\mu\omega$. Για παράδειγμα, όταν $\omega = \frac{\pi}{2}$, η $\varepsilon\varphi\omega$ και η $\tau\epsilon\mu\omega$ δεν ορίζονται. Γενικά, η πιο πάνω τριγωνομετρική ταυτότητα **δεν** ισχύει όταν $\omega = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.
- Όμοια, και η ταυτότητα $1 + \sigma\varphi^2\omega = \sigma\tau\epsilon\mu^2\omega$ ισχύει για εκείνες τις γωνίες ω , για τις οποίες ορίζονται η $\sigma\varphi\omega$ και η $\sigma\tau\epsilon\mu\omega$.

Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}, \quad \eta\mu\omega \neq 0$$

$$\tau\epsilon\mu^2\omega = 1 + \varepsilon\varphi^2\omega$$

$$\sigma\tau\epsilon\mu^2\omega = 1 + \sigma\varphi^2\omega$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι:

$$\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega \sigma\varphi\omega = 1$$

$$\tau\epsilon\mu\omega = \frac{1}{\sigma\upsilon\upsilon\omega} \Rightarrow \sigma\upsilon\upsilon\omega \tau\epsilon\mu\omega = 1$$

$$\sigma\tau\epsilon\mu\omega = \frac{1}{\eta\mu\omega} \Rightarrow \eta\mu\omega \sigma\tau\epsilon\mu\omega = 1$$

Παράδειγμα 1

Αν

$$\sigma\upsilon\upsilon\theta = \frac{5}{13}, \quad 0^\circ < \theta < 90^\circ,$$

να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\upsilon^2\theta = 1 \Rightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \sigma\upsilon\upsilon^2\theta \Rightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} \Rightarrow \eta\mu\theta = \pm \frac{12}{13}$$

Η τελική πλευρά της γωνίας θ ανήκει στο 1^ο τεταρτημόριο ($0^\circ < \hat{\theta} < 90^\circ$). Επομένως:

$$\eta\mu\theta = \frac{12}{13} \quad (\eta\mu\theta > 0)$$

Επιπλέον, έχουμε ότι:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\upsilon\theta} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}, \quad \sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}$$
$$\tau\epsilon\mu\theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\upsilon\theta} = \frac{13}{5}, \quad \sigma\tau\epsilon\mu\theta = \frac{1}{\eta\mu\theta} = \frac{13}{12}$$

Παράδειγμα 2

Αν

$$\eta\mu\theta = \frac{3}{5}, \quad 90^\circ < \theta < 180^\circ,$$

να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\upsilon^2\theta = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\upsilon^2\theta = 1 - \eta\mu^2\theta \Rightarrow \sigma\upsilon\upsilon^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \sigma\upsilon\upsilon\theta = \pm \frac{4}{5}$$

Η τελική πλευρά της γωνίας θ ανήκει στο 2^ο τεταρτημόριο ($90^\circ < \hat{\theta} < 180^\circ$). Επομένως:

$$\text{συν}\theta = -\frac{4}{5} \quad (\text{συν}\theta < 0)$$

Επιπλέον, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi\theta &= \frac{\eta\mu\theta}{\text{συν}\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}, & \sigma\varphi\theta &= \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3} \\ \text{τεμ}\theta &= \frac{1}{\text{συν}\theta} = -\frac{5}{4}, & \sigma\text{τεμ}\theta &= \frac{1}{\eta\mu\theta} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3

Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

(α) $\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = \frac{1}{\eta\mu x \text{συν}x}$

(β) $\sigma\varphi^3 x = \frac{\sigma\text{τεμ}x - \eta\mu x}{\text{τεμ}x - \text{συν}x}$

(γ) $\varepsilon\varphi^2 a \eta\mu^2 a = \varepsilon\varphi^2 a - \eta\mu^2 a$

(δ) $\frac{1 + \text{συν}\beta}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu\beta}{1 - \text{συν}\beta}$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$A' \text{ μέλος} = \varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\text{συν}x} + \frac{\text{συν}x}{\eta\mu x} = \frac{\eta\mu^2 x + \text{συν}^2 x}{\eta\mu x \text{συν}x} = \frac{1}{\eta\mu x \text{συν}x} = B' \text{ μέλος}$$

(Αρχίσαμε από το A' μέλος και με κατάλληλους μετασχηματισμούς και πράξεις καταλήξαμε στο B' μέλος.)

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} B' \text{ μέλος} &= \frac{\sigma\text{τεμ}x - \eta\mu x}{\text{τεμ}x - \text{συν}x} = \frac{\frac{1}{\eta\mu x} - \eta\mu x}{\frac{1}{\text{συν}x} - \text{συν}x} = \frac{\frac{1 - \eta\mu^2 x}{\eta\mu x}}{\frac{1 - \text{συν}^2 x}{\text{συν}x}} = \frac{\frac{\text{συν}^2 x}{\eta\mu x}}{\frac{\eta\mu^2 x}{\text{συν}x}} = \frac{\text{συν}^2 x \text{συν}x}{\eta\mu^2 x \eta\mu x} \\ &= \frac{\text{συν}^3 x}{\eta\mu^3 x} = \left(\frac{\text{συν}x}{\eta\mu x}\right)^3 = \sigma\varphi^3 x = A' \text{ μέλος} \end{aligned}$$

(Αρχίσαμε από το B' μέλος και με κατάλληλους μετασχηματισμούς και πράξεις καταλήξαμε στο A' μέλος.)

(γ) 1^{ος} τρόπος

$$A' \text{ μέλος} = \varepsilon\varphi^2 a \eta\mu^2 a = \frac{\eta\mu^2 a}{\text{συν}^2 a} \eta\mu^2 a = \frac{\eta\mu^4 a}{\text{συν}^2 a}$$

$$\begin{aligned} \text{B' μέλος} &= \varepsilon\varphi^2 a - \eta\mu^2 a = \frac{\eta\mu^2 a}{\sigma\upsilon\nu^2 a} - \eta\mu^2 a = \frac{\eta\mu^2 a - \eta\mu^2 a \sigma\upsilon\nu^2 a}{\sigma\upsilon\nu^2 a} \\ &= \frac{\eta\mu^2 a(1 - \sigma\upsilon\nu^2 a)}{\sigma\upsilon\nu^2 a} = \frac{\eta\mu^2 a \eta\mu^2 a}{\sigma\upsilon\nu^2 a} = \frac{\eta\mu^4 a}{\sigma\upsilon\nu^2 a} \end{aligned}$$

Επομένως, $\varepsilon\varphi^2 a \eta\mu^2 a = \varepsilon\varphi^2 a - \eta\mu^2 a$.

(Μετασχηματίσαμε ξεχωριστά τα δύο μέλη και καταλήξαμε στην ίδια παράσταση.)

2^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned} \text{A' μέλος} &= \varepsilon\varphi^2 a \eta\mu^2 a = \frac{\eta\mu^2 a}{\sigma\upsilon\nu^2 a} \eta\mu^2 a = \frac{\eta\mu^2 a (1 - \sigma\upsilon\nu^2 a)}{\sigma\upsilon\nu^2 a} = \frac{\eta\mu^2 a - \eta\mu^2 a \sigma\upsilon\nu^2 a}{\sigma\upsilon\nu^2 a} \\ &= \frac{\eta\mu^2 a}{\sigma\upsilon\nu^2 a} - \frac{\eta\mu^2 a \sigma\upsilon\nu^2 a}{\sigma\upsilon\nu^2 a} = \left(\frac{\eta\mu a}{\sigma\upsilon\nu a}\right)^2 - \eta\mu^2 a = \varepsilon\varphi^2 a - \eta\mu^2 a = \text{B' μέλος} \end{aligned}$$

(Αρχίσαμε από το A' μέλος και με κατάλληλους μετασχηματισμούς και πράξεις καταλήξαμε στο B' μέλος.)

(δ) Για να αποδείξουμε την ταυτότητα

$$\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu\beta}{1 - \sigma\upsilon\nu\beta}$$

μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του A' μέλους με την παράσταση $1 - \sigma\upsilon\nu\beta \neq 0$.

Έτσι, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \text{A' μέλος} &= \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\beta} \cdot \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\beta}{1 - \sigma\upsilon\nu\beta} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2\beta}{\eta\mu\beta(1 - \sigma\upsilon\nu\beta)} \\ &= \frac{\eta\mu^2\beta}{\eta\mu\beta(1 - \sigma\upsilon\nu\beta)} = \frac{\eta\mu\beta}{1 - \sigma\upsilon\nu\beta} = \text{B' μέλος} \end{aligned}$$

(Αρχίσαμε από το A' μέλος και με κατάλληλους μετασχηματισμούς και πράξεις καταλήξαμε στο B' μέλος.)

Παράδειγμα 4

Να δείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu(180^\circ + a)}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - a)} - \frac{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - a)}{\eta\mu(180^\circ - a)} = \frac{1}{\eta\mu a \sigma\upsilon\nu a}$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \text{A' μέλος} &= \frac{\eta\mu(180^\circ + a)}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - a)} - \frac{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - a)}{\eta\mu(180^\circ - a)} \\ &= \frac{-\eta\mu a}{-\sigma\upsilon\nu a} - \frac{-\sigma\upsilon\nu a}{\eta\mu a} = \frac{\eta\mu a}{\sigma\upsilon\nu a} + \frac{\sigma\upsilon\nu a}{\eta\mu a} \\ &= \frac{\eta\mu^2 a + \sigma\upsilon\nu^2 a}{\eta\mu a \sigma\upsilon\nu a} \\ &= \frac{1}{\eta\mu a \sigma\upsilon\nu a} = \text{B' μέλος} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu^2 x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = 2\sigma\upsilon\nu x$$

(β) Να υπολογίσετε τις τιμές του x , όταν:

$$\frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu^2 x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = 1, \quad 0^\circ < x < 360^\circ$$

Λύση

(α) 1^{ος} τρόπος

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \text{Α' μέλος} &= \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu^2 x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu^2 x(1 + \sigma\upsilon\nu x) - \eta\mu^2 x(1 - \sigma\upsilon\nu x)}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)(1 - \sigma\upsilon\nu x)} \\ &= \frac{\eta\mu^2 x(1 + \sigma\upsilon\nu x - 1 + \sigma\upsilon\nu x)}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)(1 - \sigma\upsilon\nu x)} \\ &= \frac{\eta\mu^2 x \cdot 2\sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= \frac{\eta\mu^2 x \cdot 2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} = 2\sigma\upsilon\nu x = \text{Β' μέλος} \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \text{Α' μέλος} &= \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu^2 x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} - \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \\ &= \frac{(1 + \sigma\upsilon\nu x)(1 - \sigma\upsilon\nu x)}{1 - \sigma\upsilon\nu x} - \frac{(1 + \sigma\upsilon\nu x)(1 - \sigma\upsilon\nu x)}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \\ &= (1 + \sigma\upsilon\nu x) - (1 - \sigma\upsilon\nu x) = 2\sigma\upsilon\nu x = \text{Β' μέλος} \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu^2 x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = 1 &\Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu x = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow x = 60^\circ \text{ ή } x = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ \end{aligned}$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\varphi}$ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) $\text{συν}\varphi = \frac{5}{13}, 0^\circ < \varphi < 90^\circ$

(β) $\text{στεμ}\varphi = -\frac{37}{12}, \frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$

(γ) $\text{εφ}\varphi = \frac{15}{8}, 180^\circ < \varphi < 270^\circ$

2. Αν $\text{σφ}\omega = \frac{x}{5}, 0^\circ < \omega < 90^\circ$, να εκφράσετε συναρτήσει του x τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\omega$ και $\text{τεμ}\omega$.

3. Αν $\text{εφ}\theta = \frac{4}{3}, 180^\circ < \theta < 270^\circ$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{4\sigma\varphi\theta - 5\eta\mu\theta}{3\text{τεμ}\theta}$$

4. Αν $\eta\mu a = \frac{4}{5}, \text{συν}a < 0$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:
 $A = 10\text{συν}(180^\circ + a) + 3\text{εφ}(180^\circ - a)$

5. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

(α) $\eta\mu x \sigma\varphi x = \text{συν}x$

(β) $\text{εφ}x(\sigma\varphi x + \text{εφ}x) = \text{τεμ}^2x$

(γ) $\sigma\varphi x(\text{τεμ}x + \text{εφ}x) = \text{στεμ}x + 1$

(δ) $\eta\mu\omega(\text{στεμ}\omega - \eta\mu\omega) = \text{συν}^2\omega$

(ε) $\text{εφ}^2\theta \text{στεμ}^2\theta - \text{εφ}^2\theta = 1$

(στ) $\frac{\eta\mu x \text{συν}x + \eta\mu x}{\text{συν}x + \text{συν}^2x} = \text{εφ}x$

(ζ) $\frac{(\eta\mu\varphi + \text{συν}\varphi)^2}{\text{συν}\varphi} = \text{τεμ}\varphi + 2\eta\mu\varphi$

(η) $\frac{\text{συν}^2x}{\eta\mu x} + \eta\mu x = \text{στεμ}x$

(θ) $\frac{(1 + \text{εφ}x)^2}{\text{τεμ}x} = \text{τεμ}x + 2\eta\mu x$

(ι) $\text{τεμ}a - \frac{\text{εφ}^2a}{\text{τεμ}a} = \text{συν}a$

6. Αν $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$ και $\eta\mu 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$, να υπολογίσετε:

(α) το $\text{συν}15^\circ$

(β) την $\text{εφ}15^\circ$.

7. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

$$A = \frac{\varepsilon\varphi(180^\circ - \theta) \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta) \varepsilon\varphi(90^\circ - \theta)}{\eta\mu(90^\circ + \theta) \sigma\varphi(90^\circ - \theta) \varepsilon\varphi(\theta - 270^\circ)}$$

$$B = \frac{\sigma\upsilon\nu(3\pi + x) \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sigma\varphi(\pi - x)}{\eta\mu(\pi - x) \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

8. Αν $3\eta\mu^2x + 6\sigma\upsilon\nu^2x = 5$, να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi^2x = \frac{1}{2}$.

9. Να εκφράσετε την $\varepsilon\varphi x$ ($0^\circ < x < 90^\circ$) συναρτήσει του $\eta\mu x$.

10. Αν $x = 3\sigma\upsilon\nu\omega$ και $y = 3\eta\mu\omega$, να δείξετε ότι $x^2 + y^2 = 9$.

11. Να υπολογίσετε τη γωνία θ , αν:

$$\frac{\eta\mu(180^\circ - \theta) \varepsilon\varphi(90^\circ - \theta) \eta\mu(-\theta)}{\varepsilon\varphi(180^\circ - \theta) \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \theta)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 0^\circ < \theta < 180^\circ$$

12. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

$$(\alpha) \quad (1 + \eta\mu x) \left[1 + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \right] = \sigma\upsilon\nu^2x$$

$$(\beta) \quad (\tau\epsilon\mu x + 1)[\tau\epsilon\mu(-x) - 1] = \varepsilon\varphi^2x$$

13. Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες:

$$(\alpha) \quad \eta\mu x = 0, \quad \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$(\beta) \quad \eta\mu x = 1, \quad \sigma\upsilon\nu x = 1$$

$$(\gamma) \quad \eta\mu x = \frac{1}{3}, \quad \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{3}$$

$$(\delta) \quad \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

14. Αν $x = a\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = \beta\eta\mu\theta$, να δείξετε ότι:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

15. Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha) \quad \eta\mu(\pi - x) + \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \eta\mu(x - \pi) - \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$(\beta) \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + a\right) + \eta\mu(\pi - a) - \eta\mu(-a) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = 0$$

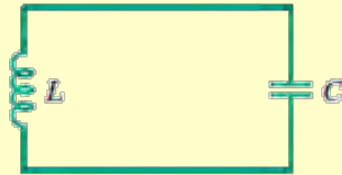
$$(\gamma) \quad \frac{\eta\mu(\pi + a) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) \varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)}{\eta\mu(2\pi - a)} = \sigma\upsilon\nu a$$

$$(\delta) \quad \eta\mu\omega + \sigma\tau\epsilon\mu(90^\circ - \omega) + \eta\mu(180^\circ + \omega) + \sigma\tau\epsilon\mu(270^\circ - \omega) = 0$$

16. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu(5\pi + \omega) \sigma\upsilon\nu(7\pi - \omega) \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)}{\sigma\phi(5\pi + \omega) \eta\mu(7\pi - \omega) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)} = \eta\mu^2\omega - 1$$

17. Με τον δέκτη ενός ραδιοφώνου επιλέγεις έναν ραδιοφωνικό σταθμό ρυθμίζοντας τη συχνότητα. Ένας δέκτης περιέχει ένα πηνίο L και έναν πυκνωτή C , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Η ενέργεια που αποθηκεύεται στο πηνίο κατά τον χρόνο t δίδεται από τον τύπο $L(t) = k \eta\mu^2(2\pi Ft)$ και η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή κατά τον χρόνο t δίδεται από τον τύπο $C(t) = k \sigma\upsilon\nu^2(2\pi Ft)$, όπου F είναι η συχνότητα του ραδιοφωνικού σταθμού και k είναι σταθερός αριθμός. Η συνολική ενέργεια E στο κύκλωμα δίνεται από τον τύπο $E(t) = L(t) + C(t)$. Να αποδείξετε ότι η ενέργεια E είναι σταθερή.

Περίληψη

1. **Ακτίσιο** είναι μονάδα μέτρησης μιας επίπεδης γωνίας, η οποία όταν γίνει επίκεντρη, σε κύκλο, ορίζει τόξο με μήκος ίσο με την ακτίνα του και συμβολίζεται με 1 rad.
2. Αν μ° είναι το μέτρο σε μοίρες και a το μέτρο σε ακτίνια (rad) ενός τόξου ή μιας γωνίας, τότε ισχύει:

$$\frac{a}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ}$$

3. Στην Τριγωνομετρία, οι γωνίες στο επίπεδο δημιουργούνται από την περιστροφή μίας ημιευθείας γύρω από την κορυφή της, ξεκινώντας από την αρχική της θέση. Η αρχική θέση της ημιευθείας ονομάζεται **αρχική πλευρά** της γωνίας και η τελική θέση της ημιευθείας ονομάζεται **τελική πλευρά**. Οι γωνίες αυτές μπορούν να αναφέρονται και ως **τριγωνομετρικές γωνίες**.



4. Ανάλογα με τη φορά που κινείται η αρχική πλευρά προς την τελική πλευρά η γωνία διακρίνεται σε θετική φορά (αριστερόστροφη) ή γωνία με αρνητική φορά (δεξιόστροφη). Γωνία με καθορισμένη φορά λέγεται **προσανατολισμένη**.
5. **Αλγεβρική τιμή** μιας τριγωνομετρικής γωνίας είναι ο αριθμός που προκύπτει, όταν μετρήσουμε τη γωνία με μια μονάδα μέτρησης (π.χ μοίρα ή ακτίσιο) και βάλουμε στο εξαγόμενο πρόσημο θετικό ή αρνητικό, αν η φορά διαγραφής της γωνίας είναι η θετική ή η αρνητική, αντίστοιχα.
6. Μία τριγωνομετρική γωνία είναι σε **κανονική θέση**, όταν η κορυφή της βρίσκεται στην αρχή των αξόνων του ορθοκανονικού συστήματος και η αρχική πλευρά της συμπίπτει με τον θετικό ημιάξονα των τετμημένων.
7. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε προσανατολισμένης γωνίας θ , στην οποία το τυχαίο σημείο $A(x, y)$ ανήκει στην τελική πλευρά της, ορίζονται ως:

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\upsilon\theta = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\phi\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0), \quad \text{όπου } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \rho > 0$$

8. **Συνεφαπτομένη** της γωνίας θ ορίζουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό $\frac{x}{y}$, $y \neq 0$ και τον συμβολίζουμε με $\sigma\phi\theta$. Δηλαδή:

$$\sigma\phi\theta = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

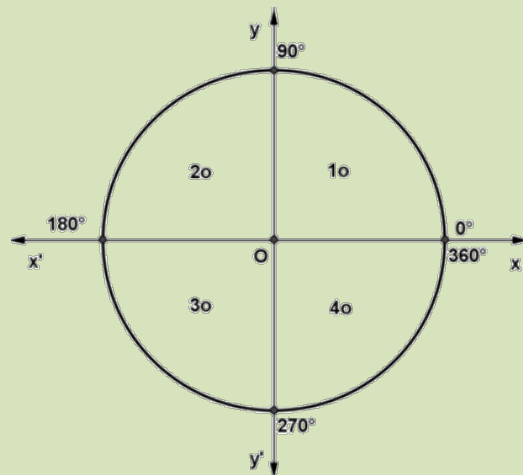
9. **Τέμνουσα** της γωνίας θ ορίζουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό $\frac{\rho}{x}$, $x \neq 0$ και τον συμβολίζουμε με $\tau\epsilon\mu\theta$. Δηλαδή:

$$\tau\epsilon\mu\theta = \frac{\rho}{x}, \quad x \neq 0$$

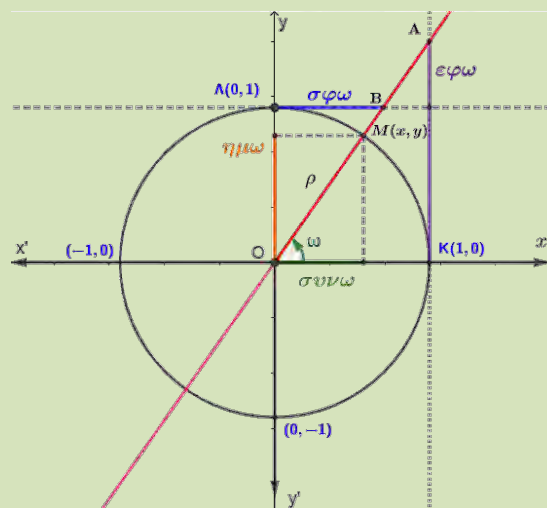
10. **Συντέμνουσα** της γωνίας θ ορίζουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό $\frac{\rho}{y}$, $y \neq 0$ και τον συμβολίζουμε με $\sigma\epsilon\mu\theta$. Δηλαδή:

$$\sigma\epsilon\mu\theta = \frac{\rho}{y}, \quad y \neq 0$$

11. **Τριγωνομετρικός κύκλος** ονομάζεται ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με μία μονάδα (μοναδιαίος κύκλος).
12. Οι άξονες xx', yy' χωρίζουν τον κύκλο σε **τέσσερα τεταρτημόρια**, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



13. Οι άξονες των τεταγμένων, των τετμημένων, η εφαπτομένη του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο $K(1,0)$ και η εφαπτομένη του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο $\Lambda(0,1)$ ορίζονται ως οι άξονες των ημιτόνων, των συνημιτόνων, των εφαπτομένων και των συνεφαπτομένων, αντίστοιχα.



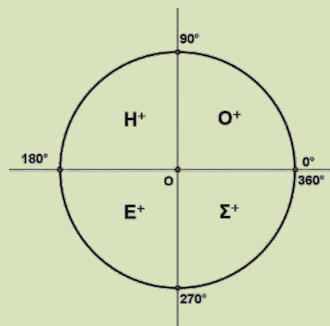
Από τα πιο πάνω, προκύπτει ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\eta\mu\omega$ παίρνουν τιμές μόνο στο διάστημα $[-1, 1]$. Δηλαδή:

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1, \quad -1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$$

14. Με τη βοήθεια των αξόνων των ημιτόνων, συνημιτόνων και εφαπτομένων, βρίσκουμε τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών, τα οποία συνοψίζονται στον πιο κάτω πίνακα:

| | 1° τεταρτημόριο | 2° τεταρτημόριο | 3° τεταρτημόριο | 4° τεταρτημόριο |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ημω | + | + | - | - |
| συνω | + | - | - | + |
| εφω | + | - | + | - |

- Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί στεμω, τεμω και σφω έχουν το ίδιο πρόσημο με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημω, συνω και εφω, αντίστοιχα.
- Με βάση τα πιο πάνω, η εύρεση του προσήμου των τριγωνομετρικών αριθμών συνοψίζεται στον πιο κάτω μνημονικό κανόνα όπου:
 - Στο 1° τεταρτημόριο όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί.
 - Στο 2° τεταρτημόριο θετικό είναι μόνο το ημίτονο.
 - Στο 3° τεταρτημόριο θετική είναι μόνο η εφαπτομένη.
 - Στο 4° τεταρτημόριο θετικό είναι μόνο το συνημίτονο.



15. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , $A \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

- (α) $(x + T) \in A$, $(x - T) \in A$ και
 (β) $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

Ο μικρότερος από τους θετικούς αριθμούς T , για τους οποίους ισχύουν τα πιο πάνω, λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f .

16. (α) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο 2π , όπου 2π είναι ο **μικρότερος θετικός αριθμός**, για τον οποίο ισχύει:

$$f(x) = f(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(β) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο 2π , όπου 2π είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει:

$$f(x) = f(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(γ) Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$, $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ είναι περιοδική με περίοδο π , όπου π είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει:

$$f(x) = f(x + \pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

17. Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών που έχουν άθροισμα ή διαφορά $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$.

- Γωνίες με άθροισμα 0° :
 $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$
 $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
 $\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$
- Γωνίες με άθροισμα 180° :
 $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
 $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
 $\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$
- Γωνίες με άθροισμα 90° :
 $\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
 $\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
 $\epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$
- Γωνίες με άθροισμα 270° :
 $\eta\mu(270^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
 $\sigma\upsilon\nu(270^\circ - \omega) = -\eta\mu\omega$
 $\epsilon\varphi(270^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$
- Γωνίες με άθροισμα 360° :
 $\eta\mu(360^\circ - \omega) = -\eta\mu\omega$
 $\sigma\upsilon\nu(360^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
 $\epsilon\varphi(360^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$
- Γωνίες με διαφορά 180° :
 $\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$
 $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
 $\epsilon\varphi(180^\circ + \omega) = \epsilon\varphi\omega$
- Γωνίες με διαφορά 90° :
 $\eta\mu(90^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
 $\sigma\upsilon\nu(90^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$
 $\epsilon\varphi(90^\circ + \omega) = -\sigma\varphi\omega$
- Γωνίες με διαφορά 270° :
 $\eta\mu(270^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
 $\sigma\upsilon\nu(270^\circ + \omega) = \eta\mu\omega$
 $\epsilon\varphi(270^\circ + \omega) = -\sigma\varphi\omega$

Σημείωση

Με τους πιο πάνω τύπους, μπορούμε να εκφράσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας με τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας.

Η διαδικασία αυτή λέγεται **αναγωγή στο 1° τεταρτημόριο**.

18. Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Για οποιαδήποτε τιμή της γωνιάς ω ισχύει:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}, \quad \eta\mu\omega \neq 0$$

$$\tau\epsilon\mu^2\omega = 1 + \epsilon\varphi^2\omega$$

$$\sigma\tau\epsilon\mu^2\omega = 1 + \sigma\varphi^2\omega$$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να μετατρέψετε σε ακτίνια τα μέτρα των γωνιών:

$$a = 180^\circ, \beta = 10^\circ, \gamma = -80^\circ, \delta = 310^\circ, \varepsilon = 720^\circ$$

2. Πόσες μοίρες αντιστοιχούν σε τόξο:

$$a = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}, \beta = 1,5 \text{ rad}, \gamma = -3 \text{ rad}$$

3. Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά των γωνιών:

$$\theta = 220^\circ, \varphi = -300^\circ, \omega = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}, x = 2 \text{ rad}$$

4. Να γράψετε ακόμη δύο γωνίες που έχουν την ίδια τελική πλευρά με τις γωνίες:

$$x = 270^\circ, y = -70^\circ, z = 1 \text{ rad}$$

5. Σε ποιο τεταρτημόριο ανήκει η τελική πλευρά της γωνίας θ , όταν ισχύει:

(α) $\varepsilon\varphi\theta < 0$ και $\tau\epsilon\mu\theta > 0$

(β) $\eta\mu\theta < 0$ και $\sigma\varphi\theta > 0$.

6. Δίνεται ότι $\text{συν}\theta = -\frac{8}{17}$, $\eta\mu\theta > 0$.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{34\eta\mu\theta + 17\text{συν}\theta}{8\varepsilon\varphi\theta - 15\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

7. Σε ποιο τεταρτημόριο ανήκει η τελική πλευρά της γωνίας $(180^\circ - \theta)$, όταν ισχύει:

(α) $180^\circ < \theta < 270^\circ$

(β) $-180^\circ < \theta < -90^\circ$

8. Η τελική πλευρά μιας γωνίας θ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $P(x, y)$.

Να βρείτε συναρτήσει των x, y :

(α) το $\eta\mu\theta$

(β) το σημείο, στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας $-\theta$ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο

(γ) το σημείο, στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας $(180^\circ - \theta)$ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο

(δ) την $\varepsilon\varphi(180^\circ + \theta)$

(ε) την παράσταση $1 + \varepsilon\varphi^2\theta$.

9. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

$$(\alpha) \quad \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\tau\epsilon\mu x}{\tau\epsilon\mu x} = \frac{\tau\epsilon\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

$$(\beta) \quad \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x} = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}$$

$$(\gamma) \quad \frac{\epsilon\varphi(180^\circ + \omega) \sigma\tau\epsilon\mu(180^\circ + \omega) \sigma\varphi(180^\circ - \omega)}{\sigma\upsilon\nu(360^\circ - \omega) \tau\epsilon\mu(90^\circ - \omega) \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)} = -\tau\epsilon\mu^2 \omega$$

$$(\delta) \quad \frac{1 - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x}$$

$$(\epsilon) \quad \tau\epsilon\mu\alpha + \epsilon\varphi\alpha = \frac{1}{\tau\epsilon\mu\alpha - \epsilon\varphi\alpha}$$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [-5\pi, 3\pi]$ και το σημείο $A\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι περιοδική.

(β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , τα οποία έχουν την ίδια τεταγμένη με το σημείο A .

(γ) Να βρείτε όλα τα σημεία της f , στα οποία η γραφική της παράσταση παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της.

(δ) Να γράψετε ένα σημείο, το οποίο να αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή της f .

(ε) Να περιγράψετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, τη σχέση που έχουν με τη γραφική παράσταση της f οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i. $g(x) = \sigma\upsilon\nu(-x)$, $x \in [-5\pi, 3\pi]$

ii. $h(x) = 2 + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [-5\pi, 3\pi]$

iii. $\rho(x) = \eta\mu(90^\circ - x)$, $x \in [-5\pi, 3\pi]$

11. Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:

$$A = 3\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$B = -3\eta\mu x + \pi, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Gamma = 3 - \sigma\upsilon\nu(2x), \quad x \in \mathbb{R}$$

12. Να υπολογίσετε τη γωνία θ , αν:

$$\frac{\eta\mu(180^\circ - \theta) \sigma\varphi(360^\circ - \theta) \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \theta)}{\epsilon\varphi(-\theta) \eta\mu(270^\circ - \theta)} = \frac{1}{2}, \quad 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

13. Αν

$$\frac{\eta\mu(180^\circ - \theta) \sigma\upsilon\nu(270^\circ + \theta)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ + \theta) \sigma\varphi(90^\circ + \theta)} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0 < \theta < 90^\circ$$

να δείξετε ότι $\theta = 45^\circ$.

14. Να δείξετε ότι η πιο κάτω παράσταση είναι ανεξάρτητη του x :

$$A = \eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

15. Να δείξετε ότι:

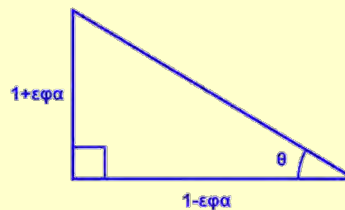
(α) $\eta\mu 3\pi = \eta\mu\pi$

(β) $\epsilon\varphi(-\pi - 3) = -\epsilon\varphi(\pi + 3)$

(γ) $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{29\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

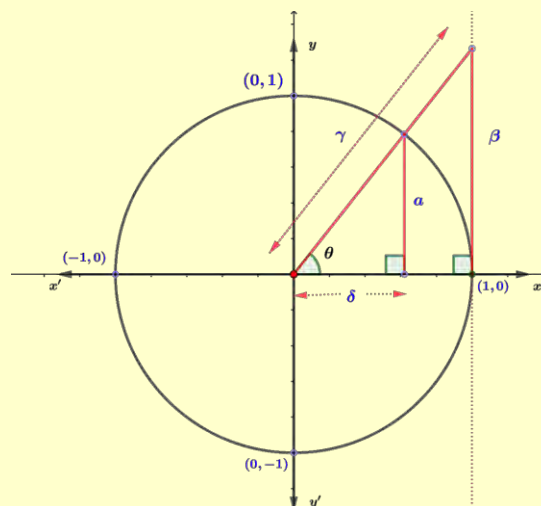
(δ) $\sigma\tau\epsilon\mu(630^\circ - \omega) = -\tau\epsilon\mu\omega$

16. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές $1 + \epsilon\varphi a$ και $1 - \epsilon\varphi a$, με $0^\circ < a < 90^\circ$.



Να εκφράσετε το $\eta\mu\theta$ και το $\sigma\upsilon\nu\theta$ συναρτήσει τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας a και να δώσετε την απάντησή σας στην πιο απλή μορφή.

17. Να εκφράσετε τα μήκη των τμημάτων α, β, γ και δ , όπως φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα, συναρτήσει τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας θ .



18. Αν $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = a$,

(α) να δείξετε ότι $\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \frac{a^2 - 1}{2}$

(β) Με τη βοήθεια των πιο πάνω, να υπολογίσετε συναρτήσει του a τις παραστάσεις:

i. $\frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

ii. $\epsilon\varphi x + \sigma\varphi x$

iii. $\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x$

19. Αν $\varepsilon\varphi\alpha = 3\varepsilon\varphi\beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha \varepsilon\varphi\beta} = \frac{4\eta\mu\beta \text{ συν}\beta}{1 - 4\eta\mu^2\beta}$$

20. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + a\right) + \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) + \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) + \text{συν}\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) =$$

- A.** $-2\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)$ **B.** $2\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$ **Γ.** 0 **Δ.** $\eta\mu a$ **Ε.** $-\text{συν}a$

21. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\varepsilon\varphi 1^\circ \varepsilon\varphi 2^\circ \varepsilon\varphi 3^\circ \cdots \varepsilon\varphi 87^\circ \varepsilon\varphi 88^\circ \varepsilon\varphi 89^\circ = 1$

(β) $(\eta\mu 1^\circ - \text{συν} 1^\circ) + (\eta\mu 2^\circ - \text{συν} 2^\circ) + \cdots + (\eta\mu 89^\circ - \text{συν} 89^\circ) = 0$

22. Αν $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 5$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$$

23. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα:

$$\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -6\pi < x < 2\pi$$

24. Να βάλετε σε κύκλο την ορθή απάντηση:

Αν $\eta\mu x = a$ και $0^\circ < x < 90^\circ$, τότε:

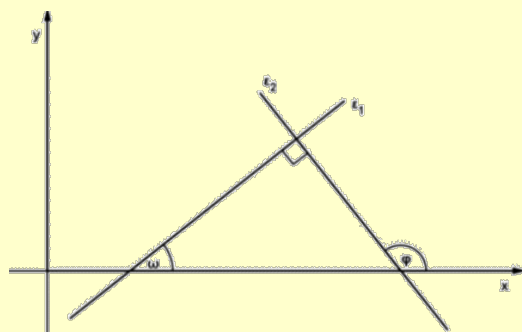
A. $\text{συν}x = 1 - a$

B. $\text{συν}x = 1 - a^2$

Γ. $\text{συν}x = \sqrt{1 - a^2}$

Δ. $\text{συν}x = -\sqrt{1 - a^2}$

25. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται δύο κάθετες ευθείες (ε_1) και (ε_2).

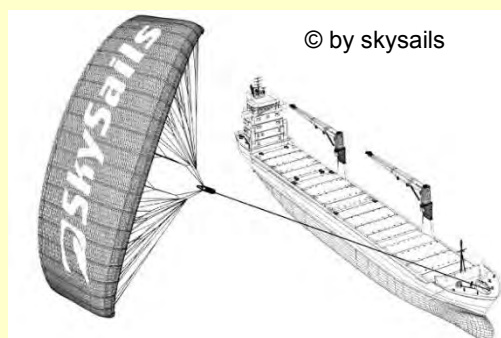


Να γράψετε μια σχέση μεταξύ των γωνιών ω και φ και να αποδείξετε ότι το γινόμενο των κλίσεων των δύο ευθειών είναι ίσο με -1 ($\lambda_1\lambda_2 = -1$).

Λύση Προβλήματος

ΠΑΝΙΑ

Ενεήντα πέντε τοις εκατό του παγκόσμιου εμπορίου διακινείται θαλάσσια από περίπου 50000 πετρελαιοφόρα, φορτηγά πλοία και πλοία μεταφοράς εμπορευματοκιβωτίων. Τα περισσότερα από αυτά τα πλοία χρησιμοποιούν πετρέλαιο για την κίνησή τους. Οι μηχανικοί σχεδιάζουν να αναπτύξουν μηχανισμούς αεροδυναμικής υποστήριξης των πλοίων. Η εισήγησή τους εστιάζεται στη χρήση πανιών στα πλοία, ώστε να αξιοποιείται η δύναμη του ανέμου. Αυτό θα οδηγήσει σε μείωση της κατανάλωσης αργού πετρελαίου και της επίδρασης των καυσίμων στο περιβάλλον.



Ερώτηση 1:

Ένα πλεονέκτημα της χρήσης πανιών ναυσιπλοΐας είναι ότι το πανί υπερίπταται σε ύψος 150 m. Σε αυτό το ύψος, η ταχύτητα του ανέμου είναι κατά προσέγγιση 25% μεγαλύτερη από την ταχύτητα στο κατάστρωμα του πλοίου.

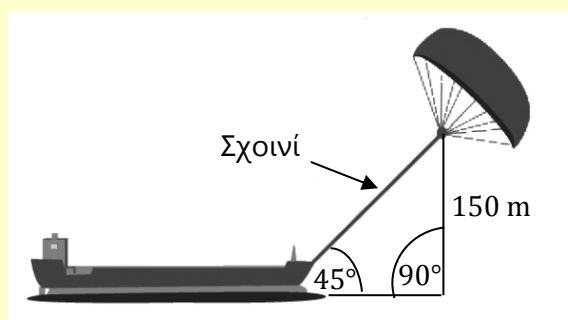
Με ποια, κατά προσέγγιση, ταχύτητα πνέει ο άνεμος στο πανί, όταν η ταχύτητα του ανέμου στο κατάστρωμα ενός πλοίου μεταφοράς εμπορευματοκιβωτίων είναι 24 km/h;

- A. 6 km/h
- B. 18 km/h
- Γ. 25 km/h
- Δ. 30 km/h
- E. 49 km/h

Ερώτηση 2:

Πόσο περίπου πρέπει να είναι το μήκος του σχοινιού του πανιού, για να ρυμουλκεί το πλοίο υπό γωνία 45° και να βρίσκεται κατακόρυφα σε ύψος 150 m, όπως φαίνεται στο διάγραμμα;

- A. 173 m
- B. 212 m
- Γ. 285 m
- Δ. 300 m



Σημείωση: Το διάγραμμα δεν είναι υπό κλίμακα.
© by skysails

Ερώτηση 3:

Λόγω του υψηλού κόστους του αργού πετρελαίου, το οποίο κοστίζει 0,42 ζετς το λίτρο, οι ιδιοκτήτες του πλοίου Νέο Κύμα σκέφτονται να εξοπλίσουν το πλοίο τους με πανιά ναυσιπλοΐας.

Υπολογίζεται ότι ένα τέτοιο πανί, μπορεί να περιορίσει την κατανάλωση αργού πετρελαίου συνολικά γύρω στο 20%.

Όνομα: Νέο Κύμα
Είδος: Μεταφοράς
εμπορευματοκιβωτίων
Μήκος: 117 μέτρα
Πλάτος: 18 μέτρα
Χωρητικότητα: 12 000 τόνοι
Μέγιστη ταχύτητα: 19 κόμβοι



Ετήσια κατανάλωση πετρελαίου χωρίς τη χρήση πανιού: περίπου 3 500 000 λίτρα

Το κόστος εξοπλισμού του πλοίου Νέο Κύμα με ένα πανί είναι 2 500 000 ζετς.

Μετά από πόσα χρόνια η εξοικονόμηση από την κατανάλωση αργού πετρελαίου θα καλύψει το κόστος του πανιού; Να υποστηρίξεις την απάντησή σου με τους απαραίτητους υπολογισμούς.

Αριθμός ετών:

PISA 2012

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = 1 - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x$

(β) $\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x = 1 - 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x$

(γ) Η παράσταση

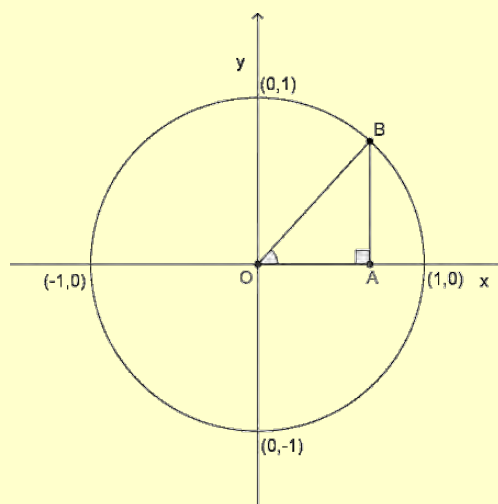
$$A = 2(\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x) - 3(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x)$$

είναι ανεξάρτητη του x .

2. Να αποδείξετε ότι:

$$0 < \frac{\epsilon\varphi(\pi + x)}{\epsilon\varphi x + \sigma\varphi(\pi + x)} < 1$$

3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι $45^\circ \leq x \leq 60^\circ$.



Αν $OA = x$, να υπολογίσετε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του x .

4. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{1 + \eta\mu x}{1 - \eta\mu x}} - \sqrt{\frac{1 - \eta\mu x}{1 + \eta\mu x}} = 2\epsilon\varphi x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu x} - \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu x}} = \frac{1 + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x}, \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

6. Να υπολογίσετε τις τιμές του x , για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = 3 - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$$

παρουσιάζει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.

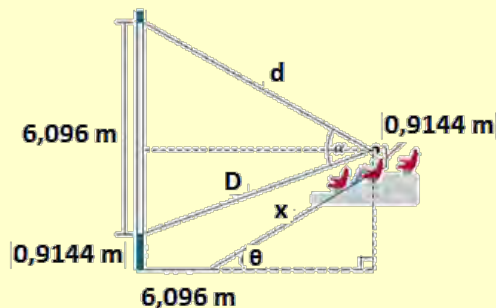
7. Το ύψος των υδάτων (y) σε μια θαλάσσια περιοχή που εμφανίζεται το φαινόμενο της παλίρροιας δίνεται σε συνάρτηση του χρόνου (t) από τον τύπο

$$y = 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right),$$

όπου y σε μέτρα και t σε ώρες.

Να υπολογίσετε τη διαφορά ανάμεσα στο ψηλότερο και χαμηλότερο ύψος των υδάτων κατά τη διάρκεια ενός 24 –ώρου.

9. Η βέλτιστη οπτική γωνία σε ένα θέατρο εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως το ύψος της οθόνης, η κλίση της αίθουσας, η θέση του καθίσματος και το ύψος του ματιού ενός καθήμενου θεατή. Για να επιλέξει ένας θεατής την «καλύτερη θέση», χρειάζεται να μετρήσουμε την απόσταση του ματιού από την κορυφή της σκηνής.



- (α) Για το συγκεκριμένο θέατρο που φαίνεται στην πιο πάνω εικόνα, η οποία δεν είναι υπό κλίμακα, να αποδείξετε ότι η απόσταση του ματιού από την κορυφή της σκηνής υπολογίζεται από τον τύπο:

$$d^2 = (6,096 + x \text{ συν}\theta)^2 + (6,096 - x \eta\mu\theta)^2,$$

όπου x είναι η διαγώνια απόσταση της θέσης ενός θεατή από το οριζόντιο δάπεδο.

- (β) Να υπολογίσετε την απόσταση d , αν $\theta = 18^\circ$, ο θεατής κάθετα στην 8^η σειρά και η υψομετρική διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών σειρών είναι 0,9144 m.

10. Να δείξετε ότι:

$$\eta\mu x \text{ συν}^2 x + 2\eta\mu x \text{ συν} x + \eta\mu x + \epsilon\phi x < 0, \quad \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

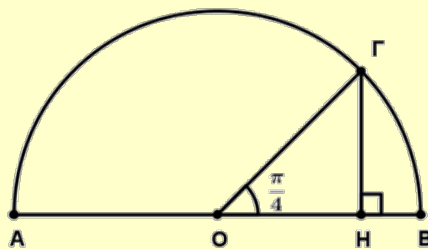
11. Να δείξετε ότι:

$$\epsilon\phi x - \eta\mu x > \text{συν} x - \sigma\phi x, \quad 5\pi < x < \frac{11\pi}{2}$$

12. Να διατάξετε από τον μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \quad \frac{\eta\mu x + 1}{\eta\mu x - 1}, \quad \frac{1 - \text{συν} x}{1 + \text{συν} x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

13. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ημικύκλιο με $OA = OB = OG = 1$ m και $B\hat{O}G = \frac{\pi}{4}$.



(α) Να υπολογίσετε το μήκος των OH και AH .

(β) Να δείξετε ότι:

$$\text{συν}(BAG) = \frac{2 + \sqrt{2}}{2(AG)}$$

(γ) Να αναφέρετε το είδος του τριγώνου AGB και στη συνέχεια να δείξετε ότι:

$$\text{συν}(BAG) = \frac{AG}{2}$$

(δ) Να αποδείξετε ότι:

i. $B\hat{A}G = \frac{\pi}{8}$

ii. $\text{συν}\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

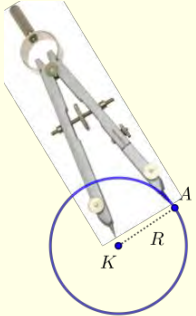
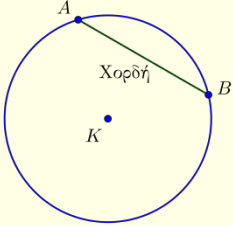
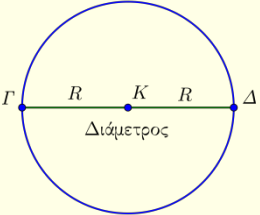
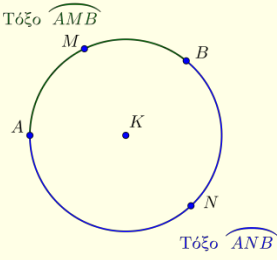
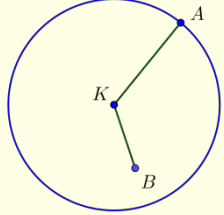
ΕΝΟΤΗΤΑ 03

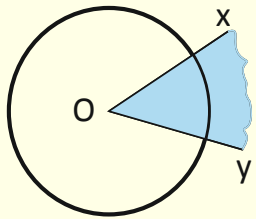
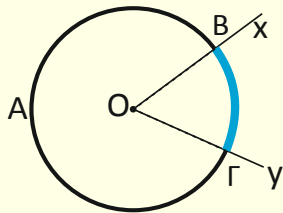
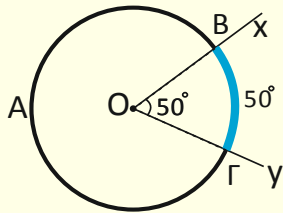
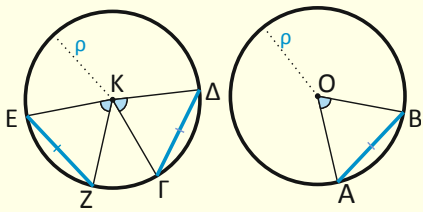
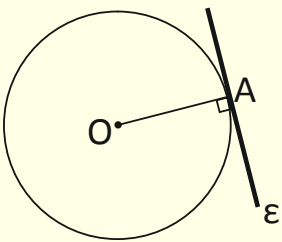
ΚΥΚΛΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 3.1 Σχετική θέση δύο κύκλων
- 3.2 Εγγεγραμμένες – Επίκεντρες γωνίες
- 3.3 Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης

Έχουμε μάθει...

| | | |
|-------------------------------|---|---|
| <p>Κύκλος</p> | <p>▪ Κύκλος ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου που έχουν σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο του επιπέδου. Η σταθερή απόσταση ονομάζεται ακτίνα του κύκλου και το σταθερό σημείο κέντρο του κύκλου.</p> <p><i>Π.χ. Το K είναι το κέντρο του κύκλου και R η ακτίνα του. Για συντομία γράφουμε κύκλος (K, R).</i></p> |  |
| <p>Χορδή</p> | <p>▪ Χορδή κύκλου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στον κύκλο.</p> <p><i>Π.χ. Το AB είναι χορδή του κύκλου.</i></p> |  |
| <p>Διάμετρος</p> | <p>▪ Διάμετρος κύκλου είναι η χορδή που περνά από το κέντρο του κύκλου. Το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο κάθε διαμέτρου. Η διάμετρος του κύκλου είναι η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου και έχει μήκος διπλάσιο από την ακτίνα.</p> <p><i>Π.χ. Η χορδή $\Gamma\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου (K, R) και $\Gamma\Delta = 2R$.</i></p> |  |
| <p>Τόξο</p> | <p>▪ Τόξο κύκλου ονομάζεται κάθε μέρος του κύκλου που περιέχεται μεταξύ δύο σημείων του.</p> <p><i>Π.χ. Τα σημεία A και B χωρίζουν τον κύκλο σε δύο τόξα. Τα δύο τόξα συμβολίζονται \widehat{AMB} και \widehat{ANB}, όπου M και N είναι ενδιάμεσα σημεία των αντίστοιχων τόξων.</i></p> <p>Η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα τόξα που ονομάζονται ημικύκλια.</p> |  |
| <p>Κυκλικός Δίσκος</p> | <p>▪ Κυκλικός δίσκος είναι ο κύκλος μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει. Κάθε σημείο του κυκλικού δίσκου απέχει από το κέντρο απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα.</p> <p><i>Π.χ. $KA = R$ και $KB < R$</i></p> |  |

| Έχουμε μάθει... | | |
|---|---|--|
| <p>Επίκεντρη γωνία</p> | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Επίκεντρη γωνία ονομάζεται κάθε γωνία που έχει την κορυφή της στο κέντρο του κύκλου. <i>Π.χ. Η γωνία xOy είναι επίκεντρη γωνία.</i> |  |
| <p>Αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης</p> | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Το τόξο του κύκλου που βρίσκεται στο εσωτερικό μιας επίκεντρης γωνίας ονομάζεται αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης γωνίας. <i>Π.χ. Το τόξο $B\Gamma$ είναι το αντίστοιχο τόξο της γωνίας $B\hat{O}\Gamma$.</i> |  |
| <p>Μέτρο τόξου</p> | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Το μέτρο ενός τόξου ορίζεται το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας. Το μέτρο ενός τόξου το μετράμε σε μοίρες ή ακτίνια. <i>Π.χ. $\widehat{B\Gamma} = x\hat{O}y = 50^\circ = \frac{5\pi}{18}$ rad</i> |  |
| <p>Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντίστοιχου τόξου</p> | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Στον ίδιο κύκλο (ή σε ίσους κύκλους): <ul style="list-style-type: none"> • σε ίσες επίκεντρες γωνίες αντιστοιχούν ίσα τόξα και αντίστροφα. <i>Π.χ. $E\hat{K}Z = \Gamma\hat{K}\Delta = A\hat{O}B$ $\Leftrightarrow \widehat{EZ} = \widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{AB}$</i> • σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές και αντίστροφα. <i>Π.χ. $\widehat{EZ} = \widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{AB}$ $\Leftrightarrow EZ = \Gamma\Delta = AB$</i> |  |
| <p>Εφαπτομένη</p> | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Εφαπτομένη του κύκλου ονομάζεται η ευθεία που έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον κύκλο. Η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ακτίνα στο σημείο επαφής. <i>Π.χ. Η ευθεία (ϵ) είναι η εφαπτομένη του κύκλου (O, R) στο σημείο A και η ακτίνα OA είναι κάθετη στην (ϵ).</i> |  |

Έχουμε μάθει...

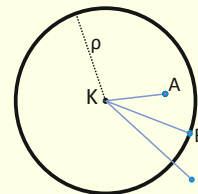
Θέση σημείου ως προς κύκλο

Η θέση σημείου ως προς κύκλο (K, ρ) καθορίζεται ως εξής:

(α) $(KA) < \rho \Leftrightarrow$ Το σημείο A βρίσκεται μέσα στον κύκλο.

(β) $(KB) = \rho \Leftrightarrow$ Το σημείο B ανήκει στον κύκλο.

(γ) $(K\Gamma) > \rho \Leftrightarrow$ Το σημείο Γ βρίσκεται εκτός κύκλου.



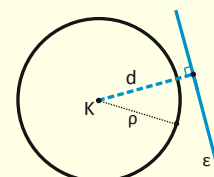
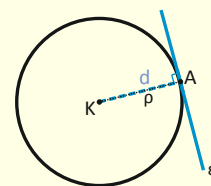
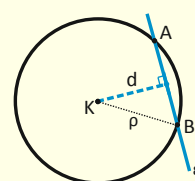
Θέση ευθείας ως προς κύκλο

Η θέση της ευθείας (ε) που βρίσκεται σε απόσταση d από το κέντρο του κύκλου (K, ρ) καθορίζεται ως εξής:

(α) $d < \rho \Leftrightarrow$ Η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.

(β) $d = \rho \Leftrightarrow$ Η ευθεία (ε) εφάπτεται του κύκλου.
Έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.

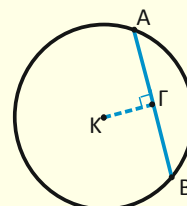
(γ) $d > \rho \Leftrightarrow$ Η ευθεία (ε) είναι ξένη με τον κύκλο.
Δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



Απόστημα χορδής

Απόστημα χορδής κύκλου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από το κέντρο του προς τη χορδή.

Π.χ. Το ευθύγραμμο τμήμα $K\Gamma$ είναι το απόστημα ($K\Gamma \perp AB$).



3.1 ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

Εξερεύνηση

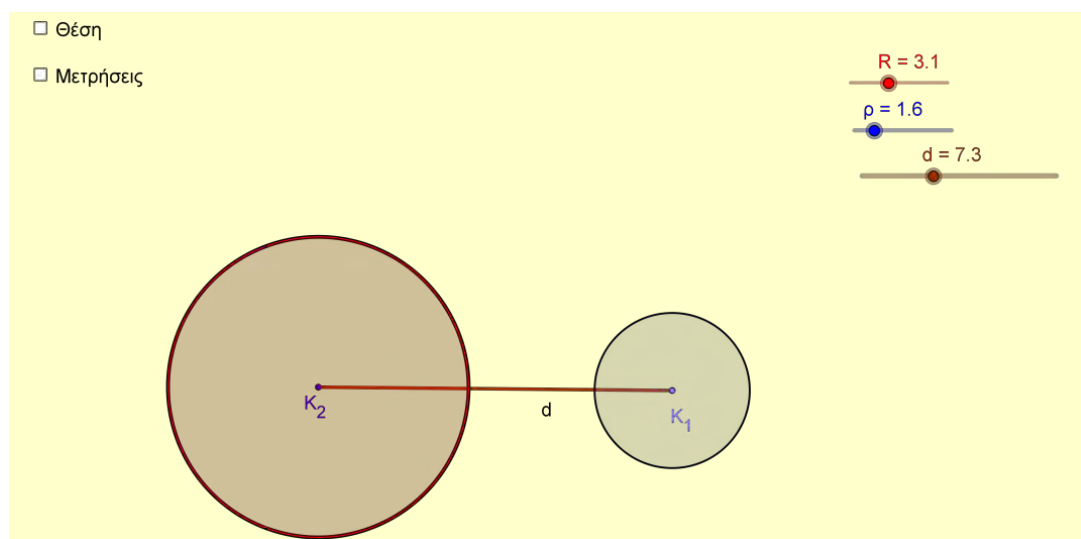
Στη διπλανή εικόνα φαίνεται **το μεσαιωνικό αστρονομικό ρολόι** που βρίσκεται στην Πράγα της Τσεχίας. Το σημερινό ρολόι είναι ένα πιστό αντίγραφο του αρχικού, το οποίο καταστράφηκε στον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο.

Να περιγράψετε τη θέση δύο οποιονδήποτε κύκλων, όπως αυτοί εμφανίζονται στο μεσαιωνικό αστρονομικό ρολόι.



Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «[ALyk_En03_Thesis2Kyklon.ggb](#)».



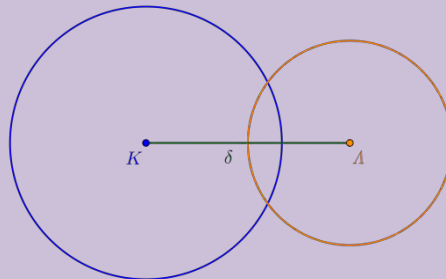
- Να μετακινήσετε τον δρομέα « d », για να μεταβάλετε την απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο κύκλων, έτσι ώστε οι κύκλοι:
 - (α) να έχουν δύο κοινά σημεία
 - (β) να έχουν ένα κοινό σημείο
 - (γ) να μην έχουν σημεία τομής.
- Ποια είναι η σχέση που συνδέει την απόσταση των δύο κέντρων με το άθροισμα και τη διαφορά των δύο ακτίνων σε κάθε περίπτωση;

Για τη σχετική θέση δύο κύκλων συγκρίνουμε το μήκος της διακέντρου των δύο κύκλων με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων τους.

Ορισμός

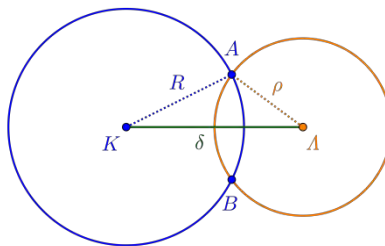
Διάκεντρος δύο κύκλων (K, R) και (A, ρ) ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα των δύο κύκλων. Το μήκος της συμβολίζεται με δ .

Για παράδειγμα, στους κύκλους (K, R) και (A, ρ) ισχύει ότι $\delta = KA$.



Αν έχουμε δύο κύκλους (K, R) και (A, ρ) με $R \geq \rho$, τότε οι πιθανές σχετικές θέσεις των δύο κύκλων είναι:

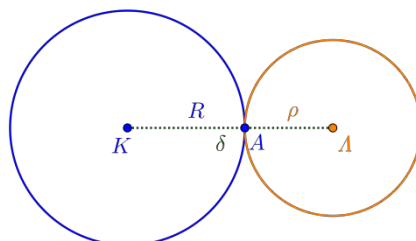
- Αν δύο κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, τότε οι κύκλοι τέμνονται.



Η σχέση των ακτίνων των δύο κύκλων (K, R) και (A, ρ) σε σχέση με τη διάκεντρο δ είναι:

$$R - \rho < \delta < R + \rho$$

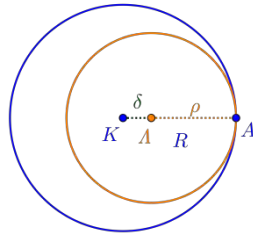
- Αν δύο κύκλοι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο και το μήκος της διακέντρου είναι ίσο με το άθροισμα των ακτίνων τους, τότε εφάπτονται εξωτερικά. Το κοινό σημείο λέγεται σημείο επαφής των δύο κύκλων.



Η σχέση των ακτίνων των δύο κύκλων (K, R) και (A, ρ) σε σχέση με τη διάκεντρο δ είναι:

$$R + \rho = \delta$$

- Αν δύο κύκλοι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο (σημείο επαφής) και το μήκος της διακέντρου είναι ίσο με τη διαφορά των ακτίνων τους, τότε εφάπτονται εσωτερικά.

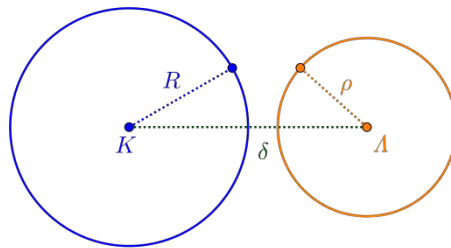


Η σχέση των ακτίνων των δύο κύκλων (K, R) και (A, ρ) σε σχέση με τη διάκεντρο δ είναι:

$$R - \rho = \delta$$

Παρατήρηση: Αν $R = \rho$ και $\delta = 0$, τότε οι κύκλοι ταυτίζονται.

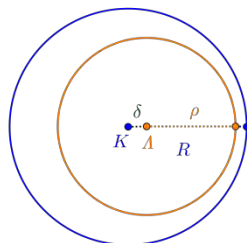
- Αν δύο κύκλοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο και το μήκος της διακέντρου είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των ακτίνων τους, τότε είναι ξένοι εξωτερικά. Δηλαδή, ο ένας κύκλος βρίσκεται έξω από τον άλλο.



Η σχέση των ακτίνων των δύο κύκλων (K, R) και (A, ρ) σε σχέση με τη διάκεντρο δ είναι:

$$R + \rho < \delta$$

- Αν δύο κύκλοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο και το μήκος της διακέντρου είναι μικρότερο από τη διαφορά των ακτίνων τους, τότε είναι ξένοι εσωτερικά. Δηλαδή, ο ένας κύκλος βρίσκεται μέσα στον άλλο.



Η σχέση των ακτίνων των δύο κύκλων (K, R) και (A, ρ) σε σχέση με τη διάκεντρο δ είναι:

$$R - \rho > \delta$$

Θεώρημα

Αν δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) , όπου $R > \rho$ τέμνονται, τότε ισχύει ότι

$$R - \rho < \delta < R + \rho,$$

όπου $\delta = K\Lambda$.

Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν για δύο κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) , όπου $R > \rho$, ισχύει ότι

$$R - \rho < \delta < R + \rho,$$

όπου $\delta = K\Lambda$, τότε οι δύο κύκλοι τέμνονται.

Απόδειξη

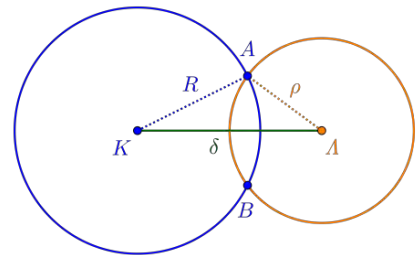
Ευθύ (\Rightarrow)

Οι δύο κύκλοι τέμνονται, με το A να είναι ένα από τα σημεία τομής τους. Σε αυτή την περίπτωση σχηματίζεται το τρίγωνο $AK\Lambda$. Έχουμε ότι:

$$R > \rho \Rightarrow R - \rho > 0$$

Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $AK\Lambda$, παίρνουμε ότι:

$$R - \rho < \delta < R + \rho$$



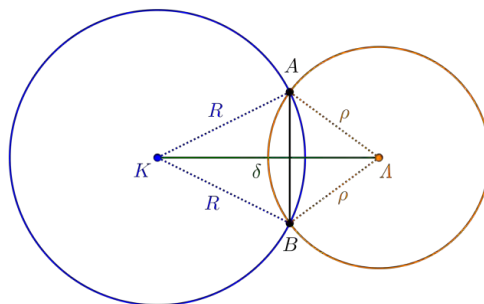
Η απόδειξη του αντίστροφου (\Leftarrow) μπορεί να γίνει με τη χρήση της μεθόδου της **εις άτοπον απαγωγής** και αφήνεται ως άσκηση για τους μαθητές.

Θεώρημα

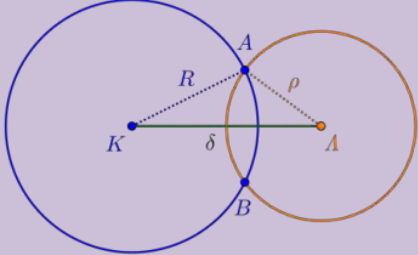
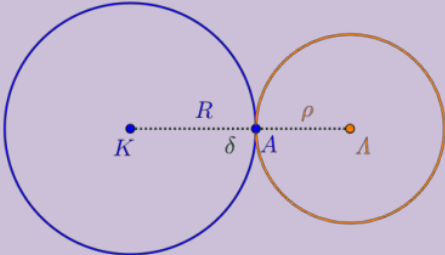
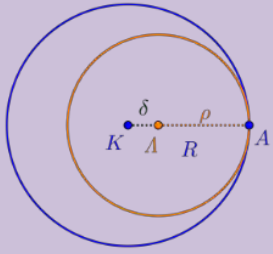
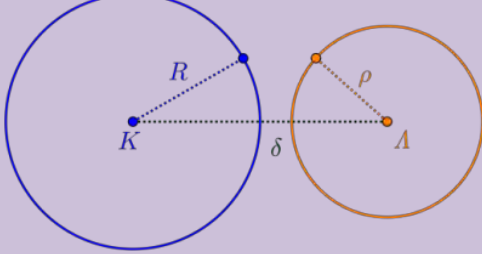
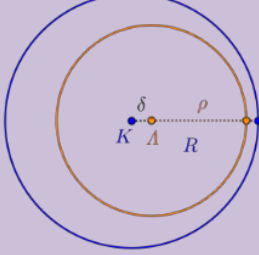
Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι η μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.

Απόδειξη

Θεωρούμε δύο κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) , με $\delta = K\Lambda$ η διάκεντρος τους και AB η κοινή τους χορδή, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

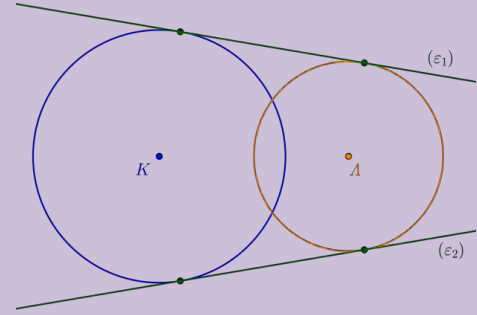
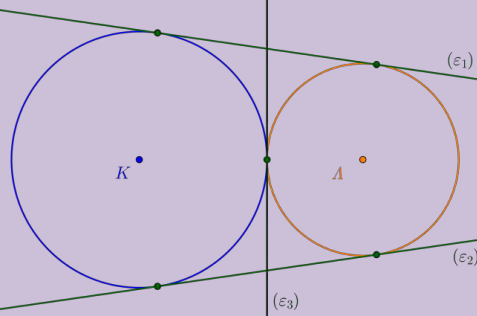
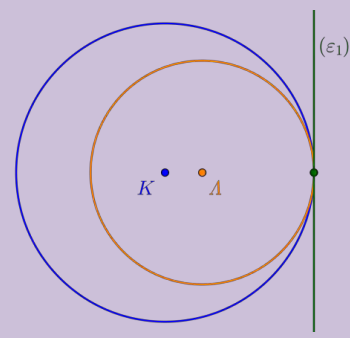
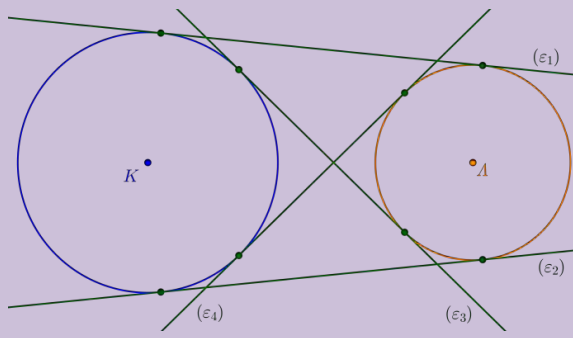


Αφού $KA = KB = R$, τότε το σημείο K είναι σημείο της μεσοκάθετου του τμήματος AB . Όμοια, από τη σχέση $LA = LB = \rho$, παίρνουμε ότι και το σημείο Λ είναι σημείο της μεσοκάθετου του τμήματος AB . Επομένως, η $K\Lambda$ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής AB των δύο κύκλων.

| Σχέση διακέντρου – ακτινών ($R \geq \rho$) | Σχετική θέση δύο κύκλων | Σχήμα |
|--|---|---|
| $R - \rho < \delta < R + \rho$ | Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται. |  |
| $\delta = R + \rho$ | Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά. |  |
| $\delta = R - \rho$ | Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εσωτερικά. |  |
| $\delta > R + \rho$ | Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) είναι ξένοι εξωτερικά. |  |
| $\delta < R - \rho$ | Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) είναι ξένοι εσωτερικά. |  |

Παρατήρηση

Οι κοινές εφαπτομένες των κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) σε κάθε περίπτωση φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

| Σχετική θέση δύο κύκλων | Κοινές εφαπτομένες δύο κύκλων |
|---|--|
| Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται. |  |
| Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά. |  |
| Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εσωτερικά. |  |
| Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) είναι ξένοι εξωτερικά. |  |
| Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) είναι ξένοι εσωτερικά. | Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) δεν έχουν κοινές εφαπτομένες. |

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

- (α) Κύκλοι $(K, 4 \text{ cm})$ και $(\Lambda, 6 \text{ cm})$ με απόσταση $K\Lambda = 7 \text{ cm}$.
(β) Κύκλοι $(K, 4 \text{ cm})$ και $(\Lambda, 6 \text{ cm})$ με απόσταση $K\Lambda = 10 \text{ cm}$.

Λύση

- (α) Θέτουμε $R = 4 \text{ cm}$ και $\rho = 6 \text{ cm}$. Αφού $R + \rho = 4 + 6 = 10 \text{ cm}$, $|R - \rho| = 2 \text{ cm}$ και $\delta = 7 \text{ cm}$, έχουμε:

$$|R - \rho| < \delta < R + \rho$$

Επομένως, οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.

- (β) Αφού $\delta = 10 \text{ cm}$ και $R + \rho = 10 \text{ cm}$, έχουμε:

$$R + \rho = \delta$$

Επομένως, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

Παράδειγμα 2

Δίνονται οι κύκλοι $(K, 3 \text{ cm})$ και (Λ, x) και η διάκεντρος $K\Lambda = 9 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε τις τιμές του x , έτσι ώστε οι κύκλοι να τέμνονται.

Λύση

Θέτουμε $R = 3 \text{ cm}$, $\rho = x \text{ cm}$ και $\delta = K\Lambda$ τη διάκεντρό τους. Αφού οι δύο κύκλοι τέμνονται, τότε έχουμε ότι:

$$|R - \rho| < \delta < R + \rho \Rightarrow |3 - x| < 9 < 3 + x$$

Διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις:

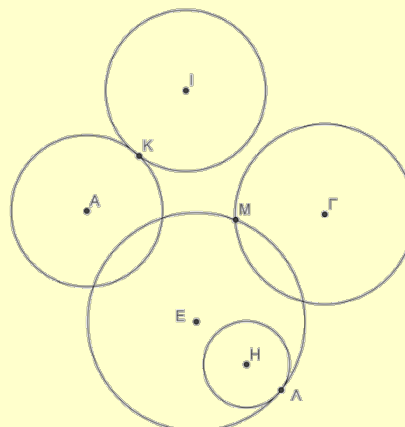
- $x + 3 > 9 \Rightarrow x > 6$
- $|3 - x| < 9 \Rightarrow \begin{cases} 3 - x < 9 \Rightarrow x > -6 \\ 3 - x > -9 \Rightarrow x < 12 \end{cases}$

Από τα πιο πάνω, συμπεραίνουμε ότι για να τέμνονται οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) , πρέπει να ισχύει ότι $6 < x < 12$.

Δραστηριότητες

1. Στο διπλανό σχήμα, να γράψετε τη σχετική θέση μεταξύ των κύκλων:

- (α) (A, AK) και (I, IK)
- (β) (A, AK) και (E, EM)
- (γ) (A, AK) και (H, HL)
- (δ) (E, EL) και (H, HL)



2. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

- (α) Κύκλοι $(K, 3 \text{ cm})$ και $(L, 5 \text{ cm})$ με απόσταση $KL = 8 \text{ cm}$.
- (β) Κύκλοι $(K, 3 \text{ cm})$ και $(L, 5 \text{ cm})$ με απόσταση $KL = 10 \text{ cm}$.
- (γ) Κύκλοι $(K, 3 \text{ cm})$ και $(L, 5 \text{ cm})$ με απόσταση $KL = 1 \text{ cm}$.
- (δ) Κύκλοι $(M, 5 \text{ cm})$ και $(N, 8 \text{ cm})$ με απόσταση $MN = 3 \text{ cm}$.
- (ε) Κύκλοι $(M, 2 \text{ cm})$ και $(N, 3 \text{ cm})$ με απόσταση $MN = 4 \text{ cm}$.
- (στ) Κύκλοι $(M, 4 \text{ cm})$ και $(N, 7 \text{ cm})$ με απόσταση $MN = 12 \text{ cm}$.
- (ζ) Κύκλοι $(M, 4 \text{ cm})$ και $(N, 7 \text{ cm})$ με απόσταση $MN = 3 \text{ cm}$.
- (η) Κύκλοι $(M, 4 \text{ cm})$ και $(N, 6 \text{ cm})$ με απόσταση $MN = 10 \text{ cm}$.

3. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου των κύκλων $(K, 4 \text{ cm})$ και $(L, 5 \text{ cm})$, ώστε:

- (α) οι κύκλοι να εφάπτονται εξωτερικά
- (β) οι κύκλοι να εφάπτονται εσωτερικά.

4. Δίνεται κύκλος με κέντρο $(L, 10 \text{ km})$ και κύκλος $(M, 18 \text{ km})$. Αν οι δύο κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, να βρείτε το διάστημα στο οποίο ανήκουν οι τιμές του μήκους ML .

5. Να κατασκευάσετε τους κύκλους σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις. Στη συνέχεια, να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων:

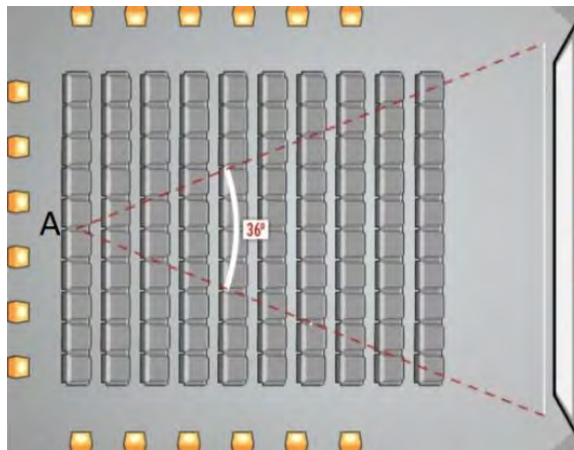
- (α) Κύκλοι $(K, 3 \text{ cm})$ και $(L, 4 \text{ cm})$ με απόσταση $KL = 7 \text{ cm}$.
- (β) Κύκλοι $(K, 3 \text{ cm})$ και $(L, 4 \text{ cm})$ με απόσταση $KL = 8 \text{ cm}$.
- (γ) Κύκλοι $(K, 3 \text{ cm})$ και $(L, 4 \text{ cm})$ με απόσταση $KL = 6 \text{ cm}$.
- (δ) Κύκλοι $(K, 3 \text{ cm})$ και $(L, 4 \text{ cm})$ με απόσταση $KL = 1 \text{ cm}$.
- (ε) Κύκλοι $(K, 3 \text{ cm})$ και $(L, 4 \text{ cm})$ με απόσταση $KL = 2 \text{ cm}$.

6. Δίνονται οι κύκλοι $(K, 7 \text{ cm})$ και (L, x) και η διάκεντρος $KL = 12 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε την τιμή ή τις τιμές του x , έτσι ώστε οι κύκλοι:
- (α) να εφάπτονται εξωτερικά
 - (β) να τέμνονται
 - (γ) να είναι ξένοι εσωτερικά.
7. Να αποδείξετε ότι αν δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, τότε το μήκος της διακέντρου είναι ίσο με το άθροισμα των ακτίνων τους.
8. Να δείξετε ότι αν δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε το μήκος της διακέντρου είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των ακτίνων τους.
9. Δύο κύκλοι με κέντρα K και L εφάπτονται εξωτερικά. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους κύκλους στα σημεία A και B , αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $KABL$ είναι:
- (α) τραπέζιο, όταν οι κύκλοι είναι άνισοι
 - (β) ορθογώνιο, όταν οι κύκλοι είναι ίσοι.

3.2 ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ – ΕΠΙΚΕΝΤΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Εξερεύνηση

Στο πιο κάτω σχήμα, φαίνεται η κάτοψη μιας αίθουσας κινηματογράφου.

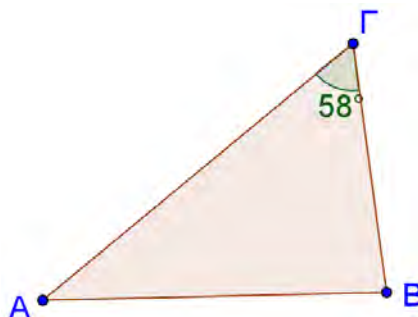


Ένας φωτογράφος τοποθέτησε μια φωτογραφική μηχανή (A), που έχει άνοιγμα φακού 36° , στο μέσο της τελευταίας σειράς έτσι ώστε να βλέπει όλη την οθόνη, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στη συνέχεια, θα τοποθετήσει ακόμα μια φωτογραφική μηχανή (B) με φακό ανοίγματος 72° .

- Σε ποιες άλλες θέσεις θα μπορούσε να τοποθετήσει τη φωτογραφική μηχανή (A), ώστε να καλύπτει ολόκληρη την οθόνη;
- Σε ποια θέση πρέπει να τοποθετήσει τη φωτογραφική μηχανή (B), ώστε να καλύπτει ολόκληρη την οθόνη;

Διερεύνηση 1

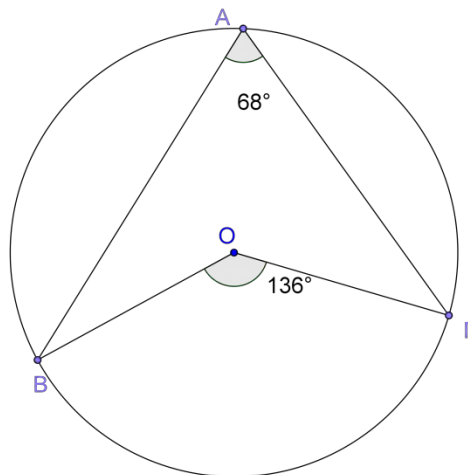
Να ανοίξετε το αρχείο «[ALyk_En03_DGeoorthi.ggb](#)».



- Να μετακινήσετε την κορυφή Γ σε διάφορες θέσεις.
- Πότε νομίζετε ότι η γωνία Γ γίνεται ορθή;

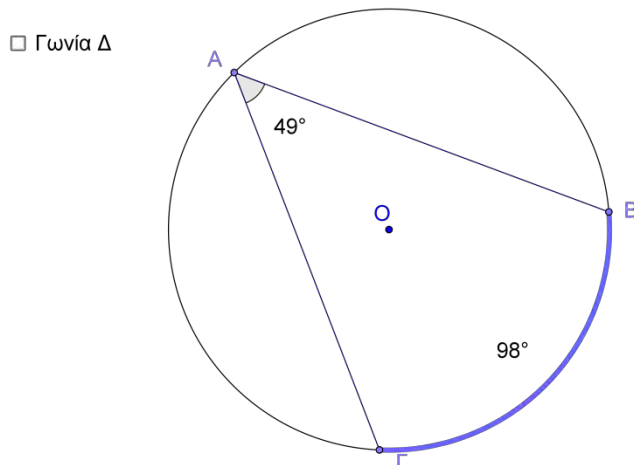
Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε το αρχείο «[ALyk_En03_DGeoEggegrammeniEpikentri.ggb](#)».



- Να βρείτε τη σχέση που συνδέει το μέτρο της εγγεγραμμένης γωνίας με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.

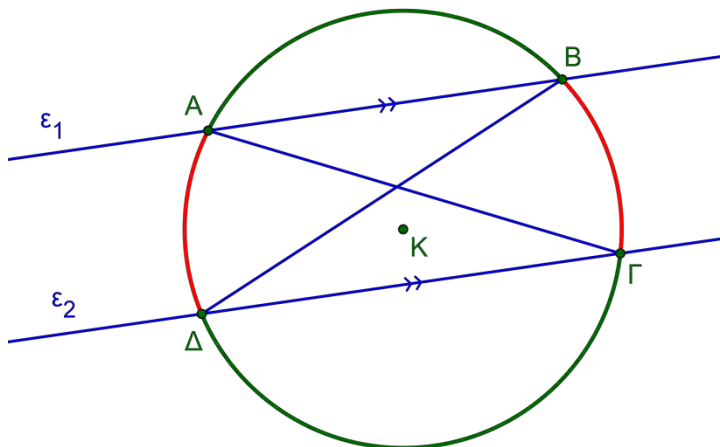
Να ανοίξετε το αρχείο «[AlykEn03_DGeoEggegramenildioToxo.ggb](#)».



- Να βρείτε τη σχέση που συνδέει το μέτρο των εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Διερεύνηση 3

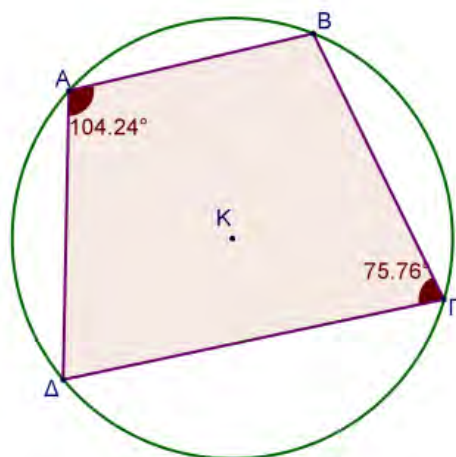
Να ανοίξετε το αρχείο «ALyk_En03_IsaToxa.ggb».



- Να συγκρίνετε τα τόξα που περιέχονται μεταξύ δύο παράλληλων ευθειών.

Διερεύνηση 4

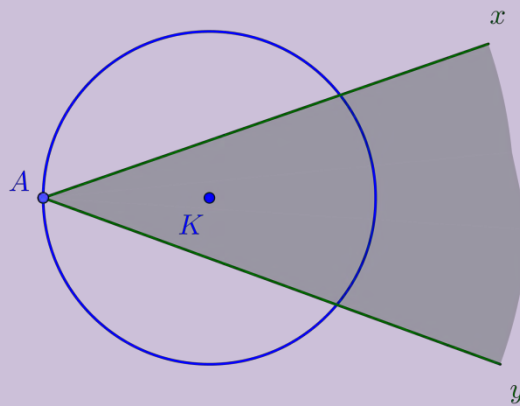
Να ανοίξετε το αρχείο «ALyk_En03_Tetrapleyro.ggb».



- Να μετακινήσετε την κορυφή A του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ σε διάφορες θέσεις στον κύκλο.
- Να συγκρίνετε τις απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

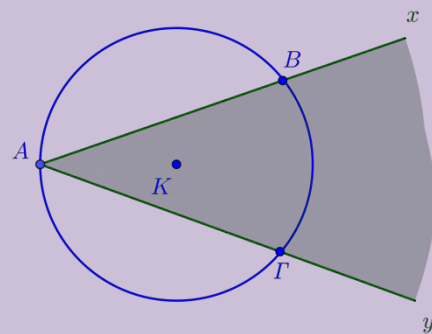
Ορισμός

Εγγεγραμμένη γωνία κύκλου ονομάζεται η γωνία που η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της είναι τέμνουσες του κύκλου.

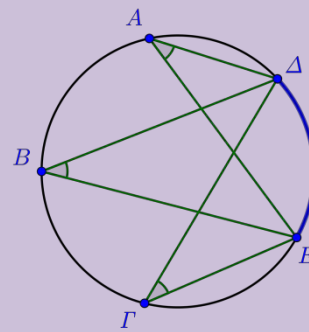


Παρατηρήσεις

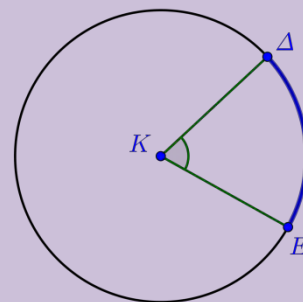
- Αν B και Γ είναι τα σημεία τομής της $x\hat{A}y$ με τον κύκλο, τότε θα λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία BAG βαίνει στο τόξο $B\Gamma$.



- Σε κάθε τόξο αντιστοιχούν άπειρες εγγεγραμμένες γωνίες.



- Σε κάθε τόξο αντιστοιχεί μόνο μία επίκεντρη γωνία.



Θεώρημα

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία κύκλου είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

Απόδειξη

Έστω κύκλος (O, R) και ένα τόξο του AB . Ας θεωρήσουμε την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία AOB και σημείο Γ του κύκλου που δεν ανήκει στο τόξο AB . Τότε, θα αποδείξουμε ότι $A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$.

Διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις:

- Μελετούμε πρώτα την περίπτωση όπου το κέντρο O του κύκλου (O, R) ανήκει σε μια πλευρά της εγγεγραμμένης γωνίας $A\Gamma B$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Το τρίγωνο $BO\Gamma$ είναι ισοσκελές, με $BO = O\Gamma$. Άρα:

$$B\hat{\Gamma}O = \Gamma\hat{B}O$$

Η επίκεντρη γωνία AOB είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου $BO\Gamma$. Επομένως, ισχύει ότι:

$$A\hat{O}B = B\hat{\Gamma}O + \Gamma\hat{B}O$$

Από τις δύο πιο πάνω σχέσεις, παίρνουμε ότι:

$$A\hat{O}B = B\hat{\Gamma}O + \Gamma\hat{B}O = 2B\hat{\Gamma}O = 2A\hat{\Gamma}B$$

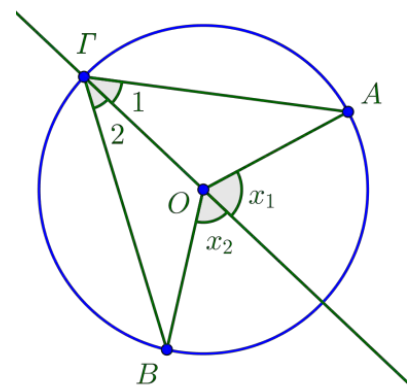
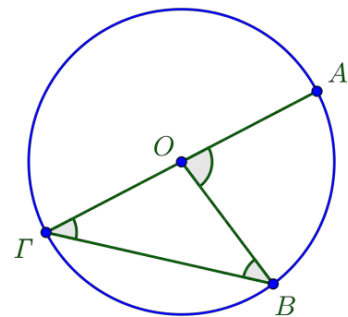
- Μελετούμε την περίπτωση όπου το κέντρο O του κύκλου (O, R) βρίσκεται στο εσωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας $A\Gamma B$. Φέρουμε την ευθεία GO , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι δημιουργούνται δύο ισοσκελή τρίγωνα, τα AOG και BOG . Η επίκεντρη γωνία AOB χωρίζεται σε δύο γωνίες, τις \hat{x}_1 και \hat{x}_2 , οι οποίες είναι εξωτερικές γωνίες των ισοσκελών τριγώνων AOG και BOG , αντίστοιχα.

Έχουμε:

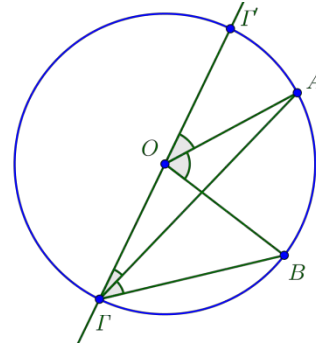
$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= \hat{\Gamma}_1 + \hat{A} = 2\hat{\Gamma}_1 \\ \hat{x}_2 &= \hat{\Gamma}_2 + \hat{B} = 2\hat{\Gamma}_2\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο πιο πάνω εξισώσεις, έχουμε:

$$\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = 2\hat{\Gamma}_1 + 2\hat{\Gamma}_2 = 2(\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2) \Rightarrow A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$$



- Τέλος, μελετούμε την περίπτωση όπου το κέντρο O του κύκλου (O, R) βρίσκεται στο εξωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας AGB , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Φέρουμε την ευθεία GO , η οποία τέμνει ξανά τον κύκλο (O, R) στο σημείο G' . Το τρίγωνο BOG είναι ισοσκελές, με $BO = GO$. Άρα:

$$\widehat{BGO} = \widehat{GBO}$$

Η επίκεντρη γωνία BOG' είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου BOG . Επομένως, ισχύει ότι:

$$\widehat{BOG'} = \widehat{BGO} + \widehat{GBO}$$

Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$\widehat{AOG'} = 2\widehat{AG'G}$$

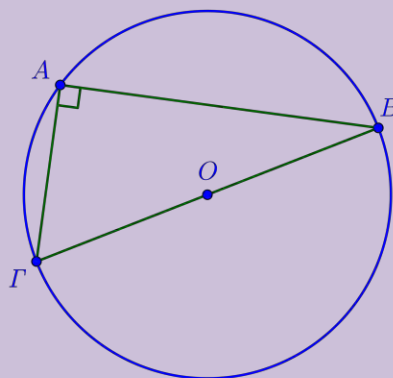
Από τις πιο πάνω σχέσεις, παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \widehat{BOG'} &= \widehat{BGO} + \widehat{GBO} = 2\widehat{BGO} = 2\widehat{BGA} + 2\widehat{AG'G} = 2\widehat{BGA} + \widehat{AOG'} \\ &\Rightarrow \widehat{BOG'} - \widehat{AOG'} = 2\widehat{BGA} \Rightarrow \widehat{AOB} = 2\widehat{AG'B} \end{aligned}$$

Από το πιο πάνω Θεώρημα, προκύπτουν άμεσα κάποια πορίσματα.

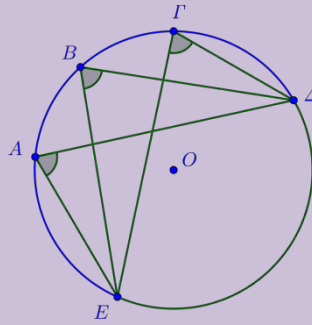
Πορίσματα

- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία κύκλου που βαίνει σε ημικόκλιο είναι ορθή.



Για παράδειγμα, η γωνία BAG είναι ορθή, αφού η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία BOG είναι ευθεία γωνία.

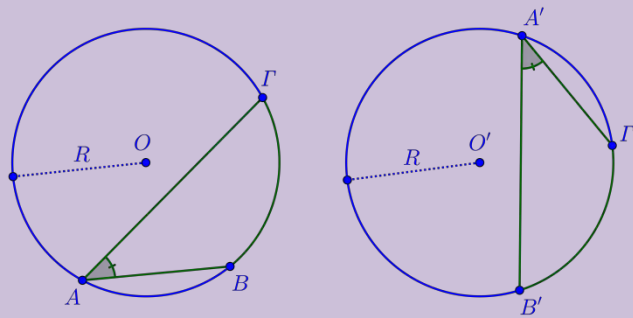
- Εγγεγραμμένες γωνίες κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες μεταξύ τους.



Για παράδειγμα, οι εγγεγραμμένες γωνίες ΔAE , ΔBE και $\Delta \Gamma E$ που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΔE είναι ίσες, διότι:

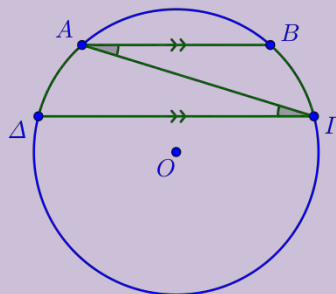
$$\Delta \hat{A}E = \frac{\Delta \hat{O}E}{2}, \quad \Delta \hat{B}E = \frac{\Delta \hat{O}E}{2}, \quad \Delta \hat{\Gamma}E = \frac{\Delta \hat{O}E}{2}$$

- Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα ίσων κύκλων ή του ίδιου κύκλου είναι ίσες μεταξύ τους και αντίστροφα.



Για παράδειγμα, $B \hat{A} \Gamma = B' \hat{A}' \Gamma' \Leftrightarrow \widehat{B\Gamma} = \widehat{B'\Gamma'}$.

- Τόξα που περιέχονται μεταξύ δύο παράλληλων χορδών είναι ίσα.

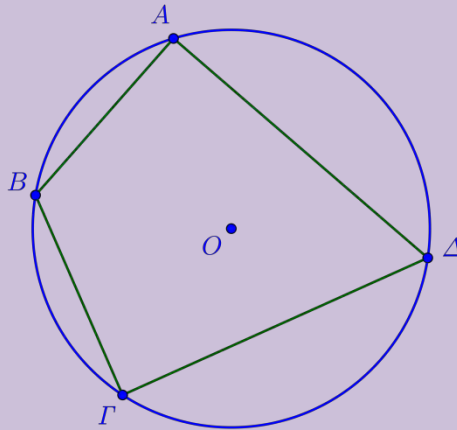


Για παράδειγμα, $AB \parallel \Gamma \Delta \Rightarrow \widehat{B\Gamma} = \widehat{A\Delta}$.

Οι αποδείξεις των πιο πάνω πορισμάτων αφήνονται ως ασκήσεις για τους μαθητές.

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο σε κύκλο**, όταν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου.



Θεώρημα

Κάθε τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις απέναντι γωνίες παραπληρωματικές.

Απόδειξη

Η εγγεγραμμένη γωνία A βαίνει στο τόξο BΓΔ. Άρα,

$$\hat{A} = \frac{\widehat{B\Gamma\Delta}}{2},$$

αφού το μέτρο κάθε εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου.

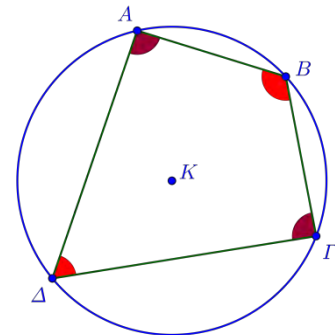
Με τον ίδιο τρόπο, προκύπτει ότι:

$$\hat{\Gamma} = \frac{\widehat{BA\Delta}}{2}$$

Επομένως, έχουμε ότι:

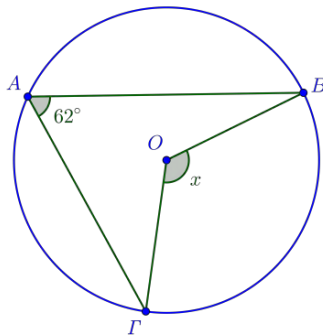
$$\hat{A} + \hat{\Gamma} = \frac{\widehat{B\Gamma\Delta}}{2} + \frac{\widehat{BA\Delta}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^\circ$.



Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τη γωνία x στο πιο κάτω σχήμα.



Λύση

Η εγγεγραμμένη γωνία BAG βαίνει στο μικρό τόξο $BΓ$. Επίσης, η επίκεντρη γωνία $BOΓ$ βαίνει στο μικρό τόξο $BΓ$. Επομένως:

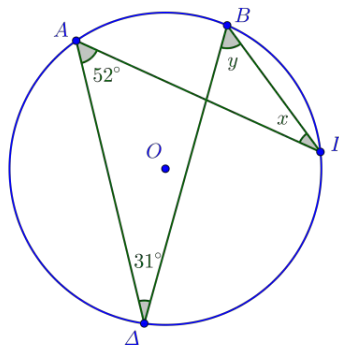
$$\widehat{BAG} = \frac{\widehat{BOΓ}}{2}$$

(Θεώρημα εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας)

$$\Rightarrow 62^\circ = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 124^\circ$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε τις γωνίες x και y στο πιο κάτω σχήμα.



Λύση

Οι γωνίες $Γ$ και $Δ$ είναι ίσες, γιατί βαίνουν στο ίδιο τόξο, το μικρό τόξο AB .

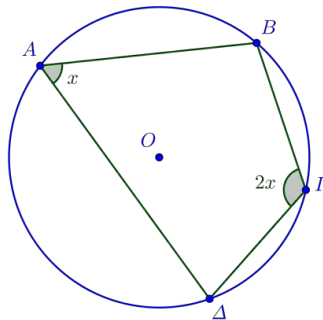
Άρα, $x = 31^\circ$.

Οι γωνίες A και B είναι ίσες, γιατί βαίνουν στο ίδιο τόξο, το μικρό τόξο $ΓΔ$.

Άρα, $y = 52^\circ$.

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τη γωνία x στο πιο κάτω σχήμα.



Λύση

Οι γωνίες A και Γ είναι παραπληρωματικές, ως απέναντι γωνίες στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$.

Επομένως:

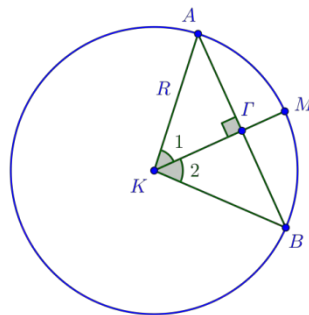
$$A + \Gamma = 180^\circ \Rightarrow x + 2x = 180^\circ \Rightarrow 3x = 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$$

Παράδειγμα 4

Να αποδείξετε ότι η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του (απόστημα) διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

Λύση

Θεωρούμε κύκλο (K, R) , μια χορδή του AB και την κάθετη $K\Gamma$ της AB , που τέμνει τον κύκλο στο σημείο M , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Έχουμε διαδοχικά ότι:

- $\Rightarrow K\Gamma$ ύψος βάσης ισοσκελούς τριγώνου KAB
- $\Rightarrow K\Gamma$ διάμεσος και διχοτόμος του τριγώνου KAB
- $\Rightarrow K\Gamma$ διχοτόμος της χορδής AB
- $\Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{K_2}$
- $\Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{BM}$
- $\Rightarrow K\Gamma$ διχοτομεί το αντίστοιχο τόξο \widehat{AMB}

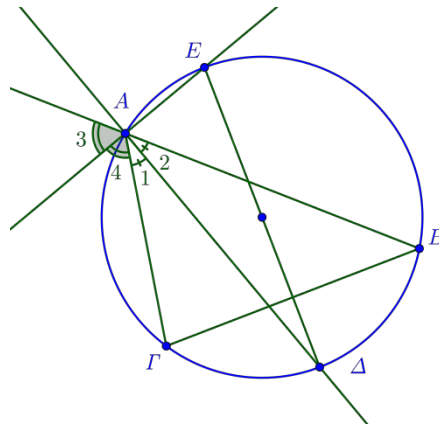
- $(KA = KB = R, K\Gamma \perp AB)$
- $(KAB \text{ ισοσκελές τρίγωνο})$
- $(K\Gamma \text{ διχοτόμος του τριγώνου } KAB)$
- $(K\Gamma \text{ διχοτόμος της } A\widehat{K}B)$
- $(\widehat{K_1} = \widehat{K_2})$
- $(\widehat{AM} = \widehat{BM})$

Παράδειγμα 5

Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ και η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας του τριγώνου στο A τέμνει τον κύκλο στο σημείο E . Να δείξετε ότι $B\Gamma \perp E\Delta$.

Λύση

Κατασκευάζουμε το πιο κάτω σχήμα.



Έχουμε διαδοχικά ότι:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = x$$

$$\hat{A}_3 = \hat{A}_4 = y$$

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = 180^\circ \Rightarrow x + y = 90^\circ$$

$$\widehat{BAE} = \hat{A}_3 = y$$

$$\widehat{DAE} = 90^\circ$$

ΔE διάμετρος κύκλου

$$\Delta E \perp B\Gamma$$

($A\Delta$ διχοτόμος της $B\hat{A}\Gamma$)

(AE διχοτόμος της $\hat{A}_{εξ}$)

(Ευθεία γωνία)

(Κατακορυφήν γωνίες)

$$(\widehat{DAE} = \hat{A}_2 + \widehat{BAE} = x + y)$$

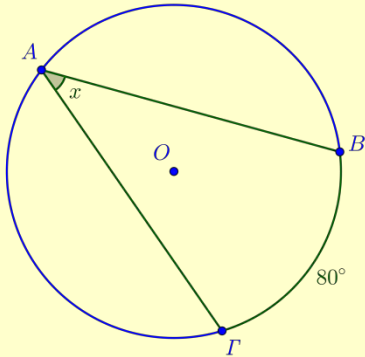
(\widehat{DAE} εγγεγραμμένη γωνία κύκλου, $\widehat{DAE} = 90^\circ$)

(ΔE διάμετρος κύκλου και διχοτομεί το $\widehat{\Gamma\Delta B}$,
αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$)

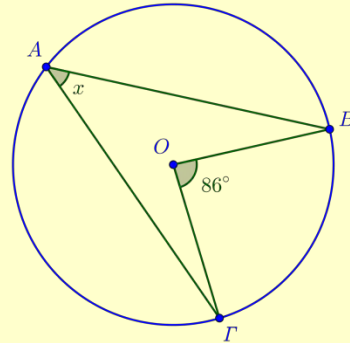
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις γωνίες x και y σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

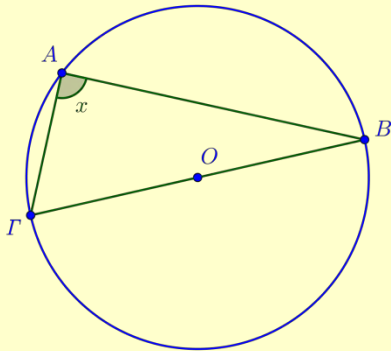
(α)



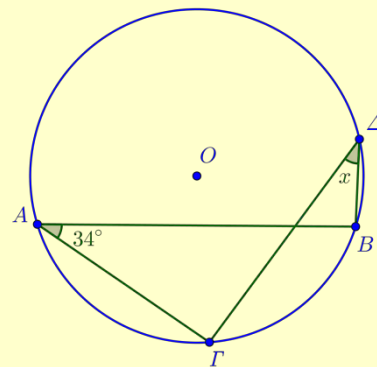
(β)



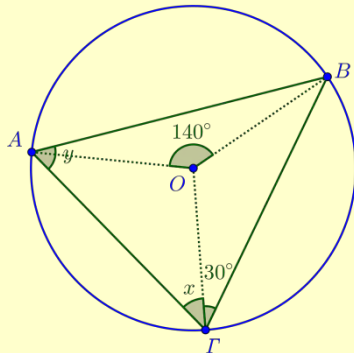
(γ)



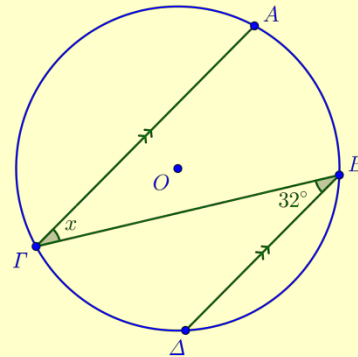
(δ)



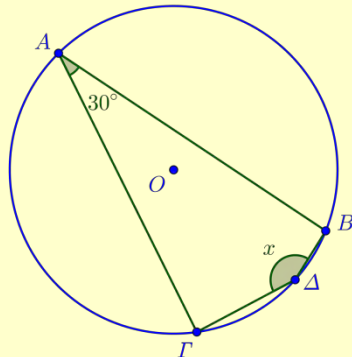
(ε)



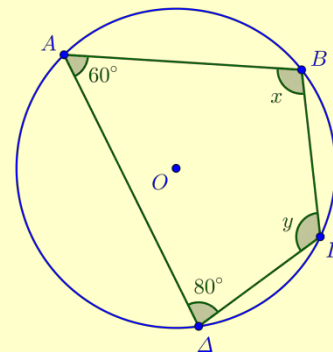
(στ)



(ζ)



(η)

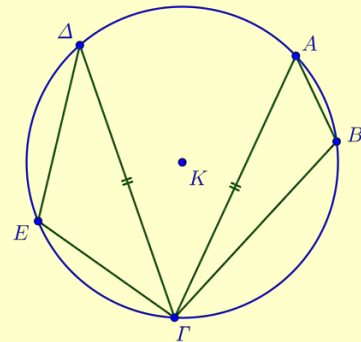


2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

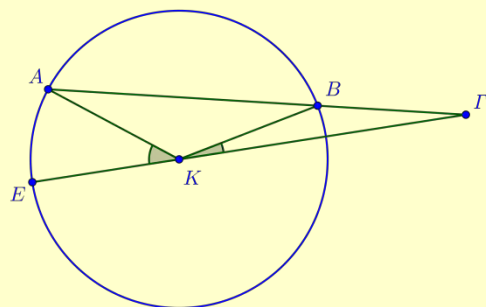
| | | |
|-----|--|---------------|
| (α) | Δύο εγγεγραμμένες γωνίες κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) | Δύο εγγεγραμμένες γωνίες κύκλου που είναι ίσες βαίνουν σίγουρα στο ίδιο τόξο. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) | Αν μία εγγεγραμμένη γωνία κύκλου είναι ορθή, τότε βαίνει σε ημικύκλιο. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) | Σε κύκλους $(K, 4)$ και $(\Lambda, 8)$ αν οι επίκεντρες γωνίες τους AKB και $\Gamma\Lambda\Delta$ είναι αντίστοιχα ίσες, τότε και οι επίκεντρες βαίνουν σε ίσα τόξα. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

3. Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma = 4$ cm) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, ρ) . Αν η πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου είναι διάμετρος του κύκλου, τότε να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου.

4. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται κύκλος (K, R) και $AG = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\Gamma E\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι ίσες.



5. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται κύκλος $(K, 5$ cm) και η χορδή του AB . Στην προέκταση της AB προς το B παίρνουμε τμήμα $B\Gamma = 5$ cm. Η προέκταση του ευθυγράμμου τμήματος ΓK προς το K τέμνει τον κύκλο στο σημείο E . Να δείξετε ότι $E\hat{K}A = 3B\hat{K}\Gamma$.



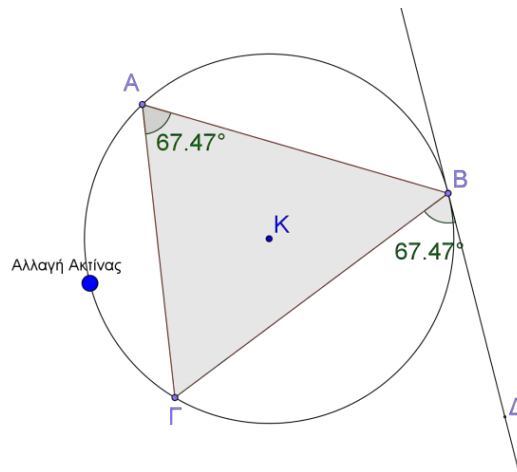
6. Δίνεται εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$ και $\hat{B}_{εξ} = 80^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες B, Γ και Δ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

7. Να αποδείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

3.3 ΘΕΩΡΗΜΑ ΧΟΡΔΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

Διερεύνηση

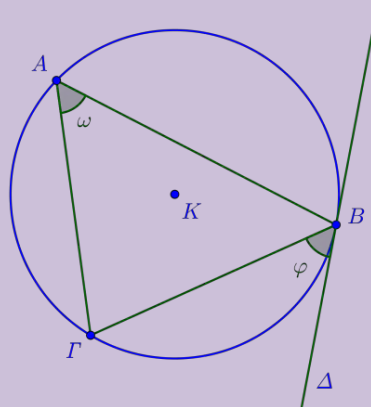
Να ανοίξετε το αρχείο «[ALyk_En03_DGeoXordiEfaptomeni.ggb](#)».



- Να εγγράψετε στον κύκλο (K, R) τρίγωνο $AB\Gamma$ (A, B, Γ σημεία του κύκλου).
- Να φέρετε την εφαπτομένη $B\Delta$ του κύκλου (K, R) στο σημείο B .
- Να μετρήσετε τις γωνίες $\Gamma B\Delta$ και ΓAB .
- Ποια είναι η σχέση μεταξύ των γωνιών $\Gamma B\Delta$ και ΓAB ;
- Να μετακινήσετε τις κορυφές του τριγώνου σε διάφορες θέσεις.
- Να αλλάξετε το μέγεθος του κύκλου.

Θεώρημα

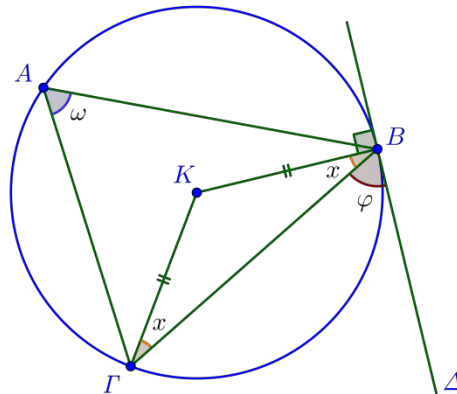
Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή ενός κύκλου και την εφαπτομένη στο ένα άκρο της είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο, το οποίο βρίσκεται μεταξύ των πλευρών της γωνίας.



Για παράδειγμα, στο πιο πάνω σχήμα, έχουμε ότι $\hat{\omega} = \hat{\phi}$.

Απόδειξη

Φέρουμε τις ακτίνες KB και $KΓ$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Θα αποδείξουμε ότι $B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma$. Έχουμε ότι:

$$K\hat{\Gamma}B = K\hat{B}\Gamma = x$$

$$\Gamma\hat{K}B = 2\omega$$

$$x + x + 2\omega = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2x + 2\omega = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x + \omega = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \omega = 90^\circ - x$$

(Τρίγωνο $KB\Gamma$ ισοσκελές)
(Η επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια
της αντίστοιχης εγγεγραμμένης)
(Άθροισμα γωνιών τριγώνου $BK\Gamma$)

(1)

Επιπλέον, έχουμε ότι:

$$K\hat{B}\Delta = 90^\circ$$

$$\Rightarrow x + \varphi = 90^\circ \Rightarrow \varphi = 90^\circ - x$$

(Θεώρημα Ακτίνας – Εφαπτομένης)

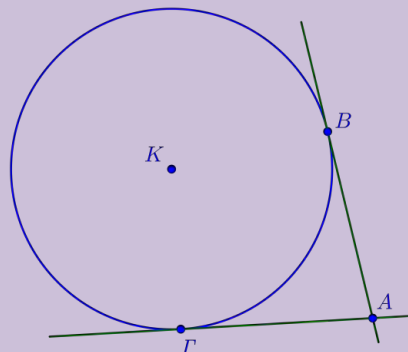
(2)

Από τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει ότι:

$$\omega = \varphi \Rightarrow B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma$$

Πόρισμα

Τα εφαπτόμενα ευθύγραμμα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου είναι ίσα.

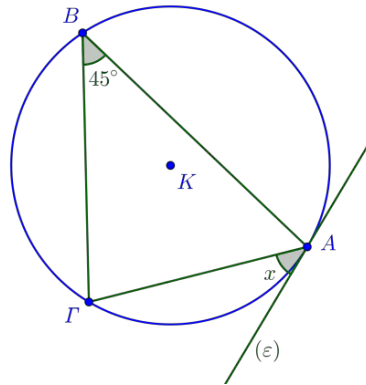


Για παράδειγμα, στο πιο πάνω σχήμα, έχουμε ότι $AB = A\Gamma$.

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση για τους μαθητές.

Παράδειγμα 1

Στο πιο κάτω σχήμα, η ευθεία (ε) είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A . Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας x .



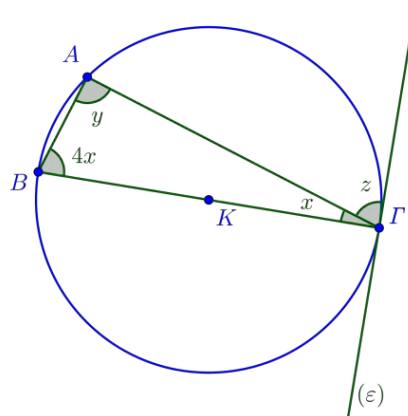
Λύση

Η οξεία γωνία x σχηματίζεται από τη χορδή $A\Gamma$ του κύκλου και την εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο άκρο A της χορδής $A\Gamma$.

Άρα, από το Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης, η γωνία x είναι ίση με την εγγεγραμμένη γωνία $AB\Gamma = 45^\circ$, η οποία βαίνει στο μικρότερο τόξο της χορδής $A\Gamma$. Δηλαδή, $x = 45^\circ$.

Παράδειγμα 2

Στο πιο κάτω σχήμα, η γωνία A βαίνει σε ημικόκλιο και η ευθεία (ε) είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ . Να υπολογίσετε τις τιμές των x , y και z .



Λύση

Η γωνία A βαίνει σε ημικόκλιο. Επομένως, $y = 90^\circ$.

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 4x + x + 90^\circ &= 180^\circ \\ \Rightarrow 5x &= 90^\circ \Rightarrow x = 18^\circ \end{aligned}$$

(Άθροισμα γωνιών τριγώνου)

1^{ος} τρόπος

Από το Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης, προκύπτει ότι:

$$z = B = 4x \Rightarrow z = 72^\circ$$

2^{ος} τρόπος

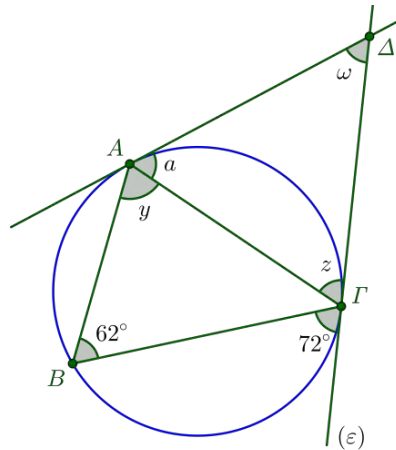
Οι γωνίες x και z είναι συμπληρωματικές, εφόσον γνωρίζουμε ότι η $K\Gamma$ είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Επομένως:

$$z = 90^\circ - x \Rightarrow z = 90^\circ - 18^\circ \Rightarrow z = 72^\circ$$

Παράδειγμα 3

Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ είναι εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία A και Γ , αντίστοιχα, να υπολογίσετε τις γωνίες a, y, z και ω .



Λύση

Η γωνία z σχηματίζεται από το εφαπτόμενο τμήμα $\Gamma\Delta$ και τη χορδή $A\Gamma$ και η εγγεγραμμένη γωνία B βαίνει στο τόξο $A\Gamma$. Άρα, από το Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης, προκύπτει ότι $B = z = 62^\circ$.

Από το ίδιο Θεώρημα, προκύπτει ότι $y = 72^\circ$.

Τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το σημείο Δ που βρίσκεται εκτός του κύκλου είναι ίσα. Δηλαδή, $A\Delta = \Delta\Gamma$. Άρα, το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές, με $a = z = 62^\circ$.

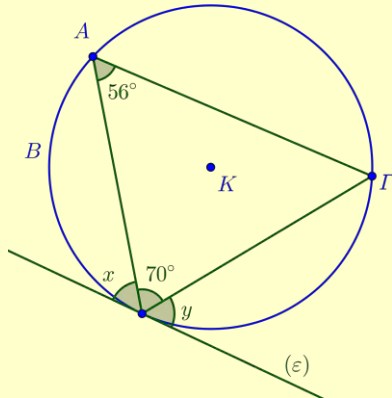
Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \omega + a + z &= 180^\circ && \text{(Άθροισμα γωνιών τριγώνου } A\Delta\Gamma) \\ \Rightarrow \omega &= 180^\circ - 62^\circ - 62^\circ \Rightarrow \omega = 56^\circ \end{aligned}$$

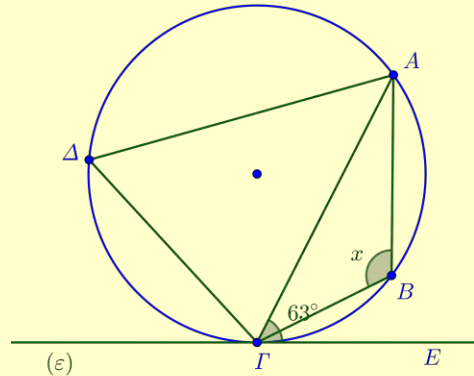
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των x και y , για καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις, αν η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου.

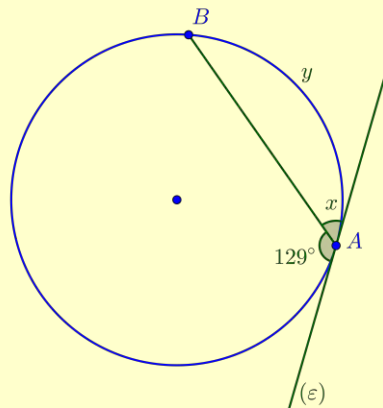
(α)



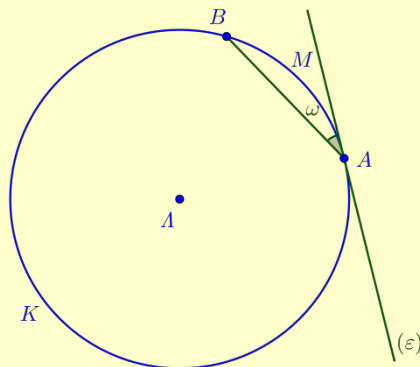
(β)



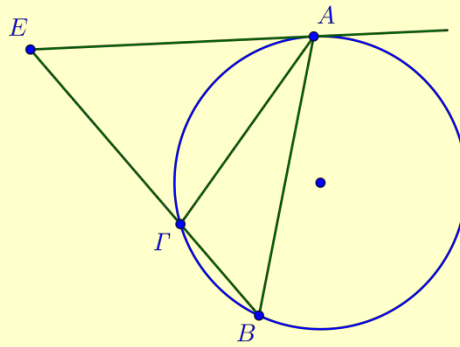
(γ)



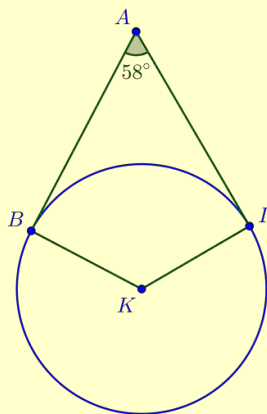
2. Δίνεται κύκλος (K, R) και η χορδή του AB . Στο σημείο B φέρουμε την εφαπτομένη του BE . Η οξεία γωνία που σχηματίζει η χορδή AB με την BE είναι $\widehat{EBA} = 70^\circ$. Να υπολογίσετε τη γωνία AKB .
3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (Λ, ρ) , η χορδή AB , M σημείο του κύκλου και (ε) εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A . Αν δίνεται ότι $\widehat{AKB} = 5\widehat{AMB}$, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ω .



4. Δίνεται κύκλος (K, R) με διάμετρο AB και σημείο Γ στην περιφέρεια του κύκλου, τέτοιο ώστε η γωνία $BAG = 30^\circ$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Γ τέμνει την προέκταση της AB στο Δ . Να δείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.
5. Από σημείο E εκτός κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη EA , όπου A είναι το σημείο επαφής, και την τέμνουσα $E\Gamma B$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αν γνωρίζουμε ότι $AB = EA$, να δείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές.



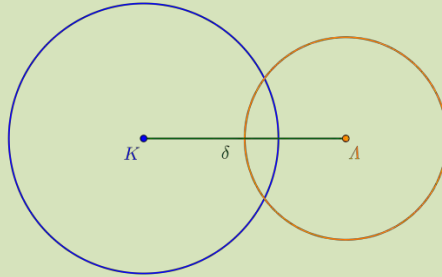
6. Από σημείο A που βρίσκεται εκτός του κύκλου (K, R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$. Αν η γωνία $BAG = 58^\circ$, να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου $B\Gamma$ που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία $BK\Gamma$.



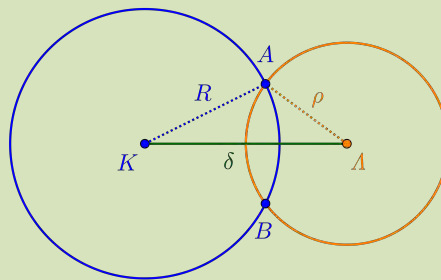
7. Δίνεται κύκλος (O, R) , η διάμετρος του AB και το τυχαίο σημείο του Γ . Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B , στα σημεία Δ και E , αντίστοιχα.
- (α) Να δείξετε ότι η γωνία $EO\Delta$ είναι ορθή.
- (β) Πού βρίσκεται το κέντρο του κύκλου που περνά από τα σημεία E, O, Δ ;

Περίληψη

1. **Διάκεντρος** δύο κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα των δύο κύκλων. Το μήκος της συμβολίζεται με δ .
Για παράδειγμα, στους κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) ισχύει ότι $\delta = K\Lambda$.



2. **Θεώρημα**
Αν δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) , όπου $R > \rho$ τέμνονται, τότε ισχύει ότι
$$R - \rho < \delta < R + \rho,$$
όπου $\delta = K\Lambda$.



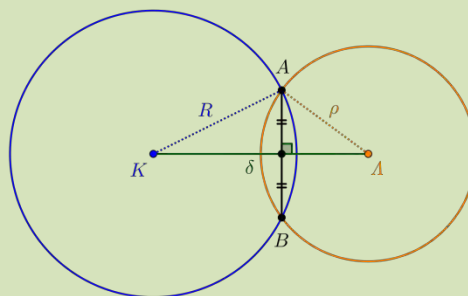
Σχόλιο

Ισχύει και το αντίστροφο του πιο πάνω θεωρήματος. Δηλαδή, αν για δύο κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) , όπου $R > \rho$, ισχύει ότι

$$R - \rho < \delta < R + \rho,$$

όπου $\delta = K\Lambda$, τότε οι δύο κύκλοι τέμνονται.

3. **Θεώρημα**
Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι η μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.

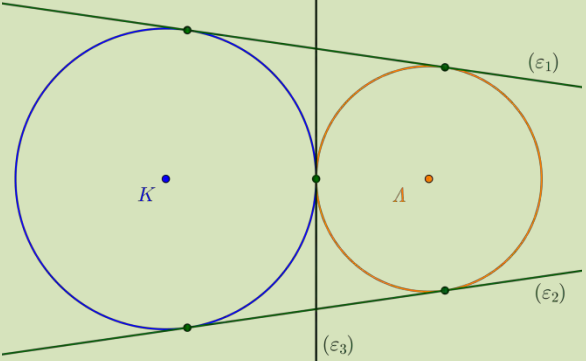
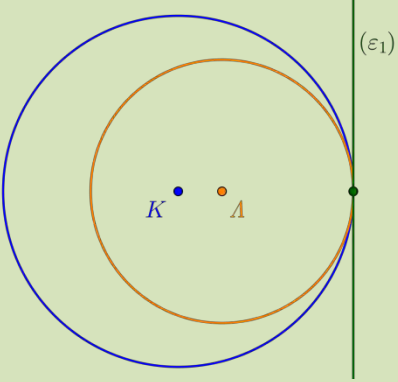
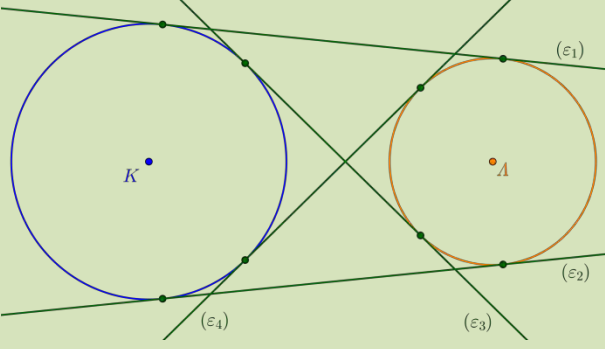


4. Σχετική θέση δύο κύκλων

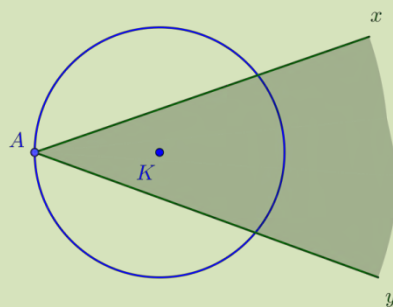
| Σχέση διακέντρου – ακτινών ($R \geq \rho$) | Σχετική θέση δύο κύκλων | Σχήμα |
|--|---|-------|
| $R - \rho < \delta < R + \rho$ | Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται. | |
| $\delta = R + \rho$ | Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά. | |
| $\delta = R - \rho$ | Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εσωτερικά. | |
| $\delta > R + \rho$ | Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) είναι ξένοι εξωτερικά. | |
| $\delta < R - \rho$ | Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) είναι ξένοι εσωτερικά. | |

5. Κοινές εφαπτομένες δύο κύκλων

| Σχετική θέση δύο κύκλων | Κοινές εφαπτομένες δύο κύκλων |
|---|----------------------------------|
| Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται. | |

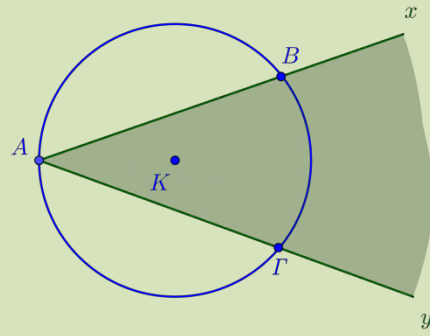
| | |
|--|---|
| <p>Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά.</p> |  |
| <p>Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εσωτερικά.</p> |  |
| <p>Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) είναι ξένοι εξωτερικά.</p> |  |
| <p>Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) είναι ξένοι εσωτερικά.</p> | <p>Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) δεν έχουν κοινές εφαπτομένες.</p> |

6. **Εγγεγραμμένη γωνία κύκλου** ονομάζεται η γωνία που η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της είναι τέμνουσες του κύκλου.

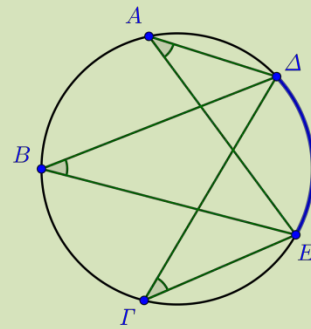


Παρατηρήσεις

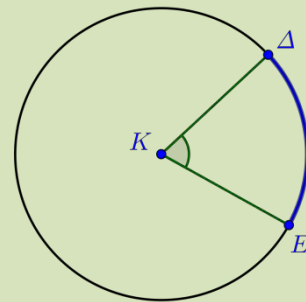
- Αν B και Γ είναι τα σημεία τομής της $x\hat{A}y$ με τον κύκλο, τότε θα λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία BAG βαίνει στο τόξο $B\Gamma$.



- Σε κάθε τόξο αντιστοιχούν άπειρες εγγεγραμμένες γωνίες.

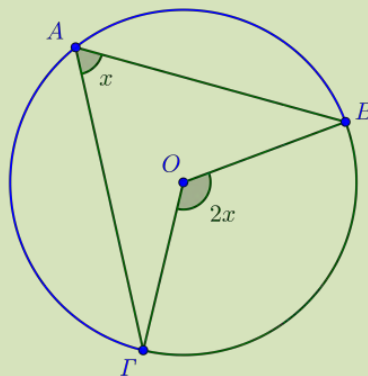


- Σε κάθε τόξο αντιστοιχεί μόνο μία επίκεντρη γωνία.



7. Θεώρημα

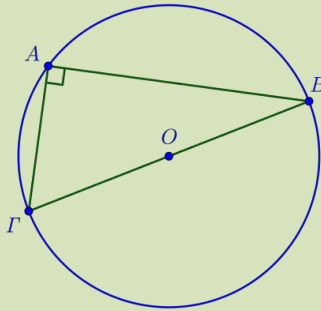
Κάθε εγγεγραμμένη γωνία κύκλου είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.



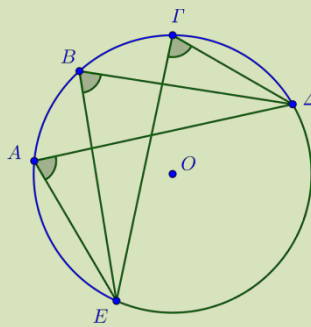
Για παράδειγμα, $B\hat{A}\Gamma = \frac{1}{2}B\hat{O}\Gamma$.

8. Πορίσματα

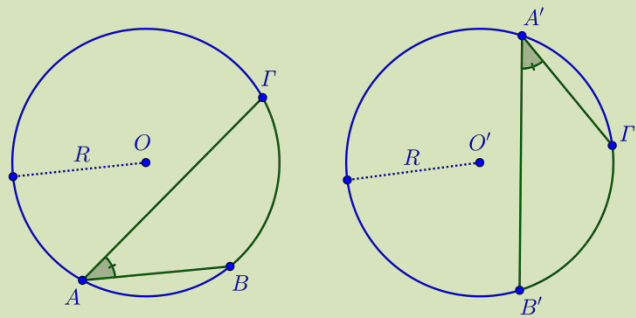
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία κύκλου που βαίνει σε ημικόκλιο είναι ορθή.



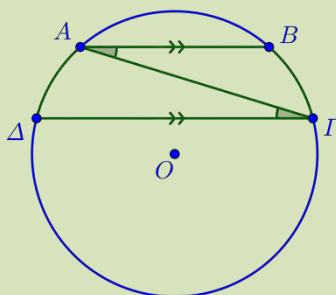
- Εγγεγραμμένες γωνίες κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες μεταξύ τους.



- Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα ίσων κύκλων ή του ίδιου κύκλου είναι ίσες μεταξύ τους και αντίστροφα.

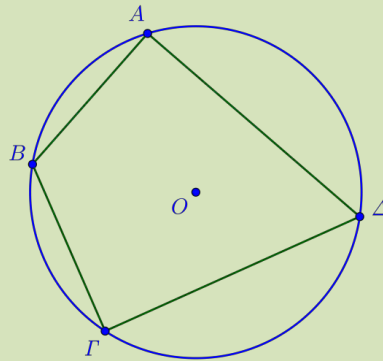


- Τόξα που περιέχονται μεταξύ δύο παράλληλων χορδών είναι ίσα.



9. Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο σε κύκλο**, όταν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου.

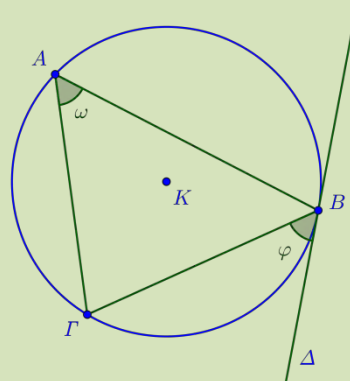


10. Θεώρημα

Κάθε τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις απέναντι γωνίες παραπληρωματικές.

11. Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης

Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή ενός κύκλου και την εφαπτομένη στο ένα άκρο της είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που αντιστοιχεί στο τόξο, το οποίο βρίσκεται μεταξύ των πλευρών της γωνίας.

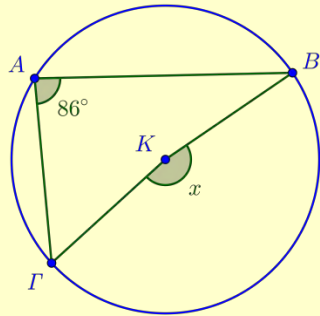


Για παράδειγμα, στο πιο πάνω σχήμα, έχουμε ότι $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$.

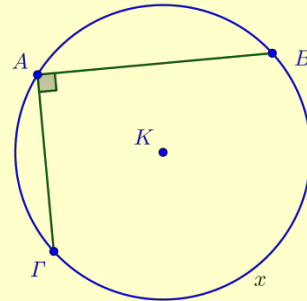
Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των x και y σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

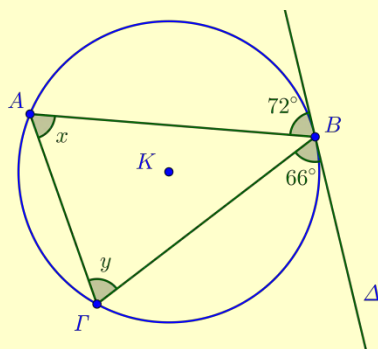
(α)



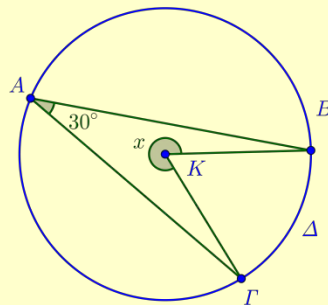
(β)



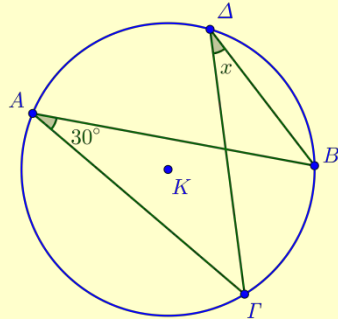
(γ)



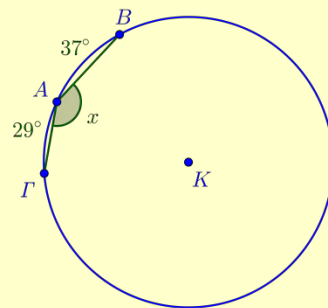
(δ)



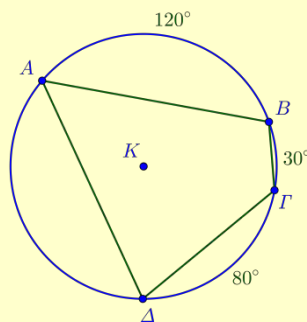
(ε)



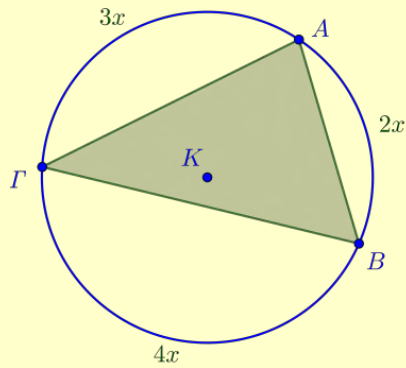
(στ)



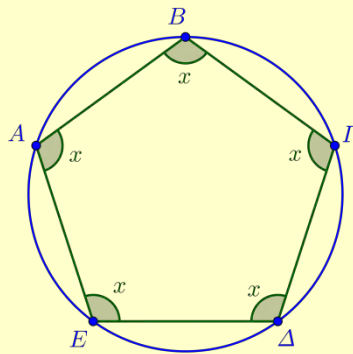
2. Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με $\widehat{AB} = 120^\circ$, $\widehat{B\Gamma} = 30^\circ$ και $\widehat{\Gamma\Delta} = 80^\circ$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.



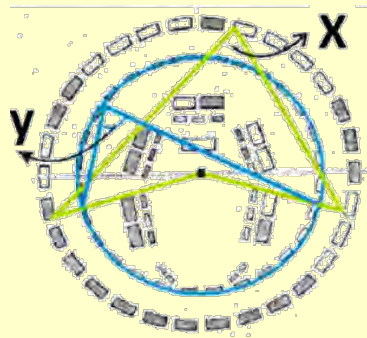
3. Στο πιο κάτω σχήμα, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $ABΓ$.



4. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το πεντάγωνο $ABΓΔE$ εγγεγραμμένο σε κύκλο.
- (α) Να συγκρίνετε τα τόξα $ABΔ$ και $EBΓ$.
 - (β) Να δείξετε ότι $\widehat{AE} = \widehat{ΓΔ}$.
 - (γ) Να υπολογίσετε την τιμή του x .

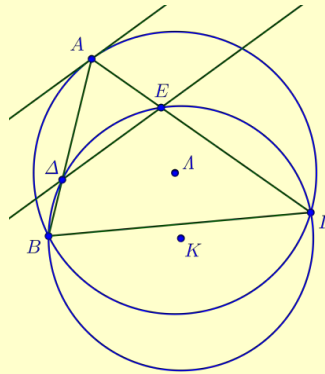


5. Στο πιο κάτω σχήμα παρουσιάζεται η κάτοψη του αγγλικού μνημείου Stonehenge, που είναι φτιαγμένο από βράχους. Τμήματα του μνημείου δημιουργούν δύο ομόκεντρους κύκλους.

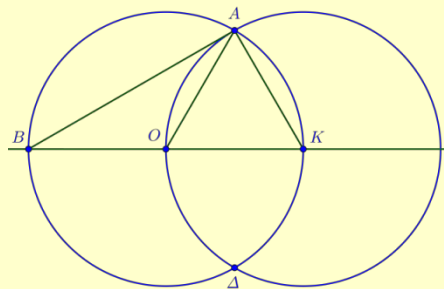


Να αποδείξετε ότι οι γωνίες x και y είναι ίσες.

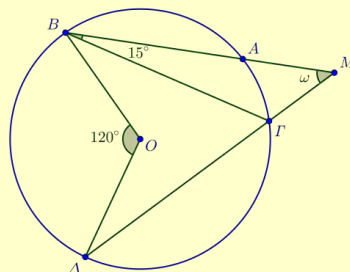
6. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (A, R) . Φέρουμε κύκλο (K, ρ) , ο οποίος διέρχεται από τις κορυφές B και Γ και τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E , αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔE είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου στην κορυφή A του τριγώνου $AB\Gamma$.



7. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) , με $OK = \rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ .
- (α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.
 (β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAK .

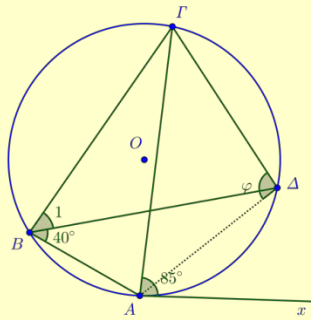


8. Στο πιο κάτω σχήμα, η επίκεντρη γωνία $BO\Delta$ είναι 120° και η γωνία ΓBA είναι 15° . Να υπολογίσετε τις γωνίες $B\Gamma\Delta$ και $BM\Delta$.

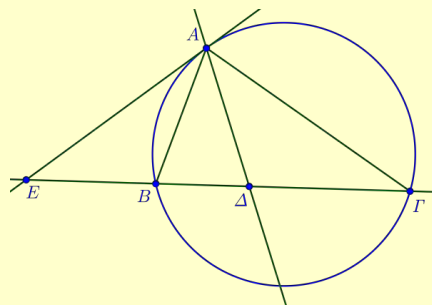


9. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$), στο οποίο η $B\Gamma$ είναι η εφαπτομένη κύκλου με διάμετρο την $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$.

10. Σε κύκλο με κέντρο K δίνεται εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η $\Gamma\chi$ εφαπτομένη του στο Γ . Να δείξετε ότι η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της αμβλείας γωνίας που σχηματίζει η $B\Gamma$ με την εφαπτομένη $\Gamma\chi$.
11. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A}B\Gamma = 30^\circ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο. Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα $A\Delta$, όπου Δ τυχαίο σημείο της $B\Gamma$. Η προέκταση του $A\Delta$ τέμνει τον κύκλο στο E . Να δείξετε ότι $\hat{A}B\Gamma = \hat{A}E\Gamma$.
12. Δίνεται κύκλος (K, R) και σημείο B εκτός αυτού. Με κέντρο το μέσο M του KB και ακτίνα MB φέρουμε ημικύκλιο με διάμετρο KB . Αν A είναι το σημείο τομής του κύκλου (K, R) με το ημικύκλιο, να υπολογίσετε τη γωνία KAB . Να δείξετε ότι η ευθεία που περνά από τα σημεία A και B είναι εφαπτομένη του κύκλου.
13. Στο πιο κάτω σχήμα, η ημιευθεία Ax είναι εφαπτομένη του κύκλου (O, ρ) στο σημείο του A . Αν δίνεται ότι $\hat{G}A\chi = 85^\circ$ και $\hat{\Delta}B\hat{A} = 40^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες B_1 και φ .

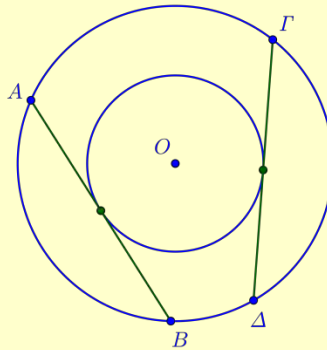


14. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο ($AB < A\Gamma$) και η διχοτόμος $A\Delta$ της γωνίας $BA\Gamma$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές.

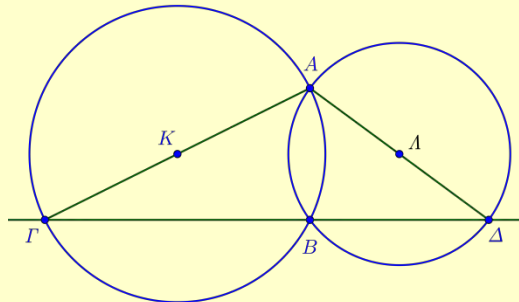


15. Δίνεται κύκλος με διάμετρο AB και εφαπτομένη $B\chi$. Από ένα σημείο E του κύκλου φέρουμε τέμνουσα AE η οποία όταν προεκταθεί, τέμνει τη $B\chi$ στο σημείο Γ . Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο E τέμνει τη $B\chi$ στο σημείο Δ . Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές.

16. Δύο ίσοι κύκλοι τέμνονται στα A και B . Από το A φέρουμε ευθεία που τέμνει τους δύο κύκλους στα σημεία Γ και Δ . Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.
17. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου και AE η διάμετρος του κύκλου, να δείξετε ότι $B\hat{A}E = \Delta\hat{A}\Gamma$.
18. Σε κύκλο φέρουμε χορδή AG και την εφαπτομένη του κύκλου AD . Η διχοτόμος της γωνίας ΔAG τέμνει τον κύκλο στο σημείο E . Να δείξετε ότι το τρίγωνο AEG είναι ισοσκελές.
19. Έστω οι ομόκεντροι κύκλοι (O, R) και (O, ρ) , όπου $R > \rho$. Να αποδείξετε ότι όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στον μικρό κύκλο είναι ίσες.



20. Δυο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B . Αν Γ και Δ είναι τα διαμετρικά σημεία του A στους δύο κύκλους, να δείξετε ότι η ευθεία $\Gamma\Delta$ περνά από το σημείο B .

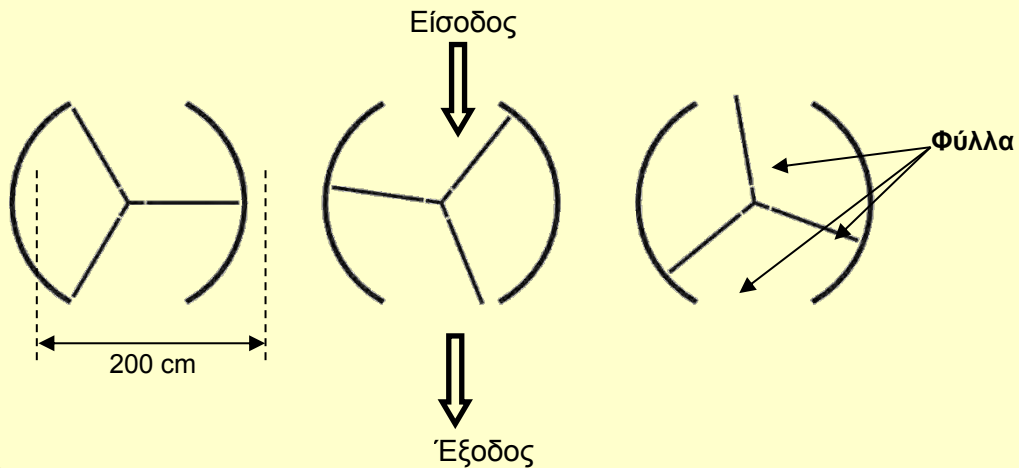


21. Δίνεται κύκλος (K, R) και τυχαία χορδή του AB . Να αποδείξετε τα πιο κάτω θεωρήματα:
- Η ευθεία που περνά από το κέντρο K ενός κύκλου και είναι κάθετη προς τη χορδή AB , περνά από το μέσο N της χορδής και από το μέσο M του τόξου AB .
 - Η ευθεία που περνά από το κέντρο K ενός κύκλου και από το μέσο N μιας χορδής AB , είναι κάθετη στη χορδή και περνά από το μέσο M του τόξου AB .
 - Η ευθεία που περνά από το κέντρο K ενός κύκλου και από το μέσο M ενός τόξου AB , είναι μεσοκάθετη της χορδής AB .
 - Η ευθεία που περνά από το μέσο χορδής AB και το μέσο του αντίστοιχου τόξου AB , περνά από το κέντρο του κύκλου και είναι κάθετη με τη χορδή AB .

Λύση Προβλήματος

ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΗ ΠΟΡΤΑ

Μια περιστρεφόμενη πόρτα περιλαμβάνει τρία φύλλα που περιστρέφονται σε έναν κυκλικό χώρο. Η εσωτερική διάμετρος αυτού του χώρου είναι 2 μέτρα (200 εκατοστόμετρα). Τα τρία φύλλα της πόρτας χωρίζουν τον χώρο σε τρεις ίσους τομείς. Οι πιο κάτω τρεις κατόψεις δείχνουν τα φύλλα της πόρτας σε τρεις διαφορετικές θέσεις.



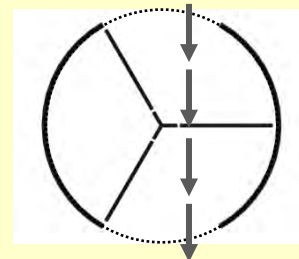
Ερώτηση 1:

Ποιο είναι το άνοιγμα της γωνίας, σε μοίρες, που σχηματίζεται από δύο φύλλα της πόρτας;

Ερώτηση 2:

Τα δύο ανοίγματα της πόρτας (τα διακεκομμένα τόξα στο διάγραμμα) έχουν το ίδιο μέγεθος. Στην περίπτωση που αυτά τα ανοίγματα είναι πολύ μεγάλα, τα περιστρεφόμενα φύλλα δεν μπορούν να σφραγίσουν τον χώρο και έτσι μπορεί να υπάρξει ελεύθερη ροή αέρα μεταξύ της εισόδου και της εξόδου, προκαλώντας ανεπιθύμητη απώλεια ή συσσώρευση θερμότητας. Αυτό φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

Πιθανή ροή του αέρα σε αυτή τη θέση.



Ποιο είναι το μέγιστο μήκος του τόξου, σε εκατοστόμετρα (cm), που μπορεί να έχει κάθε άνοιγμα της πόρτας, ώστε να μην μπορεί να υπάρξει ελεύθερη ροή αέρα μεταξύ της εισόδου και της εξόδου;

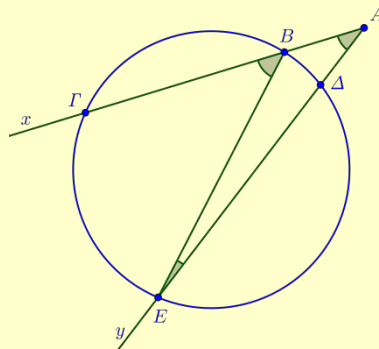
Ερώτηση 3:

Η πόρτα κάνει 4 περιστροφές σε ένα λεπτό. Υπάρχει χώρος για δύο άτομα σε καθένα από τους τρεις τομείς. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ατόμων που μπορούν να εισέλθουν από την πόρτα στο κτήριο σε 30 λεπτά;

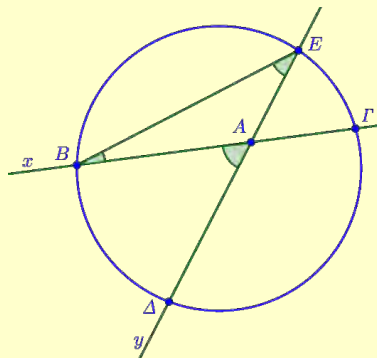
PISA 2012

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

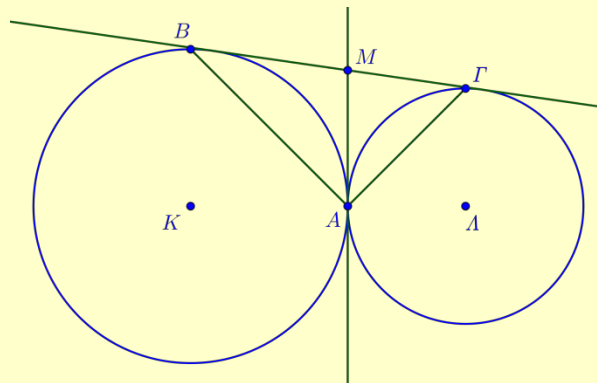
1. Σε κύκλο (O, R) δίνεται χορδή AB και ακτίνα OG του κύκλου παράλληλη με την AB . Να δείξετε ότι $(AG)^2 + (BG)^2 = 4R^2$.
2. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται γωνία xAy , όπου η κορυφή της A είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου. Οι πλευρές της Ax και Ay τέμνουν τον κύκλο στα σημεία B, Γ και Δ, E , αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η γωνία xAy ισούται με τη διαφορά των εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα του κύκλου που περιέχει η γωνία xAy , δηλαδή $x\hat{A}y = \Gamma\hat{B}E - A\hat{E}B$, όπου $\Gamma\hat{B}E > A\hat{E}B$.



3. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά a . Με διάμετρο AB γράφουμε ημικύκλιο μέσα στο τετράγωνο και με κέντρο A και ακτίνα a γράφουμε τόξο μέσα στο τετράγωνο. Από το A φέρουμε ημιευθεία που τέμνει το τόξο στο σημείο Z και το ημικύκλιο στο σημείο E . Αν $ZH \perp B\Gamma$, με H σημείο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $ZE = ZH$.
4. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται γωνία xAy , όπου η κορυφή της A είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου. Οι πλευρές της Ax, Ay και οι προεκτάσεις τους τέμνουν τον κύκλο στα σημεία B, Δ και Γ, E , αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η γωνία xAy ισούται με το άθροισμα των εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα του κύκλου που περιέχει η γωνία xAy και η κατακορυφήν της, δηλαδή $x\hat{A}y = A\hat{B}E + B\hat{E}A$.



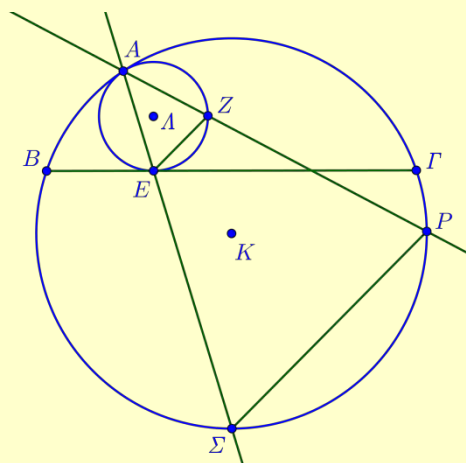
5. Στο πιο κάτω σχήμα, οι κύκλοι (K, R) και (A, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A και η ευθεία $B\Gamma$ είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων (K, R) και (A, ρ) στα σημεία B και Γ , αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$.



6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) . Αν η διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$ και η μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ τέμνονται στο σημείο E , να δείξετε ότι το E είναι σημείο του κύκλου (K, R) .

(Θεώρημα του Νότιου Πόλου)

7. Στο πιο κάτω σχήμα, ο κύκλος (A, ρ) εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο (K, R) και στη χορδή $B\Gamma$ στα σημεία A και E , αντίστοιχα. Αν Z είναι τυχαίο σημείο του κύκλου (A, ρ) και οι ευθείες AE, AZ τέμνουν τον κύκλο (K, R) στα σημεία Σ, P , αντίστοιχα, να δείξετε ότι $\Sigma P \parallel EZ$.



ΕΝΟΤΗΤΑ 04

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 4.1 Η έννοια του διανύσματος
- 4.2 Πράξεις με διανύσματα
- 4.3 Διανυσματική ακτίνα σημείου – Διανύσματα σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων
 - 4.3.1 Διανυσματική ακτίνα σημείου
 - 4.3.2 Διανύσματα σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων
 - 4.3.3 Συντεταγμένες διανύσματος στο καρτεσιανό επίπεδο
 - 4.3.4 Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος








4.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Διερεύνηση 1

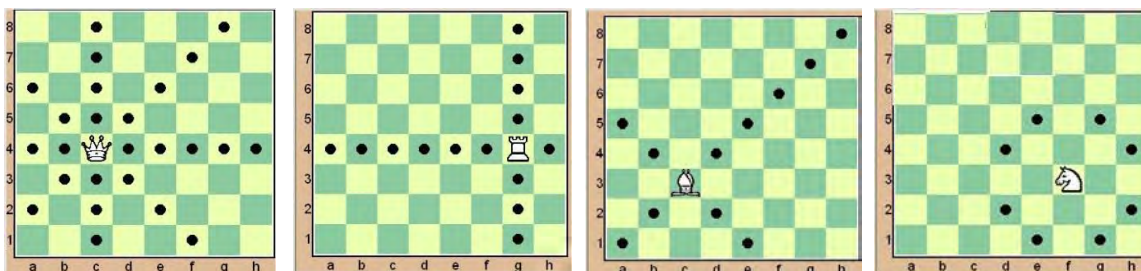
Το παιχνίδι του σκακιού παίζεται μεταξύ δύο αντιπάλων που κινούν εναλλάξ τα κομμάτια τους πάνω σε μια τετράγωνη επιφάνεια που λέγεται «σκακιέρα». Ο παίκτης με τα λευκά κομμάτια αρχίζει το παιχνίδι.

Ο αντικειμενικός σκοπός (στόχος) κάθε παίκτη είναι να «επιτεθεί» στον Βασιλιά του αντιπάλου του με τέτοιο τρόπο, ώστε ο αντίπαλος να μην έχει κίνηση.

Στο ξεκίνημα του παιχνιδιού ο ένας παίκτης έχει 16 ανοιχτόχρωμα κομμάτια (τα «λευκά κομμάτια») και ο άλλος έχει 16 σκουρόχρωμα κομμάτια (τα «μαύρα κομμάτια»).

| Κομμάτια | Σύμβολο | Αρχική διάταξη στη σκακιέρα |
|-------------|---|--|
| Βασιλιάς |  |  |
| Βασίλισσα |  | |
| Πύργος |  | |
| Αξιωματικός |  | |
| Άλογο |  | |
| Πιόνι |  | |

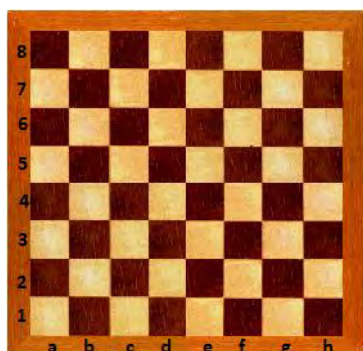
Το κάθε κομμάτι μπορεί να κινηθεί σε μια νέα θέση, σύμφωνα με συγκεκριμένους κανόνες (κανονικές κινήσεις) που διέπουν το σκάκι. Στα πιο κάτω σχήματα φαίνονται ο τρόπος που κινούνται η βασίλισσα, ο πύργος, το άλογο και ο αξιωματικός.



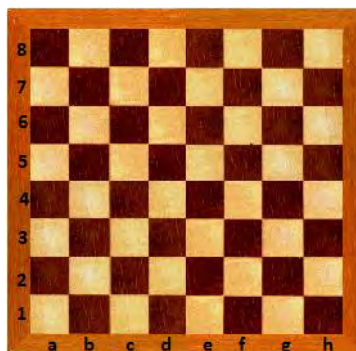
Η βασίλισσα κινείται σε οποιοδήποτε τετράγωνο οριζόντια, κατακόρυφα και διαγώνια, ο πύργος κινείται σε οποιοδήποτε τετράγωνο οριζόντια και κατακόρυφα, ο αξιωματικός κινείται σε οποιοδήποτε τετράγωνο διαγώνια και το άλογο κινείται σε ένα από τα πλησιέστερα τετράγωνα από αυτό που βρίσκεται, αλλά όχι στην ίδια οριζόντια ή κατακόρυφη ή διαγώνιο.

- Στη σκακιέρα *A* να τοποθετήσετε μια βασίλισσα στη θέση $(f,7)$ και να περιγράψετε την κίνηση της βασίλισσας σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
- Στη σκακιέρα *B* να τοποθετήσετε ένα άλογο στη θέση $(d,4)$ και να περιγράψετε την κίνηση του πύργου σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
- Στη σκακιέρα *Γ* να τοποθετήσετε έναν πύργο στη θέση $(c,3)$ και να περιγράψετε την κίνηση του πύργου σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
- Στη σκακιέρα *Δ* να τοποθετήσετε έναν αξιωματικό στη θέση $(e,6)$ και να περιγράψετε την κίνηση του αξιωματικού σε τρεις διαφορετικές θέσεις.

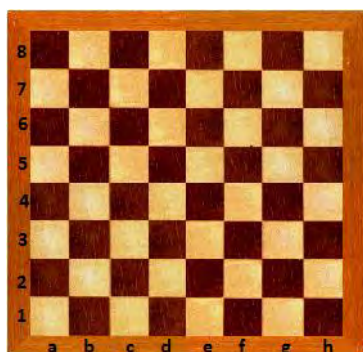
A



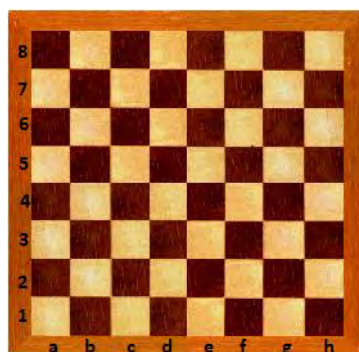
B



Γ

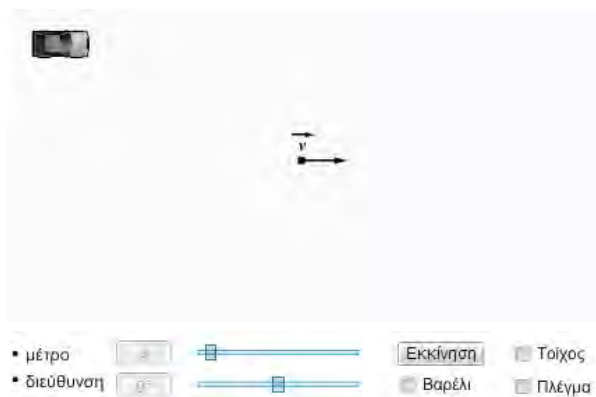


Δ



Διερεύνηση 2

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο «ΑΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ13_Έννοιες διανυσμάτων και πράξεις με διανύσματα_1.1».



- Να επιλέξετε το εικονίδιο «Εκκίνηση», για να αρχίσει το αυτοκίνητο να κινείται με ορισμένη ταχύτητα και προς ορισμένη κατεύθυνση. Με το εικονίδιο «Εκκίνηση» μπορείτε να σταματήσετε το αυτοκίνητο.
- Με τον δρομέα «Μέτρο» μεταβάλλεται η ταχύτητα με την οποία κινείται το αυτοκίνητο και με τον δρομέα «Διεύθυνση» περιστρέφεται το αυτοκίνητο και καθορίζεται η πορεία που θα ακολουθήσει.
- Να επιλέξετε τα εικονίδια «Τοίχος» και «Βαρέλι» και να οδηγήσετε το αυτοκίνητο ώστε να συγκρουστεί με το βαρέλι, αποφεύγοντας τους τοίχους.
- Να περιγράψετε την κίνηση του αυτοκινήτου σε κάθε περίπτωση.

Τα μεγέθη χωρίζονται σε δύο κύριες κατηγορίες:

A. Μονόμετρο μέγεθος λέγεται κάθε μέγεθος που χαρακτηρίζεται μόνο από το μέτρο του.

Για παράδειγμα, το μήκος, η μάζα, ο όγκος, η θερμοκρασία είναι μονόμετρα μεγέθη.

Η πλήρης περιγραφή ενός μονόμετρου μεγέθους απαιτεί:

- (α) μια μονάδα μέτρησης και
- (β) έναν αριθμό που δηλώνει πόσες φορές η μονάδα περιέχεται στο μέγεθος αυτό.

Για παράδειγμα, για να εκφράσουμε τη μάζα ενός ανθρώπου, χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης το χιλιόγραμμα (Ανθρωπος μάζας 80 kg).

B. Διανυσματικό μέγεθος ή διάνυσμα λέγεται κάθε μέγεθος που χαρακτηρίζεται από το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά του.

Για παράδειγμα, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η μετατόπιση, η δύναμη είναι διανυσματικά μεγέθη.

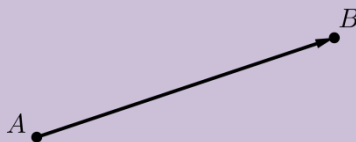
Η πλήρης περιγραφή ενός διανυσματικού μεγέθους απαιτεί:

- (α) μέτρο,
- (β) διεύθυνση και
- (γ) φορά.

Για παράδειγμα, η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου έχει μέτρο 100 km/h, διεύθυνση τον αυτοκινητόδρομο Λευκωσίας – Λεμεσού και φορά από Λεμεσό προς Λευκωσία.

Ορισμός

Αν A και B είναι δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τότε το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το A και πέρας το B λέγεται **εφαρμοστό διάνυσμα** με σημείο εφαρμογής το A και συμβολίζεται με \overrightarrow{AB}



Σχόλια

- Ένα διάνυσμα \overrightarrow{AB} έχει τα εξής στοιχεία:
 - **Διεύθυνση:** Η ευθεία (ε) που ορίζεται από τα άκρα A, B (**φορέας του διανύσματος**).
 - **Φορά:** Καθορίζεται από την αρχή και το τέλος ενός διανύσματος. Το διάνυσμα \overrightarrow{AB} έχει αρχή το A και τέλος το B , ενώ το διάνυσμα αρχή \overrightarrow{BA} έχει αρχή το B και τέλος το A .
 - **Μέτρο:** Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB , το οποίο συμβολίζουμε με $|\overrightarrow{AB}|$. Το μέτρο είναι πάντοτε ένας θετικός αριθμός ή μηδέν.
- Ένα διάνυσμα λέγεται **μηδενικό**, όταν η αρχή και το τέλος του συμπίπτουν. Το συμβολίζουμε με $\vec{0}$ και έχει μέτρο μηδέν. Δηλαδή, $|\vec{0}| = 0$.
- **Μοναδιαίο** λέγεται το διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα.

Για παράδειγμα, το διάνυσμα \overrightarrow{AB} είναι μοναδιαίο αν $|\overrightarrow{AB}| = 1$.

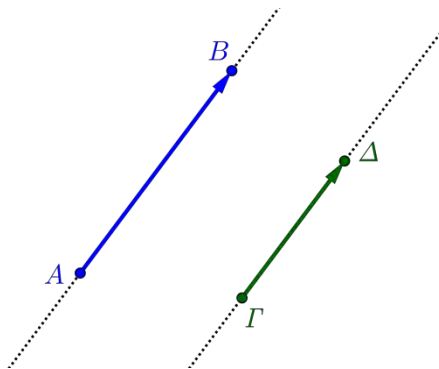
Ορισμός

Παράλληλα ή **συγγραμμικά** ονομάζονται τα μη-μηδενικά διανύσματα, τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση.

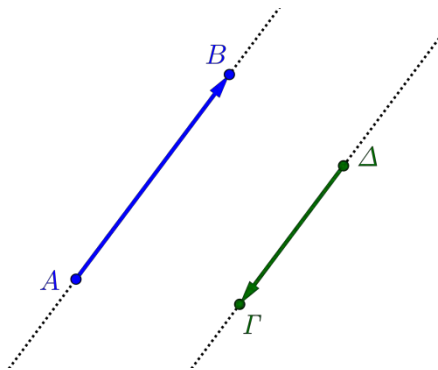
Αν τα διανύσματα \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι παράλληλα, γράφουμε $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Τα παράλληλα διανύσματα διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

- Τα **ομόρροπα**, τα οποία έχουν την **ίδια φορά**.
Για παράδειγμα, τα παράλληλα διανύσματα \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ομόρροπα, γιατί έχουν την ίδια φορά. Γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



- Τα **αντίρροπα**, τα οποία έχουν **αντίθετη φορά**.
Για παράδειγμα, τα παράλληλα διανύσματα \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ είναι αντίρροπα, γιατί έχουν αντίθετη φορά. Γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

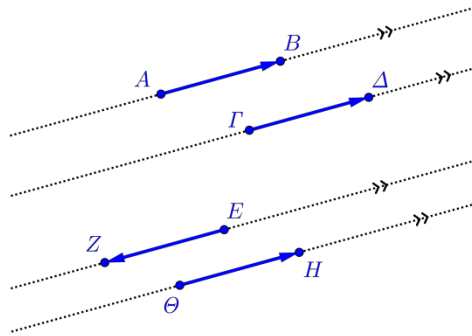


Ορισμοί

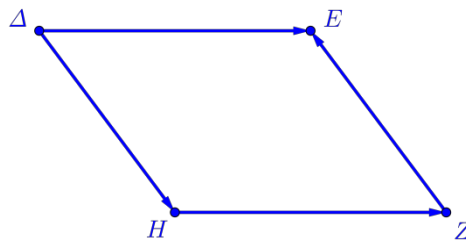
- Ίσα** είναι τα διανύσματα, τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο.
- Αντίθετα** είναι δύο διανύσματα, τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση, το ίδιο μέτρο, αλλά αντίθετη φορά.

Για παράδειγμα:

- Στο πιο κάτω σχήμα, τα παράλληλα διανύσματα $\overline{AB}, \overline{\Gamma\Delta}$ και $\overline{\Theta\text{H}}$ είναι ίσα, ενώ το διάνυσμα \overline{EZ} είναι αντίθετο με τα υπόλοιπα τρία διανύσματα. Γράφουμε $\overline{AB} = \overline{\Gamma\Delta} = \overline{\Theta\text{H}} = -\overline{EZ}$.



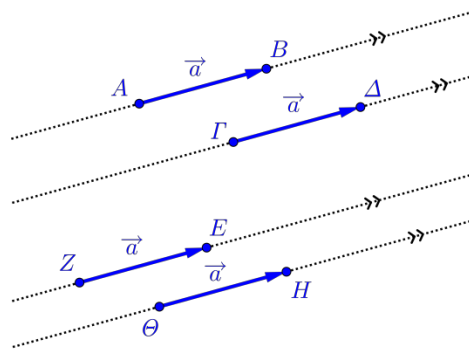
- Στο πιο κάτω παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ τα διανύσματα $\overline{\Delta\text{E}}$ και $\overline{\text{H}\text{Z}}$ είναι ίσα, ενώ τα διανύσματα $\overline{\Delta\text{H}}$ και $\overline{\text{Z}\text{E}}$ είναι αντίθετα. Γράφουμε $\overline{\Delta\text{E}} = \overline{\text{H}\text{Z}}, \overline{\Delta\text{H}} = -\overline{\text{Z}\text{E}}$.



Επίσης, ισχύει $\overline{\Delta\text{O}} = \overline{\text{O}\text{Z}}, \overline{\text{E}\text{O}} = \overline{\text{O}\text{H}}, \overline{\text{E}\text{O}} = -\overline{\text{H}\text{O}}$ κλπ.

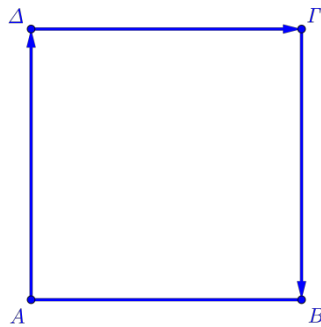
Ορισμός

Κάθε εφαρμοστό διάνυσμα \overline{AB} του επιπέδου έχει άπειρα διανύσματα ίσα με αυτό. Το σύνολο των διανυσμάτων του επιπέδου που είναι ίσα με το \overline{AB} λέγεται **ελεύθερο διάνυσμα** και μπορεί να συμβολιστεί με \vec{a} . Το διάνυσμα \overline{AB} (ή οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα ίσο με αυτό) θεωρείται **αντιπρόσωπος** του ελεύθερου διανύσματος.



Παράδειγμα 1

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



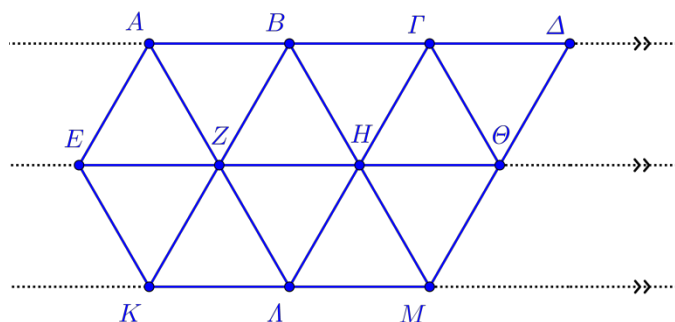
- (α) Να γράψετε δύο διανύσματα, τα οποία έχουν ως αρχή το σημείο B .
- (β) Να γράψετε ένα διάνυσμα, που να είναι ίσο με το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- (γ) Να γράψετε τις σχέσεις που συνδέουν τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$.

Λύση

- (α) Τα διανύσματα \overrightarrow{BA} και $\overrightarrow{B\Gamma}$ έχουν ως αρχή το σημείο B .
- (β) Το διάνυσμα \overrightarrow{AB} είναι ίσο με το $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, γιατί έχουν την ίδια διεύθυνση (ως απέναντι πλευρές τετραγώνου), την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο (ως πλευρές τετραγώνου).
- (γ) Τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι αντίθετα. Έχουν την ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά και το ίδιο μέτρο ($\Gamma B \parallel A\Delta$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, $\overrightarrow{\Gamma B} \uparrow \downarrow \overrightarrow{A\Delta}$, $|\overrightarrow{\Gamma B}| = |\overrightarrow{A\Delta}|$).

Παράδειγμα 2

Το πιο κάτω σχήμα αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς 2 cm. Τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, K, \Lambda$ και M είναι οι κορυφές των τριγώνων.



- (α) Να βρείτε ένα ζεύγος ομόροπων διανυσμάτων και ένα ζεύγος αντίροπων διανυσμάτων.
- (β) Να βρείτε ένα ζεύγος ίσων διανυσμάτων και ένα ζεύγος αντίθετων διανυσμάτων.
- (γ) Να υπολογίσετε το μέτρο των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Gamma}$, \overrightarrow{BK} και $\overrightarrow{\Theta E}$.

Λύση

(α) Τα ευθύγραμμα τμήματα AD και $E\theta$ είναι παράλληλα. Έτσι, τα διανύσματα \overrightarrow{AG} και \overrightarrow{ZH} είναι ομόρροπα, γιατί είναι παράλληλα και έχουν την ίδια φορά.

Ομοίως, τα διανύσματα \overrightarrow{AI} και \overrightarrow{HZ} είναι αντίρροπα, γιατί είναι παράλληλα και έχουν αντίθετη φορά.

(β) Τα διανύσματα \overrightarrow{AG} και \overrightarrow{ZH} είναι ίσα, γιατί είναι παράλληλα, έχουν την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο ($|\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{ZH}| = 4 \text{ cm}$).

Τα διανύσματα \overrightarrow{KB} και \overrightarrow{DM} είναι αντίθετα, γιατί είναι παράλληλα, έχουν την αντίθετη φορά και το ίδιο μέτρο ($|\overrightarrow{KB}| = |\overrightarrow{DM}| = 4 \text{ cm}$).

Δηλαδή, ισχύει $\overrightarrow{KB} = -\overrightarrow{DM}$.

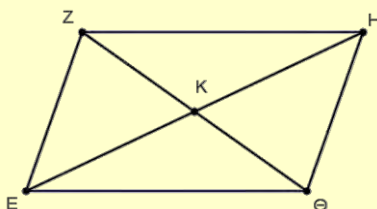
(γ) Το μήκος του AG είναι ίσο με 4 cm. Άρα, έχουμε ότι $|\overrightarrow{AG}| = 4$.

Το μήκος του BK είναι ίσο με 4 cm. Άρα, έχουμε ότι $|\overrightarrow{BK}| = 4$.

Το μήκος του θE είναι ίσο με 6 cm. Άρα, έχουμε ότι $|\overrightarrow{\theta E}| = 6$.

Δραστηριότητες

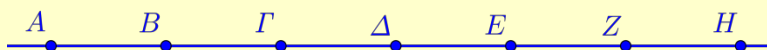
1. Ποια από τις πιο κάτω προτάσεις περιγράφει μονόμετρο και ποια διανυσματικό μέγεθος;
 - (α) Ένα καρπούζι ζυγίζει 8 kg.
 - (β) Ένα πλοίο με ταχύτητα με μέτρο 80 ναυτικά μίλια την ώρα, φεύγει από το Λιμάνι προς Βορρά.
 - (γ) Ο πυρετός μου έφθασε τους 39°C.
 - (δ) Το σπίτι του Ανδρέα βρίσκεται 1,5 km μακριά από το δικό μου.
 - (ε) Το σημείο $A(2,0)$ μετακινείται πάνω στον άξονα των τετμημένων, προς τα δεξιά, κατά τρεις μονάδες.
 - (στ) Κοιμήθηκα μόνο 4 ώρες χθες.
2. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $EZH\Theta$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω ισότητες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

| | | |
|-----|---------------------------------|---------------|
| (α) | $\vec{EZ} = \vec{\Theta H}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) | $\vec{ZK} = \vec{\Theta K}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) | $ \vec{ZH} = \vec{\Theta E} $ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) | $\vec{EK} = \vec{KH}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

3. Στο πιο κάτω σχήμα οι αποστάσεις μεταξύ όλων των διαδοχικών σημείων είναι ίσες με 1 cm.

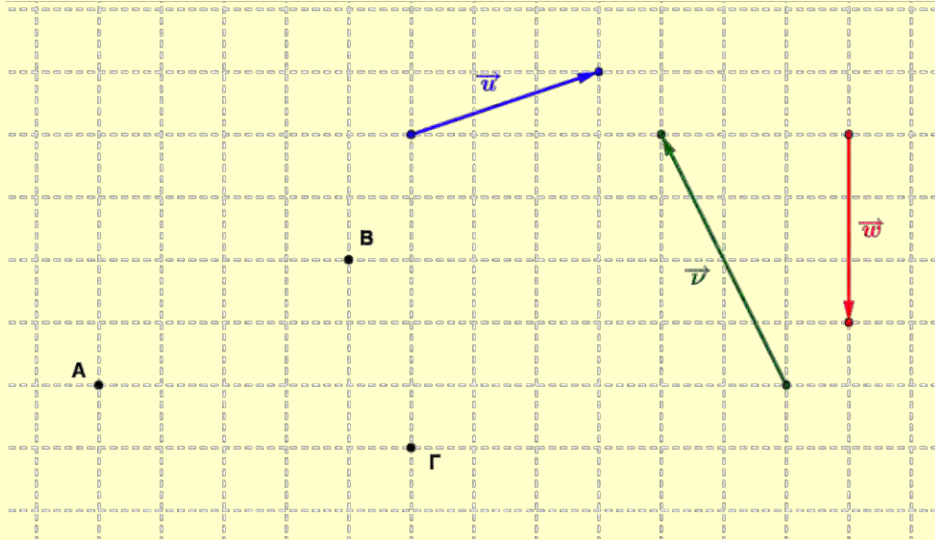


- (α) Να υπολογίσετε το μέτρο των διανυσμάτων:

$$\vec{AE}, \vec{AZ}, \vec{AH}, \vec{BA}, \vec{BΓ}, \vec{BΔ}, \vec{BZ}, \vec{HE}, \vec{ZA}$$

- (β) Ποια από τα πιο πάνω διανύσματα είναι μεταξύ τους ίσα και ποια αντίθετα;
- (γ) Να γράψετε ένα διάνυσμα που είναι αντίρροπο του $\vec{ΓE}$ και έχει μέτρο τριπλάσιο από το μέτρο του $\vec{ΓE}$.

6. Να σχεδιάσετε στο πιο κάτω σχήμα ένα διάνυσμα, το οποίο να:
- (α) είναι ίσο με το \vec{u} και να αρχίζει από το σημείο A
 - (β) είναι αντίθετο του \vec{v} και να αρχίζει από το σημείο B
 - (γ) έχει μέτρο ίσο με το μέτρο του \vec{w} , να μην είναι ίσο με το \vec{w} και να έχει αρχή το σημείο Γ .




4.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Διερεύνηση

Δύο παιδιά έχουν δέσει ένα καροτσάκι με δύο σχοινιά, όπως φαίνεται στην πιο κάτω εικόνα. Θα τραβήξουν ταυτόχρονα τα σχοινιά, για να το μετακινήσουν. Προς ποια κατεύθυνση θα κινηθεί το καροτσάκι;



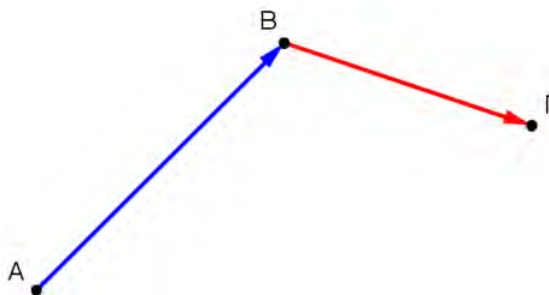
Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο «ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ13_Έννοιες διανυσμάτων και πράξεις με διανύσματα_3.1».

Αφού επιλέξετε το εικονίδιο , να παρακολουθήσετε την κίνηση του καροτσιού σε διαδοχικά βήματα. Να περιγράψετε την κίνηση του καροτσιού.

Ορισμός

Δύο διανύσματα λέγονται **διαδοχικά**, όταν το τέλος του ενός διανύσματος είναι η αρχή του άλλου.

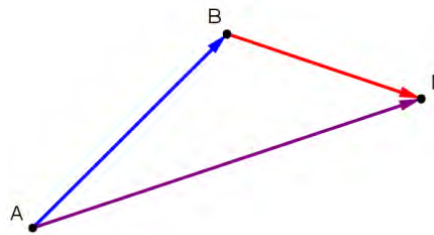
Για παράδειγμα, τα διανύσματα \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{B\Gamma}$ στο πιο κάτω σχήμα είναι διαδοχικά, αφού το τέλος του διανύσματος \overrightarrow{AB} είναι η αρχή του διανύσματος $\overrightarrow{B\Gamma}$.



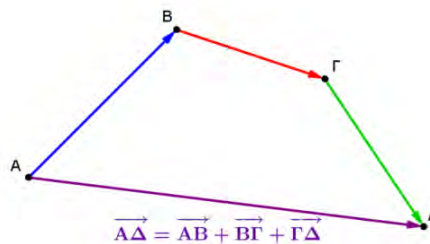
- **Άθροισμα διανυσμάτων**

Άθροισμα δύο διαδοχικών διανυσμάτων είναι το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και τέλος το τέλος του δεύτερου διανύσματος.

Για παράδειγμα, το άθροισμα των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{B\Gamma}$ στο πιο κάτω σχήμα είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και γράφεται $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$.



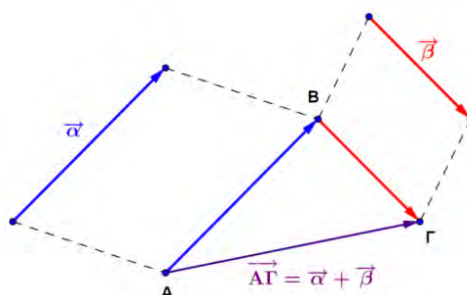
Αν έχουμε να προσθέσουμε περισσότερα από δύο διαδοχικά διανύσματα, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα, τότε το άθροισμά τους έχει αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και τέλος το τέλος του τελευταίου διανύσματος.



Το άθροισμα των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$ και γράφεται $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta}$.

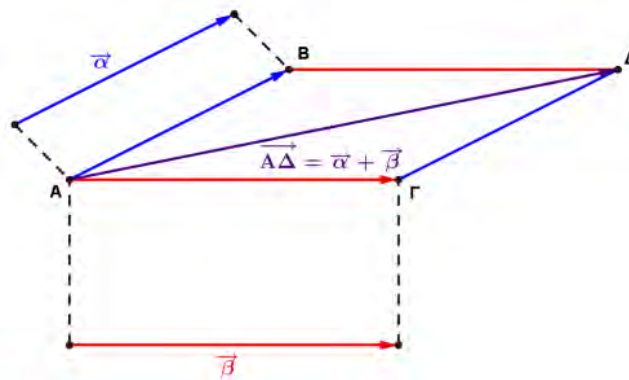
Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$, ώστε να είναι διαδοχικά. Το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$$



Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τη μέθοδο του παραλληλογράμμου:

- Σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{AB} = \vec{a}$ και $\vec{AG} = \vec{\beta}$, ώστε να έχουν κοινή αρχή.
- Σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ που έχει πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα AB και AG .
- Το διάνυσμα το οποίο έχει ως αρχή την κοινή αρχή των δύο διανυσμάτων και τέλος την απέναντι κορυφή του παραλληλογράμμου είναι το άθροισμα των δύο διανυσμάτων.



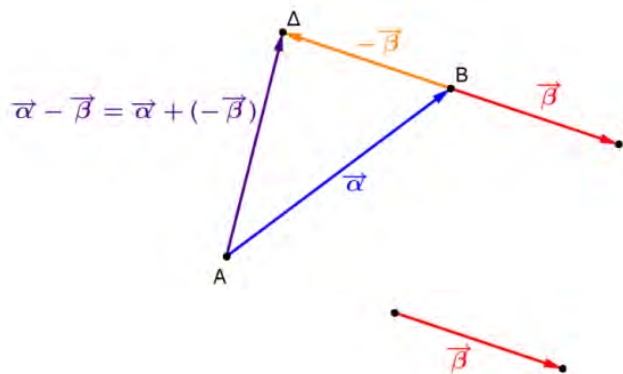
• Διαφορά δύο διανυσμάτων

Η διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα \vec{a} συμβολίζεται με $\vec{a} - \vec{\beta}$ και ορίζεται ως το άθροισμα του \vec{a} με το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{\beta}$. Δηλαδή:

$$\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{a} + (-\vec{\beta})$$

Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\vec{B\Gamma} = \vec{\beta}$, ώστε τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ να είναι διαδοχικά. Ακολούθως, σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\vec{B\Delta} = -\vec{\beta}$, το οποίο είναι αντίθετο με το διάνυσμα $\vec{B\Gamma}$. Η διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα \vec{a} είναι το διάνυσμα $\vec{A\Delta}$. Δηλαδή, έχουμε ότι:

$$\vec{A\Delta} = \vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta} = \vec{a} + (-\vec{\beta}) = \vec{a} - \vec{\beta}$$



- **Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα**

Αν λ είναι ένας πραγματικός μη μηδενικός αριθμός ($\lambda \neq 0$) και \vec{a} ένα διάνυσμα, τότε ονομάζουμε **γινόμενο του λ επί το \vec{a}** και το συμβολίζουμε $\lambda \cdot \vec{a}$ το διάνυσμα, το οποίο:

- είναι ομόρροπο του \vec{a} , αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του \vec{a} , αν $\lambda < 0$, ($\vec{a} \neq \vec{0}$) και
- έχει μέτρο $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

Παρατηρήσεις

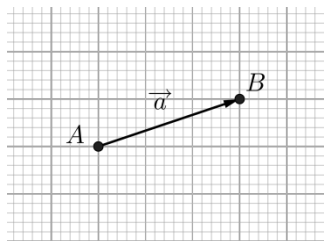
- Από τον ορισμό του γινομένου αριθμού επί διάνυσμα, προκύπτει ότι αν $\vec{\beta} = \lambda \cdot \vec{a}$, $\lambda \neq 0$, τότε τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.
- Το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{a}$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα \vec{a} .
- Αν $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$, τότε το $\lambda \cdot \vec{a}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

- **Ιδιότητες των πράξεων διανυσμάτων**

- ✓ Ιδιότητες πρόσθεσης
 - $\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{a}$ (Μεταθετική)
 - $(\vec{a} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{a} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (Προσεταιριστική)
 - $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (Ουδέτερο στοιχείο)
 - $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (Αντίθετο στοιχείο)
- ✓ Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού επί διάνυσμα
 - $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
 - $\lambda(\vec{a} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{\beta}$
 - $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

Παράδειγμα 1

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Να κατασκευάσετε τα διανύσματα $2\vec{a}$ και $-3\vec{a}$.

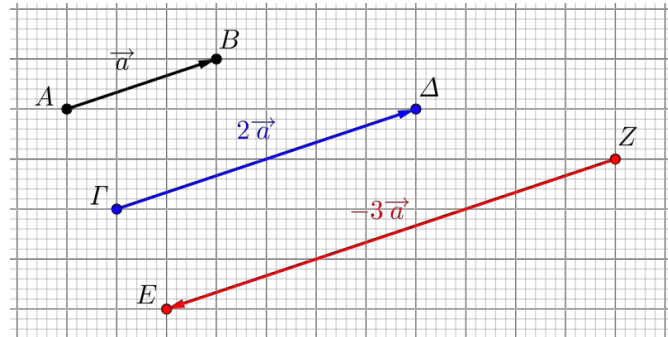


Λύση

Στο πιο κάτω σχήμα έχουμε ότι:

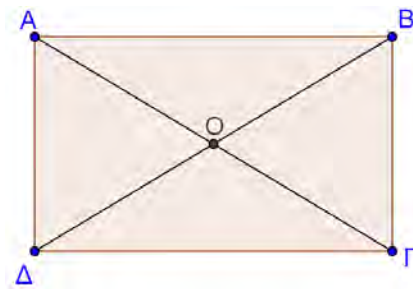
- Το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ομόρροπο με το διάνυσμα \overrightarrow{AB} και $|\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = 2|\overrightarrow{AB}|$. Επομένως, έχουμε ότι $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 2\vec{a}$.

- Το διάνυσμα \vec{ZE} είναι αντίρροπο με το διάνυσμα \vec{AB} και $|\vec{ZE}| = 3|\vec{AB}|$. Επομένως, έχουμε ότι $\vec{ZE} = -3\vec{a}$.



Παράδειγμα 2

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$.



Να βρείτε το διάνυσμα που αντιστοιχεί στα πιο κάτω:

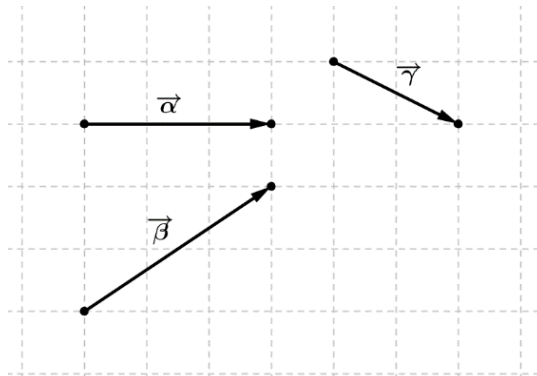
- (α) $\vec{AB} + \vec{B\Gamma}$
- (β) $\vec{A\Gamma} + \vec{\Delta A}$
- (γ) $\vec{B\Delta} + \vec{B\Gamma}$
- (δ) $\vec{AO} - \vec{O\Delta}$
- (ε) $\vec{AB} - \vec{A\Gamma}$

Λύση

- (α) $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$
- (β) $\vec{A\Gamma} + \vec{\Delta A} = \vec{\Delta A} + \vec{A\Gamma} = \vec{\Delta\Gamma}$
- (γ) $\vec{B\Delta} + \vec{B\Gamma} = \vec{B\Delta} + \vec{A\Delta} = \vec{B\Delta}$
- (δ) $\vec{AO} - \vec{O\Delta} = \vec{AO} + (-\vec{O\Delta}) = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB}$
- (ε) $\vec{AB} - \vec{A\Gamma} = \vec{AB} + (-\vec{A\Gamma}) = \vec{AB} + \vec{\Gamma A} = \vec{\Gamma B}$

Παράδειγμα 3

Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.



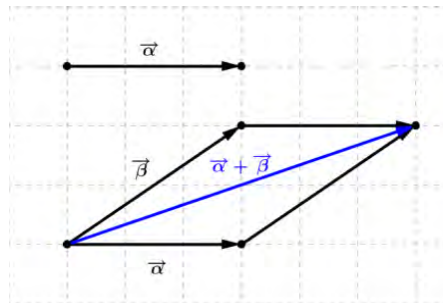
Να σχεδιάσετε τα διανύσματα:

(α) $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

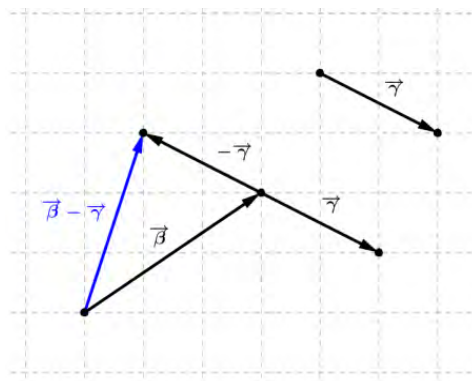
(β) $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

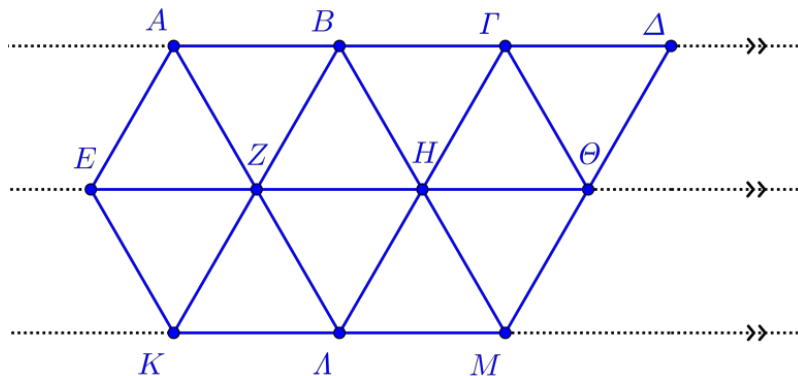


(β) Έχουμε ότι:



Παράδειγμα 4

Το πιο κάτω σχήμα αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς 2 cm. Τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, K, \Lambda$ και M είναι οι κορυφές των τριγώνων.



Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

(α) $\vec{EA} + \vec{EH} = \vec{E} \dots$

(β) $\vec{\Lambda H} + \vec{HE} = \vec{\Lambda} \dots$

(γ) $\vec{EZ} - \vec{Z\Lambda} = \dots$

(δ) $\vec{E\Theta} + \vec{\Lambda H} = \vec{E} \dots$

Λύση

(α) Το $EAGH$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα, σύμφωνα με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου, ισχύει ότι:

$$\vec{EA} + \vec{EH} = \vec{E\Gamma}$$

(β) Ισχύει ότι

$$\vec{\Lambda H} + \vec{HE} = \vec{\Lambda E},$$

γιατί τα διανύσματα $\vec{\Lambda H}$ και \vec{HE} είναι διαδοχικά.

(γ) Έχουμε ότι:

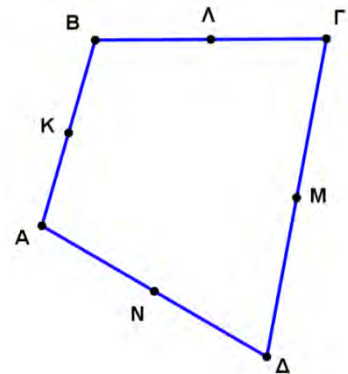
$$\begin{aligned} \vec{EZ} - \vec{Z\Lambda} &= \vec{EZ} + \vec{\Lambda Z} && \text{(προσθέτουμε το αντίστροφο του } \vec{Z\Lambda}\text{)} \\ &= \vec{EZ} + \vec{Z\Lambda} = \vec{EA} \end{aligned}$$

(δ) Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\vec{\Lambda H} = \vec{EA}$. Άρα, σύμφωνα με τη μέθοδο του παραλληλογράμμου, ισχύει ότι:

$$\vec{E\Theta} + \vec{\Lambda H} = \vec{E\Theta} + \vec{EA} = \vec{E\Delta}$$

Παράδειγμα 5

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με K, Λ, M και N τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και $A\Delta$, αντίστοιχα. Αν $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Delta} = 2\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2\vec{\gamma}$:



- (α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = -2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$.
(β) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{K\Lambda}$ και \overrightarrow{NM} συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.
(γ) Τι παρατηρείτε για τα $\overrightarrow{K\Lambda}$ και \overrightarrow{NM} ;

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

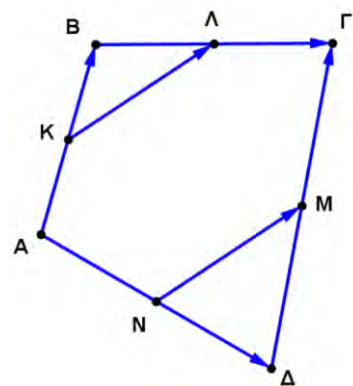
$$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = -2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{K\Lambda} &= \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{B\Lambda} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{2} = \frac{2\vec{\alpha}}{2} + \frac{-2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}}{2} \\ &= \vec{\alpha} - \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}\end{aligned}$$

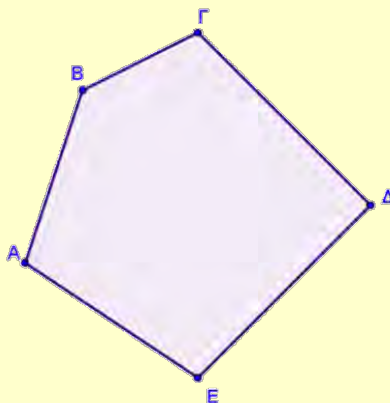
$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DM} = \frac{\overrightarrow{A\Delta}}{2} + \frac{\overrightarrow{\Delta\Gamma}}{2} = \frac{2\vec{\beta}}{2} + \frac{2\vec{\gamma}}{2} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$$

(γ) Τα διανύσματα $\overrightarrow{K\Lambda}$ και \overrightarrow{NM} είναι ίσα.



Δραστηριότητες

1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το πολύγωνο $ABΓΔΕ$.



Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω ισότητες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

| | | |
|-----|--|---------------|
| (α) | $\vec{AB} + \vec{BΓ} = \vec{ΓΑ}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) | $\vec{AB} + \vec{BΔ} = \vec{AΔ}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) | $\vec{AB} + \vec{BΓ} + \vec{ΓΔ} = \vec{AΔ}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) | $\vec{AΕ} + \vec{AΔ} = \vec{EΔ}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ε) | $\vec{AΕ} + \vec{EΔ} + \vec{ΔΓ} + \vec{ΓB} = \vec{AB}$ | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

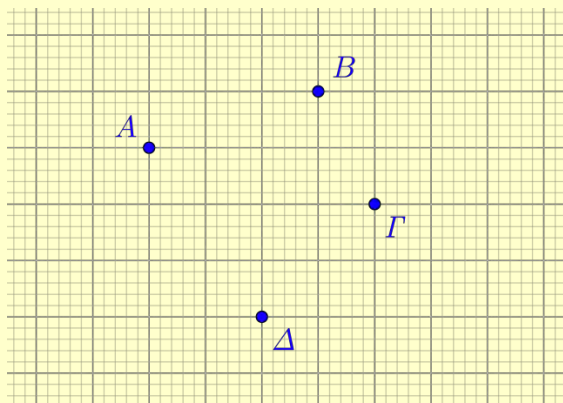
2. Στο πιο κάτω πλέγμα να σχεδιάσετε ένα διάνυσμα που είναι ίσο με:

(α) $\vec{AB} + \vec{BΓ}$

(β) $\vec{AB} + \vec{ΓΑ}$

(γ) $\vec{AB} + \vec{BΓ} + \vec{ΓΔ}$

(δ) $\vec{AΔ} - \vec{ΔΓ}$



3. Να σχεδιάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και να βρείτε ένα διάνυσμα ίσο με:

(α) $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{GB}$

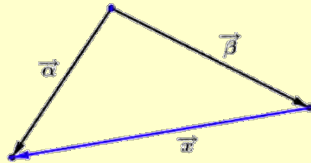
(β) $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{GA}$

(γ) $\vec{AB} - \vec{A\Gamma}$

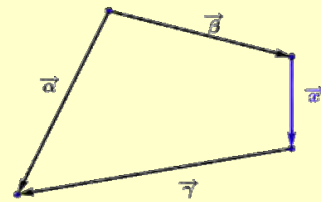
(δ) $\vec{GA} - \vec{GB}$

4. Για καθένα από τα πιο κάτω σχήματα, να εκφράσετε το διάνυσμα \vec{x} συναρτήσει των άλλων διανυσμάτων που δίνονται:

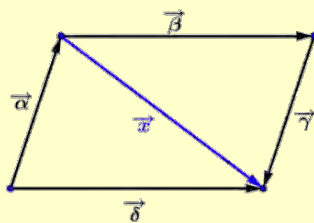
(α)



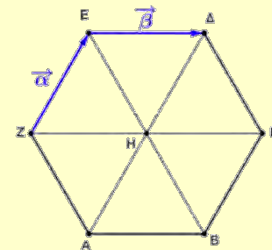
(β)



(γ)



5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$ με όλες τις πλευρές ίσες και τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Αν $Z\Gamma \parallel E\Delta$, $A\Delta \parallel ZE$, $EB \parallel \Delta\Gamma$ και $\vec{E\Delta} = \vec{\beta}$ και $\vec{ZE} = \vec{\alpha}$, να εκφράσετε τα πιο κάτω διανύσματα συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



(α) \vec{BA}

(β) $\vec{Z\Gamma}$

(γ) $\vec{H\Delta}$

(δ) $\vec{E\Gamma}$

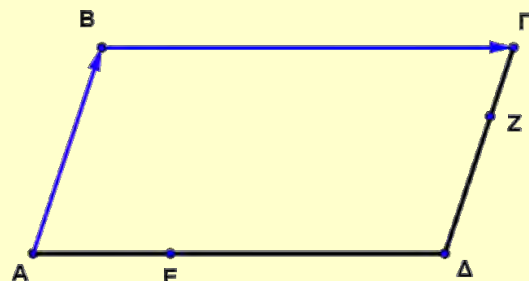
(ε) $\vec{\Delta\Gamma}$

(στ) $\vec{B\Gamma}$

(ζ) $\vec{Z\Delta}$

(η) $\vec{\Gamma A}$

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν $\vec{AB} = 6\vec{\kappa}$, $\vec{B\Gamma} = 6\vec{\lambda}$, $\vec{E\Delta} = 2\vec{A\Gamma}$ και $\vec{Z\Delta} = 2\vec{\Gamma Z}$, να εκφράσετε τα πιο κάτω διανύσματα συναρτήσει των $\vec{\kappa}$ και $\vec{\lambda}$:



(α) $\vec{A\Gamma}$

(β) $\vec{A\Delta}$

(γ) $\vec{\Delta\Gamma}$

(δ) $\vec{E\Delta}$

(ε) $\vec{\Delta Z}$

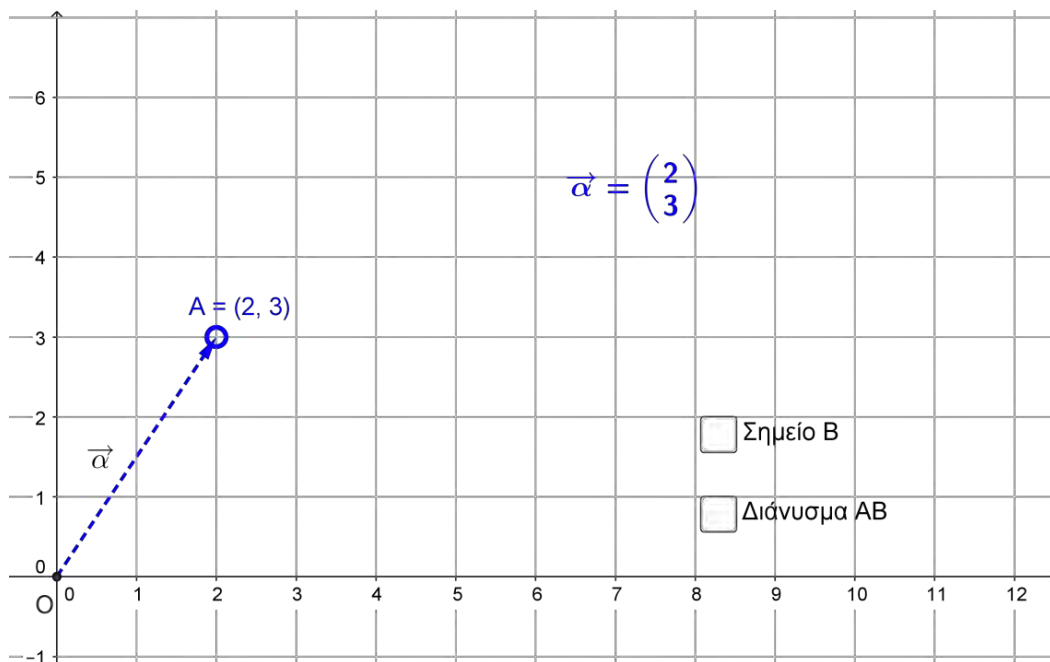
(στ) $\vec{E Z}$

Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{A\Gamma}$ και $\vec{E Z}$ είναι παράλληλα.

4.3 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ ΣΗΜΕΙΟΥ – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΕ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «[ALyk_En04_DianysmatikiAktina.ggb](#)».



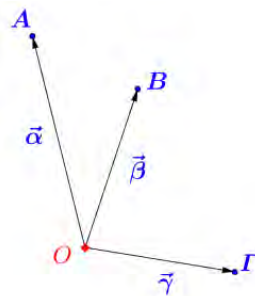
- (α) Να μεταβάλλετε το σημείο A σε διάφορες θέσεις και να παρατηρήσετε τις συντεταγμένες του σε σχέση με το διάνυσμα \vec{a} .
- (β) Να επιλέξετε το «**Σημείο B**». Να μεταβάλλετε το σημείο B σε διάφορες θέσεις και να παρατηρήσετε τις συντεταγμένες του σε σχέση με το διάνυσμα $\vec{\beta}$.
- (γ) Αν $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος \vec{AB} .
- (δ) Να επιλέξετε το κουμπί «**Διάνυσμα AB**». Να μεταβάλλετε τα σημεία A και B σε διάφορες θέσεις και να αναφέρετε τη σχέση που συνδέει το διάνυσμα \vec{AB} με τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ σε κάθε περίπτωση.

4.3.1 Διανυσματική ακτίνα σημείου

Ορισμός

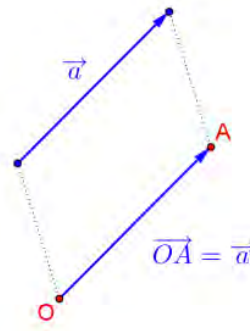
Διάνυσμα θέσης ή **διανυσματική ακτίνα** ενός σημείου P ως προς ένα σημείο αναφοράς O του επιπέδου ονομάζεται το διάνυσμα με αρχή το σημείο αναφοράς O και τέλος το σημείο P .

Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα, αν O είναι το σημείο αναφοράς στο επίπεδο και τα A, B και Γ είναι τρία σημεία στο επίπεδο, τότε οι διανυσματικές τους ακτίνες είναι $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\gamma}$, αντίστοιχα.



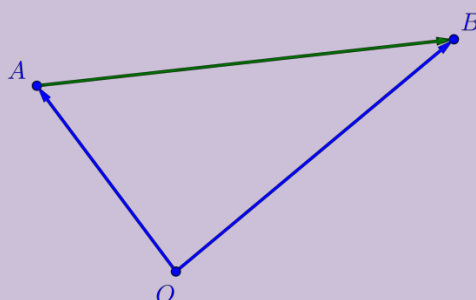
Σχόλια

- Σε κάθε διάνυσμα \vec{a} του επιπέδου αντιστοιχεί ένα μοναδικό σημείο A του επιπέδου, ώστε $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.



- Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς στο επίπεδο, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα \overrightarrow{AB} ισχύει:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$



Απόδειξη

Τα διανύσματα \overrightarrow{AO} και \overrightarrow{OB} είναι διαδοχικά. Επομένως, έχουμε ότι:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

Ισχύει ότι $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$. Άρα, από την πιο πάνω ισότητα, έχουμε τελικά ότι:

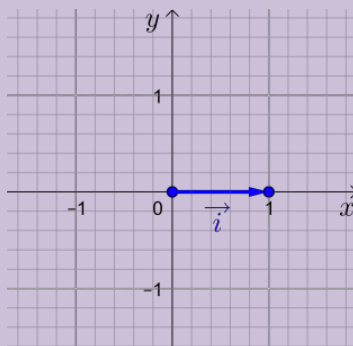
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Δηλαδή, κάθε διάνυσμα στο επίπεδο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του τελικού σημείου του, μείον τη διανυσματική ακτίνα του αρχικού σημείου του.

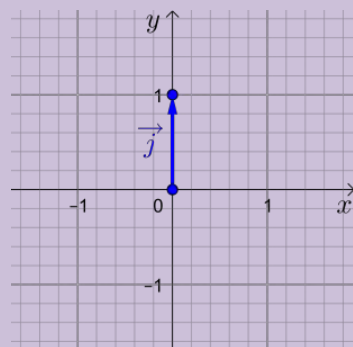
4.3.2 Διανύσματα σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε ως σημείο αναφοράς την αρχή των αξόνων και ορίζουμε μοναδιαία διανύσματα στους άξονες των τετμημένων και τεταγμένων ως ακολούθως:

- Το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα τετμημένων είναι το διάνυσμα με αρχή το σημείο $O(0, 0)$ και τέλος το σημείο $(1, 0)$. Συμβολίζεται με \vec{i} και έχει μέτρο $|\vec{i}| = 1$.



- Το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα τεταγμένων είναι το διάνυσμα με αρχή το σημείο $O(0, 0)$ και τέλος το σημείο $(0, 1)$. Συμβολίζεται με \vec{j} και έχει μέτρο $|\vec{j}| = 1$.



Κάθε σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου έχει διανυσματική ακτίνα, η οποία μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων \vec{i} και \vec{j} .

Για τη διανυσματική ακτίνα \overrightarrow{OM} έχουμε ότι:

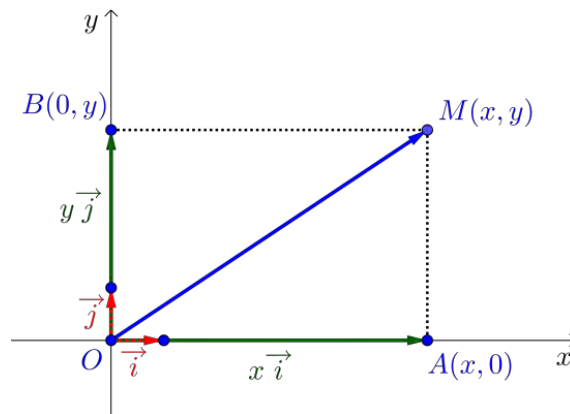
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Ισχύει ότι:

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Απόδειξη

Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο του επιπέδου. Από το M φέρουμε κάθετες προς τους άξονες των τετμημένων και τεταγμένων, οι οποίες τους τέμνουν στα σημεία $A(x,0)$ και $B(0,y)$, αντίστοιχα.



Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $OBMA$, έχουμε ότι $\overrightarrow{OA} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = y\vec{j}$ και:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Τέλος, από το ορθογώνιο τρίγωνο OAM , έχουμε ότι:

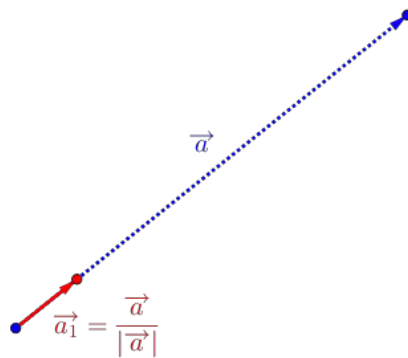
$$\begin{aligned} (OM)^2 &= (OA)^2 + (AM)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 \Rightarrow |\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 \\ &\Rightarrow |\overrightarrow{OM}|^2 = |x\vec{i}|^2 + |y\vec{j}|^2 = x^2 + y^2 \\ &\Rightarrow |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

- Κάθε διανυσματική ακτίνα της μορφής $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ γράφεται και ως $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Τα μοναδιαία διανύσματα \vec{i} και \vec{j} μπορούν να γραφούν ως $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Τα διανύσματα $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ λέγονται **συνιστώσες** του διανύσματος $x\vec{i} + y\vec{j}$.
- Οι αριθμοί x, y λέγονται **συντεταγμένες** του διανύσματος $x\vec{i} + y\vec{j}$ στο σύστημα xOy .
- Ο αριθμός x λέγεται **τετμημένη** του $x\vec{i} + y\vec{j}$ και ο αριθμός y **τεταγμένη** του $x\vec{i} + y\vec{j}$.

- Σε κάθε σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου αντιστοιχεί ένα μοναδικό ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) , ώστε να ισχύει $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- Αν \vec{a} είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα, τότε το $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ομόρροπο του \vec{a} . Το μέτρο του διανύσματος $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ είναι:

$$\left| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \right| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1$$

Επιπλέον, το $\frac{1}{|\vec{a}|}$ είναι θετικό. Άρα, το διάνυσμα $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ είναι ομόρροπο του \vec{a} .



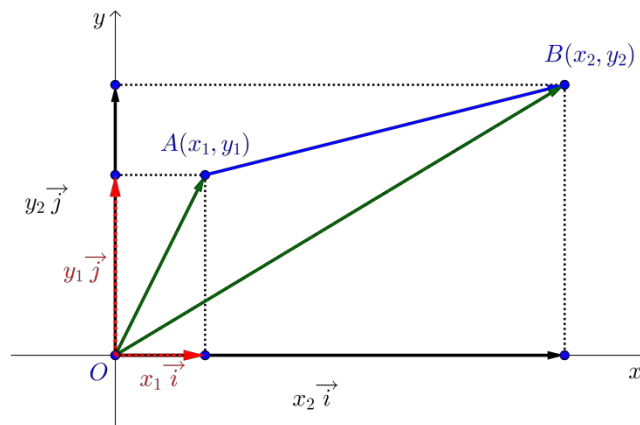
4.3.3 Συντεταγμένες διανύσματος στο καρτεσιανό επίπεδο

Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο. Τότε, το διάνυσμα \overrightarrow{AB} γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} \quad \text{ή} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Απόδειξη

Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο.



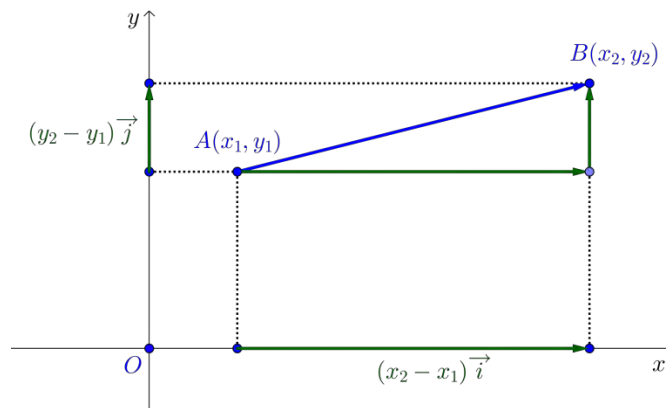
Έχουμε ότι:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

Το μέτρο του διανύσματος \overrightarrow{AB} είναι $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Απόδειξη

Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο. Η τετμημένη και η τεταγμένη του διανύσματος \overrightarrow{AB} είναι $x_2 - x_1$ και $y_2 - y_1$, αντίστοιχα.



Επομένως, έχουμε ότι:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Παράδειγμα 1

Δίνονται τα σημεία $A(-1, 1)$ και $B(2, 5)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \overrightarrow{AB} και το μέτρο του.

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ μονάδες}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Να εξετάσετε κατά πόσο το διάνυσμα

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -0,6 \\ +0,8 \end{pmatrix}$$

είναι μοναδιαίο.

Λύση

Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι ίσο με:

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{(-0,6)^2 + (0,8)^2} = \sqrt{0,36 + 0,64} = \sqrt{1} = 1$$

Άρα, το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαίο.

Παράδειγμα 3

Δίνεται το διάνυσμα:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Να βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο προς το διάνυσμα \vec{a} .

Λύση

Το μέτρο του διανύσματος \vec{a} είναι ίσο με $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Τότε, ένα μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο προς το διάνυσμα \vec{a} είναι το:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Πράξεις διανυσμάτων των οποίων δίνονται οι συντεταγμένες

- Αν \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, τότε το άθροισμα των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι:

$$\vec{a} + \vec{\beta} = \begin{pmatrix} a_1 + \beta_1 \\ a_2 + \beta_2 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \vec{a} + \vec{\beta} = (a_1 + \beta_1)\vec{i} + (a_2 + \beta_2)\vec{j}$$

- Αν \vec{a} είναι ένα διάνυσμα με $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ και λ ένας πραγματικός αριθμός, τότε το διάνυσμα $\lambda\vec{a}$ είναι:

$$\lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \lambda\vec{a} = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j}$$

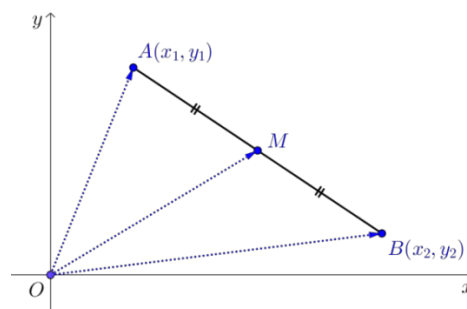
Συντεταγμένες μέσου ευθύγραμμου τμήματος

Αν τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου, τότε οι συντεταγμένες του μέσου M του AB είναι:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Απόδειξη

Έστω M το μέσο του τμήματος AB .



Έχουμε:

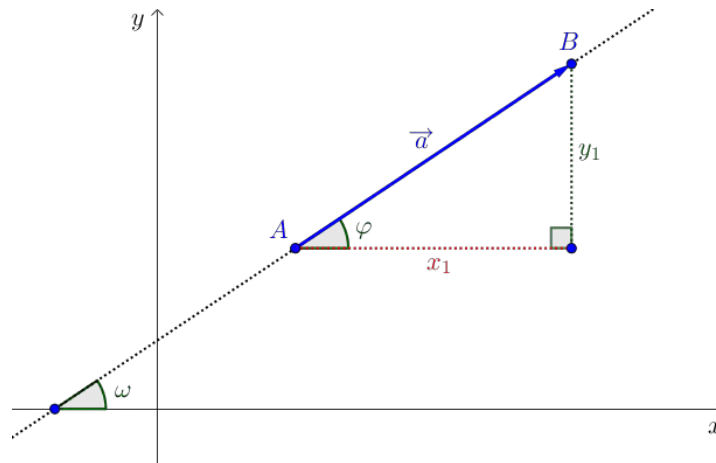
$$\begin{aligned}\overline{OM} &= \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} + \frac{1}{2}(\overline{OB} - \overline{OA}) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\end{aligned}$$

Επομένως, οι συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB είναι:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

4.3.4 Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος

Έστω \vec{a} ένα μη μηδενικό διάνυσμα και A, B δύο σημεία του επιπέδου με $\overline{AB} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.



Η γωνία ω που σχηματίζει ο φορέας του διανύσματος \vec{a} με τον άξονα των τετμημένων είναι ίση με τη γωνία φ . Επομένως,

$$\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\varphi = \frac{y_1}{x_1},$$

που είναι η κλίση της ευθείας AB .

Το πηλίκιο $\frac{y_1}{x_1}$ το ονομάζουμε **συντελεστή διεύθυνσης** του διανύσματος \vec{a} .

Παρατηρήσεις

- Αν $y_1 = 0$, όταν δηλαδή το διάνυσμα είναι παράλληλο προς τον άξονα $x'x$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ίσος με 0.
- Αν $x_1 = 0$, όταν δηλαδή το διάνυσμα είναι παράλληλο προς τον άξονα $y'y$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης δεν ορίζεται.

Παράδειγμα 4

Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης, ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 8 \\ x \end{pmatrix}$ να είναι παράλληλα.

Λύση

Οι συντελεστές διεύθυνσης των δύο διανυσμάτων είναι ίσοι. Επομένως:

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{8} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

Παράδειγμα 5

Δίνονται τα σημεία $A(5, 2)$ και $B(1, 5)$. Να υπολογίσετε:

- (α) τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος \vec{AB}
- (β) τις συντεταγμένες του διανυσματικής ακτίνας του μέσου M του AB .

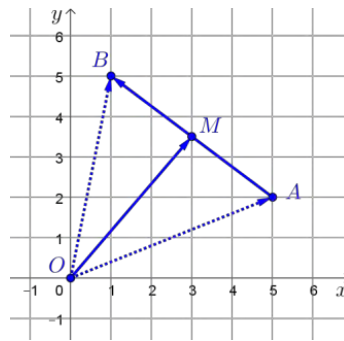
Λύση

(α) Έχουμε:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Για το μέτρο του διανύσματος \vec{AB} , έχουμε:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(1-5)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ μονάδες}$$



(β) Για το μέσο M του AB έχουμε ότι:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 5}{2} = \frac{7}{2}$$

Επομένως, οι συντεταγμένες του διανυσματικής ακτίνας του μέσου M του AB είναι 3 και $\frac{7}{2}$, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 6

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ και $\vec{\beta} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Να βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα, το οποίο να είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{u} = -2\vec{a} + 3\vec{\beta}$.

Λύση

Είναι:

$$\vec{u} = -2\vec{a} + 3\vec{\beta} = -2(4\vec{i} + 3\vec{j}) + 3(2\vec{i} + \vec{j}) = -2\vec{i} - 3\vec{j}$$

Ένα μοναδιαίο διάνυσμα που είναι παράλληλο προς το $\vec{u} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$ είναι:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{-2\vec{i} - 3\vec{j}}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}} = \frac{-2\vec{i} - 3\vec{j}}{\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}\vec{i} - \frac{3\sqrt{13}}{13}\vec{j}$$

Παράδειγμα 7

Τα διανύσματα $\vec{F}_1 = (2\vec{i} + 3\vec{j})N$ και $\vec{F}_2 = (-3\vec{i} + \vec{j})N$ παριστάνουν δύο δυνάμεις (σε Newton (N)) που εξασκούνται σε ένα σώμα.

- (α) Να υπολογίσετε το άθροισμα των δύο δυνάμεων (συνισταμένη) και το μέτρο της συνισταμένης των δύο δυνάμεων.
- (β) Ένα σώμα βρίσκεται σε ισορροπία, όταν η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που εξασκούνται σε αυτό είναι μηδέν. Να υπολογίσετε τη δύναμη \vec{F}_3 που πρέπει να εξασκηθεί στο σώμα, για να βρίσκεται σε ισορροπία και να σχεδιάσετε τις τρεις δυνάμεις.

Λύση

(α) Έχουμε:

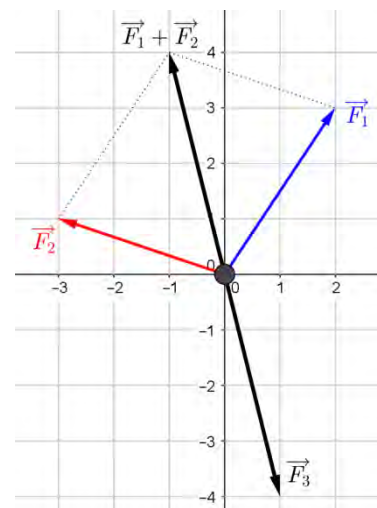
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (2\vec{i} + 3\vec{j}) + (-3\vec{i} + \vec{j}) = (-\vec{i} + 4\vec{j})N$$

Το μέτρο του $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ είναι:

$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17} \cong 4,1 N$$

(β) Το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία, όταν η συνισταμένη των δυνάμεων που εξασκούνται σε αυτό είναι ίση με $\vec{0}$. Άρα:

$$\begin{aligned}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3 &= \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \\ \Leftrightarrow \vec{F}_3 &= -[(-\vec{i} + 4\vec{j})] \\ \Leftrightarrow \vec{F}_3 &= -(-\vec{i} + 4\vec{j}) \Leftrightarrow \vec{F}_3 = (\vec{i} - 4\vec{j})N\end{aligned}$$



Δραστηριότητες

1. Να τοποθετήσετε τα σημεία $A(3,-1)$ και $B(1,4)$ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.
2. Να γράψετε τη διανυσματική ακτίνα των σημείων $A(2,7)$ και $B(1,-6)$, αν το σημείο αναφοράς O είναι η αρχή των αξόνων.
3. Να τοποθετήσετε τα σημεία $A(-1,1), B(2,-1)$ και $\Gamma(2,3)$ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Να κατασκευάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma}$ και να υπολογίσετε τις συντεταγμένες και το μέτρο του.
4. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} + \vec{\beta}$, με $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ και $\vec{\beta} = 5\vec{i} + 8\vec{j}$.
5. Αν $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\vec{\delta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, να κατασκευάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα διανύσματα $\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} + \vec{\delta}$.
6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των πιο κάτω διανυσμάτων:
(α) $\vec{a} - \vec{\gamma} + \vec{\beta}$ (β) $\vec{\beta} - \vec{a} + \vec{\gamma}$ (γ) $2\vec{a} + \vec{\beta}$
7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{a} - 3\vec{\beta}$.
8. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} x \\ -10 \end{pmatrix}$, με $x \in \mathbb{R}$. Αν τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα, να υπολογίσετε την τιμή του x .
9. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος \vec{z} , αν ισχύει η σχέση $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{0}$.
10. Αν $A(1,5), B(0,-3)$ και $\Gamma(2,1)$, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma B}$.
11. Αν $A(2,5)$ και $B(6,7)$, να υπολογίσετε τη διανυσματική ακτίνα του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB .

12. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

| | | |
|-----|--|---------------|
| (α) | Αν \vec{i} και \vec{j} είναι τα μοναδιαία διανύσματα σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, τότε $ \vec{i} = -\vec{j} $. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) | Αν $A(2, 7)$ και $B(1, 3)$, τότε $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j}$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) | Η διανυσματική ακτίνα του σημείου $A(-2, 5)$ είναι το διάνυσμα $-2\vec{i} + 5\vec{j}$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) | Το διάνυσμα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ είναι μοναδιαίο. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

13. Να εξετάσετε κατά πόσο τα διανύσματα $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\vec{\delta} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{\zeta} = \begin{pmatrix} 2x \\ -3x \end{pmatrix}$, $x \neq 0$, είναι παράλληλα με το διάνυσμα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

14. Να εξετάσετε κατά πόσο τα διανύσματα $-\vec{j}$, $\vec{a} = \frac{12}{13}\vec{i} + \frac{5}{13}\vec{j}$, $\vec{\beta} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$, $\vec{\gamma} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$ είναι μοναδιαία.

15. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Να βρείτε μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο προς το διάνυσμα \vec{a} , $\vec{\beta}$, $\vec{a} + \vec{\beta}$, $2\vec{a} + 5\vec{\beta}$.

16. Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα που να είναι αντίρροπο του διανύσματος $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix}$.

17. Να υπολογίσετε τη συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ +5 \end{pmatrix}$ και $\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}$ που ασκούνται σε ένα σώμα και να εξετάσετε κατά πόσο το σώμα ισορροπεί.

18. Αν οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων A και B είναι \vec{a} και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα του μέσου M του AB είναι $\frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}$.

19. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-2, -2)$, $B(-1, -7)$ και $\Gamma(-11, -3)$. Να υπολογίσετε:

(α) το διάνυσμα \overrightarrow{BM} , όπου M το μέσο της $B\Gamma$

(β) το διάνυσμα \overrightarrow{AM}

(γ) το μήκος της διαμέσου AM .

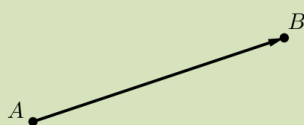
20. Δίνονται τα σημεία $A(2, \lambda - 2)$ και $B(\lambda + 1, 5)$, $\lambda \neq 1$, έτσι ώστε το διάνυσμα \overrightarrow{AB} να έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 2.

(α) Να υπολογίσετε τον αριθμό λ .

(β) Αν M είναι το μέσο του AB , να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Γ του άξονα $y'y$, έτσι ώστε $|\overrightarrow{M\Gamma}| = 5$.

Περίληψη

1. **Μονόμετρο μέγεθος** λέγεται κάθε μέγεθος που χαρακτηρίζεται μόνο από το μέτρο του.
2. **Διανυσματικό μέγεθος** ή **διάνυσμα** λέγεται κάθε μέγεθος που χαρακτηρίζεται από το μέτρο, τη διεύθυνση και τη φορά του.
3. Αν A και B είναι δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τότε το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το A και πέρας το B λέγεται **εφαρμοστό διάνυσμα** με σημείο εφαρμογής το A και συμβολίζεται με \overrightarrow{AB} .



4. Ένα διάνυσμα \overrightarrow{AB} έχει **διεύθυνση** την ευθεία (ϵ) που ορίζεται από τα άκρα A, B (φορέας του διανύσματος), **φορά** που καθορίζεται από την αρχή και το τέλος του διανύσματος και **μέτρο** που είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB . Το μήκος του διανύσματος \overrightarrow{AB} συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$ και είναι πάντοτε ένας θετικός αριθμός ή μηδέν.
5. **Μηδενικό** διάνυσμα λέγεται το διάνυσμα, του οποίου η αρχή και το τέλος του συμπίπτουν. Το συμβολίζουμε με $\vec{0}$ και έχει μέτρο μηδέν. Δηλαδή, $|\vec{0}| = 0$.
6. **Μοναδιαίο** λέγεται το διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα.
7. **Παράλληλα** ή **συγγραμμικά** ονομάζονται τα μη-μηδενικά διανύσματα, τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση.
8. Τα παράλληλα διανύσματα διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:
 - Τα **ομόρροπα**, τα οποία έχουν την **ίδια φορά**.
 - Τα **αντίρροπα**, τα οποία έχουν **αντίθετη φορά**.
9. **Ίσα** είναι τα διανύσματα, τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο.
10. **Αντίθετα** είναι δύο διανύσματα, τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση, το ίδιο μέτρο, αλλά αντίθετη φορά.
11. Κάθε εφαρμοστό διάνυσμα \overrightarrow{AB} του επιπέδου έχει άπειρα διανύσματα ίσα με αυτό. Το σύνολο των διανυσμάτων του επιπέδου που είναι ίσα με το \overrightarrow{AB} λέγεται **ελεύθερο διάνυσμα** και μπορεί να συμβολιστεί με \vec{a} . Το διάνυσμα \overrightarrow{AB} (ή οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα ίσο με αυτό) θεωρείται **αντιπρόσωπος** του ελεύθερου διανύσματος.
12. Δύο διανύσματα λέγονται **διαδοχικά**, όταν το τέλος του ενός διανύσματος είναι η αρχή του άλλου.
13. **Άθροισμα δύο διαδοχικών διανυσμάτων** είναι το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και τέλος το τέλος του δεύτερου διανύσματος. Μπορεί να επεκταθεί και για περισσότερα από δύο διανύσματα.

14. Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τη **μέθοδο του παραλληλογράμμου**.

15. **Διαφορά δύο διανυσμάτων**

Η διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα \vec{a} συμβολίζεται με $\vec{a} - \vec{\beta}$ και ορίζεται ως το άθροισμα του \vec{a} με το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{\beta}$.

16. **Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα**

Αν λ είναι ένας πραγματικός μη μηδενικός αριθμός ($\lambda \neq 0$) και \vec{a} ένα διάνυσμα, τότε ονομάζουμε **γινόμενο του λ επί το \vec{a}** και το συμβολίζουμε $\lambda \cdot \vec{a}$ το διάνυσμα, το οποίο:

- είναι ομόρροπο του \vec{a} , αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του \vec{a} , αν $\lambda < 0$, ($\vec{a} \neq \vec{0}$) και
- έχει μέτρο $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

Παρατηρήσεις

- Αν $\vec{\beta} = \lambda \cdot \vec{a}$, $\lambda \neq 0$, τότε τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.
- Το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{a}$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα \vec{a} .
- Αν $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$, τότε το $\lambda \cdot \vec{a}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

17. **Ιδιότητες των πράξεων διανυσμάτων**

- ✓ Ιδιότητες πρόσθεσης
 - $\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{a}$ (Μεταθετική)
 - $(\vec{a} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{a} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (Προσεταιριστική)
 - $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (Ουδέτερο στοιχείο)
 - $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (Αντίθετο στοιχείο)
- ✓ Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού επί διάνυσμα
 - $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
 - $\lambda(\vec{a} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{\beta}$
 - $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

18. **Διάνυσμα θέσης ή διανυσματική ακτίνα** ενός σημείου P ως προς ένα σημείο αναφοράς O του επιπέδου ονομάζεται το διάνυσμα με αρχή το σημείο αναφοράς O και τέλος το σημείο P .

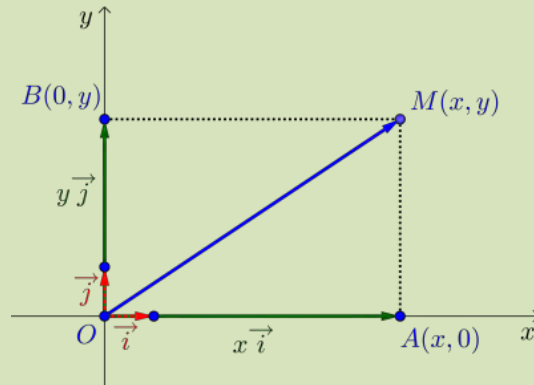
19. Κάθε διάνυσμα στο επίπεδο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του τελικού σημείου του, μείον τη διανυσματική ακτίνα του αρχικού σημείου του.

20. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε ως σημείο αναφοράς την αρχή των αξόνων και ορίζουμε μοναδιαία διανύσματα στους άξονες των τετμημένων και τεταγμένων ως ακολούθως:

- Το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα τετμημένων είναι το διάνυσμα με αρχή το σημείο $O(0,0)$ και τέλος το σημείο $(1,0)$. Συμβολίζεται με \vec{i} και έχει μέτρο $|\vec{i}| = 1$.
- Το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα τεταγμένων είναι το διάνυσμα με αρχή το σημείο $O(0,0)$ και τέλος το σημείο $(0,1)$. Συμβολίζεται με \vec{j} και έχει μέτρο $|\vec{j}| = 1$.

21. Κάθε σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου έχει διανυσματική ακτίνα, η οποία μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων \vec{i} και \vec{j} :

- $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ή $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ και $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



- Τα μοναδιαία διανύσματα \vec{i} και \vec{j} μπορούν να γραφούν ως $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Τα διανύσματα $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ λέγονται **συνιστώσες** του διανύσματος $x\vec{i} + y\vec{j}$.
- Οι αριθμοί x, y λέγονται **συντεταγμένες** του διανύσματος $x\vec{i} + y\vec{j}$ στο σύστημα xOy .
- Ο αριθμός x λέγεται **τετμημένη** του $x\vec{i} + y\vec{j}$ και ο αριθμός y **τεταγμένη** του $x\vec{i} + y\vec{j}$.
- Σε κάθε σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου αντιστοιχεί ένα μοναδικό ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) , ώστε να ισχύει $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- Αν \vec{a} είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα, τότε το $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ομόρροπο του \vec{a} .

22. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο τότε το διάνυσμα \overrightarrow{AB} γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} \quad \text{ή} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

23. Το μέτρο του διανύσματος \overrightarrow{AB} είναι $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

24. **Πράξεις διανυσμάτων των οποίων δίνονται οι συντεταγμένες**

- Αν \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, τότε το άθροισμα των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι:

$$\vec{a} + \vec{\beta} = \begin{pmatrix} a_1 + \beta_1 \\ a_2 + \beta_2 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \vec{a} + \vec{\beta} = (a_1 + \beta_1)\vec{i} + (a_2 + \beta_2)\vec{j}$$

- Αν \vec{a} είναι ένα διάνυσμα με $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ και λ ένας πραγματικός αριθμός, τότε το διάνυσμα $\lambda\vec{a}$ είναι:

$$\lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \lambda\vec{a} = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j}$$

25. **Συντεταγμένες μέσου ευθύγραμμου τμήματος**

Αν τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου, τότε οι συντεταγμένες του μέσου M του AB είναι:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

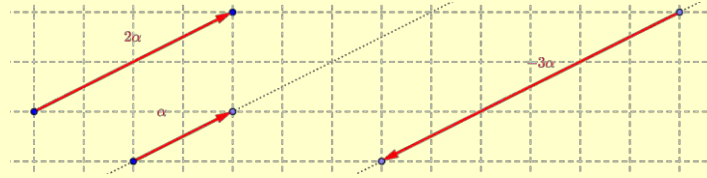
26. **Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος**

Αν \vec{a} ένα μη μηδενικό διάνυσμα και A, B δύο σημεία του επιπέδου με $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, τότε το πηλίκο $\frac{y_1}{x_1}$ το ονομάζουμε **συντελεστή διεύθυνσης** του διανύσματος \vec{a} .

- Αν $y_1 = 0$, όταν δηλαδή το διάνυσμα είναι παράλληλο προς τον άξονα $x'x$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ίσος με 0.
- Αν $x_1 = 0$, όταν δηλαδή το διάνυσμα είναι παράλληλο προς τον άξονα $y'y$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης δεν ορίζεται.

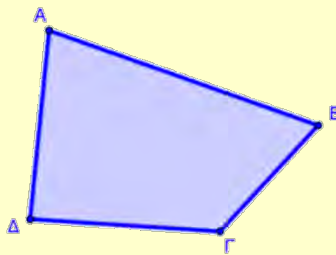
Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να γράψετε ομοιότητες και διαφορές για τα διανύσματα \vec{a} , $2\vec{a}$ και $-3\vec{a}$.

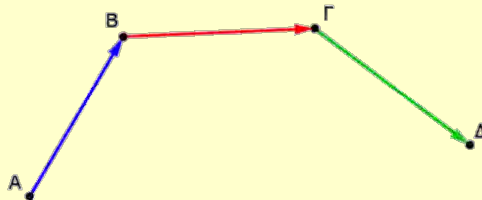


2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}$$



3. Δίνονται τα διανύσματα \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{BΓ}$ και $\overrightarrow{ΓΔ}$, όπως φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BΓ} + \overrightarrow{ΓΔ} = \overrightarrow{AD}$, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία υπολογισμού του αθροίσματος δύο διαδοχικών διανυσμάτων.



4. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$. Να σχεδιάσετε τα πιο κάτω διανύσματα σε τετραγωνισμένο χαρτί, επεξηγώντας τη μέθοδο που ακολουθήσατε.

(α) $\vec{a} + \vec{\beta}$

(β) $\vec{\beta} + \vec{\gamma}$

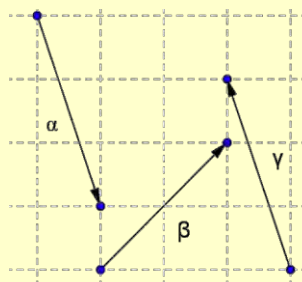
(γ) $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$

(δ) $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$

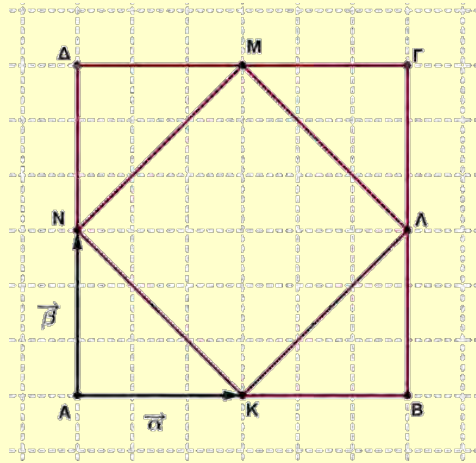
(ε) $\vec{a} - \vec{\beta}$

(στ) $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$

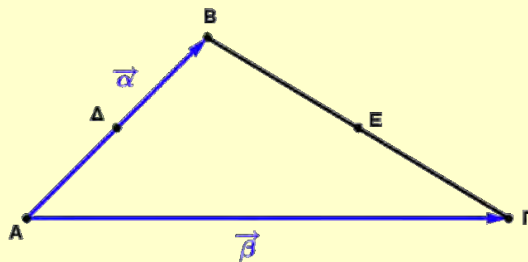
(ζ) $\vec{a} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$



5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται δύο τετράγωνα, τα $AB\Gamma\Delta$ και $K\Lambda MN$, όπου K, Λ, M, N είναι τα μέσα των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$, αντίστοιχα. Αν $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{AN} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{\Gamma M}, \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{M\Lambda}$ συναρτήσει των \vec{a} και $\vec{\beta}$.



6. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$, αντίστοιχα.



Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$:

- (α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma B}, \overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{\Delta E}$ συναρτήσει των \vec{a} και $\vec{\beta}$.
 (β) Τι είδους τετράπλευρο είναι το $A\Delta E\Gamma$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
7. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 8)$ και $B(4, 2)$. Να γράψετε τις διανυσματικές ακτίνες των A, B και του μέσου M του AB .
8. Να εξετάσετε κατά πόσο τα διανύσματα $\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}$ και $\vec{\beta} = \frac{\sqrt{5}}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j}$ είναι μοναδιαία.
9. Αν το διάνυσμα $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \kappa\vec{j}$ είναι μοναδιαίο, να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$.
10. Να εξετάσετε κατά πόσο τα σημεία $A(2, 3), B(6, 0)$ και $\Gamma(-2, 6)$ είναι συνευθειακά.

11. Να βρείτε αντίρροπο διάνυσμα προς το $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$, το οποίο να έχει τριπλάσιο μέτρο από το \vec{a} .
12. Να εξετάσετε σε κάθε περίπτωση κατά πόσο τα διανύσματα είναι συγγραμμικά.
- (α) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} +3 \\ -8 \end{pmatrix}$
- (β) $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\delta} = \begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$
- (γ) $\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{\zeta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 + \sqrt{5} \end{pmatrix}$
13. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\beta}$, το οποίο να είναι αντίρροπο του $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ +3 \end{pmatrix}$ και να έχει μέτρο 10 μονάδες.
14. Σε ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ +3 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} +4 \\ -2 \end{pmatrix}$ και $\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} +8 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- (α) Να υπολογίσετε τη συνισταμένη $\Sigma\vec{F}$ ($\Sigma\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$) των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα και να την παραστήσετε γραφικά.
- (β) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση \vec{a} , την οποία αποκτά το σώμα ($\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$).
- (γ) Ποια είναι η σχέση των διανυσμάτων $\Sigma\vec{F}$ και \vec{a} και ποια είναι η φυσική ερμηνεία αυτής της σχέσης;
15. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Με αρχή το σημείο B φέρουμε τα διανύσματα $\vec{B\Delta} = \vec{A\Gamma}$ και $\vec{B\Xi} = \vec{A\Delta}$. Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του $E\Gamma$.
16. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν $A\Delta$, BE και ΓZ είναι οι διάμεσοί του, να δείξετε ότι ισχύει $\vec{A\Delta} + \vec{B\Xi} + \vec{\Gamma Z} = \vec{0}$.
17. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε τα σημεία $A(2, 1)$, $B(1 - \kappa^2, 4)$ και $\Gamma(1 - 5\kappa, 10)$ να είναι συνευθειακά.

Λύση Προβλήματος

ΔΥΝΑΜΗ ΤΟΥ ΑΝΕΜΟΥ



Στην πόλη Ζετάουν σκέφτονται να εγκαταστήσουν ανεμογεννήτριες για την παραγωγή ηλεκτρισμού. Το συμβούλιο της Ζετάουν συνέλεξε πληροφορίες σχετικά με το ακόλουθο μοντέλο ανεμογεννήτριας:

| | |
|--------------------------------------|--|
| Μοντέλο: | <i>E – 82</i> |
| Ύψος του πύργου: | 138 μέτρα |
| Αριθμός ελίκων: | 3 |
| Μήκος έλικα: | 40 μέτρα |
| Μέγιστη ταχύτητα περιστροφής: | 20 στροφές ανά λεπτό |
| Κόστος κατασκευής: | 3 200 000 ζετς |
| Έσοδα: | 0,10 ζετς ανά <i>kWh</i> που παράγεται |
| Κόστος συντήρησης: | 0,01 ζετς ανά <i>kWh</i> που παράγεται |
| Αποδοτικότητα: | 97% του χρόνου σε λειτουργία |

Σημείωση: Η κιλοβατώρα (*kWh*) είναι μονάδα μέτρησης της ηλεκτρικής ενέργειας.

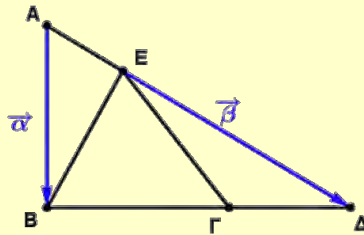
Ερώτηση 1

Να αποφασίσετε κατά πόσο οι πιο κάτω δηλώσεις για τις ανεμογεννήτριες *E – 82* προκύπτουν από τις πληροφορίες που παρέχονται. Να βάλετε σε κύκλο “Ναι” ή “Όχι” για κάθε δήλωση.

| Δήλωση | Η δήλωση προκύπτει από τις πληροφορίες που παρέχονται; |
|---|--|
| Το κόστος κατασκευής τριών ανεμογεννητριών θα είναι συνολικά μεγαλύτερο από 8 000 000 ζετς. | Ναι / Όχι |
| Το κόστος συντήρησης της ανεμογεννήτριας αντιστοιχεί περίπου στο 5% των εσόδων που αποφέρει η ανεμογεννήτρια. | Ναι / Όχι |
| Το κόστος συντήρησης της ανεμογεννήτριας εξαρτάται από τον αριθμό των <i>kWh</i> που παράγονται. | Ναι / Όχι |
| Ακριβώς 97 μέρες τον χρόνο, η ανεμογεννήτρια είναι εκτός λειτουργίας. | Ναι / Όχι |

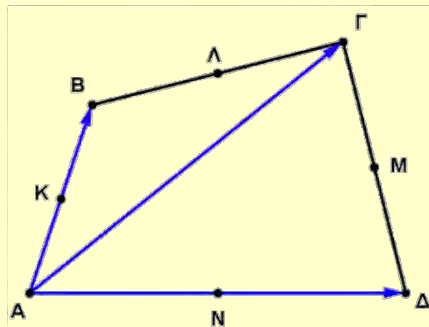
Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Δίνονται δύο ίσα διανύσματα $\overline{AB} = \overline{\Gamma\Delta}$. Να δείξετε ότι $\overline{A\Gamma} = \overline{B\Delta}$.
2. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται το τρίγωνο $AB\Delta$, με $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{3}{2}$, $\frac{AE}{E\Delta} = \frac{1}{3}$ και $\overline{AB} = \vec{\alpha}$, $\overline{E\Delta} = \vec{\beta}$.



- (α) Να εκφράσετε τα διανύσματα \overline{AE} , \overline{EB} και $\overline{\Gamma\Delta}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- (β) Να δείξετε ότι $\overline{E\Gamma} = \frac{1}{15}(6\vec{\alpha} + 7\vec{\beta})$.

3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία K, Λ, M και N είναι τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA , αντίστοιχα.

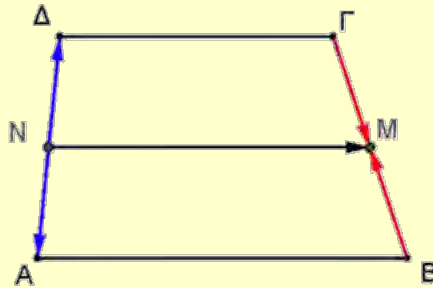


Αν $\overline{AB} = \vec{\alpha}$, $\overline{A\Gamma} = \vec{\beta}$ και $\overline{A\Delta} = \vec{\gamma}$:

- (α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overline{\Delta\Gamma}$, $\overline{\Delta M}$ και \overline{AM} συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.
- (β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overline{A\Lambda}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και στη συνέχεια το διάνυσμα $\overline{M\Lambda}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.
- (γ) Να εκφράσετε το διάνυσμα \overline{NK} συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$. Να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overline{M\Lambda}$ και \overline{NK} . Να χαρακτηρίσετε το τετράπλευρο $K\Lambda M N$.
- (δ) Να αποδείξετε ότι $\overline{\Delta B} = 2 \overline{NK}$.

4. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$ και N το μέσο της $A\Delta$. Να δείξετε ότι:

$$NM = \frac{AB + B\Gamma}{2}$$

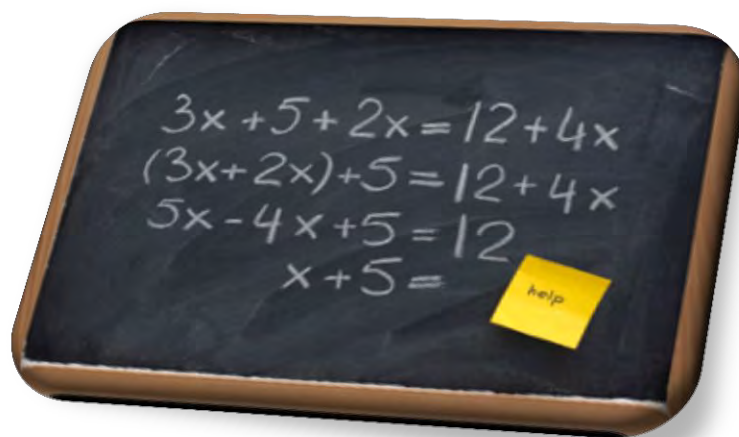


5. Δίνεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων. Αν το διάνυσμα $\overrightarrow{OA_1}$ είναι το συμμετρικό του διανύσματος \overrightarrow{OA} ως προς άξονα συμμετρίας τον άξονα των τετμημένων και το διάνυσμα $\overrightarrow{OA_2}$ το συμμετρικό του διανύσματος \overrightarrow{OA} ως προς άξονα συμμετρίας τον άξονα των τεταγμένων, να βρείτε το άθροισμα $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$. Τι παρατηρείτε για τα διανύσματα $\overrightarrow{OA_1}$ και $\overrightarrow{OA_2}$;
6. Να τοποθετήσετε τα σημεία $B(-3, -3)$ και $\Gamma(3, 9)$ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου A , αν ισχύει ότι $\overrightarrow{A\Gamma} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$.
7. Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(2, 5)$ και $\Gamma(5, 9)$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Δ , ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.
8. Να αποδείξετε ότι αν \vec{a} και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα, τότε $|\vec{a} + \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$. Να βρείτε τη σχέση των \vec{a} και $\vec{\beta}$, όταν $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$.
9. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου.
10. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, η AM είναι διάμεσος του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 2(AM)^2 + 2(BM)^2$$

Απαντήσεις Δραστηριοτήτων

Α' τεύχους



Επανάληψη: Από το Γυμνάσιο στο Λύκειο

Σελίδα 8

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. $AB = 5, AG = 5, BG = 5\sqrt{2}$

2. $\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{8}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{29}, \sqrt{29}$

3. 30 καθίσματα

4. $10\pi \text{ m}, 25\pi \text{ m}^2$

5. (α) $x = -2$

(γ) Αδύνατη

(β) $x = 7$

(δ) Αόριστη

6. (α) $\lambda = 3$

(β) $\lambda = -9$

7. (α) $a = -3$

(β) $a = 6$

8. $A: x \geq \frac{2}{3}$
 $B: x \leq 4$

9. (α) $x \geq 1, x < 5$

(δ) π.χ. $1, \frac{7}{3}, 3, 4, 98$

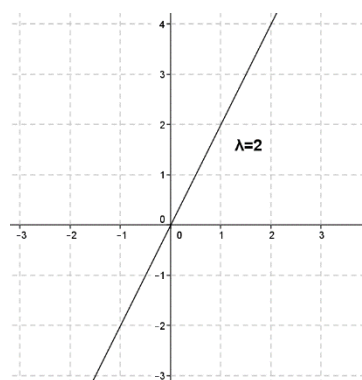
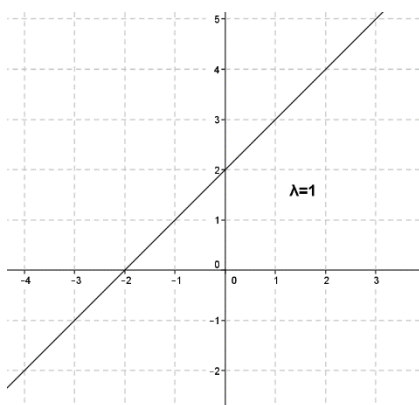
(β) $1 \leq x < 5$

(ε) $x = 4$

(γ) $x = 1$

(α)

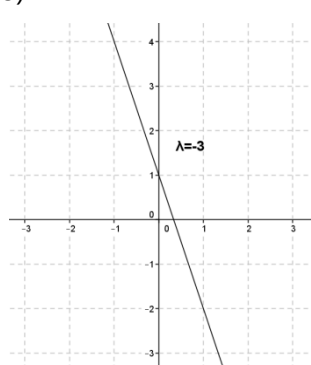
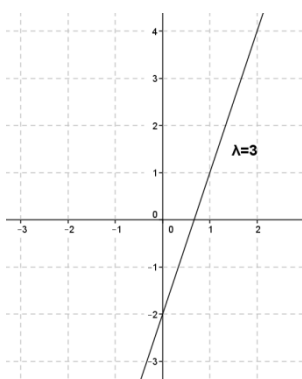
(β)



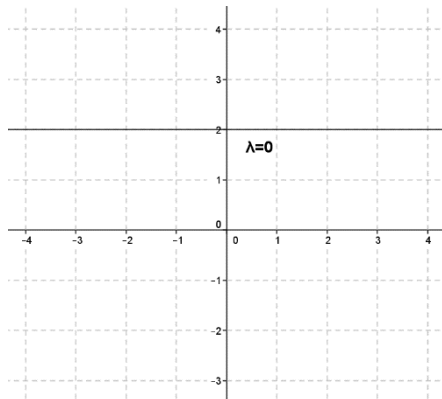
(γ)

(δ)

10.



(ε)



(στ)



11. (α) $a = -3$ (β) π.χ. $(-2, 6), (0, 0)$
12. $\beta = 2$
13. (α) $y = \frac{3x}{2} + 1$ (β) $y = 4$
14. (α) $x = 0, y = 3$ (β) $x = \frac{3}{4}, y = \frac{3}{2}$
15. $(-1, -2)$
16. (α) $x^2 + 4x + 4$ (δ) $x^2 - 9$
(β) $4x^2 - 12xy + 9y^2$ (ε) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$
(γ) $\frac{x^2}{4} - 2x + 4$ (στ) $4x^2 - 1$
19. (α) $2x(x+1)(x-1)$
(β) $(y-5-x)(y-5+x)$
(γ) $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(x+1)(x^2-x+1)$
(δ) $-5y(2x+y)$
20. (α) $x = 0$ ή $x = 5$ (γ) $a = -3$ ή $a = 1$
(β) $x = -3$ ή $x = 2$ (δ) $x = 1$ ή $x = \frac{2}{3}$
21. (α) $\frac{x}{x+1}$ (β) $\frac{a-4}{a}$
(α) $x = 1$, απορρίπτεται
22. (β) $x = -3$ απορρίπτεται, $x = -2$
(γ) $x = -3$ απορρίπτεται, $x = 3$
23. 8, 9
26. (α) $\text{συν}A = \frac{4}{5}$ (β) $\eta\mu\Gamma = \frac{4}{5}$
27. $\text{συν}\theta = \frac{4}{5}, \epsilon\varphi\theta = \frac{3}{4}$
28. 12,30 m
29. (α) $x = 12,99$ cm, $y = 10,24$ cm
(β) $x = 79,67$ cm, $y = 46$ cm

Ενότητα 01: Πραγματικοί Αριθμοί

Σελίδα 24 Η έννοια της νιοστής ρίζας

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. (α) 10 (γ) -6
(β) $\frac{2}{3}$ (δ) 0,2
2. (α) 3
(β) $x^3 = 25, x^6 = 625, y^2 = 8, y^6 = 512$
(γ) $y < x$
3. (α) $\sqrt[5]{10}$ (β) 1,585
4. (α) 5^{12} (γ) 2^8
(β) 3^{15} (δ) 7^5
5. (α) 3^6 (γ) $\frac{2}{x^4}$
(β) 6^{20} (δ) $\frac{\beta^3}{10}$
6. (α) $x = \pm 2$
(β) $x = -3$
(γ) $x = 2$
7. (α) $x = \pm 10$
(β) Αδύνατη εξίσωση στο \mathbb{R}
(γ) $x = \pm \frac{1}{2}$
8. (α) $x = \sqrt[3]{2}$
(β) $x = \pm \sqrt[4]{2}$
(γ) $x = -\sqrt[5]{10}$
9. (α) $x = 1, x = -5$
(β) $x = 5$
(γ) $x = 4$
10. (α) $x = 11$
(β) $x = 72$
(γ) $x = 81$
11. 1002
12. 0,05 ή 5%

Σελίδα 30 Ιδιότητες νιοστής ρίζας

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. (α) 7 (γ) $4 + \sqrt{5}$ (ε) $\sqrt{7} - \sqrt{6}$
(β) 6 (δ) 3 (στ) 2
2. (α) $2x$ (γ) Δεν είναι πραγματικός αριθμός
(β) $2x^2y^7$ (δ) $\frac{2y}{\sqrt[5]{27}}$

| | | | |
|----|---|---|--|
| 3. | (α) 2 (β) $\frac{1}{4}$ | (γ) 4 (δ) a | (ε) x^2 (στ) 40 |
| 4. | (α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ | (δ) ΛΑΘΟΣ (ε) ΣΩΣΤΟ (στ) ΛΑΘΟΣ | (ζ) ΛΑΘΟΣ (η) ΣΩΣΤΟ |
| 5. | (α) $2^5\sqrt{2}$ (β) $3a^2\sqrt{2a}$ | (γ) x^3 (δ) $2a^3\sqrt{2a}$ | (ε) $3a\beta\gamma^2\sqrt{\beta\gamma}$ (στ) $\frac{2}{x^2}\sqrt[3]{2}$ |
| 6. | (α) $8\sqrt{5}$ (β) $\frac{16}{3}$ | (γ) 4 (δ) $a\beta^3 \cdot \sqrt[5]{a}$ | |
| 7. | (α) $\sqrt[12]{6}$ (β) $\sqrt[27]{3}$ | (γ) $\sqrt[5]{a^2}$ (δ) 6 | (ε) $21 + 12\sqrt{3}$ (στ) 2 |
| 8. | (α) 2 (β) $4\sqrt{2}$ | (γ) -1 (δ) 6 | |
| 9. | (α) $a = 9, \beta = 5$ (β) $\gamma = 3645$ | | |

Σελίδα 35 Δυνάμεις με Ρητό Εκθέτη

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

| | | | |
|----|-------------------------------------|---|--|
| 1. | (α) $5^{\frac{2}{3}}$ | (β) $3^{\frac{1}{2}}$ | (γ) $1000^{\frac{1}{5}}$ |
| 2. | (α) 4 (β) 2 (γ) 3 | (δ) $\frac{8}{27}$ (ε) $\frac{1}{3}$ (στ) $\frac{1}{4}$ | (ζ) $\frac{729}{512}$ (η) $\frac{4}{9}$ (θ) 32 |
| 3. | A = 5 | | |
| 4. | (α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΛΑΘΟΣ | (δ) ΣΩΣΤΟ (ε) ΛΑΘΟΣ | (στ) ΛΑΘΟΣ (ζ) ΛΑΘΟΣ |
| 5. | (α) 5 (β) $\sqrt[5]{2^{17}}$ | (γ) 6 (δ) $7\sqrt{2}$ | |
| 6. | (α) 25 (β) 8 | (γ) 8 (δ) 63 | |
| 7. | (α) $\frac{1}{16}$ | (β) 9 | |
| 8. | 16 sec | | |

Σελίδα 40 Μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

| | | | |
|----|-------------------------------|------------------------|-----------|
| 1. | (α) $y = \sqrt{7} + \sqrt{2}$ | (β) $xy = 5$ | |
| 2. | (α) ΛΑΘΟΣ (β) ΣΩΣΤΟ | (γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΣΩΣΤΟ | (ε) ΣΩΣΤΟ |

3. (α) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (γ) $4\sqrt{5}$
 (β) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (δ) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

4. (α) $5(\sqrt{2}-1)$ (γ) $2\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ (ε) $1+\sqrt{a}$
 (β) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ (δ) $\frac{3(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{2}$ (στ) $x+y-2\sqrt{xy}$

5. $\kappa = 7$

6. (α) 6 (γ) $2\sqrt{2}$
 (β) $\frac{3}{2}$ (δ) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Σελίδα 50 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. (α) ΣΩΣΤΟ (δ) ΛΑΘΟΣ (ζ) ΛΑΘΟΣ
 (β) ΣΩΣΤΟ (ε) ΣΩΣΤΟ (η) ΛΑΘΟΣ
 (γ) ΛΑΘΟΣ (στ) ΛΑΘΟΣ (θ) ΛΑΘΟΣ
 (ι) ΣΩΣΤΟ

2. (α) Δ (γ) Α
 (β) Δ (δ) Δ

3. (α) > (γ) > (ε) <
 (β) < (δ) >

4. Δ

5. (α) $A < B$ (γ) $E < Z$ (ε) $K > Λ$
 (β) $Γ > Δ$ (δ) $H > Θ$

7. $\frac{x}{y} < 1 < \frac{y}{x}$

11. $-4 < 2x + 3y < 1$ $-2 < \frac{x}{y} < -\frac{1}{2}$
 $-4 < xy < -1$ $\frac{1}{3} < \frac{-2x}{3y} < \frac{4}{3}$

12. $103,60 \leq \Pi \leq 104,40$ $634,81 \leq E \leq 645,21$

13. (α) Π.χ. αν $2 < 3$ και $-1 < 0$ δεν ισχύει: $2 - (-1) < 3 - 0$
 (β) Π.χ. αν $2 < 3$ και $-3 < -1$ δεν ισχύει: $\frac{2}{-3} < \frac{3}{-1}$

15. $6 - \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{30}$

Σελίδα 56 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. (α) $13 - 6\sqrt{3}$ (β) $8 - 2\sqrt{3}$

2. 46

3. $12\sqrt{2}$

| | | | |
|-----|--|--|--|
| 4. | (α) 2 (β) $\frac{9}{5}$ | (γ) 2 (δ) $5\sqrt{5}$ | |
| 5. | (α) a^2 | (β) $\kappa^{\frac{3}{2}}$ ή $\kappa\sqrt{\kappa}$ | |
| 6. | (α) $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ | (β) $5 + \sqrt{3} > 3 + \sqrt{5}$ | (γ) $\sqrt{10 + 2\sqrt{15}} > \sqrt{5} + \sqrt{3}$ |
| 7. | (α) $2\sqrt{2}$ | (β) $4\sqrt{6}$ | (γ) 10 |
| 8. | (α) 81 (β) 27 | (γ) 0 (δ) Αδύνατη στο \mathbb{R} | |
| 9. | (α) -22 | (β) 2 | |
| 10. | (α) ± 3 | (β) -2 | (γ) 0, ± 2 |
| 11. | (α) -1 (β) 12 | (γ) 2 (δ) 1 | |
| 12. | (α) 10 (β) 125 | (γ) 0 (δ) 6 | |
| 13. | (α) 1 (β) $3k^2$ | (γ) 3 (δ) $10x^2$ | |
| 14. | (α) $2\sqrt{5}$ (β) $3(2 + \sqrt{3})$ | (γ) $6\sqrt{7} - 6\sqrt{5}$ (δ) $\frac{5 \cdot \sqrt[3]{2}}{2}$ | (ε) $\frac{\sqrt[10]{x^7}}{x}$ |
| 15. | (α) $6 < 2x < 16$ (β) $-14 < -3x + 10 < 1$ (γ) $10 < x^2 + 1 < 65$ | (δ) $\frac{1}{8} < \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$ (ε) $-9 < -\frac{36}{x+1} < -4$ (στ) $\frac{1}{62} < \frac{1}{x^2-2} < \frac{1}{7}$ | |
| 16. | (α) $A > B$ | (β) $\Gamma < \Delta$ | (γ) $E < Z$ |
| 18. | (α) [-4, 2] (β) [12, 22] | (γ) [-48, -16] (δ) $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$ | (ε) [25, 41] (στ) [154, 494] |
| 20. | Για $0 < \kappa < \lambda$: (α) $3\kappa - 8 < 3\lambda - 8$ (β) $4 - \frac{1}{2}\kappa > 4 - \frac{1}{2}\lambda$ (γ) $5\kappa^2 + 7 < 5\lambda^2 + 7$ (δ) $\frac{3}{8-\kappa^3} < \frac{3}{8-\lambda^3}$ | Για $\kappa < \lambda < 0$: (α) $3\kappa - 8 < 3\lambda - 8$ (β) $4 - \frac{1}{2}\kappa > 4 - \frac{1}{2}\lambda$ (γ) $5\kappa^2 + 7 < 5\lambda^2 + 7$ (δ) $\frac{3}{8-\kappa^3} < \frac{3}{8-\lambda^3}$ | |
| 21. | $14 < 2x + 4y < 24$ | | |
| 22. | (β) $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{6}$ | | |
| 23. | (β) $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt{2}$ | | |
| 24. | $x^2 = 150$ | | |
| 26. | $\gamma < \beta < a$ | | |
| 27. | $3a - 4\gamma > 3\beta - 4\gamma$ | | |
| 28. | (β) $2^{3012}, 0$ | | |

Σελίδα 61 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. $A = 1 - \sqrt{2}, B = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $(5 + \sqrt{3})^2 = 28 + 10\sqrt{3}$

3. $(2 - \sqrt{2})^3 = 20 - 14\sqrt{2}$

(α) $x = 0$

5. (β) $x = 0$ ή $x = 243$

(γ) $x = 0$ ή $x = 16$

8. $x = -11, y = 3, z = 2$

11. (β) 6

12. (α) 970

(β) 912670090

Ενότητα 02: Τριγωνομετρία

Σελίδα 69 Το ακτίσιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Δραστηριότητα Απαντήσεις

- $30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}, 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}, 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}, 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$
- $\frac{5\pi}{3} \text{ rad} = 300^\circ, \frac{7\pi}{6} \text{ rad} = 210^\circ, \frac{3\pi}{2} \text{ rad} = 270^\circ, 5\pi \text{ rad} = 900^\circ$
- $\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 $\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
 $\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
- $3 \text{ rad} \approx 171,89^\circ$
- $1,8 \text{ rad}$
- $\frac{36}{\pi} \text{ cm} \approx 11,46 \text{ cm}$

8. 4 ms^{-1}

Σελίδα 74 Γωνία σε κανονική θέση

Δραστηριότητα Απαντήσεις

- (α) $360^\circ + 135^\circ = 495^\circ, -720^\circ + 135^\circ = -585^\circ$
(β) $-360^\circ - 20^\circ = -380^\circ, 360^\circ - 20^\circ = 340^\circ$
(γ) $240^\circ - 360^\circ = -120^\circ, 240^\circ + 360^\circ = 600^\circ$
- (δ) $\frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$
(ε) $\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$
(στ) $\frac{5}{2} - 2\pi \approx -3,78 \text{ rad}, \frac{5}{2} + 2\pi \approx 8,78 \text{ rad}$
- (α) ΛΑΘΟΣ (γ) ΛΑΘΟΣ (ε) ΣΩΣΤΟ
(β) ΣΩΣΤΟ (δ) ΣΩΣΤΟ (στ) ΣΩΣΤΟ
- (α) 0° (γ) 180° (ε) 45°
(β) 90° (δ) 270°
- $x = 480^\circ, y = 120^\circ$
(α) $OA \rightarrow$ τελική πλευρά της $\omega, OA \rightarrow$ αρχική πλευρά της ω
 $\varphi = 360^\circ + \omega$
- (β) Αρχική πλευρά: OA , Τελική πλευρά: OA
(γ) Αρχική πλευρά: OA , Τελική πλευρά: OA

Σελίδα 79 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας σε κανονική θέση

Δραστηριότητα Απαντήσεις

- $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \epsilon\varphi\theta = 1$
 $\sigma\tau\epsilon\mu\theta = -\sqrt{2}, \tau\epsilon\mu\theta = -\sqrt{2}, \sigma\varphi\theta = 1$

2. (α) ΛΑΘΟΣ (δ) ΣΩΣΤΟ (στ) ΛΑΘΟΣ
 (β) ΣΩΣΤΟ (ε) ΛΑΘΟΣ (ζ) ΣΩΣΤΟ
 (γ) ΣΩΣΤΟ

$(-1, +1), (-2, +2)$

3. $\eta\mu 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sigma\upsilon\nu 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \epsilon\phi 135^\circ = -1$
 $\sigma\tau\epsilon\mu 135^\circ = \sqrt{2}, \tau\epsilon\mu 135^\circ = -\sqrt{2}, \sigma\phi 135^\circ = -1$

(α) $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \epsilon\phi\theta = 1$

$\sigma\tau\epsilon\mu\theta = -\sqrt{2}, \tau\epsilon\mu\theta = -\sqrt{2}, \sigma\phi\theta = 1$

4. (β) $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}, \sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \epsilon\phi\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sigma\tau\epsilon\mu\theta = 2, \tau\epsilon\mu\theta = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sigma\phi\theta = -\sqrt{3}$

(γ) $\eta\mu\theta = 0, \sigma\upsilon\nu\theta = -1, \epsilon\phi\theta = 0$

$\sigma\tau\epsilon\mu\theta$: δεν ορίζεται, $\tau\epsilon\mu\theta = -1$, $\sigma\phi\theta$: δεν ορίζεται

5. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6. $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), (-3, 4)$

7. (α) $\eta\mu\theta = -\frac{1}{2}, \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \epsilon\phi\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(β) $\theta = -30^\circ$

(γ) $\theta = 330^\circ$

8. (α) $y_A = 8$

- (β) $k = \frac{1}{8}$

(γ) $\eta\mu\theta = -\frac{4\sqrt{17}}{17}, \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{17}}{17}$

Σελίδα 92 Τριγωνομετρικός κύκλος

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. (α) ΛΑΘΟΣ (δ) ΣΩΣΤΟ (στ) ΣΩΣΤΟ
 (β) ΣΩΣΤΟ (ε) ΣΩΣΤΟ (ζ) ΣΩΣΤΟ
 (γ) ΣΩΣΤΟ

2. $-1 \leq \eta\mu\theta \leq 1$

Όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας των 30° και της γωνίας των 370° είναι θετικοί.

$\eta\mu 236^\circ < 0, \sigma\upsilon\nu 236^\circ < 0$

$\epsilon\phi 236^\circ > 0, \tau\epsilon\mu 236^\circ < 0$

$\sigma\tau\epsilon\mu 236^\circ < 0, \sigma\phi 236^\circ > 0$

- 3.

$\eta\mu(-52^\circ) < 0, \sigma\upsilon\nu(-52^\circ) > 0$

$\epsilon\phi(-52^\circ) < 0, \tau\epsilon\mu(-52^\circ) > 0$

$\sigma\tau\epsilon\mu(-52^\circ) < 0, \sigma\phi(-52^\circ) < 0$

$\eta\mu(-150^\circ) < 0, \sigma\upsilon\nu(-150^\circ) < 0$

$\epsilon\phi(-150^\circ) > 0, \tau\epsilon\mu(-150^\circ) < 0$

$\sigma\tau\epsilon\mu(-150^\circ) < 0, \sigma\phi(-150^\circ) > 0$

4. $\eta\mu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{2}$, $\epsilon\phi\omega = \sqrt{3}$, $\sigma\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$

- (α) 2^ο τεταρτημόριο
 5. (β) 2^ο τεταρτημόριο
 (γ) 3^ο τεταρτημόριο

7. 4^ο τεταρτημόριο

- (α) $\frac{\lambda - \kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}}$
 8. (β) $\frac{\lambda^2 + \kappa^2}{\kappa\lambda}$
 (γ) 1

Σελίδα 108 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις – Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών που έχουν άθροισμα ή διαφορά 0°, 90°, 180°, 270°, 360°

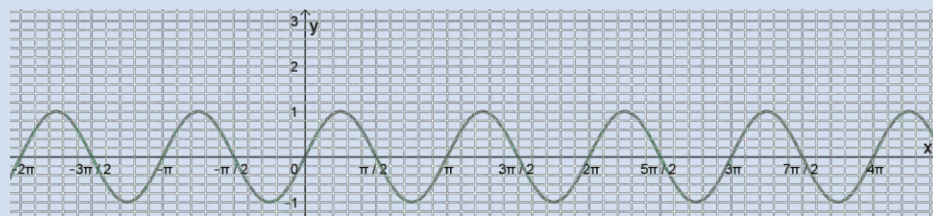
Δραστηριότητα Απαντήσεις

| | | | |
|----|-----|-----|-----|
| 1. | (α) | (β) | (γ) |
| | 1 | 5 | 6 |

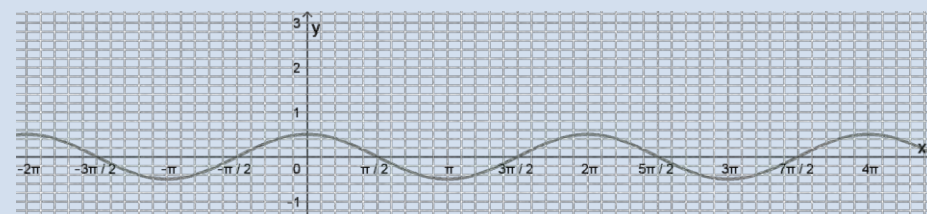
2. (α) 60° ή 120° (β) 160° (γ) 150°

3. (α) $\eta\mu 15^\circ$ (ε) $\tau\epsilon\mu 60^\circ$
 (β) $-\epsilon\phi 80^\circ$ (στ) $\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right)$
 (γ) $\eta\mu 18^\circ$ ή $\sigma\upsilon\nu 72^\circ$ (ζ) $-\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{3}\right)$
 (δ) $-\sigma\tau\epsilon\mu 40^\circ$ (η) $\sigma\phi\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(α) $f(x) = \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$



4. (β) $g(x) = \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu x$



6. $A = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\phi\alpha$
 $B = 2\eta\mu\alpha$
 $\Gamma = \eta\mu\omega$

7. (α) ΣΩΣΤΟ (δ) ΣΩΣΤΟ (ζ) ΣΩΣΤΟ
 (β) ΛΑΘΟΣ (ε) ΛΑΘΟΣ (η) ΛΑΘΟΣ
 (γ) ΣΩΣΤΟ (στ) ΣΩΣΤΟ

8. Για τα σημεία B και Γ: $\frac{9\pi}{7}, \frac{16\pi}{7}, \frac{23\pi}{7}$
 Για τα σημεία Δ και Ε: $-\frac{26\pi}{7}, -\frac{19\pi}{7}, -\frac{12\pi}{7}, -\frac{5\pi}{7}$

Σελίδα 117 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) $\text{τεμφ} = \frac{13}{5}, \text{ημφ} = \frac{12}{13}, \text{στεμφ} = \frac{13}{12}, \text{εμφ} = \frac{12}{5}, \text{σφφ} = \frac{5}{12}$
 (β) $\text{ημφ} = -\frac{12}{37}, \text{συνφ} = \frac{35}{37}, \text{τεμφ} = \frac{37}{35}, \text{εμφ} = -\frac{12}{35}, \text{σφφ} = -\frac{35}{12}$
 (γ) $\text{σφφ} = \frac{8}{15}, \text{τεμφ} = -\frac{17}{8}, \text{συνφ} = -\frac{8}{17}, \text{ημφ} = -\frac{15}{17}, \text{στεμφ} = -\frac{17}{15}$

2. $\text{ημ}\omega = \frac{5\sqrt{x^2+25}}{x^2+25}, \text{τεμ}\omega = \frac{\sqrt{x^2+25}}{x}$

3. $A = -\frac{7}{5}$

4. $A = 10$

6. (α) $\text{συν}15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$
 (β) $\text{εφ}15^\circ = 2 - \sqrt{3}$

7. $A = -1, B = \sigma\phi^2 x$

9. $\text{εφ}x = \frac{\eta\mu x}{\sqrt{1-\eta\mu^2 x}}$

11. $\theta = 30^\circ$

13. (α) Δεν υπάρχουν τιμές του x
 (β) Δεν υπάρχουν τιμές του x
 (γ) Δεν υπάρχουν τιμές του x
 (δ) Υπάρχουν τιμές του x ($x = 135^\circ$)

Σελίδα 124 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. $a = \pi \text{ rad}, \beta = \frac{\pi}{18} \text{ rad}, \gamma = -\frac{4\pi}{9} \text{ rad}, \delta = \frac{31}{18}\pi \text{ rad}, \varepsilon = 4\pi \text{ rad}$

2. $a = 135^\circ, \beta \approx 85,94^\circ, \gamma \approx 171,89^\circ$

3. Η θ ανήκει στο 3^ο τεταρτημόριο Η ω ανήκει στο 4^ο τεταρτημόριο
 Η ϕ ανήκει στο 1^ο τεταρτημόριο Η x ανήκει στο 2^ο τεταρτημόριο

4. Γωνίες με ίδια τελική πλευρά με τη γωνία $x = 270^\circ$: $-90^\circ, 630^\circ$
 Γωνίες με ίδια τελική πλευρά με τη γωνία $y = -70^\circ$: $-430^\circ, 290^\circ$
 Γωνίες με ίδια τελική πλευρά με τη γωνία $z = 1 \text{ rad}$: $(1 + 2\pi) \text{ rad}, (1 - 2\pi) \text{ rad}$

5. (α) 4^ο τεταρτημόριο (β) 3^ο τεταρτημόριο
6. $A = 11$
7. (α) 4^ο τεταρτημόριο (β) 4^ο τεταρτημόριο
8. (α) $\eta\mu\theta = y$ (γ) $(-x, y)$ (ε) $1 + \epsilon\varphi^2\theta = \frac{1}{x^2}$
 (β) $(x, -y)$ (δ) $\epsilon\varphi(180 + \theta) = \frac{y}{x}$
- (α) Η f περιοδική με περίοδο π
 (β) $(\frac{8\pi}{3}, -\frac{1}{2}), (-\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}), (-\frac{10\pi}{3}, -\frac{1}{2})$
 (γ) $(0, 1), (2\pi, 1), (-2\pi, 1), (-4\pi, 1)$
 10. (δ) $(\pi, -1)$
 (ε) (i) f και g ταυτίζονται
 (ii) Η h είναι η μετατόπιση της f κατά 2 μονάδες προς τα πάνω
 (iii) f και ρ ταυτίζονται
11. $-3 + \sqrt{3} \leq A \leq 3 + \sqrt{3}$
 $-3 + \pi \leq B \leq 3 + \pi$
 $2 \leq \Gamma \leq 4$
12. $\theta = 60^\circ$
16. $\eta\mu\theta = \frac{\sqrt{2}(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{2}(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)}{2}$
17. $\alpha = \eta\mu\theta$, $\beta = \epsilon\varphi\theta$, $\gamma = \tau\epsilon\mu\theta$, $\delta = \sigma\upsilon\nu\theta$
18. (β) i. $\frac{2\alpha}{a^2-1}$ ii. $\frac{2}{a^2-1}$ iii. $\frac{a(3-a^2)}{2}$
20. Γ
22. $A = 23$
23. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{11\pi}{3}, -\frac{10\pi}{3}, -\frac{15\pi}{3}, -\frac{17\pi}{3}$
24. Γ
25. $\varphi = 90 + \theta$

Σελίδα 130 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα Απαντήσεις

3. $x_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_{\epsilon\lambda\alpha\chi} = \frac{1}{2}$
6. Ελάχιστη, όταν $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
 Μέγιστη, όταν $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}$ ή $x = \kappa\pi + \frac{2\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
7. 6 m
9. 12,86 m
12. $\frac{\eta\mu x + 1}{\eta\mu x - 1}$, 0, $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$
13. (α) $OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AH = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ (γ) Ορθογώνιο

Ενότητα 03: Κύκλος

Σελίδα 144 Σχετική θέση δύο κύκλων

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. (α) Εφάπτονται εξωτερικά (γ) Ξένοι εξωτερικά
(β) Τέμνονται (δ) Εφάπτονται εσωτερικά
2. (α) Εφάπτονται εξωτερικά (ε) Τέμνονται
(β) Ξένοι εξωτερικά (στ) Εφάπτονται εσωτερικά
(γ) Ξένοι εσωτερικά (ζ) Εφάπτονται εξωτερικά
(δ) Εφάπτονται εσωτερικά
3. (α) 9 cm (β) 1 cm
4. $8 \text{ km} < M\Lambda < 28 \text{ km}$
5. (α) Εφάπτονται εξωτερικά (δ) Εφάπτονται εσωτερικά
(β) Ξένοι εξωτερικά (ε) Τέμνονται
(γ) Τέμνονται
6. (α) $x = 5 \text{ cm}$ (β) $5 \text{ cm} < x < 19 \text{ cm}$ (γ) $x > 19 \text{ cm}$

Σελίδα 157 Εγγεγραμμένες – Επίκεντρες γωνίες

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. (α) $x = 40^\circ$ (δ) $x = 34^\circ$ (ζ) $x = 150^\circ$
(β) $x = 43^\circ$ (ε) $x = 40^\circ, y = 60^\circ$ (η) $x = 100^\circ, y = 120^\circ$
(γ) $x = 90^\circ$ (στ) $x = 32^\circ$
2. (α) ΣΩΣΤΟ (γ) ΣΩΣΤΟ
(β) ΛΑΘΟΣ (δ) ΛΑΘΟΣ
3. $\rho = 2\sqrt{2} \text{ cm}$
6. $B = 100^\circ, \Gamma = 60^\circ, \Delta = 80^\circ$

Σελίδα 163 Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. (α) $x = 54^\circ, y = 56^\circ$ (β) $x = 117^\circ$ (γ) $x = 51^\circ, y = 102^\circ$
2. $\widehat{AKB} = 140^\circ$
3. $\widehat{\omega} = 30^\circ$
6. Το τόξο $B\Gamma$ που αντιστοιχεί στην $B\widehat{K}\Gamma$ είναι 122° .
7. (β) Το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο του ΔE .

Σελίδα 171 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. (α) $x = 172^\circ$ (γ) $x = 66^\circ, y = 72^\circ$ (ε) $x = 30^\circ$
(β) $x = 180^\circ$ (δ) $x = 300^\circ$ (στ) $x = 147^\circ$

2. $\hat{A} = 55^\circ, \hat{B} = 105^\circ, \hat{\Gamma} = 125^\circ, \hat{\Delta} = 75^\circ$

3. $\hat{A} = 80^\circ, \hat{B} = 60^\circ, \hat{\Gamma} = 40^\circ$

4. (α) Τα τόξα είναι ίσα.
(γ) $x = 108^\circ$

7. (β) $\hat{A} = 90^\circ, \hat{K} = 60^\circ, \hat{B} = 30^\circ$

8. $B\hat{\Gamma}\Delta = 60^\circ, B\hat{M}\Delta = 45^\circ$

13. $\hat{B}_1 = 45^\circ, \hat{\varphi} = 95^\circ$

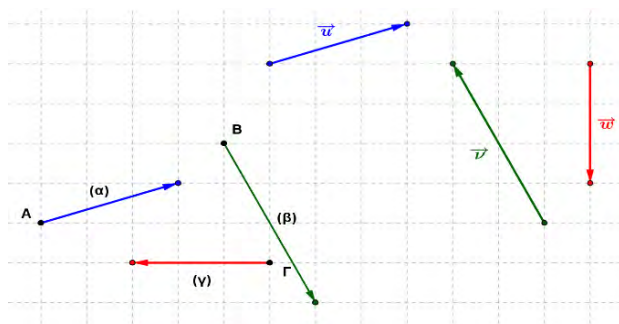
Ενότητα 04: Διανύσματα

Σελίδα 188 Η έννοια του διανύσματος

Δραστηριότητα Απαντήσεις

- | | | | |
|-----|---|--------------------------------|------------------------------------|
| 17. | (α) Μονόμετρο (β) Διανυσματικό | (γ) Μονόμετρο (δ) Μονόμετρο | (ε) Διανυσματικό (στ) Μονόμετρο |
| 18. | (α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ | (γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΣΩΣΤΟ | |
| 19. | (α) $ \overline{\Delta E} = 1, \overline{\Delta Z} = 2, \overline{\Delta H} = 3, \overline{BA} = 1, \overline{BF} = 1, \overline{BD} = 2$ $ \overline{BZ} = 4, \overline{HE} = 2, \overline{ZA} = 5$ | | |
| | (β) $\overline{\Delta E} = \overline{BF}, \overline{\Delta E} = -\overline{BA}, \overline{BF} = -\overline{BA}, \overline{BD} = \overline{\Delta Z}, \overline{\Delta Z} = -\overline{HE}$ | | |
| | (γ) \overline{HA} | | |
| 20. | (α) $\vec{\kappa}, \vec{\theta}$ (β) $\vec{\eta}, \vec{\lambda}$ | | |
| 21. | (α) $\overline{AK} = \overline{KG} = \overline{LM}, \overline{AL} = \overline{LB} = \overline{KM}, \overline{BM} = \overline{BF} = \overline{LK}$ $\overline{AK} = -\overline{KG}, \overline{LM} = -\overline{KA}, \overline{GM} = -\overline{LK}, \overline{LB} = -\overline{MK}$ | | |

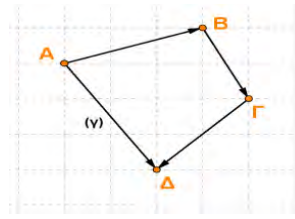
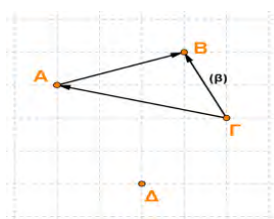
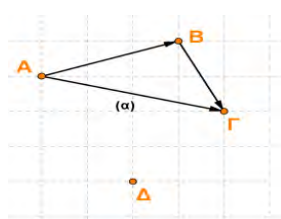
22.



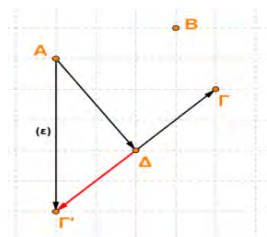
Σελίδα 199 Πράξεις με διανύσματα

Δραστηριότητα Απαντήσεις

- | | | | |
|----|------------------------|------------------------|-----------|
| 1. | (α) ΛΑΘΟΣ (β) ΣΩΣΤΟ | (γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΛΑΘΟΣ | (ε) ΣΩΣΤΟ |
|----|------------------------|------------------------|-----------|



2.



3. (α) \overrightarrow{AB} (γ) \overrightarrow{FB}
 (β) $\vec{0}$ (δ) \overrightarrow{BA}

4. (α) $\vec{x} = \vec{a} - \vec{\beta}$
 (β) $\vec{x} = -\vec{\beta} + \vec{a} - \vec{\gamma}$
 (γ) $\vec{x} = -\vec{a} + \vec{\beta}$ ή $\vec{x} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ ή $\vec{x} = -\vec{a} + \vec{\delta}$

5. (α) $\overrightarrow{BA} = -\vec{\beta}$ (ε) $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = -\vec{a} + \vec{\beta}$
 (β) $\overrightarrow{Z\Gamma} = 2\vec{\beta}$ (στ) $\overrightarrow{BE} = 2\vec{a} - 2\vec{\beta}$
 (γ) $\overrightarrow{HA} = \vec{a}$ (ζ) $\overrightarrow{ZA} = \vec{a} + \vec{\beta}$
 (δ) $\overrightarrow{EH} = -\vec{a} + \vec{\beta}$ (η) $\overrightarrow{GA} = -\vec{a} - \vec{\beta}$

6. (α) $\overrightarrow{A\Gamma} = 6(\vec{\kappa} + \vec{\lambda})$ (δ) $\overrightarrow{E\Delta} = 4\vec{\lambda}$
 (β) $\overrightarrow{A\Delta} = 6\vec{\lambda}$ (ε) $\overrightarrow{\Delta Z} = 4\vec{\kappa}$
 (γ) $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 6\vec{\kappa}$ (στ) $\overrightarrow{EZ} = 4(\vec{\kappa} + \vec{\lambda})$

Σελίδα 211 Διανυσματική Ακτίνα Σημείου -

Διανύσματα σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 5$

2. $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma}| = 4$

4. $|\vec{a} + \vec{\beta}| = 10$

5. $\vec{a} + \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{\gamma} + \vec{\delta} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. (ε) $\begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix}$ (στ) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ζ) $\begin{pmatrix} 1 \\ 18 \end{pmatrix}$

7. $|\vec{\gamma}| = \sqrt{2}$

8. $x = 4$

9. $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

10. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\Gamma B} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

11. $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

12. (α) ΣΩΣΤΟ (γ) ΣΩΣΤΟ
 (β) ΛΑΘΟΣ (δ) ΛΑΘΟΣ

13. $\vec{\delta}$ και $\vec{\zeta}$

14. $|\vec{-j}| = |\vec{a}| = |\vec{\gamma}| = 1$

15. (α) $\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{13}{3\sqrt{13}} \\ \frac{13}{4\sqrt{17}} \end{pmatrix}$
 (β) $\begin{pmatrix} \frac{17}{\sqrt{17}} \\ \frac{17}{17} \end{pmatrix}$

(γ) $\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{52}}{26} \\ \frac{\sqrt{12}}{13} \end{pmatrix}$
 (δ) $\frac{1}{\sqrt{697}} \begin{pmatrix} 24 \\ 11 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} \frac{8}{17} \\ \frac{15}{-17} \end{pmatrix}$

17. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, Όχι

19. (γ) $\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ (δ) $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ (ε) $|\overrightarrow{AM}| = 5$

20. (δ) $\lambda = 3$
 (ε) $(0, -1)$ ή $(0, 7)$

Σελίδα 217 Δραστηριότητες Ενότητας

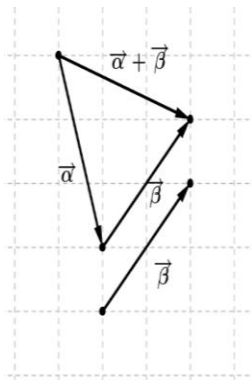
Δραστηριότητα

Απαντήσεις

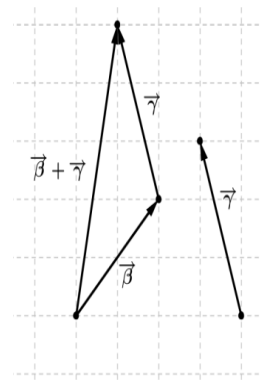
Τα διανύσματα \vec{a} και $2\vec{a}$ είναι ομόρροπα και το μέτρο του $2\vec{a}$ είναι διπλάσιο του \vec{a} .

1. Το διάνυσμα $-3\vec{a}$ είναι αντίρροπο των \vec{a} και $2\vec{a}$ και το μέτρο του είναι τριπλάσιο του \vec{a} .

(α)

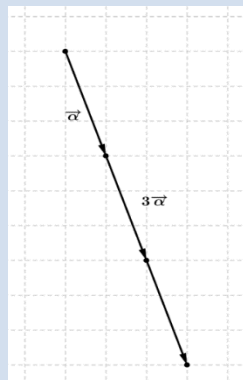


(β)

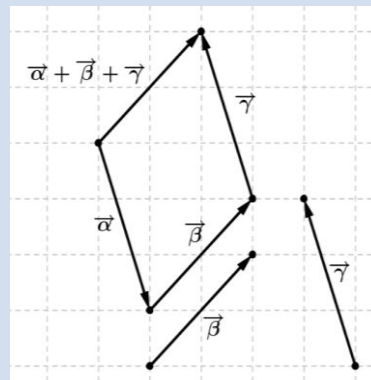


4.

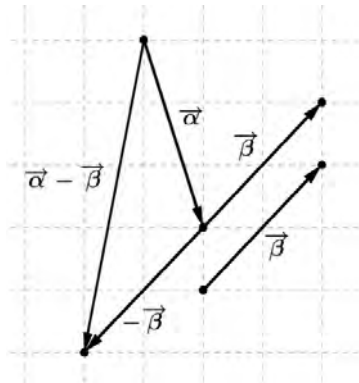
(γ)



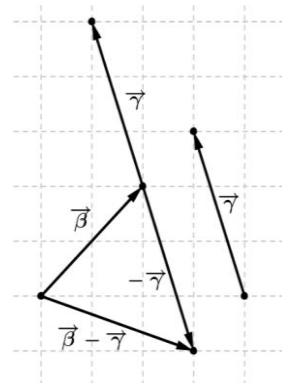
(δ)



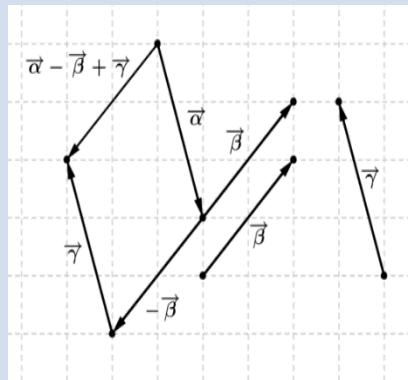
(ε)



(στ)



(ζ)



5. $\vec{AD} = 2\vec{\beta}$, $\vec{GM} = -\vec{a}$, $\vec{NM} = \vec{\beta} + \vec{a}$, $\vec{ML} = \vec{a} - \vec{\beta}$

(α) $\vec{GB} = -\vec{\beta} + \vec{a}$, $\vec{AE} = \frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}$, $\vec{DE} = \frac{\vec{\beta}}{2}$

6. Το $ADEΓ$ είναι τραπέζιο. $\left. \begin{array}{l} \vec{AG} = \vec{\beta} \\ \vec{DE} = \frac{\vec{\beta}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{AG} \parallel \vec{DE}$

7. $\vec{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{OM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

8. $|\vec{a}| \neq 1$, $|\vec{\beta}| = 1$

9. $\kappa = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

10. Ναι, τα $A, B, Γ$ είναι συνευθειακά

11. $\begin{pmatrix} -36 \\ -15 \end{pmatrix}$

12. (α) Όχι
(β) Ναι
(γ) Ναι

13. $\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

(α) $\Sigma \vec{F} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

14. (β) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

(γ) Παράλληλα και ομόρροπα

17. $\kappa = 1, \kappa = \frac{2}{3}$

Σελίδα 222 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα Απαντήσεις

2. (α) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta}, \overrightarrow{EB} = -\frac{1}{3} \cdot \vec{\beta} + \vec{a}, \overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\frac{2}{5} \vec{a} + \frac{8}{15} \vec{\beta}$

(α) $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \vec{\beta} - \vec{\gamma}, \overrightarrow{\Delta\text{M}} = \frac{\vec{\beta} - \vec{\gamma}}{2}, \overrightarrow{AM} = \frac{\vec{\beta} + \vec{\gamma}}{2}$

3. (β) $\overrightarrow{AL} = \frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}, \overrightarrow{ML} = \frac{\vec{a} - \vec{\gamma}}{2}$

(γ) $\overrightarrow{NK} = \frac{\vec{a} - \vec{\gamma}}{2}, \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{NK}$ και $\overrightarrow{ML} \parallel \overrightarrow{NK}$, το $KLMN$ είναι παραλληλόγραμμο.

5. $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, είναι αντίθετα

6. $A(-1,1)$

7. $\Delta(4,5)$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

| | |
|-----------------------|--|
| \in | ανήκει |
| \notin | δεν ανήκει |
| \forall | για κάθε |
| \exists | υπάρχει |
| \cup | ένωση συνόλων |
| \cap | τομή συνόλων |
| \subset | γνήσιο υποσύνολο |
| \subseteq | υποσύνολο |
| \emptyset ή $\{ \}$ | κενό σύνολο |
| $=$ | ίσον |
| \neq | άνισο |
| \equiv | ταυτοτικά ίσο |
| \cong | κατά προσέγγιση ίσο |
| \mathbb{N} | φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4, \dots\}$ |
| \mathbb{N}_0 | φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4, \dots\}$ |
| \mathbb{Z} | ακέραιοι αριθμοί $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$ |
| \mathbb{Z}^+ | θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4, \dots\}$ |
| \mathbb{Z}^- | αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$ |
| \mathbb{Q} | ρητοί αριθμοί $\{\alpha/\beta: \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \text{ και } \beta \neq 0\}$ |
| \mathbb{Q}^+ | θετικοί ρητοί αριθμοί |
| \mathbb{Q}_0^+ | θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν |
| \mathbb{Q}^- | αρνητικοί ρητοί αριθμοί |
| \mathbb{R} | πραγματικοί αριθμοί |
| \Rightarrow | απλή συνεπαγωγή |
| \Leftrightarrow | διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία |
| \perp | κάθετες |
| \parallel | παράλληλες |

Υπολογιστική Αριθμομηχανή



Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)



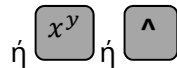
Υποδιαστολή



Εκθέτης δύναμης με βάση το 10



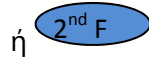
Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος



Δύναμη



Ποντίκι (Mouse)



Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί



Επανεκκίνηση υπολογιστικής



Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή



Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)



Εισαγωγή Προσήμου –



Κλάσμα



Μετατροπή Κλάσματος \Leftrightarrow Δεκαδικό



Σβήσιμο μνήμης






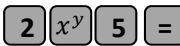


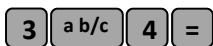



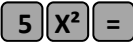

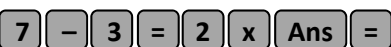

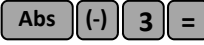




Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη



Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη



Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

| Πράξη | Εντολές υπολογιστικής | Στην οθόνη |
|--|--|-------------------------|
| $3 + 4$ |  | 3+4 7 |
| $2,34 - 1,1$ |  | 2.34 - 1.1 1.24 |
| $3 \cdot 2$ |  | 3X2 6 |
| 2^5 |  | 2^5 ή 2^5 32 |
| $5 \cdot 10^3$ |  | 5E3 ή 5X103 5000 |
| $\frac{3}{4}$ |  ή  | $\frac{3}{4}$ 3┆4 |
| $2\frac{3}{4}$ |  ή  | $2\frac{3}{4}$ 2┆3┆4 |
| $\sqrt{4}$ |  | $\sqrt{4}$ 2 |
| 5^2 |  | 5^2 25 |
| $2 \cdot (7 - 3)$ |  | 2X(7 - 3) 8 |
| $2 \cdot (7 - 3)$ |  | 2XAns 8 |
| $2 - (-3)$ |  | 2 - (-3) 5 |
| $ -3 $ |  | $ -3 $ 3 |
| Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης |  ή  | $\frac{1}{4}$ |
| $9 - 6 : 2$ | Υπολογισμός και αποθήκευση  | $9 - 6 : 2 M +$ 6 |
| Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9 - 6 : 2) - 6 : (9 - 6 : 2)$ |  | $3 X M - 6 : M$ 17 |

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ 1°-89°

| Γωνία | ημω | συνω | εφω |
|-------|-------|-------|-------|
| 1° | 0,017 | 0,999 | 0,017 |
| 2° | 0,035 | 0,999 | 0,035 |
| 3° | 0,052 | 0,999 | 0,052 |
| 4° | 0,070 | 0,998 | 0,070 |
| 5° | 0,087 | 0,996 | 0,087 |
| 6° | 0,105 | 0,995 | 0,105 |
| 7° | 0,122 | 0,993 | 0,123 |
| 8° | 0,139 | 0,990 | 0,141 |
| 9° | 0,156 | 0,988 | 0,158 |
| 10° | 0,174 | 0,985 | 0,176 |
| 11° | 0,191 | 0,982 | 0,194 |
| 12° | 0,208 | 0,978 | 0,213 |
| 13° | 0,225 | 0,974 | 0,231 |
| 14° | 0,242 | 0,970 | 0,249 |
| 15° | 0,259 | 0,966 | 0,268 |
| 16° | 0,276 | 0,961 | 0,287 |
| 17° | 0,292 | 0,956 | 0,306 |
| 18° | 0,309 | 0,951 | 0,325 |
| 19° | 0,326 | 0,946 | 0,344 |
| 20° | 0,342 | 0,940 | 0,364 |
| 21° | 0,358 | 0,934 | 0,384 |
| 22° | 0,375 | 0,927 | 0,404 |
| 23° | 0,391 | 0,921 | 0,424 |
| 24° | 0,407 | 0,914 | 0,445 |
| 25° | 0,423 | 0,906 | 0,466 |
| 28° | 0,438 | 0,899 | 0,488 |
| 27° | 0,454 | 0,891 | 0,510 |
| 28° | 0,469 | 0,883 | 0,532 |
| 29° | 0,485 | 0,875 | 0,554 |
| 30° | 0,500 | 0,866 | 0,577 |
| 31° | 0,515 | 0,857 | 0,601 |
| 32° | 0,530 | 0,848 | 0,625 |
| 33° | 0,545 | 0,839 | 0,649 |
| 34° | 0,559 | 0,829 | 0,675 |
| 35° | 0,574 | 0,819 | 0,700 |
| 38° | 0,588 | 0,809 | 0,727 |
| 37° | 0,602 | 0,799 | 0,754 |
| 38° | 0,616 | 0,788 | 0,781 |
| 39° | 0,629 | 0,777 | 0,810 |
| 40° | 0,643 | 0,766 | 0,839 |
| 41° | 0,656 | 0,755 | 0,869 |
| 42° | 0,669 | 0,743 | 0,900 |
| 43° | 0,682 | 0,731 | 0,933 |
| 44° | 0,695 | 0,719 | 0,966 |
| 45° | 0,707 | 0,707 | 1,000 |

| Γωνία | ημω | συνω | εφω |
|-------|-------|-------|--------|
| 46° | 0,720 | 0,695 | 1,036 |
| 47° | 0,731 | 0,682 | 1,072 |
| 48° | 0,743 | 0,669 | 1,111 |
| 49° | 0,755 | 0,656 | 1,150 |
| 50° | 0,766 | 0,643 | 1,192 |
| 51° | 0,777 | 0,629 | 1,235 |
| 52° | 0,788 | 0,616 | 1,280 |
| 53° | 0,799 | 0,602 | 1,327 |
| 54° | 0,809 | 0,588 | 1,376 |
| 55° | 0,819 | 0,574 | 1,428 |
| 56° | 0,829 | 0,559 | 1,483 |
| 57° | 0,839 | 0,545 | 1,540 |
| 58° | 0,848 | 0,530 | 1,600 |
| 59° | 0,857 | 0,515 | 1,664 |
| 60° | 0,866 | 0,500 | 1,732 |
| 61° | 0,875 | 0,485 | 1,804 |
| 62° | 0,883 | 0,470 | 1,881 |
| 63° | 0,891 | 0,454 | 1,963 |
| 64° | 0,899 | 0,438 | 2,050 |
| 65° | 0,906 | 0,423 | 2,145 |
| 66° | 0,914 | 0,407 | 2,246 |
| 67° | 0,921 | 0,391 | 2,356 |
| 68° | 0,927 | 0,375 | 2,475 |
| 69° | 0,934 | 0,358 | 2,605 |
| 70° | 0,940 | 0,342 | 2,748 |
| 71° | 0,946 | 0,326 | 2,904 |
| 72° | 0,951 | 0,309 | 3,078 |
| 73° | 0,956 | 0,292 | 3,271 |
| 74° | 0,961 | 0,276 | 3,487 |
| 75° | 0,966 | 0,259 | 3,732 |
| 76° | 0,970 | 0,242 | 4,011 |
| 77° | 0,974 | 0,225 | 4,333 |
| 78° | 0,978 | 0,203 | 4,705 |
| 79° | 0,982 | 0,191 | 5,145 |
| 80° | 0,985 | 0,174 | 5,671 |
| 81° | 0,988 | 0,156 | 6,314 |
| 82° | 0,990 | 0,139 | 7,115 |
| 83° | 0,993 | 0,122 | 8,144 |
| 84° | 0,995 | 0,105 | 9,514 |
| 85° | 0,996 | 0,087 | 11,430 |
| 86° | 0,998 | 0,070 | 14,301 |
| 87° | 0,999 | 0,052 | 19,081 |
| 88° | 0,999 | 0,035 | 28,636 |
| 89° | 0,999 | 0,018 | 57,290 |

