ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

Μαθηματικά

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Μέρος Β'

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ Λυκείου Προσανατολισμού

Β΄ τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά
Α΄ Λυκείου Προσανατολισμού, Β΄ Τεύχος

Συγγραφή Α΄ έκδοσης: Αθανασίου Ανδρέας, Αντωνιάδης Μάριος, Γιασουμής Νικόλας, Έλληνα Αγγέλα, Λοϊζιάς Σωτήρης, Ματθαίου Κυριάκος, Μαυροκορδάτου Μερόπη, Μουσουλίδου – Νικολαΐδου Μαριλένα, Παπαγιάννης Κωνσταντίνος, Τιμοθέου Σάββας, Φιλίππου Ανδρέας

Συγγραφή Δ΄ έκδοσης: Λοϊζιάς Σωτήρης, Τιμοθέου Σάββας

Επιμέλεια: Πίκας Μάριος, Σαλονικίδης Ιωάννης

Συντονισμός: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*
Βίδρας Αλέκος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*

Εποπτεία: Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*
Χατζηχρίστου Χρυσούλα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*
Ιωάννου Ιωάννης, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Μεγάλεμος Ιωάννης, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*

Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Επιμέλεια έκδοσης: Ιωάννου-Άστρα Μαρίνα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ έκδοση 2013
Β΄ έκδοση 2014
Γ΄ έκδοση 2016
Δ΄ Έκδοση 2020

Εκτύπωση:

ISBN: 978-9963-54-270-3

50%

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε δύο τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Α΄ Λυκείου», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Στην αρχή κάθε ενότητας γίνεται παράθεση των στόχων και οι μαθητές/τριες προϊδεάζονται ως προς το τι «θα μάθουμε». Ακολουθεί, στο «Έχουμε μάθει …», η παρουσίαση της αναγκαίας προϋπάρχουσας γνώσης που οι μαθητές/τριες πρέπει να διαθέτουν, κάτι που βοηθά τους/τις εκπαιδευτικούς στον καταρτισμό καλύτερης διαγνωστικής και διαμορφωτικής αξιολόγησης. Στη συνέχεια, οι νέες μαθηματικές έννοιες διερευνώνται με τρόπο που υποκινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών/τριών, όπως ορίζουν οι αρχές των Εκσυγχρονισμένων Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών. Η προσπάθεια κλιμακώνεται με παραδείγματα και διαβαθμισμένες δραστηριότητες, με έμφαση στη λύση προβλήματος και στην ανάδειξη της τεχνολογίας ως αναπόσπαστου μέρους της Μαθηματικής εκπαίδευσης.

Όλες οι εκδόσεις για τα Μαθηματικά των τελευταίων χρόνων βρίσκονται υπό συνεχή αξιολόγηση, διαμόρφωση και βελτίωση στη βάση της ανατροφοδότησης και των παρατηρήσεων που προέρχονται και από τους/τις μάχιμους/ες καθηγητές/τριες των Μαθηματικών. Αναμένω από τους διδάσκοντες/ουσες να εκφράσουν τις απόψεις τους και να υποβάλουν τις εισηγήσεις τους, τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο του βιβλίου και το επίπεδο των ασκήσεων και δραστηριοτήτων όσο και σε σχέση με τον τρόπο προσέγγισης της ύλης.

Όλο το υλικό που παράγεται για το μάθημα των Μαθηματικών αποσκοπεί στη βοήθεια τόσο των μαθητών/τριών, όσο και των καθηγητών/τριών, στην πορεία τους μέσα από τα Εκσυγχρονισμένα Αναλυτικά Προγράμματα, με στόχο το καλύτερο αποτέλεσμα. Είναι εμποτισμένο με τον σύγχρονο τρόπο σκέψης και προσηλωμένο στην προαγωγή και στην ανάδειξη των βασικών δεξιοτήτων των μαθητών/τριών μας, που αποτελεί πρώτιστο μέλημά μας. Η προσπάθεια συνεχίζεται και οι προοπτικές είναι λαμπρές.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τον κύριο Κωνσταντίνο Χρίστου, Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Δρ Κυπριανός Δ. Λούης

Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 05

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ – ΕΥΘΕΙΑ

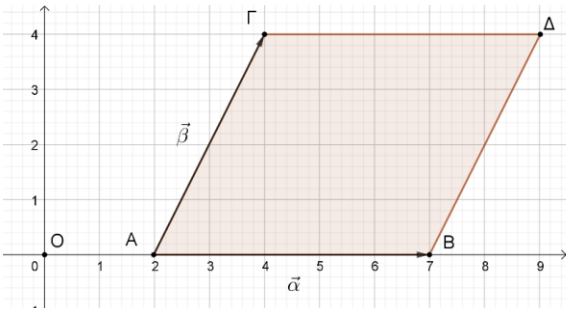
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

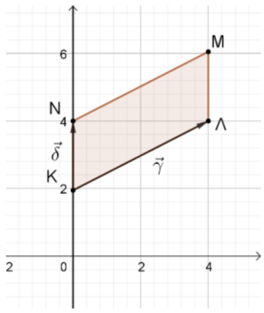
5.1 ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

5.1.1 Ορίζουσες 2×2

Διερεύνηση

Στα πιο κάτω σχήματα παρουσιάζονται τα παραλληλόγραμμα $ΑΒΓΔ$ και $ΚΛΜΝ$.





(α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του $ΑΒΓΔ$ είναι 20 τ.μ. και του $ΚΛΜΝ$ είναι 8 τ.μ.

(β) Οι διανυσματικές ακτίνες των $\overrightarrow{ΟΑ}$, $\overrightarrow{ΟΒ}$ και $\overrightarrow{ΟΓ}$ είναι:

$$\overrightarrow{ΟΑ} = \binom{2}{0},\quad \overrightarrow{ΟΒ} = \binom{7}{0} \text{ και } \overrightarrow{ΟΓ} = \binom{4}{4}$$

Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι:

$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{ΑΒ} = \binom{5}{0} \text{ και } \vec{\beta} = \overrightarrow{ΑΓ} = \binom{2}{4}$$

(γ) Τοποθετούμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΓ}$ σε μια ορθογώνια διάταξη, όπως πιο κάτω:

$$Δ = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Στη συνέχεια, βρίσκουμε το γινόμενο των στοιχείων της πρώτης διαγωνίου και αφαιρούμε το γινόμενο των στοιχείων της δεύτερης διαγωνίου. Τι παρατηρείται;

(δ) Επαναλάβετε τα ίδια βήματα για το παραλληλόγραμμο $ΚΛΜΝ$. Τι παρατηρείτε;

Ορισμός

Κάθε ορθογώνια διάταξη αντικειμένων σε γραμμές και στήλες ονομάζεται **πίνακας**. Τα αντικείμενα ονομάζονται **στοιχεία** του πίνακα. Αν ο αριθμός των γραμμών και των στηλών σε έναν πίνακα είναι ίσος, τότε ο πίνακας αυτός ονομάζεται **τετραγωνικός.**

Για παράδειγμα:

- *Ο πίνακας* $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{pmatrix}$ *αποτελείται από δύο γραμμές και τρεις στήλες και ονομάζεται πίνακας* 2×3.
- *Ο πίνακας* $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix}$ *αποτελείται από τρεις γραμμές και τρεις στήλες και ονομάζεται τετραγωνικός πίνακας* 3×3.

- *Οι πίνακες* $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix}$ *και* $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 8 & 3 & 9\\ 6 & 7 & 2\end{pmatrix}$ *είναι δύο τετραγωνικοί πίνακες* 2×2 *και* 3×3*, αντίστοιχα.*

Ορίζουσα ενός τετραγωνικού 2×2 πίνακα $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ συμβολίζεται με $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$ ή $|A|$ ή $\det(A)$. Το ανάπτυγμα της ορίζουσας ισούται με $\alpha\delta-\beta\gamma$.
Δηλαδή, αν $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, τότε $|A|=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma$.

Για παράδειγμα:

- $\begin{vmatrix}3 & 5\\ 7 & 9\end{vmatrix}=3\cdot 9-5\cdot 7=-8$
- *Αν* $M=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 10 & 12\end{pmatrix}$ *είναι ένας τετραγωνικός* 2×2 *πίνακας, τότε η ορίζουσα του πίνακα* M *ισούται με:*

$$\det(M)=(-2)12-(-1)10=-24+10=-14$$

(Αντί $\det(M)$*, μπορούμε να γράψουμε επίσης* $|M|$ *ή* $\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 10 & 12\end{vmatrix}$*.)*

- *Σε μη τετραγωνικό πίνακα δεν ορίζεται ορίζουσα.*

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix}-3 & -9\\ 4 & 11\end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix}3+\sqrt{5} & -2\\ 4 & 3-\sqrt{5}\end{vmatrix}$ (γ) $\begin{vmatrix}a-3 & -9\\ -1 & a+3\end{vmatrix}$

Λύση

(α) $\begin{vmatrix}-3 & -9\\ 4 & 11\end{vmatrix}=(-3)11-(-9)4=-33+36=3$

(β) $\begin{vmatrix}3+\sqrt{5} & -2\\ 4 & 3-\sqrt{5}\end{vmatrix}=\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)-(-2)4=9-5+8=12$

(γ) $\begin{vmatrix}a-3 & 9\\ -1 & a+3\end{vmatrix}=(a-3)(a+3)-9(-1)=a^2-9+9=a^2$

Παράδειγμα 2

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix}x-2 & x\\ 2 & x+3\end{vmatrix}=0$$

Λύση

Είναι:

$$\begin{vmatrix}x-2 & x\\ 2 & x+3\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3)-2x=0 \Leftrightarrow x^2-x-6=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=-2$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{6} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$ (γ) $\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$

(δ) $\begin{vmatrix} \lambda - 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2 \end{vmatrix}$ (ε) $\begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{vmatrix}$ (στ) $\begin{vmatrix} a + \beta & 4a \\ \beta & a + \beta \end{vmatrix}$

2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντηση σας.

(α)	Υπάρχει τουλάχιστον ένας τετραγωνικός $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ πίνακας με ορίζουσα ίση με μηδέν.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν $A = \begin{pmatrix} \kappa + \lambda & \kappa \\ \kappa & \kappa - \lambda \end{pmatrix}$, τότε $\lvert A \rvert = 2\kappa^2 - \lambda^2$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\delta & -\gamma \\ -\beta & -a \end{vmatrix}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Αν $\begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 10$, να υπολογίσετε τις πιο κάτω ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix} a & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ a & \beta \end{vmatrix}$ (γ) $\begin{vmatrix} a & 8\beta \\ \gamma & 8\delta \end{vmatrix}$

Τι παρατηρείτε;

4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 9 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

5.1.2 Ορίζουσες 3×3

Ορισμός

Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού 3×3 πίνακα $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix}$ συμβολίζεται με $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$ ή με $|A|$ ή με $\det(A)$.

Το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας 3×3 υπολογίζεται με δύο τρόπους:

1) Με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε γραμμής ή μιας οποιασδήποτε στήλης της.
2) Με τον κανόνα του **Sarrus**.

- **Ανάπτυξη κατά τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε γραμμής ή μιας οποιασδήποτε στήλης**

  Μπορούμε να αναπτύξουμε μια ορίζουσα 3×3 κατά τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε γραμμής ή μιας οποιασδήποτε στήλης. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε στοιχείο της ορίζουσας συνοδεύεται από ένα πρόσημο $+$ ή $-$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

  Αν θέλω να αναπτύξω την ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix}$ κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του, το ανάπτυγμα θα είναι:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = +\alpha \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \theta & \iota \end{vmatrix} - \beta \cdot \begin{vmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \iota \end{vmatrix} + \gamma \cdot \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{vmatrix}$$

  Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \end{vmatrix}$ *με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής ή της 2ης στήλης, τότε:*

  - *Ανάπτυξη κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 2(1 \cdot 2 - 6 \cdot 9) - 3(4 \cdot 2 - 6 \cdot 7) + 5(4 \cdot 9 - 1 \cdot 7)$$
$$= 2(2 - 54) - 3(8 - 42) + 5(36 - 7) = 2(-52) - 3(-34) + 5(29)$$
$$= -104 + 102 + 145 = 143$$

➢ *Ανάπτυξη κατά τα στοιχεία της $2^{ης}$ στήλης:*

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \end{vmatrix} &= -3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 9\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\
&= -3(4\cdot2-6\cdot7)+1(2\cdot2-5\cdot7)-9(2\cdot6-5\cdot4) \\
&= -3(8-42)+1(4-35)-9(12-20) \\
&= -3(-34)+1(-31)-9(-8) \\
&= 102-31+72=143
\end{aligned}
$$

- **Ανάπτυξη με τον κανόνα του Sarrus**

  Για να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας 3×3 ακολουθούμε την πιο κάτω διαδικασία:

  Γράφουμε ξανά τις δύο πρώτες στήλες στα δεξιά της ορίζουσας. Σχηματίζουμε όλα τα γινόμενα ανά τρεις αριθμούς, με τα αντίστοιχα πρόσημα, όπως δείχνουν τα βέλη πιο κάτω.

$$
\left|\begin{matrix} \overbrace{\alpha}^{(+)} & \overbrace{\beta}^{(+)} & \overbrace{\gamma}^{(+)} \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \underbrace{\eta}_{(-)} & \underbrace{\theta}_{(-)} & \underbrace{\iota}_{(-)} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{matrix} = \alpha\varepsilon\iota+\beta\zeta\eta+\gamma\delta\theta-\eta\varepsilon\gamma-\theta\zeta\alpha-\iota\delta\beta
$$

Για παράδειγμα:

$$
\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{matrix} = 2\cdot1\cdot2+3\cdot6\cdot7+5\cdot4\cdot9-7\cdot1\cdot5-9\cdot6\cdot2-2\cdot4\cdot3=143
$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας

$$
\begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 11 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix},
$$

(α) αναπτύσσοντάς την κατά τα στοιχεία της $1^{ης}$ γραμμής

(β) αναπτύσσοντας την κατά τα στοιχεία της $3^{ης}$ στήλης

(γ) εφαρμόζοντας τον κανόνα του Sarrus.

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 11 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} &= 10\cdot\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 11 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 10\big(0-(-11)\big)-3\big(0-(-22)\big)+5\big(1-(-8)\big) \\
&= 10\cdot11-3\cdot22+5\cdot9=110-66+45=89
\end{aligned}
$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 11 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 11 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \cdot 9 - 11 \cdot (-4) = 45 + 44 = 89$$

(γ) Έχουμε ότι:

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 11 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 10 & 3 \\ -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{matrix} =$$

$$= 10 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 11(-2) + 5(-1)(-1) - 5 \cdot 4(-2) - 10 \cdot 11(-1) - 3(-1)0 = 89$$

Παράδειγμα 2

Να αποδείξετε την πιο κάτω ισότητα:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-\beta & \beta & \gamma \\ \delta-\varepsilon & \varepsilon & \zeta \\ \eta-\theta & \theta & \iota \end{vmatrix}$$

Λύση

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$ κατά τα στοιχεία της 1ης στήλης έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \theta & \iota \end{vmatrix} - \delta \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \theta & \iota \end{vmatrix} + \eta \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \varepsilon & \zeta \end{vmatrix} = \alpha(\varepsilon\iota - \zeta\theta) - \delta(\beta\iota - \gamma\theta) = +\eta(\beta\zeta - \gamma\varepsilon)$$

$$= \alpha\varepsilon\iota - \alpha\zeta\theta - \delta\beta\iota + \delta\gamma\theta + \eta\beta\zeta - \eta\gamma\varepsilon$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha-\beta & \beta & \gamma \\ \delta-\varepsilon & \varepsilon & \zeta \\ \eta-\theta & \theta & \iota \end{vmatrix}$ κατά τα στοιχεία της 1ης στήλης έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \alpha-\beta & \beta & \gamma \\ \delta-\varepsilon & \varepsilon & \zeta \\ \eta-\theta & \theta & \iota \end{vmatrix} = (\alpha-\beta) \begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \theta & \iota \end{vmatrix} - (\delta-\varepsilon) \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \theta & \iota \end{vmatrix} + (\eta-\theta) \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \varepsilon & \zeta \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (\alpha-\beta)(\varepsilon\iota - \zeta\theta) - (\delta-\varepsilon)(\beta\iota - \gamma\theta) + (\eta-\theta)(\beta\zeta - \gamma\varepsilon) \\ &= (\alpha\varepsilon\iota - \alpha\zeta\theta - \beta\varepsilon\iota + \beta\zeta\theta) - (\delta\beta\iota - \delta\gamma\theta - \varepsilon\beta\iota + \varepsilon\gamma\theta) + \\ &\quad +(\eta\beta\zeta - \eta\gamma\varepsilon - \theta\beta\zeta + \theta\gamma\varepsilon) \\ &= \alpha\varepsilon\iota - \alpha\zeta\theta - \delta\beta\iota + \delta\gamma\theta + \eta\beta\zeta - \eta\gamma\varepsilon \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε ότι:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-\beta & \beta & \gamma \\ \delta-\varepsilon & \varepsilon & \zeta \\ \eta-\theta & \theta & \iota \end{vmatrix}$$

Δραστηριότητες

1. (α) Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ είναι ένας τετραγωνικός 3×3 πίνακας, να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσα της:
   i. αναπτύσσοντάς την κατά τα στοιχεία της 1ης στήλης
   ii. αναπτύσσοντάς την κατά τα στοιχεία της 2ης στήλης.

   (β) Αν $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ είναι ένας τετραγωνικός 3×3 πίνακας, να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσάς του, αφού πρώτα επιλέξετε «κατάλληλη» γραμμή ή στήλη για να την αναπτύξετε.

2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντηση σας.

(α)	Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, τότε η ορίζουσα του είναι $\|A\| = 14$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, τότε η ορίζουσα του είναι $\|A\| = 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \varepsilon & \zeta \\ 0 & 0 & \iota \end{vmatrix} = \alpha\varepsilon\iota$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω οριζουσών:

   (α) $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \\ 11 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} -19 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 11 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

   (γ) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 11 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ (δ) $\begin{vmatrix} 3 & 2^{100} & 3^{200} \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Έχουμε μάθει ...

- Να ορίζουμε την κλίση ευθείας.
  - Όταν δίνεται η εξίσωση της ευθείας $y = \alpha x + \beta$, η κλίση είναι $\lambda = \alpha$.
  - Όταν δίνονται δύο σημεία της ευθείας με συντεταγμένες $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε η κλίση της ευθείας AB είναι ίση με:

    $$\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

    Αν $x_1 = x_2$, τότε δεν ορίζεται η κλίση της ευθείας AB.

- Να ορίζουμε θετική και αρνητική φορά γωνίας, η οποία βρίσκεται σε κανονική θέση.

- Να ορίζουμε:
  - τη γωνία ω που σχηματίζει μία ευθεία με τον άξονα των τετμημένων ως τη θετική κυρτή γωνία με αρχική πλευρά τον άξονα των τετμημένων και
  - την κλίση της ευθείας (ε) ως $\lambda_\varepsilon = \text{εφ}\omega,\ 0° \leq \widehat{\omega} < 180°,\ \widehat{\omega} \neq 90°$. Αν $\widehat{\omega} = 90°$, τότε η κλίση της ευθείας (ε) δεν ορίζεται.

- Να βρίσκουμε την εξίσωση ευθείας, όταν δίνεται η κλίση και ένα σημείο της ή όταν δίνονται δύο σημεία της ευθείας.

- Να υπολογίζουμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων A, B και τις συντεταγμένες του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος AB.

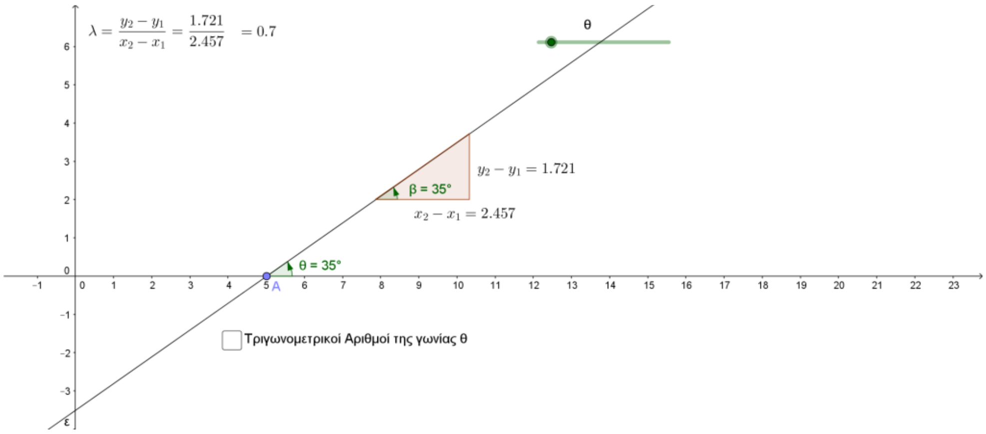
- Να εξετάζουμε τις σχετικές θέσεις δύο ευθειών και να αποφασίζουμε πότε είναι κάθετες μεταξύ τους.

- Να επιλύουμε συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, αλγεβρικά (με τη μέθοδο της αντικατάστασης και τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών) και γραφικά.

5.2 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«ALyk_En05_KlisiEftheias.ggb»*.



Δίνεται μια ευθεία (ε), η οποία τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο A.
Να επιλέξετε τον *«δρομέα θ»* και να του δώσετε διάφορες τιμές.

(α) Ποια είναι η αρχική και ποια είναι η τελική πλευρά της γωνίας θ;

(β) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η γωνία θ;

(γ) Ποια είναι η σχέση που συνδέει τις γωνίες θ και β;

(δ) Ποια είναι η τιμή της κλίσης $\lambda_{(\varepsilon)}$ της ευθείας (ε), όταν:

i. $\theta = 0°$

ii. $\theta = 45°$

iii. $\theta = 90°$

iv. $\theta = 135°$

(ε) Με ποιον τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας θ σχετίζεται η κλίση $\lambda_{(\varepsilon)}$ της ευθείας (ε) και με ποιο τρόπο;

(στ) Να μετακινήσετε το σημείο A σε διάφορες θέσεις και να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία.

Πρόταση

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία A και B, με συντεταγμένες $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, έχει εξίσωση

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

ή

$$y - y_1 = \lambda(x - x_1),$$

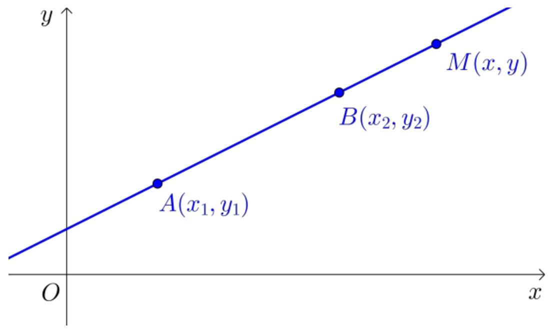
όπου λ είναι η κλίση της ευθείας AB.

Στην περίπτωση που $x_1 = x_2$, τότε η ευθεία AB έχει εξίσωση $x = x_1$.

Απόδειξη

Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, και είναι διαφορετικό από τα A και B. Αν $x_1 \neq x_2$, οι κλίσεις των AM και AB ορίζονται και είναι ίσες μεταξύ τους. Επομένως, έχουμε:

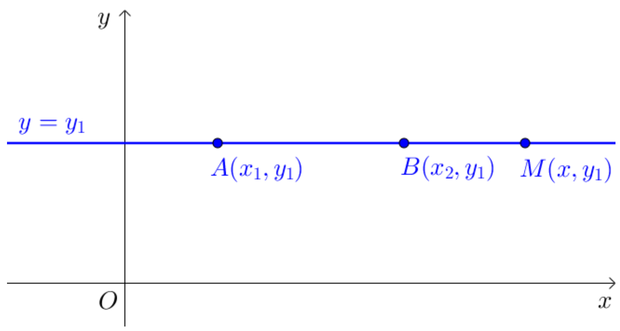
$$\lambda_{AM} = \lambda_{AB} \Leftrightarrow \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow y-y_1 = \lambda(x-x_1)$$



Παρατηρήσεις

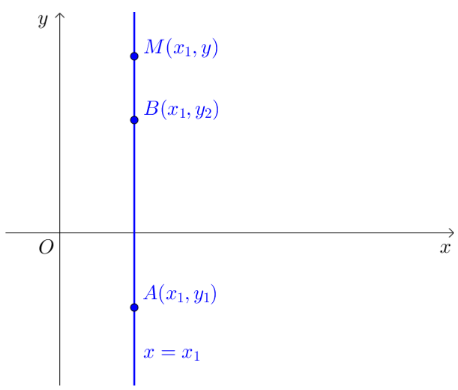
- Αν $y_1 = y_2$, $x_1 \neq x_2$ και $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της ευθείας, τότε οι κλίσεις των AM και AB ορίζονται και είναι ίσες με μηδέν. Επομένως, έχουμε:

$$\lambda_{AM} = \frac{y-y_1}{x-x_1} = 0 \Leftrightarrow y = y_1$$



- Αν $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ και $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της ευθείας, τότε η κλίση της AB δεν ορίζεται. Επομένως, δεν ορίζεται η κλίση της AM $\left(\lambda_{AM} = \frac{y-y_1}{x-x_1}\right)$, δηλαδή:

$$x - x_1 = 0 \Leftrightarrow x = x_1$$



Παράδειγμα 1

Δίνονται τα σημεία $A(-2,3)$, $B(2,-5)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

Λύση

Η ευθεία AB έχει εξίσωση

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

με $A(-2,3)$ και $B(2,-5)$. Άρα:

$$\frac{y-3}{x-(-2)}=\frac{-5-3}{2-(-2)} \Leftrightarrow \frac{y-3}{x+2}=-2 \Leftrightarrow y-3=-2(x+2) \Leftrightarrow y=-2x-1$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία:

(α) διέρχεται από το σημείο $A(2,-1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-2$

(β) διέρχεται από το σημείο $A(0,3)$ και σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία 120°.

Λύση

(α) Χρησιμοποιούμε την εξίσωση $y-y_1=\lambda(x-x_1)$. Η κλίση είναι $\lambda=-2$ και το σημείο, από το οποίο διέρχεται είναι το $A(2,-1)$. Αντικαθιστώντας, έχουμε:

$$y-(-1)=-2(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+3$$

(β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας είναι:

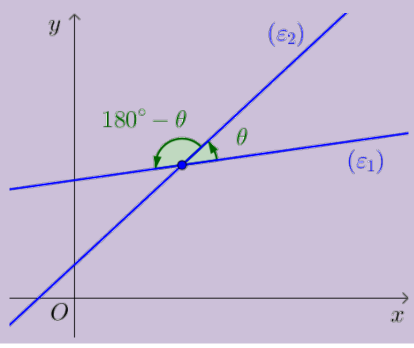
$$\lambda=\text{εφ}120^{\circ}=\text{εφ}(90^{\circ}+30^{\circ})=-\text{σφ}30^{\circ}=-\sqrt{3}$$

Επομένως, η εξίσωσή της είναι:

$$y-3=-\sqrt{3}(x-0) \Leftrightarrow y=-\sqrt{3}x+3$$

Ορισμός (Γωνία δύο ευθειών)

Γωνία δύο ευθειών (ε_1) και (ε_2) ονομάζεται η θετική κυρτή γωνία με αρχική πλευρά την ευθεία (ε_1) και τελική πλευρά την ευθεία (ε_2) ή με αρχική πλευρά την ευθεία (ε_2) και τελική πλευρά την ευθεία (ε_1).



Παρατηρήσεις

- Από τον ορισμό προκύπτει ότι όταν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) δεν είναι κάθετες μεταξύ τους, τότε σχηματίζονται δύο παραπληρωματικές γωνίες, η μια οξεία και η άλλη αμβλεία.
- Αν οι ευθείες συμπίπτουν (ταυτίζονται), τότε η γωνία μεταξύ τους είναι 0° ή 180°.

Πρόταση

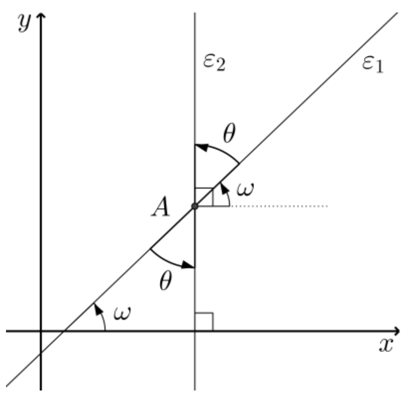
Αν θ είναι η γωνία δύο μη παράλληλων ή κάθετων ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ με αρχική πλευρά την (ε_1) και τελική πλευρά την (ε_2), οι οποίες έχουν κλίσεις $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, αντίστοιχα, και δεν είναι παράλληλες με τον άξονα των τεταγμένων, τότε ισχύει:

$$\text{εφ}\theta = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \lambda_2}$$

Παρατηρήσεις

- Αν οι δύο ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι παράλληλες, τότε δεν σχηματίζεται γωνία μεταξύ τους.
- Αν οι δύο ευθείες είναι κάθετες, τότε η γωνία μεταξύ τους είναι 90° και ισχύει η σχέση $\lambda_1\lambda_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$.
- Στην ειδική περίπτωση των δύο κάθετων μεταξύ τους ευθειών οι οποίες έχουν εξισώσεις $x = a$ και $y = \beta, (a, \beta \in \mathbb{R})$, δεν ισχύει η σχέση $\lambda_1\lambda_2 + 1 = 0$.
- Αν η μία από τις δύο ευθείες (π.χ. η (ε_2)) είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων (λ_2 δεν ορίζεται) και για την ευθεία ε_1 γνωρίζουμε ότι $\lambda_1 = \text{εφ}\omega > 0$, τότε για την οξεία γωνία θ των δύο ευθειών ισχύει:

$$\text{εφ}\theta = \frac{1}{\lambda_1}, \quad \lambda_1 > 0$$



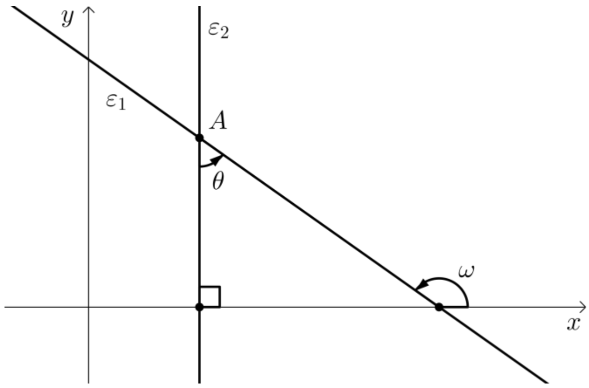
Απόδειξη

Έχουμε

$$\theta + \omega = 90^{\circ} \Rightarrow \theta = 90^{\circ} - \omega \Rightarrow \text{εφ}\theta = \text{εφ}(90^{\circ} - \omega) \Rightarrow \text{εφ}\theta = \text{σφ}\omega = \frac{1}{\text{εφ}\omega} = \frac{1}{\lambda_1}$$

- Αν η μία από τις δύο ευθείες (π.χ. η (ε_2)) είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων (λ_2 δεν ορίζεται) και για την ευθεία ε_1 γνωρίζουμε ότι $\lambda_1 = \text{εφ}\omega < 0$, τότε για την οξεία γωνία θ των δύο ευθειών ισχύει:

$$\text{εφ}\theta = -\frac{1}{\lambda_1}, \quad \lambda_1 < 0$$



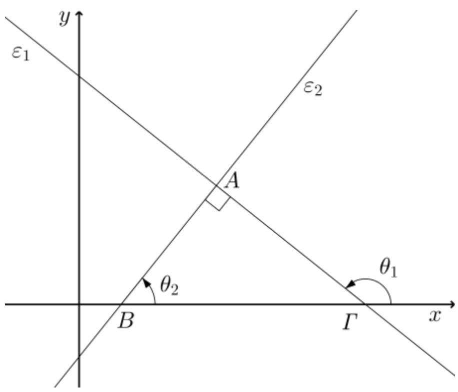
Η απόδειξη να γίνει από τους μαθητές.

Παράδειγμα 3

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1){:}\, y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $(\varepsilon_2){:}\, y = \lambda_2 x + \beta_2$ με $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ είναι κάθετες αν και μόνον αν $\lambda_1\lambda_2 = -1$.

Λύση

Οι ευθείες $(\varepsilon_1){:}\, y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $(\varepsilon_2){:}\, y = \lambda_2 x + \beta_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους και σχηματίζουν προσανατολισμένες γωνίες με τον άξονα των τετμημένων θ_1 και θ_2, αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Ισχύει ότι $\theta_1 = 90^\circ + \theta_2$, αφού η θ_1 είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

Επομένως:

$$\theta_1 = 90^\circ + \theta_2 \Rightarrow \text{εφ}\theta_1 = \text{εφ}(90^\circ + \theta_2) = -\text{σφ}\theta_2 = -\frac{1}{\text{εφ}\theta_2} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$$

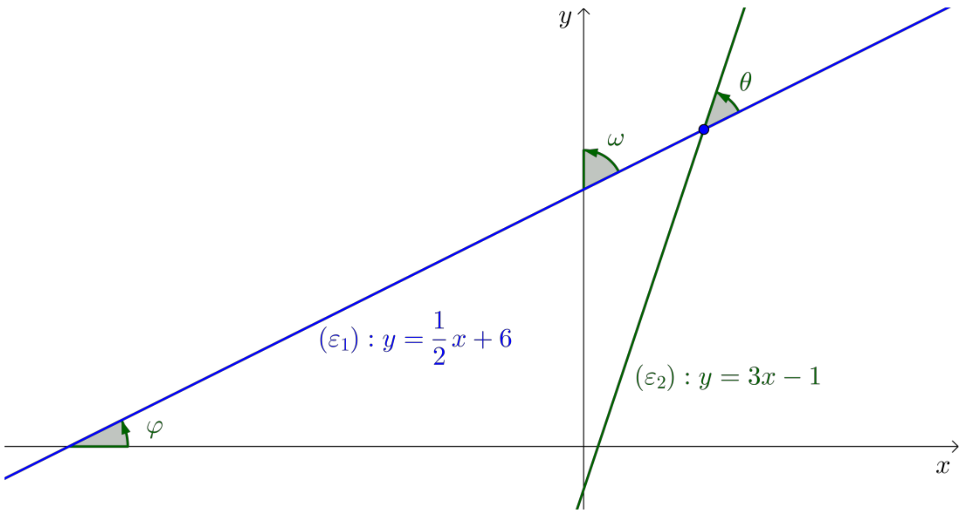
Αντίστροφα, αν ισχύει $\lambda_1\lambda_2 = -1$, τότε:

$$\varepsilon\varphi\theta_1 \cdot \varepsilon\varphi\theta_2 = -1 \Longrightarrow \varepsilon\varphi\theta_1 = -\frac{1}{\varepsilon\varphi\theta_2} = -\sigma\varphi\theta_2 \Longrightarrow \varepsilon\varphi\theta_1 = \varepsilon\varphi\left(90^{\circ}+\theta_2\right)$$

Επιπλέον, αφού $0^{\circ} < \theta_1 < 180^{\circ}, 0^{\circ} < \theta_2 < 180^{\circ}$, τότε $\theta_1 = 90^{\circ} + \theta_2$.
Επομένως, οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

Παράδειγμα 4

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1)\colon y = \frac{1}{2}x + 6$ και $(\varepsilon_2)\colon y = 3x - 1$.



(α) Να υπολογίσετε την οξεία γωνία θ των δύο ευθειών.

(β) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες ω και φ που σχηματίζει η ευθεία (ε_1) με τους δύο άξονες.

(γ) Αν $(\varepsilon_3)\colon y = -2x + 1$, να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_3) και (ε_2).

Λύση

(α) Αν θ είναι η οξεία γωνία των δύο ευθειών, τότε ισχύει

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2},$$

όπου $\lambda_2 = 3$ και $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

Επομένως, έχουμε ότι:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1 \Longrightarrow \theta = 45^{\circ}$$

(β) Αν ω είναι η οξεία γωνία μεταξύ της (ε_1) και του άξονα των τεταγμένων, μπορούμε να την υπολογίσουμε από τον τύπο

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{\lambda_1},\ \ \lambda_1 > 0,$$

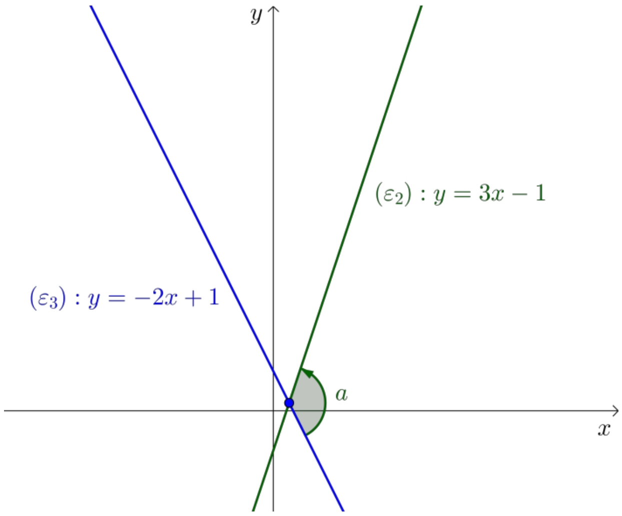
αφού δεν ορίζεται η κλίση της ευθείας $x = 0$. Επομένως:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Longrightarrow \omega = 63{,}4° \qquad \textit{(σε 1 δεκαδικό ψηφίο)}$$

Για την οξεία γωνία μεταξύ της (ε_1) και του άξονα των τετμημένων, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \lambda_1 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \varphi = 26{,}6° \qquad \textit{(σε 1 δεκαδικό ψηφίο)}$$

(γ) Έστω a είναι η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_3) και (ε_2).



Είναι:

$$\varepsilon\varphi a = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{1 + \lambda_2\lambda_3} = \frac{3 - (-2)}{1 + 3(-2)} = \frac{5}{-5} = -1$$

Αφού $0° \leq a < 180°$, συμπεραίνουμε ότι $a = 135°$.

Παράδειγμα 5

Να υπολογίσετε την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες (ε_1): $(2\mu + 1)x - 3\mu y - 2 = 0$ και (ε_2): $3\mu x + (\mu + 2)y + 1 = 0$ να είναι κάθετες.

Λύση

Οι κλίσεις των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι

$$\lambda_1 = \frac{2\mu + 1}{3\mu},\ \ \mu \neq 0$$

και

$$\lambda_2 = -\frac{3\mu}{\mu + 2},\ \ \mu \neq -2$$

αντίστοιχα.

Για $\mu \neq 0$ και $\mu \neq -2$, οι ευθείες είναι κάθετες, όταν ισχύει $\lambda_1\lambda_2 = -1$. Επομένως:

$$\lambda_1\lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{2\mu+1}{3\mu}\right)\cdot\left(-\frac{3\mu}{\mu+2}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{2\mu+1}{\mu+2} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$$

Ακολούθως, εξετάζουμε χωριστά τι συμβαίνει στην περίπτωση που $\mu = 0$ και $\mu = -2$.

- Αν $\mu = 0$, οι ευθείες έχουν εξισώσεις $(\varepsilon_1): x - 2 = 0$ και $(\varepsilon_2): 2y + 1 = 0$. Επομένως, οι δύο ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους.
- Αν $\mu = -2$, οι ευθείες έχουν εξισώσεις $(\varepsilon_1): -3x + 6y - 2 = 0$ και $(\varepsilon_2): -6x + 1 = 0$. Επομένως, οι δύο ευθείες δεν είναι κάθετες μεταξύ τους.

  Οι ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους, όταν $\mu = 1$ ή $\mu = 0$.

Παράδειγμα 6

Δίνεται η ευθεία (ε_1) με εξίσωση $x + 2y = 4$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία είναι:

(α) συμμετρική της (ε_1) ως προς τον άξονα των τετμημένων

(β) συμμετρική της (ε_1) ως προς τον άξονα των τεταγμένων.

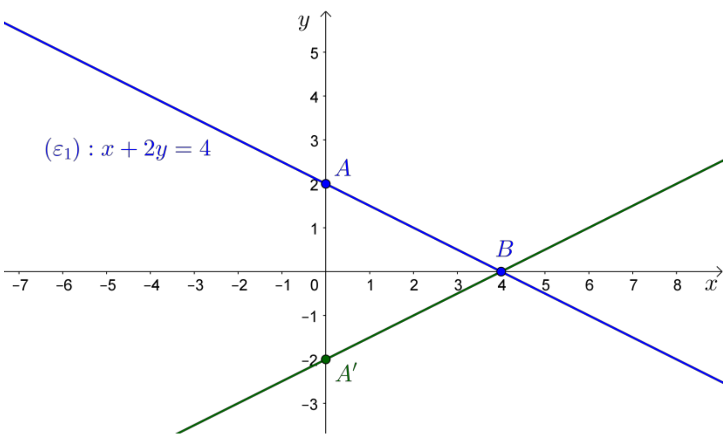
Λύση

(α) Για να βρούμε τη συμμετρική ευθεία της (ε_1) ως προς τον άξονα των τετμημένων $(y = 0)$, αρκεί να βρούμε δύο σημεία της ζητούμενης ευθείας. Παίρνουμε δύο σημεία της ευθείας (ε_1) και στη συνέχεια υπολογίζουμε τα συμμετρικά τους ως προς τον άξονα των τετμημένων.

Έστω τα σημεία $A(0,2)$ και $B(4,0)$, τα οποία ανήκουν στην $(\varepsilon_1): x + 2y = 4$. Τα αντίστοιχα συμμετρικά σημεία των A και B είναι τα $A'(0,-2)$ και $B'(4,0)$ (το B' συμπίπτει με το B, γιατί ανήκει στον άξονα συμμετρίας). Άρα, η συμμετρική ευθεία της (ε_1) ως προς τον άξονα των τετμημένων διέρχεται από τα σημεία $A'(0,-2)$ και $B(4,0)$. Αν η ζητούμενη ευθεία $A'B$ έχει εξίσωση $y = \lambda_1 x + \beta_1$, τότε έχουμε

$$\lambda_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-2)}{4-0} = \frac{1}{2}$$

και $\beta_1 = -2$. Επομένως, η ευθεία έχει εξίσωση $y = \frac{1}{2}x - 2$.

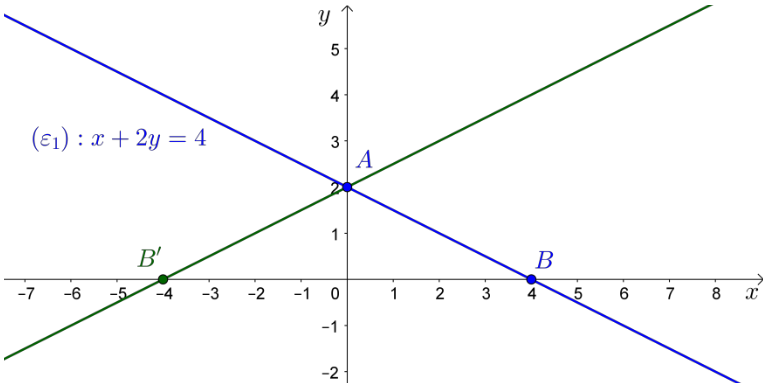


(β) Για να βρούμε τη συμμετρική ευθεία της (ε_1) ως προς τον άξονα των τεταγμένων $(x = 0)$, αρκεί να βρούμε δύο σημεία της ζητούμενης ευθείας. Παίρνουμε δύο σημεία της ευθείας (ε_1) και στη συνέχεια υπολογίζουμε τα συμμετρικά τους ως προς τον άξονα των τεταγμένων.

Έστω τα σημεία $A(0,2)$ και $B(4,0)$, τα οποία ανήκουν στην (ε_1): $x + 2y = 4$. Τα αντίστοιχα συμμετρικά σημεία των A και B είναι τα $A'(0,2)$ και $B'(-4,0)$ (το A' συμπίπτει με το A, γιατί ανήκει στον άξονα συμμετρίας). Άρα, η συμμετρική ευθεία της (ε_1) ως προς τον άξονα των τεταγμένων διέρχεται από τα σημεία $A'(0,2)$ και $B(-4,0)$. Αν η ζητούμενη ευθεία $A'B$ έχει εξίσωση $y = \lambda_2 x + \beta_2$, τότε έχουμε

$$\lambda_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{-4 - 0} = \frac{1}{2}$$

και $\beta_2 = 2$. Επομένως, η ευθεία έχει εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + 2$.



Δραστηριότητες

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία:
   (α) διέρχεται από τα σημεία $A(-1,3)$ και $B(1,0)$
   (β) διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(-2,3)$ και $\Delta(-2,6)$
   (γ) διέρχεται από τα σημεία $E(-4,3)$ και $Z(5,3)$.

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2,2)$ και σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{6}$ με τον άξονα των τετμημένων.

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2,5)$ και:
   (α) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$
   (β) σχηματίζει γωνία $135°$ με τον άξονα των τετμημένων
   (γ) είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 5x - 2$.

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία:
   (α) διέρχεται από το σημείο $A(-1,3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x + 3y = 1$
   (β) διέρχεται από το σημείο $B(1,0)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $3x - 5y = 10$.

5. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB, όταν $A(0,9)$ και $B(2,-3)$.

6. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(2,7)$ και $\Gamma(2,3)$.
   (α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$.
   (β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η καθεμία από τις πιο πάνω ευθείες με τον άξονα των τετμημένων.

7. Να εξετάσετε κατά πόσο οι ευθείες (ε_1): $y = 4x - 1$ και (ε_2): $8y + 2x - 1 = 0$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

8. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(5,0)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $4x + 3y - 2 = 0$.

9. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες (ε_1): $(\kappa+1)x - \kappa y - 4 = 0$ και (ε_2): $2\kappa x + (\kappa+4)y + 1 = 0$ να είναι κάθετες.

10. Να υπολογίσετε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $ax - 3y = 10$ να είναι κάθετη στην ευθεία $y = 2x - 1$.

11. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-1,2)$, $B(4,5)$ και $\Gamma(6,-1)$.

12. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες:
    (α) $(\varepsilon_1): y = 3x + 1$ και $(\varepsilon_2): y = -2x + 1$
    (β) $(\varepsilon_1): y = 3x + 1$ και $(\varepsilon_2): y = 3$
    (γ) $(\varepsilon_1): y = 3x + 1$ και $(\varepsilon_2): x = -2$
    (δ) $(\varepsilon_1): y = -3x + 1$ και $(\varepsilon_2): 2x - y = 6$

13. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = -2x + 2$ και $(\varepsilon_2): y = \frac{1}{2}x - 4$.
    (α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται κάθετα.
    (β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία (ε_1).

14. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, η κορυφή A έχει συντεταγμένες $(1,4)$ και δύο ύψη του έχουν εξισώσεις $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ και $y = -x + 2$.
    (α) Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών $A\Gamma$ και AB του τριγώνου $AB\Gamma$.
    (β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών B και Γ.

15. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του ορθόκεντρου H του τριγώνου $AB\Gamma$, όταν $A(0,3)$, $B(1,0)$ και $\Gamma(2,-2)$.

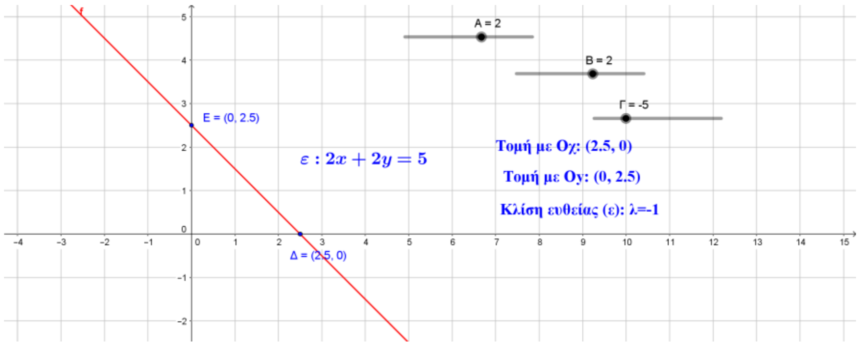
16. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon_1): y = 2x - 1$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία είναι:
    (α) συμμετρική της (ε_1) ως προς τον άξονα των τετμημένων
    (β) συμμετρική της (ε_1) ως προς τον άξονα των τεταγμένων.

17. Δίνεται το σημείο $A(1,4)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 2x + 4y = 3$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου του A ως προς την ευθεία (ε).

5.3 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ $\boldsymbol{Ax + By + \Gamma = 0}$

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«ALyk_En05_GenikiMorfiEutheias.ggb»*.



Δίνεται η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$.

(α) Να μεταβάλλετε τους δρομείς *«A, B, Γ»* και να παρατηρήσετε τις ευθείες που σχηματίζονται.

(β) Να θέσετε τον δρομέα *«$A = 0$»* και να μεταβάλλετε τους δρομείς *«B»* και *«Γ»*. Τι παρατηρείτε για τη θέση της ευθείας, την κλίση της και τις τομές της με τους δύο άξονες;

(γ) Ποια τιμή είναι αναγκαία ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη προς τον άξονα των τεταγμένων;

(δ) Για ποιες τιμές των A και B η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$, δεν παριστάνει ευθεία;

Πρόταση

Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, παριστάνει ευθεία και έχει συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) $\lambda = -\frac{A}{B}$, $B \neq 0$.

Απόδειξη

- Αν $B \neq 0$, τότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ γράφεται $y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$, $B \neq 0$, η οποία παριστάνει ευθεία με κλίση $\lambda = -\frac{A}{B}$, $B \neq 0$ Αν επιπλέον ισχύει και $A \neq 0$, τότε η ευθεία δεν είναι παράλληλη με κανέναν από τους δύο άξονες συντεταγμένων, ενώ αν $A = 0$, τότε η ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων, γιατί η εξίσωσή της είναι $y = -\frac{\Gamma}{A}$ και έχει κλίση $\lambda = 0$.
- Αν $B = 0$, τότε $A \neq 0$ και η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ γράφεται $x = -\frac{\Gamma}{A}$, $A \neq 0$, η οποία παριστάνει ευθεία παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων.

Παρατήρηση

Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$:

- παριστάνει ευθεία στο επίπεδο, αν και μόνο αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$
- δεν παριστάνει ευθεία, αν και μόνο αν $A = B = 0$.

Πρόταση

Αν οι ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$, $(\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ και $(\varepsilon_3): A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0$ έχουν κοινό σημείο (συντρέχουν), τότε ισχύει:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

Η απόδειξη να γίνει από τους μαθητές.

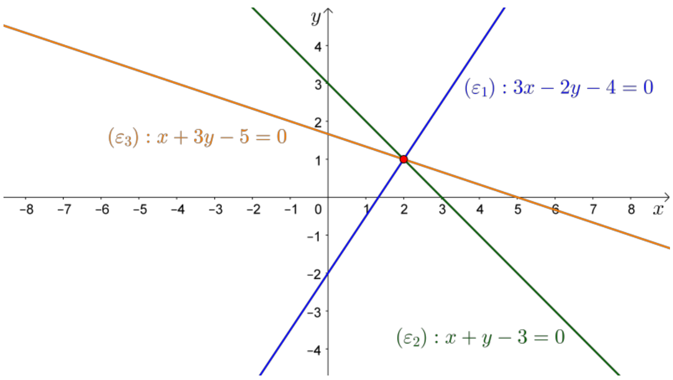
Για παράδειγμα, οι ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): 3x - 2y - 4 = 0, (\varepsilon_2): x + y - 3 = 0$ και $(\varepsilon_3): x + 3y - 5 = 0$, οι οποίες φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα, συντρέχουν αφού:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix} =$$

$$= 3 \cdot 1(-5) + (-2)(-3)1 + (-4)1 \cdot 3 - 1 \cdot 1(-4) - 3(-3)3 - (-5) \cdot 1(-2)$$

$$= -15 + 6 - 12 + 4 + 27 - 10 = 0$$

(Η ορίζουσα υπολογίστηκε με τον κανόνα του Sarrus.)



Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε την κλίση της ευθείας με εξίσωση $6x + 2y + 1 = 0$.

Λύση

Η πιο πάνω εξίσωση είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ και $B \neq 0$. Άρα, η εξίσωση παριστάνει ευθεία. Τώρα, αφού $A = 6$ και $B = 2$, η κλίση της πιο πάνω ευθείας είναι ίση με:

$$\lambda = -\frac{6}{2} = -3$$

Παράδειγμα 2

Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): y = -2x + 6$ και $(\varepsilon_2): 3x - 4y + 12 = 0$.

(α) Να υπολογίσετε τις κλίσεις τους.

(β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες των συντεταγμένων.

(γ) Να υπολογίσετε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο A με συντεταγμένες $(a, -2)$ να ανήκει στην ευθεία (ε_2).

Λύση

(α) Η ευθεία (ε_1) είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$. Επομένως, έχει κλίση $\lambda = -2$. Η ευθεία (ε_2) είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$. Επομένως, έχει κλίση:

$$\lambda = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

(β) Ο άξονας των τετμημένων και ο άξονας των τεταγμένων έχουν εξισώσεις $x = 0$ και $y = 0$, αντίστοιχα.

- Για το σημείο τομής της ευθείας (ε_2) με τον άξονα των τετμημένων, αντικαθιστούμε στην εξίσωση της (ε_2) όπου $y = 0$ και έχουμε:

$$3x - 4 \cdot 0 + 12 = 0 \Leftrightarrow 3x = -12 \Leftrightarrow x = -4$$

  Έτσι, η τομή της (ε_2) με τον άξονα των τετμημένων είναι το σημείο με συντεταγμένες $(-4, 0)$.

- Για το σημείο τομής της ευθείας (ε_2) με τον άξονα των τεταγμένων, αντικαθιστούμε στην εξίσωση της (ε_2) όπου $x = 0$ και έχουμε:

$$3 \cdot 0 - 4y + 12 = 0 \Leftrightarrow 4y = 12 \Leftrightarrow y = 3$$

  Έτσι, η τομή της (ε_2) με τον άξονα των τετμημένων είναι το σημείο με συντεταγμένες $(0, 3)$.

(γ) Το σημείο $A(a, -2)$ ανήκει στην ευθεία (ε_2). Επομένως, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της. Έχουμε:

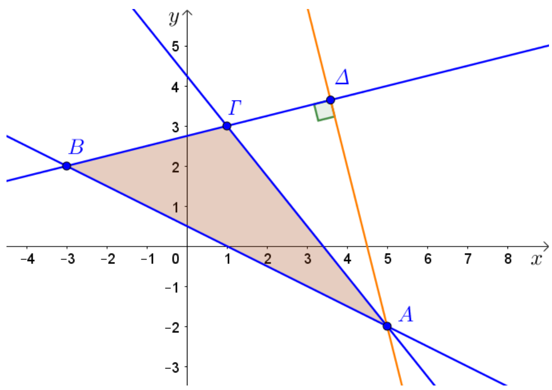
$$3a - 4(-2) + 12 = 0 \Leftrightarrow 3a + 8 + 12 = 0 \Leftrightarrow 3a = -20 \Leftrightarrow a = -\frac{20}{3}$$

Παράδειγμα 3

Οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:

$$AB: x + 2y - 1 = 0$$
$$A\Gamma: 5x + 4y - 17 = 0$$
$$B\Gamma: x - 4y + 11 = 0$$

Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $A\Delta$.



Λύση

Οι συντεταγμένες του σημείου A υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των πλευρών AB και $A\Gamma$. Έχουμε ότι:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-1=0 \\ 5x+4y-17=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-4y+2=0 \\ 5x+4y-17=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x-15=0 \Rightarrow x=5,\ \ y=2$$

Επομένως, $A(5,-2)$. Τώρα, αφού $A\Delta \perp B\Gamma$, τότε ισχύει:

$$\lambda_{A\Delta}\cdot\lambda_{B\Gamma}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta}\cdot\frac{1}{4}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta}=-4$$

Για να βρούμε την εξίσωση του ύψους $A\Delta$, χρησιμοποιούμε την $y-y_1=\lambda(x-x_1)$. Έχουμε:

$$y+2=-4(x-5) \Leftrightarrow y+2=-4x+20 \Leftrightarrow 4x+y=18$$

Παράδειγμα 4

Δίνεται η εξίσωση $(1+2\lambda)x+(-2+3\lambda)y-3-18\lambda=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που προκύπτουν από την πιο πάνω εξίσωση για $\lambda=-1,\ \lambda=0$ και $\lambda=1$ συντρέχουν.

Λύση

(α) Αν $A=0$ και $B=0$, τότε $\lambda=-\frac{1}{2}$ και $\lambda=\frac{2}{3}$, το οποίο είναι αδύνατο. Άρα, η εξίσωση $(1+2\lambda)x+(-2+3\lambda)y+5-18\lambda=0$ παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή της παραμέτρου λ.

(β) Για $\lambda=-1, \lambda=0$ και $\lambda=1$, αντίστοιχα, έχουμε ότι:

$$(\varepsilon_1):\ -x-5y+15=0$$
$$(\varepsilon_2):\ x-2y-3=0$$
$$(\varepsilon_3):\ 3x+y-21=0$$

Υπολογίζουμε την τιμή της ορίζουσας $\begin{vmatrix} -1 & -5 & 15 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -21 \end{vmatrix}$ αναπτύσσοντας την κατά τα στοιχεία της 1ης της γραμμής. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{vmatrix} -1 & -5 & 15 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -21 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -21 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -21 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)\big((-2)(-21)-(-3)\cdot 1\big)+5(1\cdot(-21)-(-3)3)+15\cdot(1\cdot 1-(-2)\cdot 3)$$
$$= -1(42+3)+5(-21+9)+15(1+6) = -45+5\cdot(-12)+15\cdot 7$$
$$= -45-60+105=-105+105=0$$

Επομένως, οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και (ε_3) συντρέχουν.

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε την κλίση των πιο κάτω ευθειών:
   (α) $x - 3y + 2 = 0$
   (β) $y = 8 - x$
   (γ) $y = 4$
   (δ) $x = -1$

2. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1)\colon y = -x + 2$ και $(\varepsilon_2)\colon 5x - 3y + 7 = 0$.
   (α) Να υπολογίσετε τις κλίσεις τους.
   (β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας (ε_1) με τους άξονες των συντεταγμένων.

3. Η ευθεία με εξίσωση $2x - ay + 8 = 0,\ a \neq 0$ έχει κλίση $\frac{4}{5}$. Να υπολογίσετε την τιμή του a.

4. Να δείξετε ότι οι ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1)\colon 5x - 7y = -1, (\varepsilon_2)\colon x + 2y - 10 = 0$ και $(\varepsilon_3)\colon x + y = 7$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1)\colon y = 2x - 7$ και $(\varepsilon_2)\colon y = 4x - 13$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\varepsilon_3)\colon y = -3x + 1$.

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από την τομή των ευθειών $x + 2y - 5 = 0$ και $x - y + 5 = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x + 4y + 7 = 0$.

7. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται το σημείο τομής των ευθειών $2x + y - 2 = 0,\ x - 5y - 23 = 0$ και από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB, όπου $\mathrm{A}(5, -6)$ και $B(-1, -4)$.

8. Οι πλευρές ενός τριγώνου ανήκουν στις ευθείες $(\varepsilon_1)\colon x - y + 1 = 0$, $(\varepsilon_2)\colon x - 2y + 4 = 0$ και $(\varepsilon_3)\colon 9x - 3y + 1 = 0$. Να δείξετε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου είναι το σημείο $H(-1, 4)$.

9. Δίνεται η εξίσωση (ε): $(\mu^2 - 1)x + (\mu + 1)y + 2\mu = 0$.
   (α) Να εξετάσετε κατά πόσο η εξίσωση (ε) παριστάνει ευθεία για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ.
   (β) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) την τιμή του μ, ώστε $(\varepsilon) \parallel x'x$.
   (γ) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) την τιμή του μ, ώστε $(\varepsilon) \parallel y'y$.
   (δ) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) την τιμή του μ, ώστε ευθεία (ε) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

10. Δίνονται τα σημεία $A(-1,1)$,$B(4,-1)$ και $\Gamma(6,4)$.
    (α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $AB\Gamma$ είναι ορθή.
    (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $AB\Gamma$.
    (γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

11. Οι εξισώσεις $2x - y + 3 = 0$ και $x - 2y + 3 = 0$ είναι οι εξισώσεις των πλευρών AB και $B\Gamma$ ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, αντίστοιχα. Αν οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $E(2,4)$:
    (α) να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$
    (β) να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

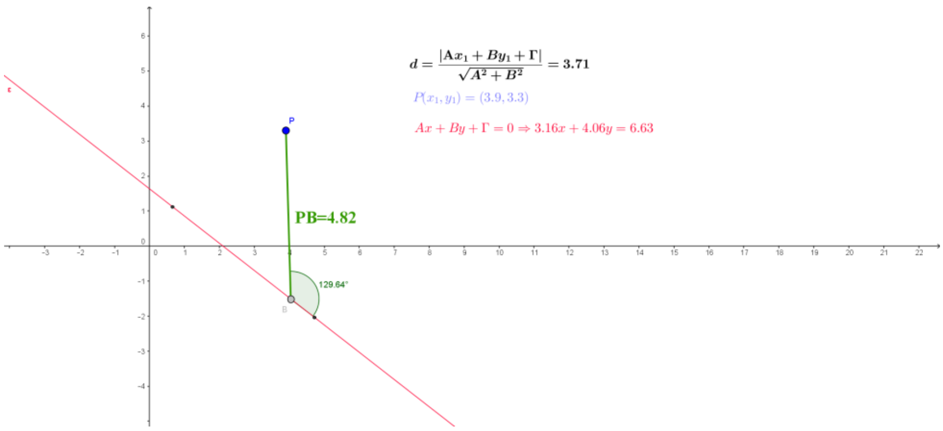
12. Οι ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): 3x - 4y + 1 = 0$ και $(\varepsilon_2): 2x - y - 1 = 0$ αποτελούν δύο πλευρές ενός παραλληλογράμμου. Αν το σημείο $(6,6)$ είναι μία από τις κορυφές του παραλληλογράμμου, να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του.

13. Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφή $\Gamma(-6,3)$ και η εξίσωση μίας διαγωνίου του είναι $y = 7x - 5$. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής του A.

5.4 ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ – ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Διερεύνηση 1

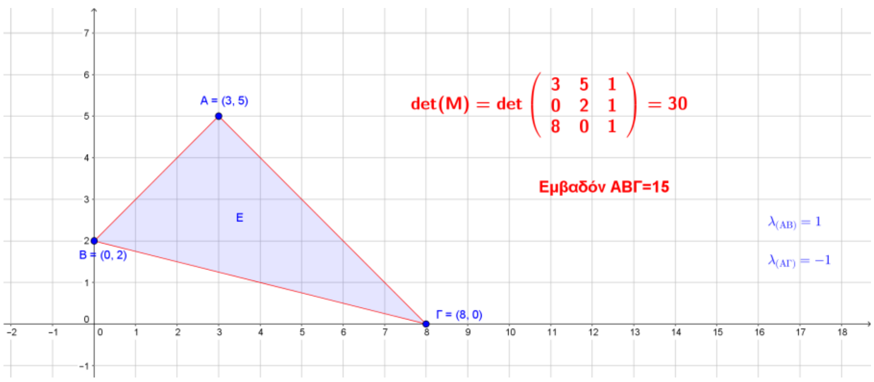
Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«ALyk_En05_ApostasiSimeiou.ggb»*.



- Να μετακινήσετε το σημείο B σε διάφορες θέσεις και να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα:
  (α) Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σημείων P και B;
  (β) Ποια είναι η σχέση της ελάχιστης απόστασης (PB) και της τιμής του d;
  (γ) Ποιο είναι το μέτρο της γωνίας που σχηματίζεται ανάμεσα στο ευθύγραμμο τμήμα PB και στην ευθεία (ε) στην περίπτωση αυτή;
- Να μετακινήσετε το σημείο P σε διάφορες θέσεις και να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία σε κάθε περίπτωση.
- Να μετακινήσετε την ευθεία (ε) σε διάφορες θέσεις και να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία σε κάθε περίπτωση.

Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«ALyk_En05_EmbadonTrigwnou.ggb»*.



- Να μετακινήσετε την κορυφή A του τριγώνου $ΑΒΓ$ σε διάφορες θέσεις και να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα σε κάθε περίπτωση:
  (α) Ποια είναι η σχέση των στοιχείων του πίνακα M με τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου $ΑΒΓ$;
  (β) Ποια είναι η σχέση που συνδέει την τιμή της ορίζουσας του πίνακα M με το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$;
  (γ) Τι παρατηρείτε όταν το A τοποθετηθεί πάνω στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία B και $Γ$; Ποια είναι η σχέση που συνδέει τις κλίσεις των AB και $ΑΓ$;
- Να μετακινήσετε τις κορυφές του τριγώνου $ΑΒΓ$ σε διάφορες θέσεις και να γράψετε τα συμπεράσματά σας.

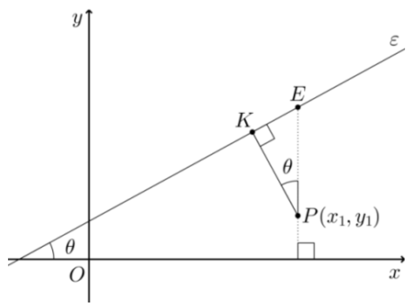
Πρόταση

Η απόσταση $d(P,\varepsilon)$ σημείου $P(x_1,y_1)$ από ευθεία (ε): $Ax+By+\Gamma=0$ δίνεται από τον τύπο:

$$d(P,\varepsilon)=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Απόδειξη

Από το σημείο $P(x_1,y_1)$ φέρουμε κάθετη στην ευθεία (ε): $Ax+By+\Gamma=0$ στο σημείο K και κάθετη στον άξονα των τετμημένων που τέμνει την ευθεία στο σημείο E.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο PKE έχουμε $(PK)=d(P,\varepsilon)=(PE)\cdot συν\theta$.

Για το $συν\theta$ ισχύει:

$$συν\theta=\frac{1}{τεμ\theta}=\frac{1}{\sqrt{1+εφ^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\varepsilon^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{A}{B}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}}=\frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Το σημείο E, είναι το κοινό σημείο των ευθειών $x=x_1$ και $Ax+By+\Gamma=0$, δηλαδή $E\left(x_1,\ \frac{-Ax_1-\Gamma}{B}\right)$. Για το μήκος του (PE), ισχύει:

$$(PE)=|y_E-y_P|=\left|\frac{-Ax_1-\Gamma}{B}-y_1\right|=\left|\frac{-Ax_1-\Gamma-B\,y_1}{B}\right|=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{|B|}$$

Τελικά, έχουμε:

$$d(P,\varepsilon)=(PE)\cdot συν\theta=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{|B|}\cdot\frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Παρατηρήσεις

- Στο πιο πάνω σχήμα, η ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων οξεία γωνία θ. Παρόμοια απόδειξη έχουμε στην περίπτωση που η ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων αμβλεία γωνία θ.
- Ειδικότερα, αν $(\varepsilon_1): x = a$, τότε $d(P, \varepsilon_1) = |x_1 - a|$, ενώ αν $(\varepsilon_2): y = \beta$, τότε $d(P, \varepsilon_2) = |y_1 - \beta|$.
- Αν το σημείο $P(x_1, y_1)$ ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon): Ax + By + \Gamma = 0$, τότε η απόσταση του από την ευθεία θα είναι ίση με μηδέν. Αυτό ισχύει, αφού $Ax_1 + By_1 + \Gamma = 0$ και έτσι:

$$d(P, \varepsilon) = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{0}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

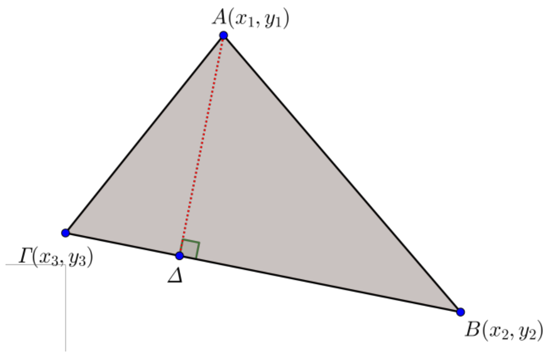
Πρόταση

Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ δίνεται από τον τύπο:

$$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2), \Gamma(x_3, y_3)$ και φέρουμε το ύψος $A\Delta$.



Έχουμε

$$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}(B\Gamma)(A\Delta),$$

με:

$$(B\Gamma) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

Η εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$ είναι:

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}, \quad x_2 \neq x_3 \Leftrightarrow (y_3 - y_2)x - (x_3 - x_2)y + (y_2 x_3 - y_3 x_2) = 0$$

Για το μήκος του $AΔ$, έχουμε

$$(AΔ) = d(A, BΓ) = \frac{|(y_3 - y_2)x_1 - (x_3 - x_2)y_1 + (y_2x_3 - y_3x_2)|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}$$

και έτσι:

$$E_{ABΓ} = \frac{1}{2}(BΓ)(AΔ) = \frac{1}{2}(BΓ)\frac{|(y_3 - y_2)x_1 - (x_3 - x_2)y_1 + (y_2x_3 - y_3x_2)|}{(BΓ)}$$

Επομένως:

$$E_{ABΓ} = \frac{1}{2}|(y_3 - y_2)x_1 - (x_3 - x_2)y_1 + (y_2x_3 - y_3x_2)|$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (y_3 - y_2)x_1 - (x_3 - x_2)y_1 + (y_2x_3 - y_3x_2)$$

Έτσι, τελικά έχουμε ότι:

$$E_{ABΓ} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

Πρόταση

Τα σημεία $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ και $Γ(x_3, y_3)$ του επιπέδου είναι συνευθειακά αν και μόνον αν:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Απόδειξη

- Αν για τα σημεία $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ και $Γ(x_3, y_3)$ του επιπέδου ισχύει ότι είναι συνευθειακά με $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, τότε οι ευθείες (AB) και $(AΓ)$ έχουν την ίδια κλίση $(\lambda_{AB} = \lambda_{AΓ})$.

$$\lambda_{AB} = \lambda_{AΓ} \Longrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \Leftrightarrow (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)$$
$$\Leftrightarrow y_2x_3 - y_2x_1 - y_1x_3 + y_1x_1 = y_3x_2 - y_3x_1 - y_1x_2 + y_1x_1$$
$$\Leftrightarrow x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο ανάπτυγμα μπορεί να γραφεί ως ορίζουσα τάξης 3×3 με τα x_1, x_2, x_3 να αποτελούν είτε την 1η γραμμή, είτε την 1η στήλη. Έτσι, μπορούμε να έχουμε:

$$x_1\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Αν για τα σημεία $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ του επιπέδου ισχύει ότι είναι συνευθειακά με $x_1 = x_2 = x_3 = \kappa,\ \kappa \in \mathbb{R}$, τότε η τιμή της ορίζουσας θα είναι:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \kappa & y_1 & 1 \\ \kappa & y_2 & 1 \\ \kappa & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \kappa(y_2 - y_3) - \kappa(y_1 - y_3) + \kappa(y_1 - y_2)$$
$$= \kappa(y_2 - y_3 - y_1 + y_3 + y_1 - y_2) = \kappa \cdot 0 = 0$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $A(2, 11)$ από την ευθεία:

(α) $(\varepsilon_1): 6x + 8y - 25 = 0$

(β) $(\varepsilon_2): y = -2$

Λύση

(α) Η απόσταση του σημείου $A(2, 11)$ από την ευθεία $(\varepsilon_1): 6x + 8y - 25 = 0$ είναι:

$$d(A, \varepsilon_1) = \frac{|6 \cdot 2 + 8 \cdot 11 - 25|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{75}{10} = 7{,}5 \text{ μονάδες}$$

(β) Η απόσταση του σημείου $A(2, 11)$ από την ευθεία $(\varepsilon_2): y = -2$ είναι:

$$d(A, \varepsilon_2) = |11 - (-2)| = 13 \text{ μονάδες}$$

ή

$$d(A, \varepsilon_2) = \frac{|0 \cdot 2 + 1 \cdot 11 + 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{13}{1} = 13 \text{ μονάδες}$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όταν:

(α) $A(1, 2), B(5, 3)$ και $\Gamma(3, 7)$

(β) $A(-5, -2), B(-3, 3)$ και $\Gamma(9, 0)$

Λύση

(α) Είναι:

$$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}\left| 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \right|$$
$$= \frac{1}{2}|1(3 - 7) - 2(5 - 3) + 1(35 - 9)|$$
$$= \frac{1}{2}|-4 - 4 + 26|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 18 = 9 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

(Αναπτύξαμε την ορίζουσα κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής.)

(β) Είναι:

$$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|9\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}|9(-2-3) + 1(-15-6)|$$

$$= \frac{1}{2}|-45-21|$$

$$= \frac{1}{2}|-66| = 33 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

(Αναπτύξαμε την ορίζουσα κατά τα στοιχεία της 3ης γραμμής.)

Παράδειγμα 3

Δίνονται τα σημεία $A(0,5), B(1,2), \Gamma(5,6)$ και $\Delta(a,-8)$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε:

(α) το μήκος του ύψους AH του τριγώνου $AB\Gamma$

(β) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

(γ) την τιμή του a, ώστε τα σημεία B, Γ και Δ να είναι συνευθειακά.

Λύση

(α) Η ευθεία $B\Gamma$ έχει κλίση $\lambda_{B\Gamma} = \frac{6-2}{5-1} = \frac{4}{4} = 1$ και εξίσωση:

$$y-2 = 1(x-1) \Leftrightarrow y-2 = x-1 \Leftrightarrow x-y+1=0$$

Το μήκος του ύψους AH του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι η απόσταση του σημείου $A(0,5)$ από την ευθεία $x-y+1=0$. Επομένως:

$$(AH) = d(A, B\Gamma) = \frac{|1\cdot 0 - 1\cdot 5 + 1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ μονάδες}$$

(β) *1ος τρόπος*

Είναι:

$$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}(B\Gamma)(AH) = \frac{1}{2}\sqrt{(5-1)^2+(6-2)^2}\cdot 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{32}\cdot 2\sqrt{2} = 8 \text{ τ. μον.}$$

2ος τρόπος

Είναι:

$$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-5(-4)+1(-4)| = 8 \text{ τ. μον.}$$

(γ) *1^{ος} τρόπος*

Η ευθεία $ΒΓ$ έχει εξίσωση $x-y+1=0$. Για να είναι τα σημεία $Β,Γ$ και $Δ$ συνευθειακά, πρέπει οι συντεταγμένες του σημείο $Δ$ να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας $ΒΓ$. Επομένως:

$$a+8+1=0 \Longrightarrow a=-9$$

2^{ος} τρόπος

Αν τα σημεία $Β,Γ$ και $Δ$ είναι συνευθειακά, τότε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ a & -8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ a & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 14-2(5-a)-40-6a=0 \\ &\Leftrightarrow 14-10+2a-40-6a=0 \\ &\Leftrightarrow -4a=36 \\ &\Leftrightarrow a=-9 \end{aligned}$$

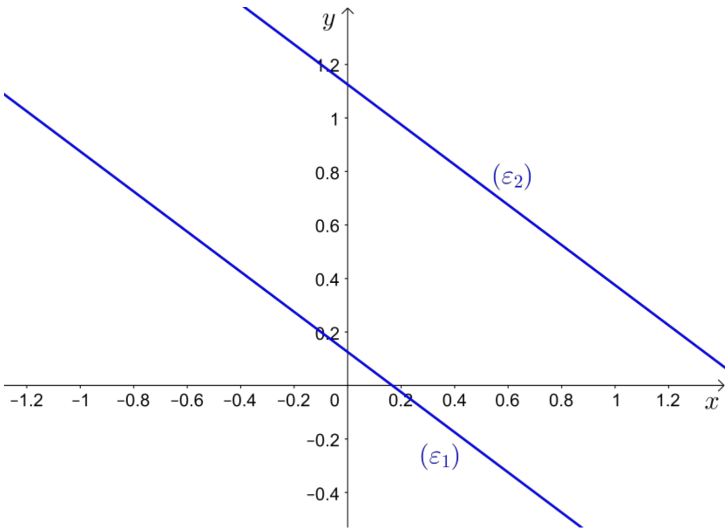
3^{ος} τρόπος

Αν τα σημεία $Β,Γ$ και $Δ$ είναι συνευθειακά, τότε ισχύει $λ_{ΒΓ}=λ_{ΓΔ}$. Ισοδύναμα, έχουμε:

$$\frac{6-2}{5-1}=\frac{-8-6}{a-5} \Leftrightarrow 1=\frac{-14}{a-5} \Leftrightarrow a-5=-14 \Leftrightarrow a=-9$$

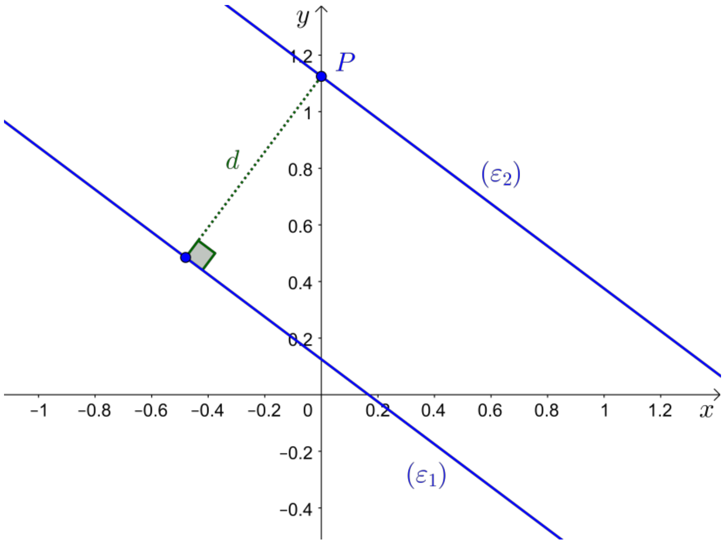
Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών με εξισώσεις $(ε_1)$: $6x+8y-1=0$ και $(ε_2)$: $6x+8y-9=0$.



Λύση

Οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες. Έτσι, έχει νόημα να υπολογίσουμε την απόσταση μεταξύ τους. Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο της ευθείας (ε_2), έστω το P, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Για το σημείο P, έχουμε ότι:

$$\left.\begin{matrix}(\varepsilon_2): 6x + 8y - 9 = 0 \\ x = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow y_P = \frac{9}{8}$$

Έτσι, $P\left(0, \frac{9}{8}\right)$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την $d(P, \varepsilon_1)$. Έχουμε ότι:

$$d(P, \varepsilon_1) = \frac{\left|6 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{9}{8} - 1\right|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{8}{10} = 0{,}8 \text{ μονάδες}$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $A(-3,2)$ από την ευθεία:
   (α) $(\varepsilon_1): 4x+3y-21=0$
   (β) $(\varepsilon_2): x=6$
   (γ) $(\varepsilon_3): y=-2$

2. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$, αν:
   (α) $A(2,3), B(3,10)$ και $\Gamma(7,5)$
   (β) $A(2,3), B(3,10)$ και $\Gamma(8,0)$
   (γ) $A(2,3), B(3,10)$ και $\Gamma(3,-2)$

3. Δίνονται τα σημεία $A(0,3)$, $B(2,6)$ και $\Gamma(4,0)$. Να υπολογίσετε:
   (α) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
   (β) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

4. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(1,5), B(3,2)$ και $\Gamma(6,-1)$ ορίζουν τρίγωνο. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε:
   (α) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
   (β) το μήκος του ύψους $A\Delta$
   (γ) το μήκος της διαμέσου AM.

5. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(2,5), B(6,3)$ και $\Gamma(-2,-3)$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

6. Να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των ευθειών $(\varepsilon_1): -6x+8y=29$ και $(\varepsilon_2): 3x-4y-8=0$.

7. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): x-3y+1=0$, $(\varepsilon_2): 2x+5y-9=0$ και η απόσταση της αρχής των αξόνων O από τις ευθείες αυτές είναι ίση με 2 μονάδες.

8. Δύο πλευρές ενός τετραγώνου ανήκουν στις ευθείες $5x-12y-13=0$ και $5x-12y-78=0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου.

9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, το οποίο έχει κορυφές τα σημεία $A(0,2), B(2,4), \Gamma(8,1)$ και $\Delta(4,-1)$.

10. Δίνονται τα σημεία $A(\kappa,\kappa^2)$, $B(\lambda,\lambda^2)$ και $\Gamma(\mu,\mu^2)$, όπου κ,λ και μ τρεις πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους. Να αποδείξετε ότι τα A,B και Γ είναι κορυφές τριγώνου και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

Περίληψη

1. Κάθε ορθογώνια διάταξη αντικειμένων σε γραμμές και στήλες ονομάζεται πίνακας. Τα αντικείμενα ονομάζονται στοιχεία του πίνακα.
2. Ένας πίνακας ονομάζεται τετραγωνικός πίνακας όταν έχει ίσο αριθμό γραμμών και στηλών.
   - Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ αποτελείται από δύο γραμμές και δύο στήλες και ονομάζεται τετραγωνικός 2×2 πίνακας.
   - Ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix}$ αποτελείται από τρεις γραμμές και τρεις στήλες και ονομάζεται τετραγωνικός 3×3 πίνακας.
3. Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού 2×2 πίνακα $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ συμβολίζεται με $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ ή $|A|$ ή $\det(A)$. Το ανάπτυγμα της ορίζουσας ισούται με $\alpha\delta - \beta\gamma$.
4. Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού 3×3 πίνακα $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix}$ συμβολίζεται με $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$ ή με $|A|$ ή με $\det(A)$.
5. Το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας 3×3 υπολογίζεται με δύο τρόπους:
   - Με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία μιας οποιασδήποτε γραμμής ή μιας οποιασδήποτε στήλης της.
   - Με τον κανόνα του Sarrus.
6. Η ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία A και B, με $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, έχει εξίσωση
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$
   ή
$$y - y_1 = \lambda(x - x_1),$$
   όπου λ είναι η κλίση της ευθείας AB.
   Στην περίπτωση που $y_1 = y_2$, τότε η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = y_1$.
   Στην περίπτωση που $x_1 = x_2$, τότε η ευθεία AB έχει εξίσωση $x = x_1$.
7. Γωνία δύο ευθειών (ε_1) και (ε_2) ονομάζεται η θετική κυρτή γωνία με αρχική πλευρά την ευθεία (ε_1) και τελική πλευρά την ευθεία (ε_2) ή με αρχική πλευρά την ευθεία (ε_2) και τελική πλευρά την ευθεία (ε_1).
8. Αν θ είναι η γωνία δύο μη παράλληλων ή κάθετων ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$, με αρχική πλευρά την (ε_1) και τελική πλευρά την (ε_2), οι οποίες έχουν κλίσεις $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα, και δεν είναι παράλληλες με τον άξονα των $y'y$, τότε ισχύει:
$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}$$

Παρατηρήσεις

- Αν οι δύο ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι παράλληλες, τότε δεν σχηματίζεται γωνία μεταξύ τους.
- Αν οι δύο ευθείες είναι κάθετες (και δεν είναι παράλληλες με τον άξονα των τεταγμένων), τότε η γωνία μεταξύ τους είναι 90° και ισχύει η σχέση $\lambda_1\lambda_2+1=0 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2=-1$.
- Στην ειδική περίπτωση των δύο κάθετων μεταξύ τους ευθειών, οι οποίες έχουν εξισώσεις $x=\alpha$ και $y=\beta, (\alpha,\beta \in \mathbb{R})$, δεν ισχύει η σχέση $\lambda_1\lambda_2+1=0$.
- Αν η μία από τις δύο ευθείες (π.χ. η (ε_2)) είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων (λ_2 δεν ορίζεται), τότε για την οξεία γωνία θ των δύο ευθειών ισχύει:

$$\text{εφ}\theta=\frac{1}{\lambda_1},\ \ \lambda_1>0 \text{ και } \text{εφ}\theta=-\frac{1}{\lambda_1},\ \ \lambda_1<0$$

9. Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$:
   - παριστάνει ευθεία, όταν $A\neq 0$ ή $B\neq 0$
   - έχει συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) $\lambda=-\frac{A}{B},\ B\neq 0$.
10. Αν οι ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1)\colon A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$, $(\varepsilon_2)\colon A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ και $(\varepsilon_3)\colon A_3x+B_3y+\Gamma_3=0$ έχουν κοινό σημείο (συντρέχουν), τότε ισχύει:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}=0$$

11. Η απόσταση $d(P,\varepsilon)$ του σημείου $P(x_1,y_1)$ από την ευθεία $(\varepsilon)\colon Ax+By+\Gamma=0$ δίνεται από τον τύπο:

$$d(P,\varepsilon)=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

   Ειδικότερα, αν $(\varepsilon_1)\colon x=a$, τότε $d(P,\varepsilon_1)=|x_1-a|$, ενώ αν $(\varepsilon_2)\colon y=\beta$, τότε $d(P,\varepsilon_2)=|y_1-\beta|$.

12. Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ και $\Gamma(x_3,y_3)$ δίνεται από τον τύπο:

$$E_{AB\Gamma}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

13. Τα σημεία $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ και $\Gamma(x_3,y_3)$ του επιπέδου είναι συνευθειακά, αν και μόνον αν:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix} -10 & 16 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$

(γ) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & 100 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ (δ) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

2. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix} \sqrt{10}-2 & 2 \\ 3 & \sqrt{10}+2 \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} a & \beta \\ a+x & \beta+x \end{vmatrix}$ (γ) $\begin{vmatrix} 100 & 99 & 98 \\ -99 & -98 & -97 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & \beta & \gamma \\ \beta\gamma & \gamma a & a\beta \end{vmatrix} = (a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)$$

4. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{vmatrix} a & \beta+6 & 2 \\ \beta & a+6 & 2 \\ 6 & a+\beta & 2 \end{vmatrix} = 0$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$ (β) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix}$

6. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

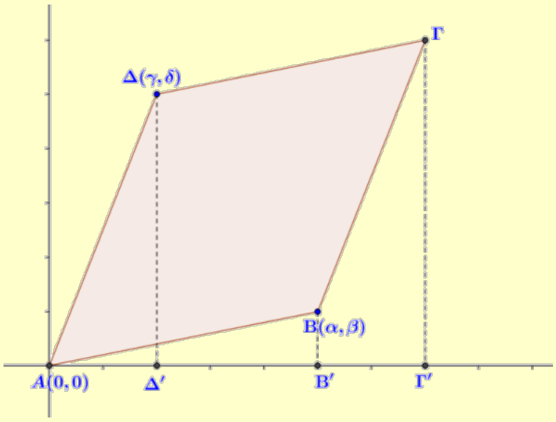
(α) $\begin{vmatrix} a & a-\beta \\ \beta & a-\beta \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & x & x \end{vmatrix}$

7. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

παριστάνει την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(5,4)$

8. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$.



Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ είναι:

$$E = \left| \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right|$$

9. Να υπολογίσετε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που:
   (α) διέρχεται από τα σημεία $A(0,4)$ και $B(3,-1)$
   (β) σχηματίζει γωνία 60° με τον άξονα των τετμημένων.

10. Να υπολογίσετε τον συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας (ε), η οποία σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία θ ίση με:
    (α) 60° (β) 150° (γ) 0° (δ) 90°

11. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$ και:
    (α) έχει συντελεστή διεύθυνσης -3
    (β) είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων
    (γ) είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων.

12. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(-1,6)$ και $B(2,3)$.

13. Να δείξετε ότι η εξίσωση
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
παριστάνει ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-1,3)$ και $B(-2,5)$.

14. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι ευθείες (ε_1): $y = 2x + 5$ και (ε_2): $y = 3x + 5$.

15. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζει η ευθεία $2x + 3y = 12$ με τον άξονα των τεταγμένων.

16. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): 2x + y = 11$, $(\varepsilon_2): x + 2y = 13$ και $(\varepsilon_3): 5x - 3y = 0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

17. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $(\varepsilon_1): x + (\lambda + 1)y - 2 = 0$ και $(\varepsilon_2): 2x + 4y - 5 = 0$ να τέμνονται. Για ποια τιμή του λ οι ευθείες τέμνονται κάθετα;

18. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $A(2, 1)$ και εξισώσεις δύο διαγωνίων του $(\delta_1): y = 5x + 3$ και $(\delta_2): x - 5y + 3 = 0$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των άλλων τριών κορυφών του $ΑΒΓΔ$.

19. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $A(2, 1)$ και εξισώσεις δύο διαγωνίων του $(\delta_1): y = 5x + 3$ και $(\delta_2): x - 5y + 3 = 0$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των άλλων τριών κορυφών του $ΑΒΓΔ$.

20. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\begin{vmatrix} x-2 & y-7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ παριστάνει ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(2, 7)$ και έχει κλίση 5.

21. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το κοινό σημείο των ευθειών $3x - 5y - 11 = 0$ και $4x + 3y - 5 = 0$ και:
    (α) είναι παράλληλη προς την ευθεία $2x - 3y + 1 = 0$
    (β) είναι κάθετη προς την ευθεία $3x + 4y - 5 = 0$
    (γ) διέρχεται και από το σημείο $A(-4, 1)$.

22. Δίνονται τα σημεία $A(8, 3)$ και $B(6, -1)$.
    (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $Γ$ που βρίσκεται πάνω στον άξονα των τετμημένων, έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ να είναι ίσο με 7 τετραγωνικές μονάδες.
    (β) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $ΓΔ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$.

23. Να υπολογίσετε την απόσταση:
    (α) του σημείου $A(-1, 2)$ από την ευθεία $(\varepsilon): -4x + 3y + 20 = 0$
    (β) του σημείου $A(-1, 2)$ από την ευθεία $(\varepsilon): y = 5$
    (γ) του σημείου $A(-1, 2)$ από την ευθεία $(\varepsilon): x = 5$
    (δ) μεταξύ των ευθειών $(\varepsilon_1): -4x + 3y + 20 = 0$ και $(\varepsilon_2): 4x - 3y + 20 = 0$.

24. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις ενός οποιουδήποτε σημείου της ευθείας $(\varepsilon): 7x + 4y - 16 = 0$ από τις ευθείες $(\varepsilon_1): 3x - 4y - 4 = 0$, $(\varepsilon_2): 5x - 12y - 4 = 0$ είναι ίσες. Τι συμπεραίνετε για τη σχέση της ευθείας (ε) ως προς τις ευθείες (ε_1) και (ε_2);

25. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-1,0), B(1,4), \Gamma(-3,2)$ και $\Delta(-5,-2)$ είναι κορυφές ρόμβου. Στη συνέχεια, να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του ρόμβου.

26. Δίνονται τα σημεία $K(\kappa, 0)$ και $\Lambda(0, \lambda), \kappa, \lambda \neq 0$.
   (α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $K\Lambda$.
   (β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $M(\kappa, \lambda)$ και είναι κάθετη στην $K\Lambda$.
   (γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $N(\kappa+\lambda, \kappa+\lambda)$.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να δώσετε ένα παράδειγμα δύο διαφορετικών τετραγωνικών πινάκων 2×2, οι οποίοι να έχουν ίσες ορίζουσες.

2. Να αποδείξετε τις ιδιότητες:

(α) $\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta & \lambda\gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$

(γ) $\begin{vmatrix} \alpha+\lambda\delta & \beta+\lambda\varepsilon & \gamma+\lambda\zeta \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$

3. Να γράψετε υπό μορφή ορίζουσας 3×3 τις αλγεβρικές παραστάσεις:
(α) $4\beta\kappa + 2\gamma\lambda + 3\alpha\mu - 2\beta\mu - 3\gamma\kappa - 4\alpha\lambda$
(β) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$
Υπόδειξη: Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$ στη μορφή $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha + \beta \cdot \beta \cdot \beta + \gamma \cdot \gamma \cdot \gamma - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma$.

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που σχηματίζει 45° με τον άξονα των τετμημένων και απέχει από το σημείο $A(2,5)$ απόσταση ίση με $3\sqrt{2}$ μονάδες.

5. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $2x - 3y - 9 = 0$ και σχηματίζουν με τους άξονες των συντεταγμένων τρίγωνο με εμβαδόν 3 τετραγωνικές μονάδες.

6. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες
$$\begin{cases} x + y - 10 = 0 \\ \kappa x + (\kappa - 1)y - 2 = 0 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases}$$
να συντρέχουν.

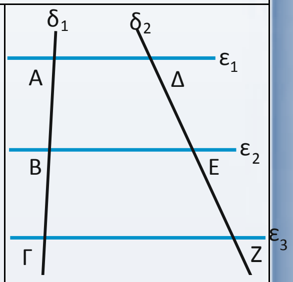
7. Να δείξετε ότι το σημείο $M(2\lambda - 1, \lambda + 4)$ ανήκει σε ευθεία $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

8. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $(\varepsilon_1): y = \lambda x + \beta_1$ και $(\varepsilon_2): y = \lambda x + \beta_2$. Να αποδείξετε ότι η απόσταση μεταξύ τους δίνεται από τον τύπο:
$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 06

ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ – ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

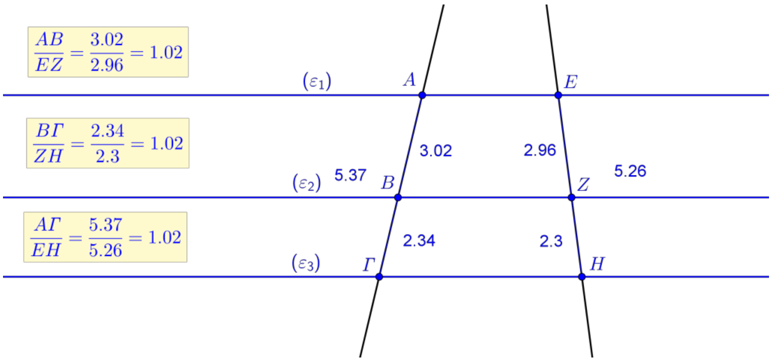
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Έχουμε μάθει ...		
Λόγος	Λόγος δύο μεγεθών A προς B ονομάζεται το πηλίκο που προκύπτει, όταν το μέτρο του πρώτου μεγέθους A διαιρεθεί με το μέτρο του δεύτερου μεγέθους B. Γράφεται: $$\lambda = \frac{A}{B}$$	
Αναλογία	Αναλογία είναι η ισότητα δύο λόγων και γράφεται $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Τα α και δ ονομάζονται άκροι όροι, ενώ τα β και γ ονομάζονται μέσοι όροι.	
Ιδιότητες Αναλογιών	1. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ 2. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$ 3. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$ 4. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\gamma-\delta}{\delta}$ 5. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \cdots = \frac{\alpha+\gamma+\varepsilon+\cdots}{\beta+\delta+\zeta+\cdots}$	
Θεώρημα	Αν ευθείες παράλληλες τέμνουν δύο άλλες ευθείες και ορίζουν ίσα τμήματα πάνω στη μία, τότε θα ορίζουν και ίσα τμήματα πάνω στην άλλη. *Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ και $AB = B\Gamma$, τότε $\Delta E = EZ$.*	

6.1 ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

Διερεύνηση 1

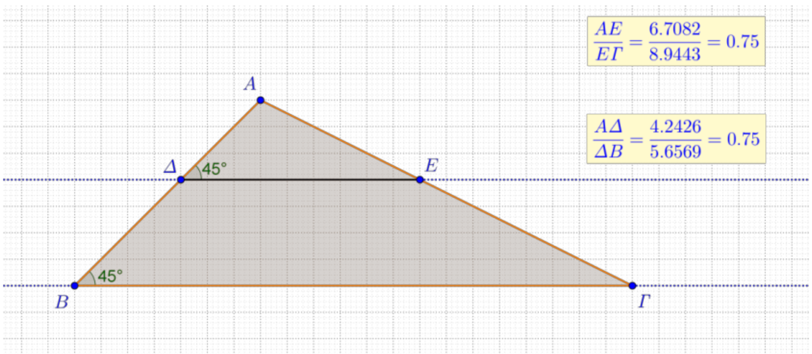
Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En06_TheorimaThali.ggb»*.



- Ποια σχέση συνδέει τους λόγους $\frac{AB}{EZ}$, $\frac{B\Gamma}{ZH}$ και $\frac{A\Gamma}{EH}$;
- Να μετατοπίσετε παράλληλα κάποια ή κάποιες από τις ευθείες (ε_1), (ε_2), (ε_3) και να εξετάσετε κατά πόσο η σχέση που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα συνεχίζει να ισχύει.
- Να μετακινήσετε κάποιο ή κάποια από τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ και να εξετάσετε κατά πόσο η σχέση που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα συνεχίζει να ισχύει.

Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En06_ThalisTrigono.ggb»*.



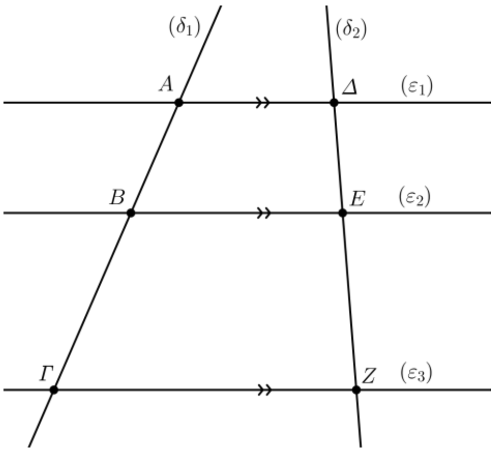
- Να μετακινήσετε τα σημεία Δ και E σε διάφορες θέσεις.
  Τι παρατηρείτε όταν $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$;
- Να εξετάσετε κατά πόσο η παρατήρησή σας ισχύει και σε άλλα τρίγωνα.

Θεώρημα Θαλή

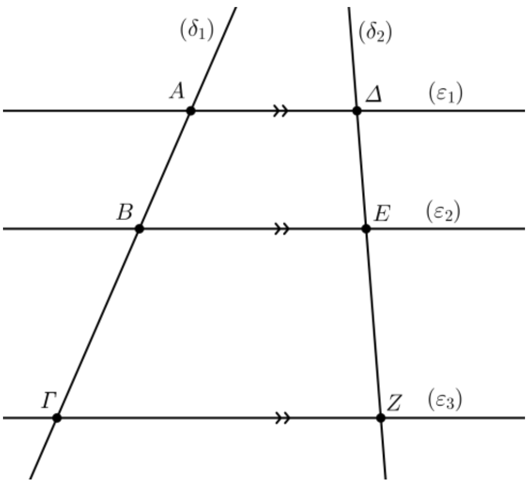
Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη μία ευθεία είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται πάνω στην άλλη ευθεία.

Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα, αν $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$, τότε:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$



- Ισχύει και το αντίστροφο του Θεωρήματος Θαλή.
  Θεωρούμε δύο ευθείες (δ_1) και (δ_2), οι οποίες τέμνουν δύο παράλληλες ευθείες (ε_1) και (ε_2) στα σημεία A, B και Δ, E, αντίστοιχα. Αν Γ και Z είναι σημεία των ευθειών (δ_1) και (δ_2), αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$, τότε η ευθεία ΓZ είναι παράλληλη προς τις (ε_1) και (ε_2).

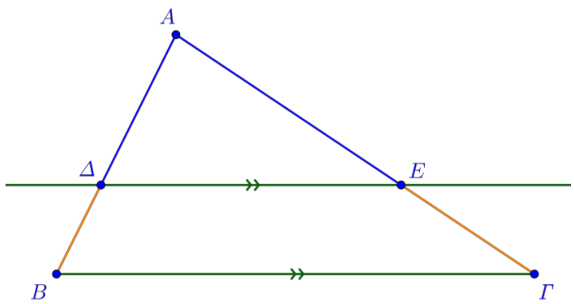


Δηλαδή, αν $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$ και $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$, τότε $\Gamma Z \parallel (\varepsilon_1)$ και $\Gamma Z \parallel (\varepsilon_2)$.

Πόρισμα 1
Αν ευθείες παράλληλες τέμνουν δύο άλλες ευθείες και ορίζουν ίσα τμήματα πάνω στη μία, τότε ορίζουν ίσα τμήματα και πάνω στην άλλη.

Πόρισμα 2
Αν μια ευθεία παράλληλη προς μια πλευρά ενός τριγώνου τέμνει τις δύο άλλες ή τις προεκτάσεις τους, τότε οι λόγοι των αντίστοιχων τμημάτων που δημιουργούνται στις δύο πλευρές είναι ίσοι.

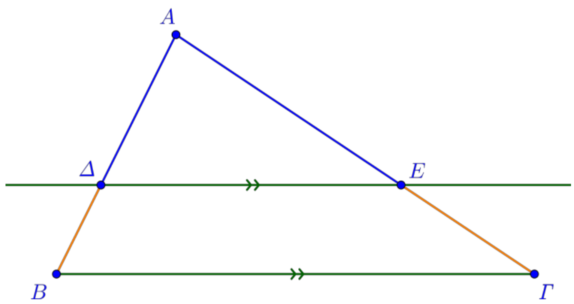
Για παράδειγμα, στο τρίγωνο $AB\Gamma$ αν ισχύει $\Delta E \parallel B\Gamma \Rightarrow \frac{A\Delta}{AE} = \frac{\Delta B}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$.



Σημείωση
Τα αντίστοιχα τμήματα που δημιουργούνται στις δύο πλευρές λέγονται **ομόλογα**. Δηλαδή, στο πιο πάνω σχήμα, ομόλογα τμήματα είναι τα $A\Delta$, AE, όπως και τα $B\Delta, E\Gamma$ και τα $AB, A\Gamma$.

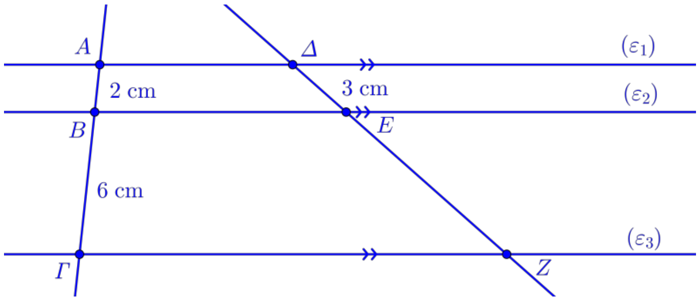
- Ισχύει και το αντίστροφο του πορίσματος.
  Αν μια ευθεία τέμνει τις δύο πλευρές ενός τριγώνου ή τις προεκτάσεις τους, έτσι ώστε οι λόγοι των αντίστοιχων τμημάτων που δημιουργούνται στις δύο πλευρές να είναι ίσοι, τότε η ευθεία είναι παράλληλη με την τρίτη πλευρά.

  Για παράδειγμα, στο τρίγωνο $AB\Gamma$ αν ισχύει $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma} \Rightarrow \Delta E \parallel B\Gamma$.



Παράδειγμα 1

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται ότι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$, $AB = 2$ cm, $B\Gamma = 6$ cm και $\Delta E = 3$ cm.



Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος EZ.

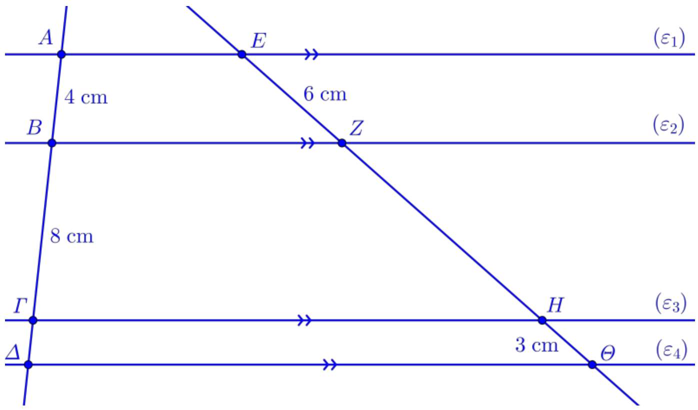
Λύση

Αφού $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$, τότε από το Θεώρημα Θαλή έχουμε:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ} \Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{3}{EZ} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{EZ} \Rightarrow EZ = 9 \text{ cm}$$

Παράδειγμα 2

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται ότι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \parallel (\varepsilon_4)$, $AB = 4$ cm, $B\Gamma = 8$ cm, $EZ = 6$ cm και $H\Theta = 3$ cm.



Να υπολογίσετε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ZH και $\Gamma\Delta$.

Λύση

Αφού $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \parallel (\varepsilon_4)$, τότε από το Θεώρημα Θαλή έχουμε

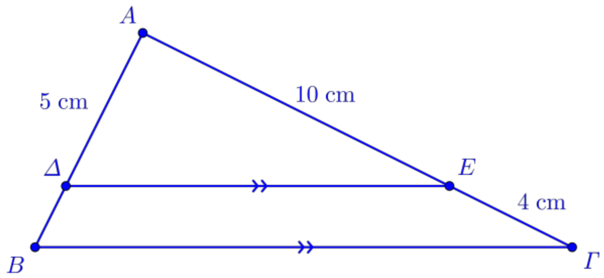
$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{EZ}{ZH} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{6}{ZH} \Rightarrow ZH = 12 \text{ cm}$$

και

$$\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{ZH}{H\Theta} \Rightarrow \frac{8}{\Gamma\Delta} = \frac{12}{3} \Rightarrow \Gamma\Delta = 2 \text{ cm}.$$

Παράδειγμα 3

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται ότι $ΔΕ \parallel ΒΓ$, $ΑΔ = 5\ \text{cm}$, $ΑΕ = 10\ \text{cm}$ και $ΕΓ = 4\ \text{cm}$.



Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΔΒ$.

Λύση

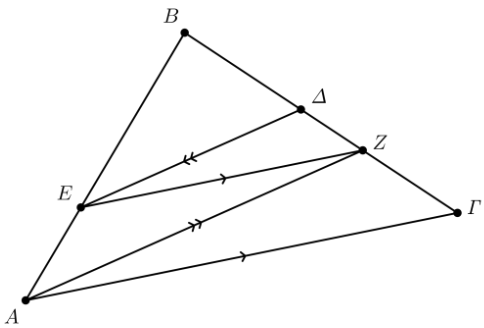
Αφού $ΔΕ \parallel ΒΓ$, τότε από το πόρισμα του Θεωρήματος Θαλή έχουμε:

$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ} \Rightarrow \frac{5}{ΔΒ} = \frac{10}{4} \Rightarrow ΔΒ = 2\ \text{cm}$$

Παράδειγμα 4

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται ότι $ΕΖ \parallel ΑΓ$ και $ΔΕ \parallel ΑΖ$. Να δείξετε ότι:

$$\frac{ΒΔ}{ΒΖ} = \frac{ΒΖ}{ΒΓ}$$



Λύση

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει ότι $ΕΖ \parallel ΑΓ$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Θαλή έχουμε:

$$\frac{ΒΖ}{ΒΓ} = \frac{ΒΕ}{ΒΑ} \qquad (1)$$

Στο τρίγωνο $ΑΒΖ$ ισχύει ότι $ΔΕ \parallel ΑΖ$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Θαλή έχουμε:

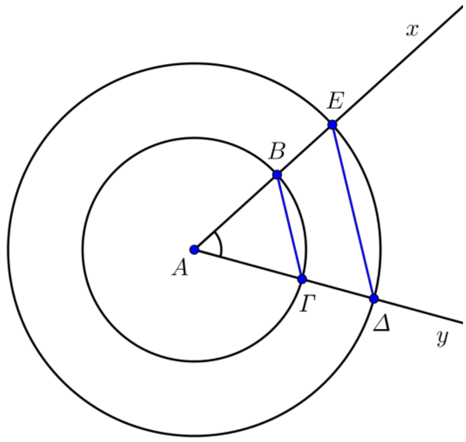
$$\frac{ΒΔ}{ΒΖ} = \frac{ΒΕ}{ΒΑ} \qquad (2)$$

Από τις (1), (2), παίρνουμε ότι:

$$\frac{ΒΔ}{ΒΖ} = \frac{ΒΖ}{ΒΓ}$$

Παράδειγμα 5

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται η γωνία xAy. Με κέντρο το A κατασκευάζουμε δύο ομόκεντρους κύκλους με ακτίνες ρ και R, αντίστοιχα, όπου $\rho < R$. Ο κύκλος με ακτίνα ρ τέμνει τις πλευρές Ax και Ay στα σημεία B και Γ, αντίστοιχα, ενώ ο κύκλος με ακτίνα R τέμνει τις πλευρές Ax και Ay στα σημεία E και Δ, αντίστοιχα.
Να δείξετε ότι το $B\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

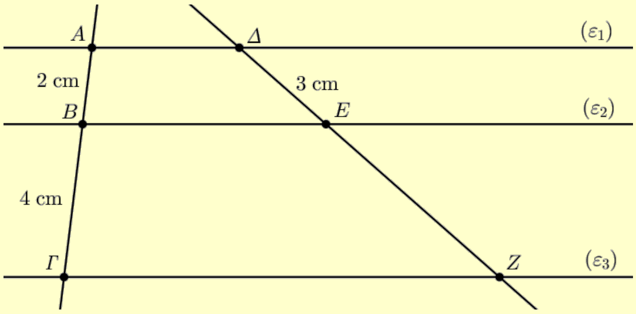
Ο ένας κύκλος έχει ακτίνα $AB = A\Gamma = \rho$, ενώ ο άλλος κύκλος έχει ακτίνα $AE = A\Delta = R$.
Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{\rho}{R} \\ \dfrac{A\Gamma}{A\Delta} = \dfrac{\rho}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{A\Gamma}{A\Delta}$$

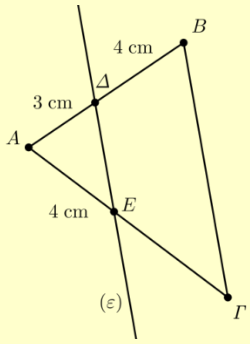
Επομένως, από το σχετικό πόρισμα ισχύει ότι $B\Gamma \parallel E\Delta$. Αφού η BE δεν είναι παράλληλη με την $\Gamma\Delta$, τότε το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta E$ είναι τραπέζιο. Επιπλέον, ισχύει ότι $BE = \Gamma\Delta = R - \rho$. Έτσι, το τραπέζιο $B\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές.

Δραστηριότητες

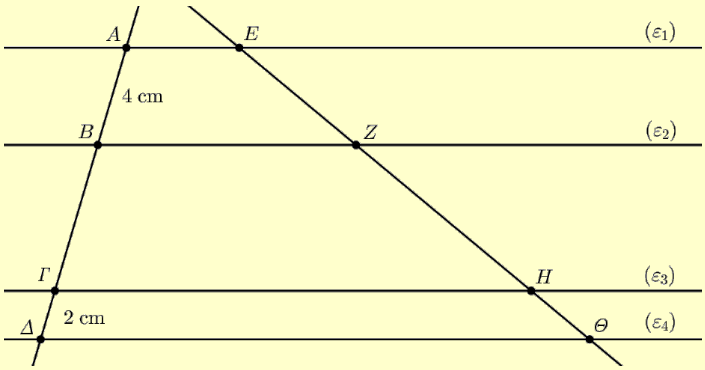
1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$, $AB = 2\text{ cm}$, $B\Gamma = 4\text{ cm}$ και $\Delta E = 3\text{ cm}$. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος EZ.



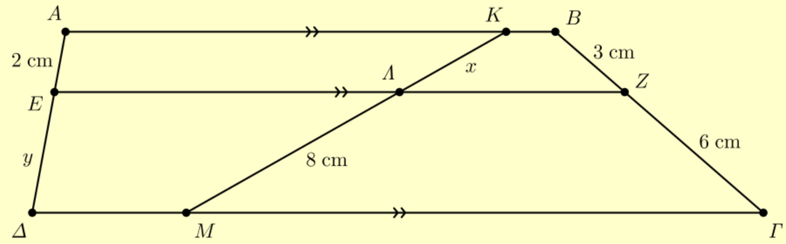
2. Στο πιο κάτω σχήμα η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$. Αν $A\Delta = 3\text{ cm}$, $AE = 4\text{ cm}$ και $\Delta B = 4\text{ cm}$, τότε να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $E\Gamma$.



3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \parallel (\varepsilon_4)$, $AB = 4\text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 2\text{ cm}$, $A\Delta = 12\text{ cm}$ και $E\Theta = 18\text{ cm}$. Να υπολογίσετε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων EZ, $H\Theta$ και EH.

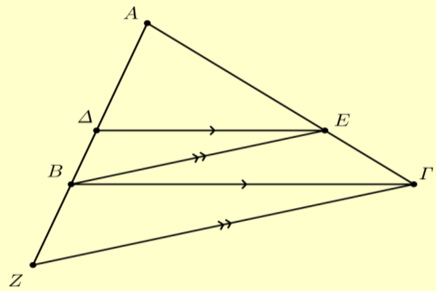


4. Να υπολογίσετε τα μήκη x και y στο πιο κάτω σχήμα.



5. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Η ευθεία $ΔΕ$ είναι παράλληλη προς την πλευρά $ΒΓ$. Από το σημείο $Γ$ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την $ΒΕ$, η οποία τέμνει την προέκταση της $ΑΒ$ στο σημείο $Ζ$. Να δείξετε ότι:

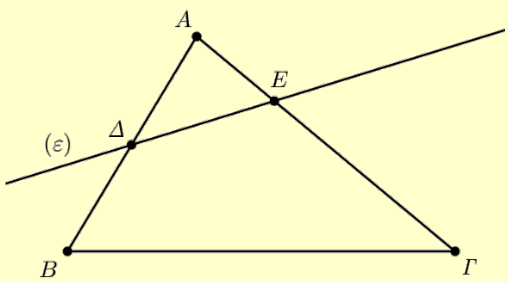
$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΒ}{ΑΖ}$$



6. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Από τυχαίο σημείο $Δ$ της πλευράς $ΑΒ$ φέρουμε $ΔΕ \parallel ΒΓ$, όπου $Ε$ σημείο της $ΑΓ$. Από το σημείο $Ε$ φέρουμε $ΕΖ \parallel ΑΒ$, όπου $Ζ$ σημείο της $ΒΓ$. Από το σημείο $Ζ$ φέρουμε τη $ΖΗ \parallel ΓΑ$, όπου $Η$ σημείο της $ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{ΗΒ}{ΗΑ}$$

7. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και $Δ$ το μέσο της πλευράς $ΑΒ$. Από το $Δ$ διέρχεται μια τυχαία ευθεία $(ε)$, που τέμνει την πλευρά $ΑΓ$ σε εσωτερικό σημείο της $Ε$. Η ευθεία $(ε)$ χωρίζει το τρίγωνο $ΑΒΓ$ σε ένα τρίγωνο $ΑΔΕ$ και σε ένα τετράπλευρο $ΒΔΕΓ$.

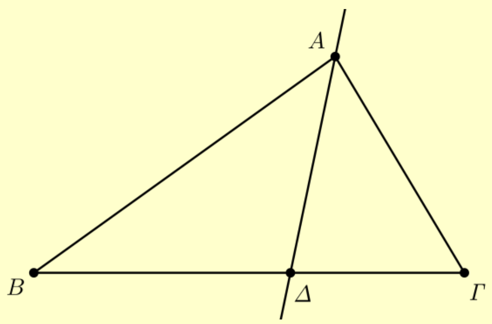


   (α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου $Ε$, ώστε το τετράπλευρο $ΒΔΕΓ$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

   (β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου $ΑΒΓ$, ώστε το τραπέζιο του πιο πάνω ερωτήματος να είναι ισοσκελές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

8. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Από σημείο M της διαμέσου $ΑΔ$ φέρουμε παράλληλες προς τις $ΑΒ$ και $ΑΓ$, που τέμνουν τη $ΒΓ$ στα σημεία $Ε$ και $Ζ$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
   (α) $\frac{ΔΕ}{ΔΒ}=\frac{ΔΖ}{ΔΓ}$
   (β) η $ΜΔ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΜΕΖ$.

9. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου χωρίζει την απέναντι πλευρά σε μέρη ανάλογα προς τις προσκείμενες σε αυτά πλευρές.
   (Υπόδειξη: Να φέρετε ευθεία παράλληλη από τη μια κορυφή του τριγώνου προς τη διχοτόμο.)

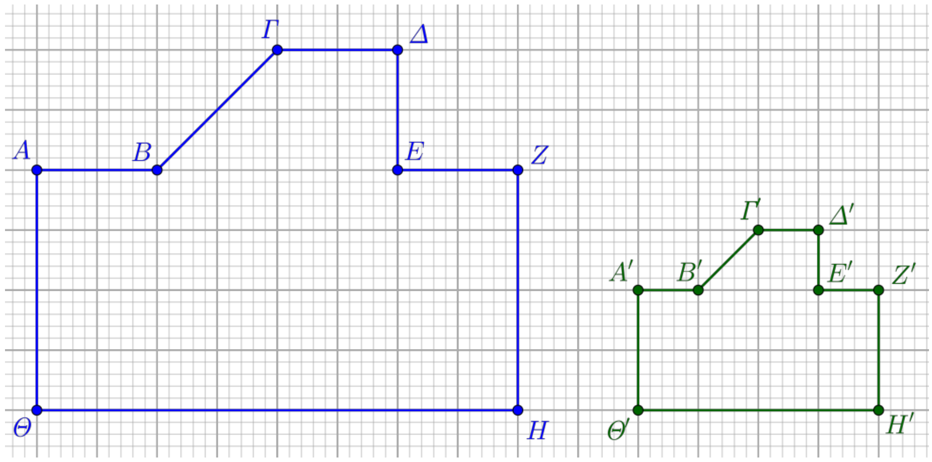


Σημείωση
Το πιο πάνω ονομάζεται «Θεώρημα Εσωτερικής Διχοτόμου» και ισχύει και το αντίστροφό του.

6.2 ΟΜΟΙΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Διερεύνηση

Στο πιο κάτω σχήμα φαίνονται δύο πολύγωνα.



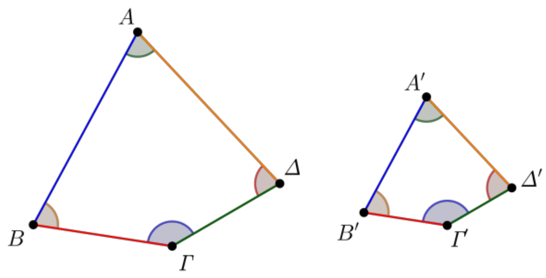
- Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

Μπλε Πολύγωνο	Πράσινο Πολύγωνο	$\frac{\text{Μπλε Πολύγωνο}}{\text{Πράσινο Πολύγωνο}}$
$A\Theta =$	$A'\Theta' =$	$\frac{A\Theta}{A'\Theta'} =$
$AB =$	$A'B' =$	$\frac{AB}{A'B'} =$
$\Theta H =$	$\Theta' H' =$	$\frac{\Theta H}{\Theta' H'} =$
$B\Gamma =$	$B'\Gamma' =$	$\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} =$
$\Theta\hat{A}B =$	$\Theta'\widehat{A'}B' =$	
$A\hat{B}\Gamma =$	$A'\widehat{B'}\Gamma' =$	
$B\hat{\Gamma}\Delta =$	$B'\widehat{\Gamma'}\Delta' =$	
$E\hat{Z}H =$	$E'\widehat{Z'}H' =$	

- Να κάνετε μια εικασία για τη σχέση που συνδέει το μέτρο των αντίστοιχων γωνιών σε πολύγωνα όπως τα πιο πάνω.
- Να κάνετε μια εικασία για τη σχέση που συνδέει τα μήκη των αντίστοιχων πλευρών σε πολύγωνα όπως τα πιο πάνω.

Ορισμός
Δύο πολύγωνα λέγονται **όμοια**, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
Συμβολίζουμε τη σχέση ομοιότητας δύο πολυγώνων με το σύμβολο ≈ .

Για παράδειγμα, τα πιο κάτω πολύγωνα $ΑΒΓΔ$ και $Α'Β'Γ'Δ'$ είναι όμοια.



Έτσι, $ΑΒΓΔ \approx Α'Β'Γ'Δ'$ και ισχύει ότι:

- $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \dfrac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \dfrac{ΑΔ}{Α'Δ'}$
- $\hat{A} = \widehat{A'},\ \hat{B} = \widehat{B'},\ \hat{Γ} = \widehat{Γ'},\ \hat{Δ} = \widehat{Δ'}$

Σημειώσεις

- Οι κορυφές των ίσων γωνιών δύο όμοιων πολυγώνων λέγονται **ομόλογες κορυφές**.
- Οι διάμεσοι, διχοτόμοι και ύψη όμοιων τριγώνων, τα οποία άγονται από ομόλογες κορυφές λέγονται **ομόλογες διάμεσοι, ομόλογες διχοτόμοι** και **ομόλογα ύψη**, αντίστοιχα.

Ορισμός
Λόγος ομοιότητας δύο όμοιων πολυγώνων είναι ο λόγος δύο ομόλογων πλευρών τους και συμβολίζεται με λ.

Για παράδειγμα, για τα πιο πάνω όμοια πολύγωνα $ΑΒΓΔ$ και $Α'Β'Γ'Δ'$, έχουμε ότι ο λόγος ομοιότητας λ ισούται με:

$$\lambda = \frac{AB}{A'B'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \frac{ΑΔ}{Α'Δ'}$$

Σημείωση

- Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε ο λόγος των ομόλογων διαμέσων, ομόλογων διχοτόμων και ομόλογων υψών είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητας λ των δύο τριγώνων.

Πρόταση

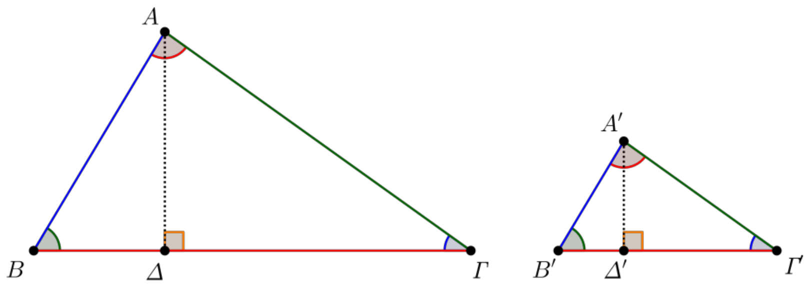
Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε:

(α) Ο λόγος των περιμέτρων τους είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους.

(β) Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Απόδειξη

Θεωρούμε δύο όμοια τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ και τα ομόλογα ύψη τους $ΑΔ$ και $Α'Δ'$.



(α) Έχουμε:

$$\lambda = \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{AB + B\Gamma + A\Gamma}{A'B' + B'\Gamma' + A'\Gamma'} = \frac{\Pi_{AB\Gamma}}{\Pi_{A'B'\Gamma'}}$$

(β) Έχουμε:

$$\lambda^2 = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \cdot \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{2E_{AB\Gamma}}{2E_{A'B'\Gamma'}} = \frac{E_{AB\Gamma}}{E_{A'B'\Gamma'}}$$

Πρόταση

Γενικά, αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε:

(α) Ο λόγος των περιμέτρων τους είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους.

(β) Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Η απόδειξη να γίνει από τους μαθητές.
(Υπόδειξη: Να χωρίσετε τα πολύγωνα σε τρίγωνα.)

Σχόλια

- Όλα τα κανονικά πολύγωνα που έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια μεταξύ τους.
- Στην επίλυση ασκήσεων συμβολίζουμε τα όμοια πολύγωνα με τέτοιο τρόπο, ώστε οι ομόλογες κορυφές των δύο πολυγώνων να βρίσκονται σε αντίστοιχες θέσεις.

Για παράδειγμα, αν για τα τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και $K\Lambda MN$ ισχύει ότι

$$\hat{A} = \hat{K},\ \ \hat{B} = \hat{\Lambda},\ \ \hat{\Gamma} = \hat{M},\ \ \hat{\Delta} = \hat{N}\ ,$$

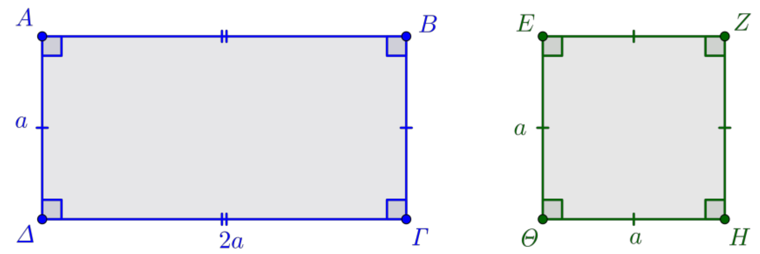
τότε μπορούμε να γράψουμε $AB\Gamma\Delta \approx K\Lambda MN$ και ισχύει ότι:

$$\frac{AB}{K\Lambda} = \frac{B\Gamma}{\Lambda M} = \frac{\Gamma\Delta}{MN} = \frac{A\Delta}{KN}$$

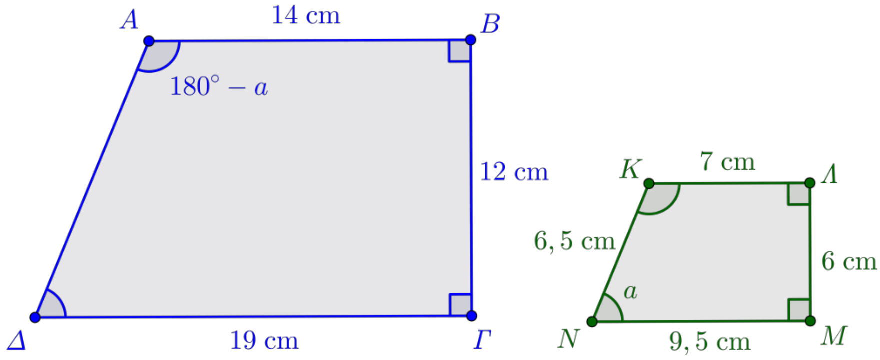
Παράδειγμα 1

Σε κάθε μία από τις πιο κάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα πολύγωνα είναι όμοια. Στην περίπτωση που είναι όμοια, να υπολογίσετε τον λόγο ομοιότητάς τους.

(α)



(β)



Λύση

(α) Τα δύο πολύγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία (όλες ορθές).
Οι λόγοι των αντίστοιχων πλευρών είναι:

$$\lambda_1 = \frac{A\Delta}{E\Theta} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{a}{a} = 1,\ \ \lambda_2 = \frac{AB}{EZ} = \frac{\Delta\Gamma}{\Theta H} = \frac{2a}{a} = 2$$

Παρατηρούμε ότι οι λόγοι των αντίστοιχων πλευρών τους δεν είναι ίσοι. Επομένως, τα πολύγωνα $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ δεν είναι όμοια.

(β) Αρχικά εξετάζουμε κατά πόσο τα δύο πολύγωνα έχουν τις γωνιές τους ίσες μία προς μία.

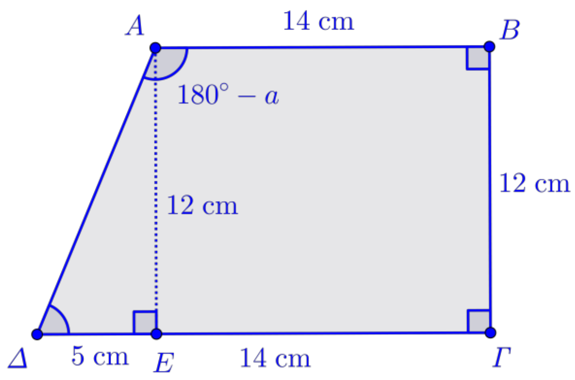
Έχουμε ότι $AB \parallel \varDelta\varGamma$, αφού οι AB και $\varDelta\varGamma$ είναι κάθετες στην $B\varGamma$. Έτσι, $\hat{A} + \hat{\varDelta} = 180°$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες) και $\hat{\varDelta} = \hat{a}$.

Ομοίως, έχουμε ότι $K\varLambda \parallel NM$, αφού οι $K\varLambda$ και NM είναι κάθετες στην $M\varLambda$. Έτσι, $\widehat{K} + \widehat{N} = 180°$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες) και $\widehat{K} = 180° - \hat{a}$.

Τα δύο πολύγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, αφού:

$$\hat{A} = \widehat{K} = 180° - \hat{a},\ \ \hat{\varDelta} = \widehat{N} = \hat{a},\ \ \hat{B} = \hat{\varLambda} = 90°,\ \ \hat{\varGamma} = \widehat{M} = 90°$$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε κατά πόσο τα δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.



Το τρίγωνο $A\varDelta E$ είναι ορθογώνιο. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα παίρνουμε:

$$(A\varDelta)^2 = (\varDelta E)^2 + (AE)^2 \Rightarrow (A\varDelta)^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow (A\varDelta) = 13 \text{ cm}$$

Επομένως, έχουμε ότι:

$$\lambda_1 = \frac{K\varLambda}{AB} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2},\ \ \lambda_2 = \frac{\varLambda M}{B\varGamma} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2},\ \ \lambda_3 = \frac{MN}{\varGamma\varDelta} = \frac{9{,}5}{19} = \frac{1}{2},\ \ \lambda_4 = \frac{KN}{A\varDelta} = \frac{6{,}5}{13} = \frac{1}{2}$$

Παρατηρούμε ότι οι λόγοι των αντίστοιχων πλευρών τους είναι ίσοι μεταξύ τους. Επομένως, οι πλευρές είναι ανάλογες και τα πολύγωνα $AB\varGamma\varDelta$ και $K\varLambda MN$ είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{1}{2}$.

Παράδειγμα 2

Δύο όμοια πεντάγωνα έχουν περίμετρο 27 cm και 54 cm, αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

(α) Το μήκος της ομόλογης πλευράς του μεγάλου πενταγώνου, αν η αντίστοιχη πλευρά στο μικρό πεντάγωνο είναι ίση με 5 cm.

(β) Το εμβαδόν του μικρού πενταγώνου, αν το μεγάλο πεντάγωνο έχει εμβαδόν 50 cm^2.

Λύση

(α) Τα δύο πεντάγωνα είναι όμοια. Άρα, ο λόγος ομοιότητας λ των ομόλογων πλευρών των όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με τον λόγο των περιμέτρων τους. Έστω (AB) και $(A'B')$ οι ομόλογες πλευρές των όμοιων πολυγώνων και Π_1, Π_2 οι αντίστοιχες περίμετροί τους. Τότε, έχουμε:

$$\lambda = \frac{(AB)}{(A'B')} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \Rightarrow \frac{5}{(A'B')} = \frac{27}{54} \Rightarrow \frac{5}{(A'B')} = \frac{1}{2} \Rightarrow (A'B') = 10 \text{ cm}$$

(β) Για όμοια πολύγωνα με λόγο ομοιότητας λ, ισχύει για τα εμβαδά E_1 και E_2 των δύο όμοιων πολυγώνων ότι:

$$\frac{E_1}{E_2} = \lambda^2$$

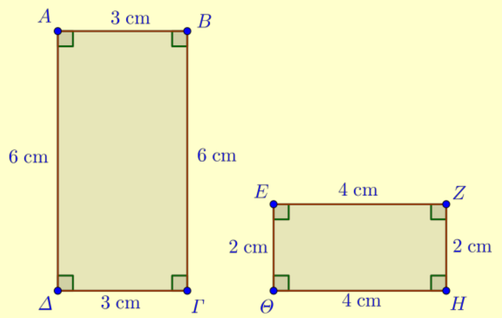
Επομένως:

$$\frac{E_1}{50} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Longrightarrow \frac{E_1}{50} = \frac{1}{4} \Longrightarrow 4E_1 = 50 \Longrightarrow E_1 = \frac{50}{4} = 12{,}5 \text{ cm}^2$$

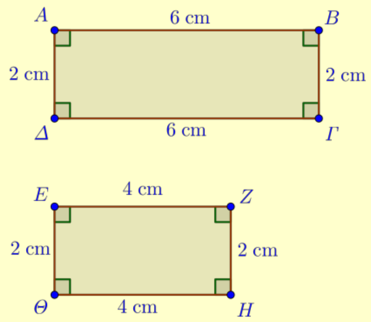
Δραστηριότητες

1. Σε κάθε μία από τις πιο κάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν τα πολύγωνα είναι όμοια, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

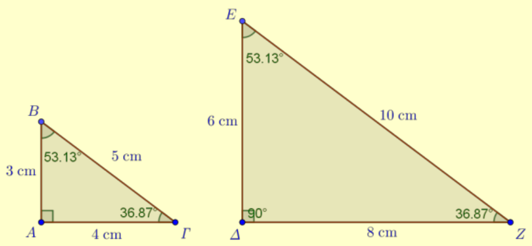
(α)



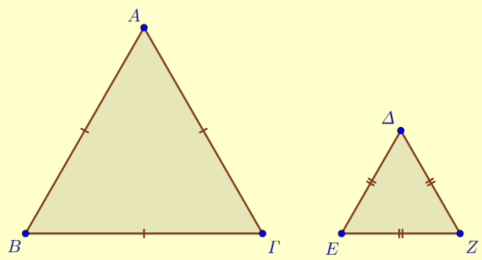
(β)



(γ)



(δ)



2. Δίνεται ένα ορθογώνιο με διαστάσεις α και β και ένα άλλο με διαστάσεις 2α και 2β. Να δείξετε ότι τα δύο ορθογώνια είναι όμοια και στη συνέχεια να υπολογίσετε:
   (α) τον λόγο των πλευρών τους
   (β) τον λόγο των περιμέτρων τους
   (γ) τον λόγο των εμβαδών τους.

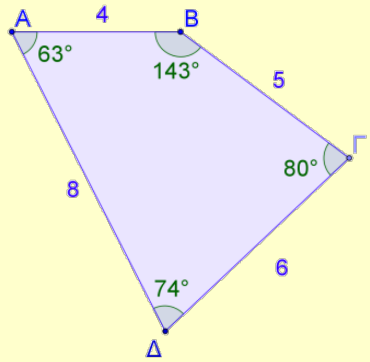
3. Να χαρακτηρίσετε ως ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(α)	Ένα τετράγωνο και ένας ρόμβος είναι πάντοτε όμοια τετράπλευρα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο είναι πάντοτε όμοια τετράπλευρα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Δύο κανονικά εξάγωνα με πλευρές 5 cm και 7 cm είναι όμοια.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Ένα κανονικό πεντάγωνο με πλευρά α και ένα κανονικό εξάγωνο με πλευρά α είναι όμοια πολύγωνα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

4. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$, το οποίο είναι όμοιο με ένα τετράπλευρο $ΕΖΗΘ$. Αν ισχύει ότι

$$\frac{AB}{EZ}=\frac{2}{3},$$

να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών και τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου $ΕΖΗΘ$.



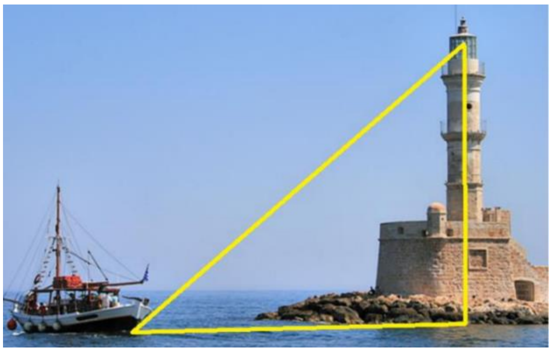
5. Ο λόγος ομοιότητας δύο πολυγώνων είναι $\frac{2}{5}$ και το εμβαδόν του μικρότερου πολυγώνου είναι $16\ \mathrm{cm}^2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεγαλύτερου πολυγώνου.

6. Οι πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος $6\ \mathrm{cm}$, $9\ \mathrm{cm}$ και $12\ \mathrm{cm}$. Να υπολογίσετε το μήκος των πλευρών ενός τριγώνου όμοιου προς αυτό το τρίγωνο, το οποίο να έχει περίμετρο $36\ \mathrm{cm}$.

6.3 ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

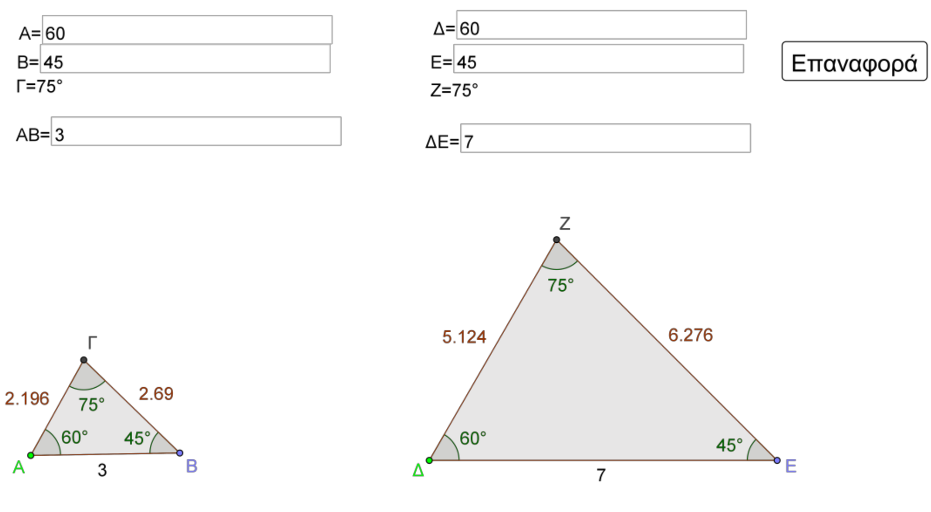
Εξερεύνηση

Στην πιο κάτω εικόνα, ένας παρατηρητής βρίσκεται στην κορυφή του φάρου, ο οποίος βρίσκεται σε ύψος $30\,\mathrm{m}$ από την επιφάνεια της θάλασσας και παρατηρεί μια ψαρόβαρκα στη θάλασσα. Έχει στη διάθεσή του έναν χάρακα μήκους $1\,\mathrm{m}$. Να εξηγήσετε πώς μπορεί ο παρατηρητής να υπολογίσει την απόσταση της ψαρόβαρκας από τον φάρο.



Διερεύνηση 1

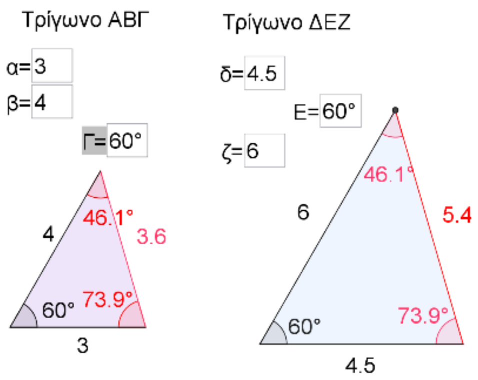
Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En06_Kritirio1.ggb»*.



- Να επιλέξετε το μέτρο για δύο γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$.
- Να δώσετε το μέτρο για δύο γωνίες του τριγώνου $ΔΕΖ$, έτσι ώστε τα δύο τρίγωνα να έχουν δύο γωνίες τους αντίστοιχα ίσες.
- Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι όμοια.

Διερεύνηση 2

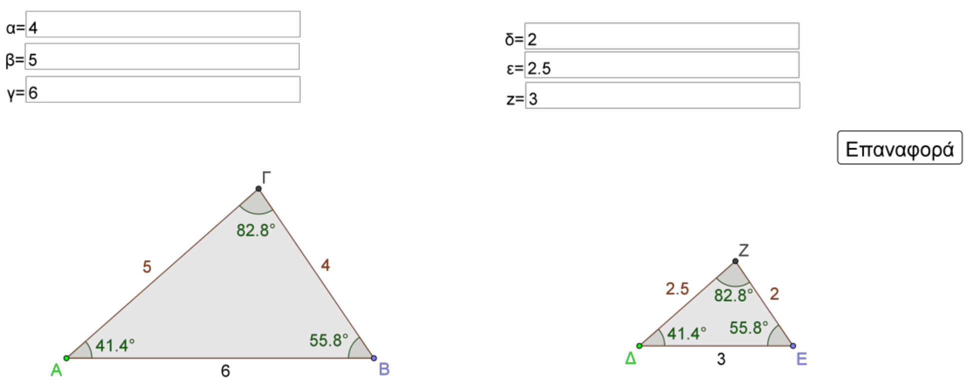
Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En06_Kritirio2.ggb»*.



- Να επιλέξετε το μήκος για δύο από τις πλευρές του τριγώνου $ΑΒΓ$ και το μέτρο της περιεχόμενης τους γωνίας.
- Να επαναλάβετε τη διαδικασία για το τρίγωνο $ΔΕΖ$, ώστε οι δύο πλευρές των τριγώνων να είναι ανάλογες και οι περιεχόμενες γωνίες τους ίσες.
- Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα είναι όμοια.

Διερεύνηση 3

Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En06_Kritirio3.ggb»*.

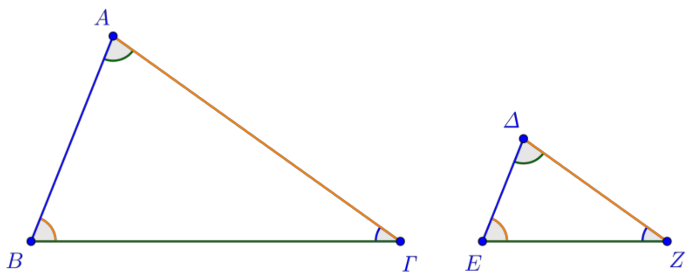


- Να επιλέξετε το μήκος για τις τρεις πλευρές του τριγώνου $ΑΒΓ$.
- Να επαναλάβετε τη διαδικασία για τις πλευρές του τριγώνου $ΔΕΖ$, ώστε οι τρεις πλευρές των δύο τριγώνων να είναι ανάλογες.
- Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα είναι όμοια.

Ορισμός
Δύο τρίγωνα λέγονται **όμοια**, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Για παράδειγμα, αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ, τότε:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \lambda \quad \text{και} \quad \hat{A} = \hat{\Delta},\ \hat{B} = \hat{E},\ \hat{\Gamma} = \hat{Z}$$

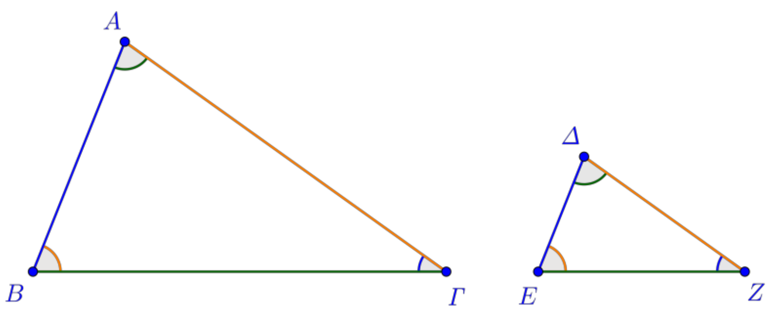


Σχόλιο
Σε όμοια τρίγωνα:

- απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ομόλογες πλευρές και
- απέναντι από ομόλογες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

Για παράδειγμα, αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ:

$$\hat{A} = \hat{\Delta},\ \hat{B} = \hat{E},\ \hat{\Gamma} = \hat{Z} \Leftrightarrow \lambda = \frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$

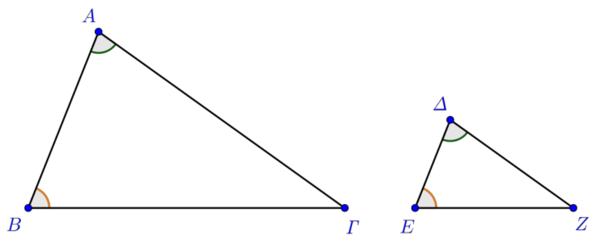


Για να εξετάσουμε αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, δεν χρειάζεται κάθε φορά να καταφεύγουμε στον ορισμό. Δηλαδή, δεν είναι απαραίτητο να ελέγχουμε κάθε φορά αν τα δύο αυτά τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις πλευρές τους ανάλογες. Πιο κάτω, θα παρουσιάσουμε τις ελάχιστες προϋποθέσεις που πρέπει να πληροί ένα ζεύγος τριγώνων, ώστε αυτά τα τρίγωνα να είναι όμοια. Οι προϋποθέσεις αυτές ονομάζονται **κριτήρια ομοιότητας τριγώνων**.

Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων

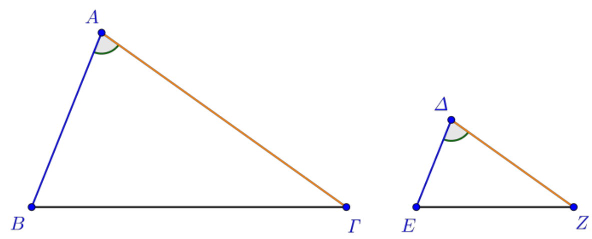
1° κριτήριο ομοιότητας τριγώνων
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Για παράδειγμα, αν για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ ισχύει ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$ *και* $\hat{B} = \hat{E}$, *τότε* $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \approx \overset{\triangle}{\Delta EZ}$.



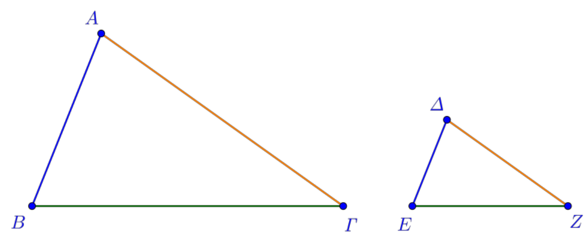
2° κριτήριο ομοιότητας τριγώνων
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενες από αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

Για παράδειγμα, αν για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ ισχύει ότι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$ *και* $\hat{A} = \hat{\Delta}$, *τότε* $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \approx \overset{\triangle}{\Delta EZ}$.



3° κριτήριο ομοιότητας τριγώνων
Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια.

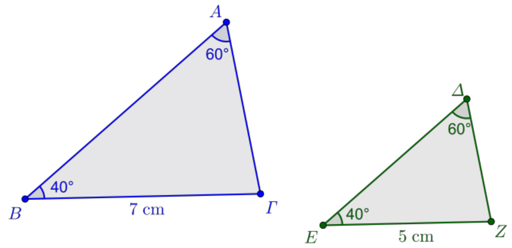
Για παράδειγμα, αν για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ ισχύει ότι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$, *τότε* $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \approx \overset{\triangle}{\Delta EZ}$.



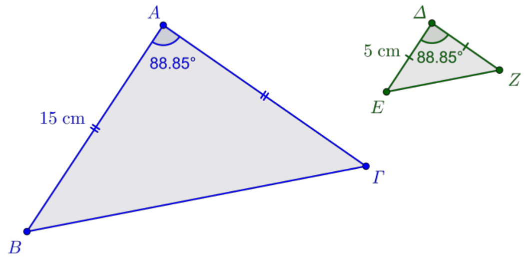
Παράδειγμα 1

Σε κάθε μία από τις πιο κάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα τρίγωνα είναι όμοια. Στην περίπτωση που είναι όμοια, να υπολογίσετε τον λόγο ομοιότητάς τους.

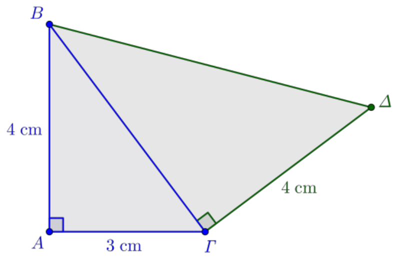
(α)



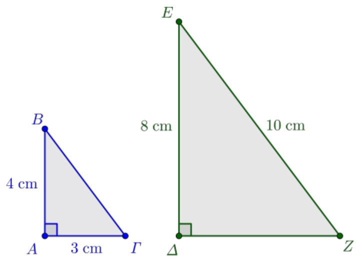
(β)



(γ)



(δ)



Λύση

(α) Για τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ ισχύει ότι:

$$\hat{A} = \hat{Δ} = 60°$$
$$\hat{B} = \hat{E} = 40°$$

Έτσι, έχουμε ότι $\overset{\triangle}{ΑΒΓ} \approx \overset{\triangle}{ΔΕΖ}$.

(Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία.)

Γνωρίζουμε ότι σε δύο όμοια τρίγωνα, απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ομόλογες πλευρές. Επομένως, ο λόγος ομοιότητας λ των όμοιων τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ είναι ίσος με $\lambda = \frac{7}{5}$.

(β) Για τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ ισχύει ότι:

$$\hat{A} = \hat{Δ} = 60°$$
$$\frac{AB}{ΔE} = \frac{AΓ}{ΔZ} = \frac{15}{5} = 3$$

Έτσι, έχουμε ότι $A\overset{\triangle}{B}Γ \approx Δ\overset{\triangle}{E}Z$, με λόγο ομοιότητας $λ = 3$.

(Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενες από αυτές γωνίες ίσες.)

(γ) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και παίρνουμε:

$$(BΓ)^2 = (AB)^2 + (AΓ)^2 \Rightarrow (BΓ)^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow (BΓ) = 5 \text{ cm}$$

Για τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΓΔ$ ισχύει ότι:

$$\hat{A} = \hat{Γ} = 90°$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{AB}{AΓ} \neq \frac{BΓ}{ΓΔ}$, αφού $\frac{4}{3} \neq \frac{5}{4}$. Άρα, τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΓΔ$ δεν είναι όμοια.

(Τα δύο τρίγωνα δεν έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενες από αυτές γωνίες ίσες.)

(δ) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$, αντίστοιχα. Έχουμε

$$(BΓ)^2 = (AB)^2 + (AΓ)^2 \Rightarrow (BΓ)^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow (BΓ) = 5 \text{ cm}$$

και:

$$(EZ)^2 = (ΔE)^2 + (ΔZ)^2 \Rightarrow (ΔZ)^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow (ΔZ) = 6 \text{ cm}$$

Για τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ ισχύει ότι:

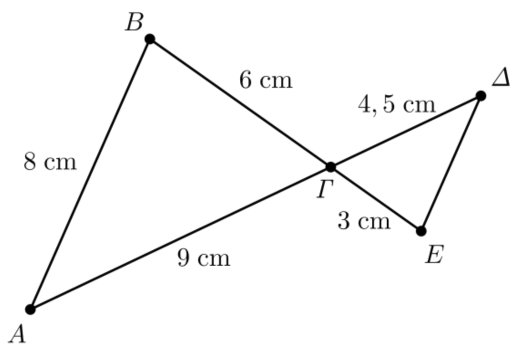
$$\frac{AB}{ΔE} = \frac{AΓ}{ΔZ} = \frac{BΓ}{EZ} = 2$$

Έτσι, έχουμε ότι $A\overset{\triangle}{B}Γ \approx Δ\overset{\triangle}{E}Z$, με λόγο ομοιότητας $λ = 2$.

(Τα δύο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ανάλογες.)

Παράδειγμα 2

Στο πιο κάτω σχήμα, το σημείο $Γ$ είναι το σημείο τομής των $ΒΕ$ και $ΑΔ$. Αν $AB = 8$ cm, $BΓ = 6$ cm, $AΓ = 9$ cm, $ΓΔ = 4{,}5$ cm και $ΓE = 3$ cm, τότε να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $ΔΕ$.



Λύση

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΓΔΕ$. Ισχύει ότι:

$$Α\hat{Γ}Β = Δ\hat{Γ}Ε \qquad \text{(κατακορυφήν γωνίες)}$$

$$\frac{ΕΓ}{ΒΓ} = \frac{ΔΓ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$$

Έτσι, έχουμε ότι $\overset{\triangle}{ΑΒΓ} \approx \overset{\triangle}{ΔΕΓ}$, με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{1}{2}$.

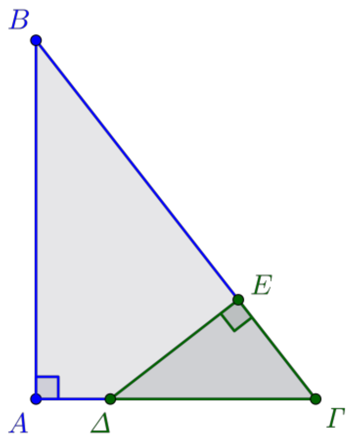
(Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενες από αυτές γωνίες ίσες.)

Επομένως:

$$\lambda = \frac{ΔΕ}{ΑΒ} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ΔΕ}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow ΔΕ = 4 \text{ cm}$$

Παράδειγμα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, $\hat{Α} = 90°$. Από τυχαίο σημείο $Δ$ της $ΑΓ$ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Να αποδείξετε ότι:

(α) $\overset{\triangle}{ΑΒΓ} \approx \overset{\triangle}{ΓΔΕ}$

(β) $(ΑΓ)(ΕΔ) = (ΑΒ)(ΕΓ)$

Λύση

(α) Για τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΓΔΕ$ ισχύει ότι:

$\hat{Α} = Δ\hat{Ε}Γ = 90°$ *($\hat{Α} = 90°$ ως δεδομένο και $Δ\hat{Ε}Γ = 90°$, αφού $ΔΕ \perp ΒΓ$)*

$\hat{Γ}$ κοινή γωνία

Έτσι, έχουμε ότι $\overset{\triangle}{ΑΒΓ} \approx \overset{\triangle}{ΕΔΓ}$.

(Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία.)

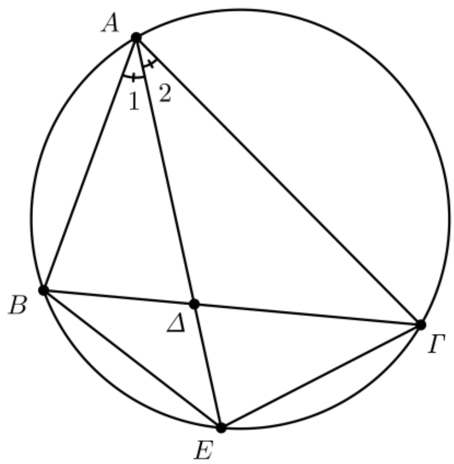
(β) Στο ερώτημα (α) αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΔΓ$ είναι όμοια. Άρα:

$$\frac{ΓΒ}{ΓΔ} = \frac{ΑΒ}{ΕΔ} = \frac{ΑΓ}{ΕΓ} \Longrightarrow (ΑΓ)(ΕΔ) = (ΑΒ)(ΕΓ)$$

Όταν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ομόλογες πλευρές.

Παράδειγμα 4

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Α}$, η οποία τέμνει την πλευρά $ΒΓ$ στο σημείο $Δ$ και τον κύκλο στο σημείο $Ε$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Να αποδείξετε ότι $(ΑΒ)(ΑΓ) = (ΑΔ)(ΑΕ)$.

Λύση

Οι πλευρές της σχέσης που θέλουμε να αποδείξουμε περιέχονται στα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$. Επομένως, θα αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα αυτά είναι όμοια και η ζητούμενη ισότητα θα προκύψει από τον λόγο ομοιότητάς τους.

Στα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ έχουμε ότι:

- $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$ *(ΑΕ διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$)*
- $Α\hat{Ε}Γ = Α\hat{Β}Γ$ *(Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)*

Επομένως, $\overset{\triangle}{ΑΒΔ} \approx \overset{\triangle}{ΑΓΕ}$, αφού τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία.

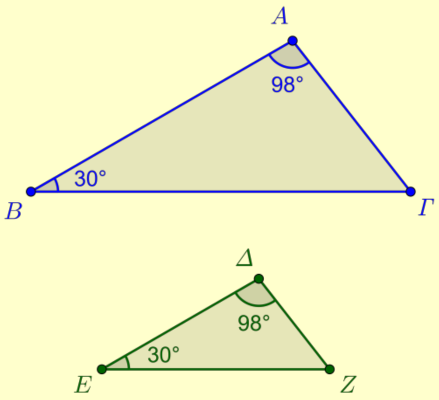
Ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι ίσος με:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΕ} = \frac{ΒΔ}{ΕΓ} \Longrightarrow (ΑΒ)(ΑΓ) = (ΑΔ)(ΑΕ)$$

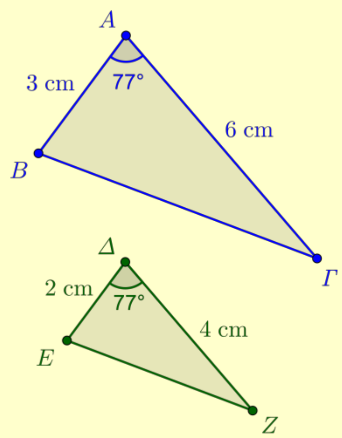
Δραστηριότητες

1. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα σε κάθε ζεύγος πιο κάτω είναι όμοια.

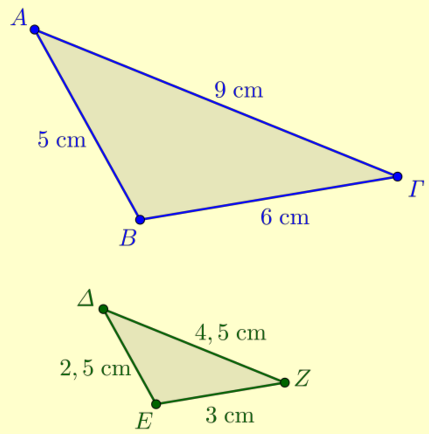
(α)



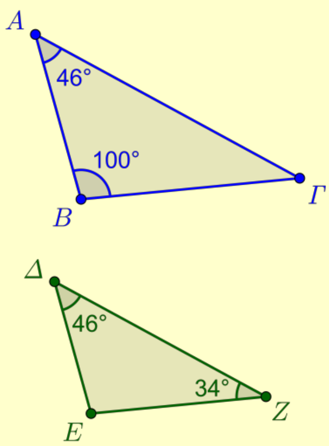
(β)



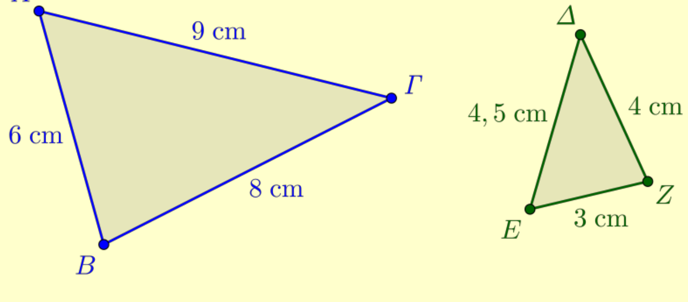
(γ)



(δ)

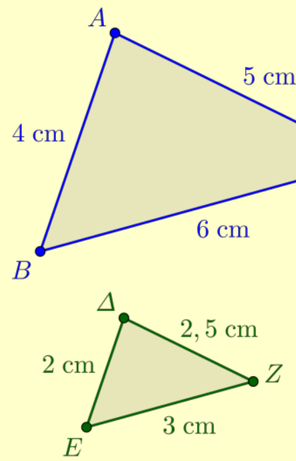


2. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα στο πιο κάτω σχήμα είναι όμοια. Σε περίπτωση που αυτό ισχύει, να σημειώσετε τις ίσες γωνίες τους.

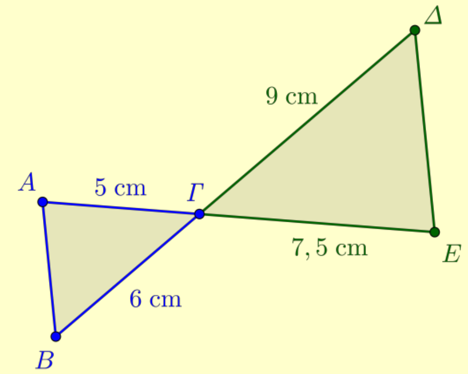


3. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα σε κάθε ζεύγος πιο κάτω είναι όμοια, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

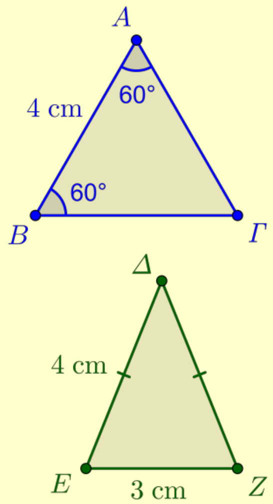
(α)



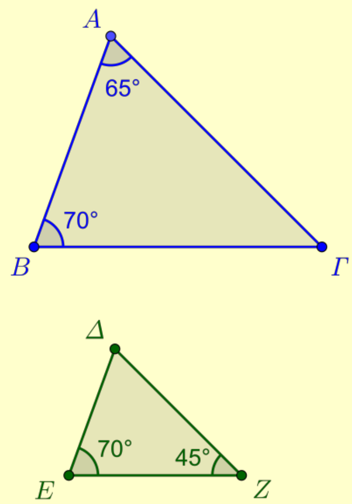
(β)



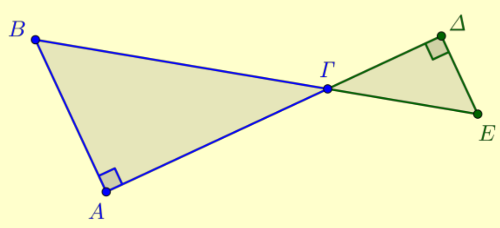
(γ)



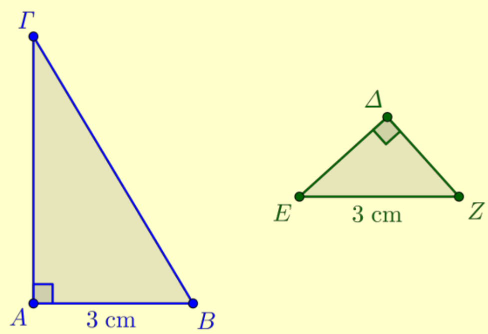
(δ)



(ε)

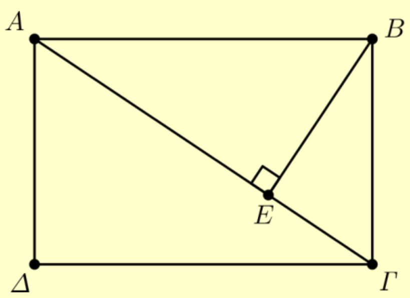


(στ)

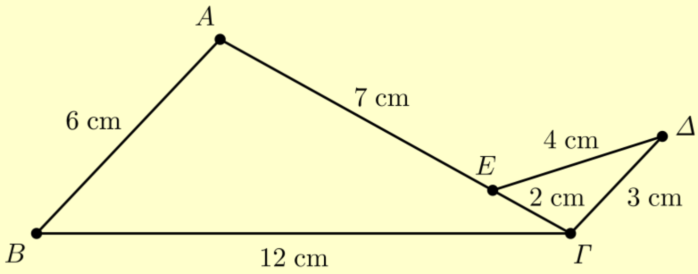


4. Ο Χαράλαμπος έχει ύψος $1{,}70\ \text{m}$. Αν η σκιά του είναι $2\ \text{m}$ και η σκιά ενός ανεμόμυλου την ίδια στιγμή είναι $7\ \text{m}$, να βρείτε το ύψος του ανεμόμυλου.
(Είναι γνωστό από τη φυσική ότι οι ακτίνες του ήλιου είναι παράλληλες).

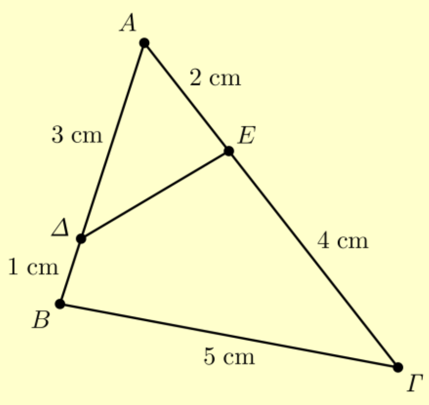
5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $ΒΓ = 6\ \text{cm}$ και $ΑΓ = 9\ \text{cm}$. Από το σημείο $Β$ φέρουμε κάθετη στην $ΑΓ$, η οποία τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο $Ε$. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $ΓΕ$.



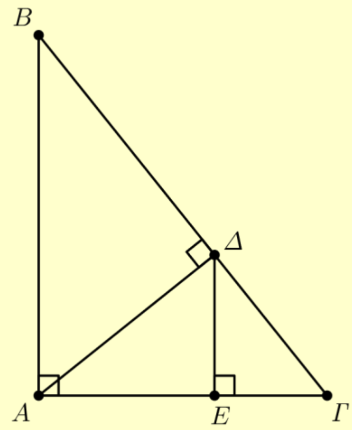
6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι $ΑΒ = 6\ \text{cm}$, $ΒΓ = 12\ \text{cm}$, $ΑΕ = 7\ \text{cm}$, $ΕΓ = 2\ \text{cm}$, $ΔΓ = 3\ \text{cm}$ και $ΕΔ = 4\ \text{cm}$. Να αποδείξετε ότι $ΑΒ \parallel ΓΔ$.



7. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι $ΑΔ = 3\ \text{cm}$, $ΒΔ = 1\ \text{cm}$, $ΑΕ = 2\ \text{cm}$, $ΓΕ = 4\ \text{cm}$ και $ΒΓ = 5\ \text{cm}$. Να υπολογίσετε το μήκος του $ΔΕ$.



8. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma\ (\hat{A}=90°)$, $A\Delta$ ύψος και $\Delta E \perp A\Gamma$ (E σημείο στην $A\Gamma$).



Να δείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta E$ είναι όμοια

(β) $(A\Delta)^2 = (AB)(\Delta E)$.

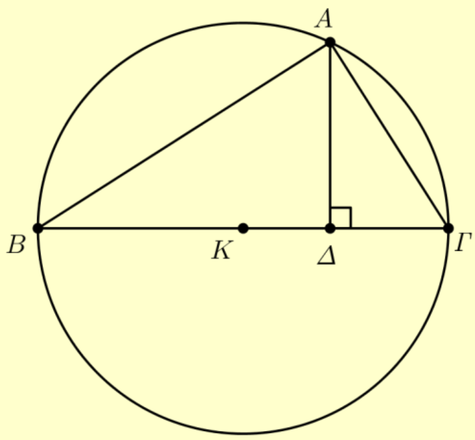
9. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τα ύψη $A\Delta$ και BE. Αν H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, να δείξετε ότι:

(α) $(HA)(H\Delta) = (HB)(HE)$

(β) $(\Gamma A)(\Gamma E) = (\Gamma B)(\Gamma\Delta)$

10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) και σημείο A αυτού. Από το σημείο A φέρουμε κάθετη $A\Delta$ σε διάμετρο $B\Gamma$ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:

$$(A\Gamma)^2 = (B\Gamma)(\Delta\Gamma)$$



11. Δίνεται κύκλος (K, R) και δύο παράλληλες χορδές του AB και ΔE. Στο σημείο B φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, που τέμνει την προέκταση της ΔE στο σημείο Γ. Να αποδείξετε ότι $(B\Delta)^2 = (BA)(\Delta\Gamma)$.

12. Δίνεται κύκλος (K, R) με διάμετρο AB και χορδή $A\Gamma$. Από τυχαίο σημείο Δ της $A\Gamma$ φέρουμε την ΔE κάθετη στην AB. Αν η προέκταση της $B\Gamma$ τέμνει την εφαπτομένη του κύκλου στο A στο σημείο Z, να δείξετε ότι:
    (α) τα τρίγωνα ABZ και $A\Delta E$ είναι όμοια
    (β) $(AE)(BZ) = (A\Delta)(AZ)$

13. Να δείξετε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

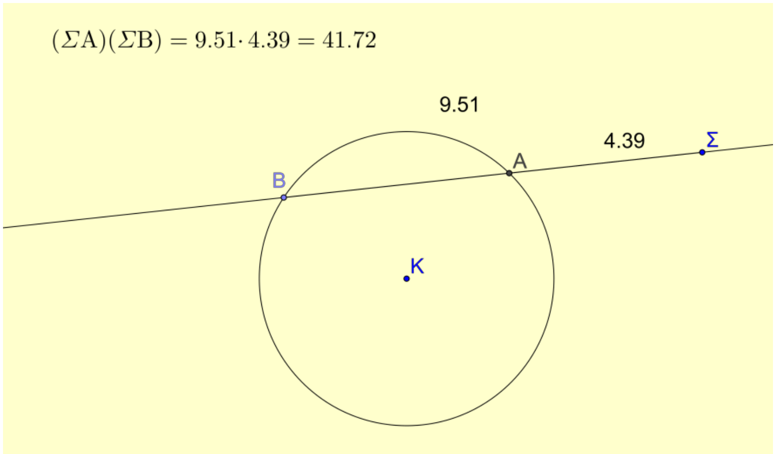
14. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $\left(\hat{A} = 90°\right)$ φέρουμε το ύψος $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις, οι οποίες είναι γνωστές ως **μετρικές σχέσεις** σε ορθογώνιο τρίγωνο.
    (α) $(A\Delta)^2 = (\Delta\Gamma)(\Delta B)$
    (β) $(AB)^2 = (B\Delta)(B\Gamma)$
    (γ) $(A\Gamma)^2 = (\Gamma\Delta)(\Gamma B)$
    (δ) $(A\Delta)(B\Gamma) = (A\Gamma)(AB)$
    (ε) $(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = (B\Gamma)^2$

6.4 ΔΥΝΑΜΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟ

Διερεύνηση

Να κατασκευάσετε έναν κύκλο (K, R). Από σημείο Σ εκτός του κύκλου να φέρετε τέμνουσα ΣAB του κύκλου ($\Sigma A < \Sigma B$).

Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En06_DinamiSimiou.ggb»*.



- Να μετρήσετε τις αποστάσεις ΣA και ΣB.
- Να υπολογίσετε το γινόμενο $(\Sigma A).(\Sigma B)$.

Θέση του σημείου Σ ως προς τον κύκλο	$(\boldsymbol{\Sigma A})$	$(\boldsymbol{\Sigma B})$	$(\boldsymbol{\Sigma A})(\boldsymbol{\Sigma B})$

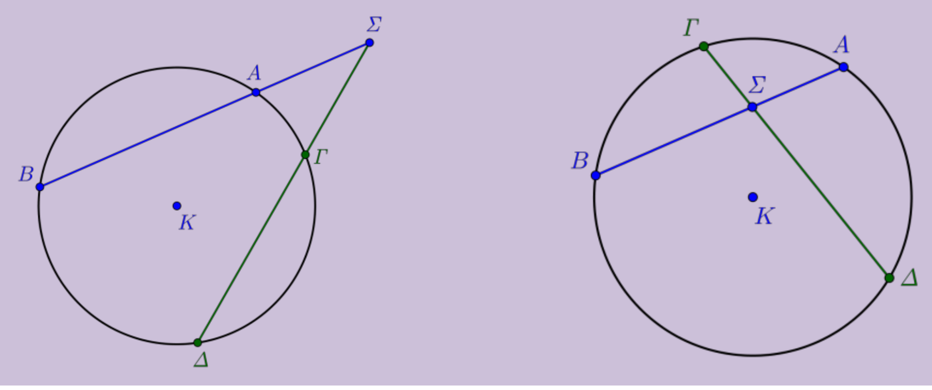
(α) Να μετακινήσετε το σημείο B σε διάφορες θέσεις και να συμπληρώσετε τον πιο πάνω πίνακα.
(β) Να μετακινήσετε το σημείο B, ώστε να συμπίπτει με το σημείο A.
(γ) Τι παρατηρείτε για το γινόμενο $(\Sigma A) \cdot (\Sigma B)$;

- Να μετακινήσετε το σημείο Σ εντός του κύκλου και να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία.

Θεώρημα

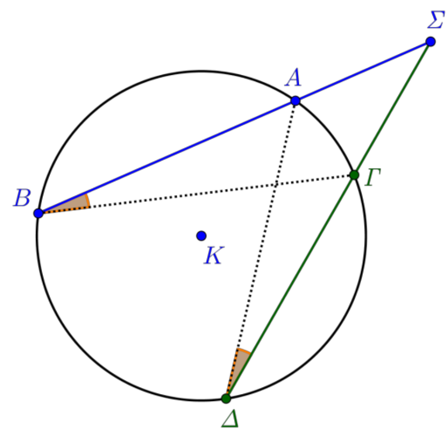
Αν δύο χορδές $AB, ΓΔ$ ενός κύκλου (ή οι προεκτάσεις τους) τέμνονται σε ένα σημείο $Σ$, τότε ισχύει:

$$(ΣA)(ΣB) = (ΣΓ)(ΣΔ)$$



Απόδειξη

Περίπτωση 1: Το σημείο Σ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.



Συγκρίνω τα τρίγωνα $ΣAΔ$ και $ΣΓB$. Ισχύει ότι:

- $A\hat{Σ}Γ$ κοινή γωνία
- $\hat{Δ} = \hat{B}$ (εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο τόξο $AΓ$)

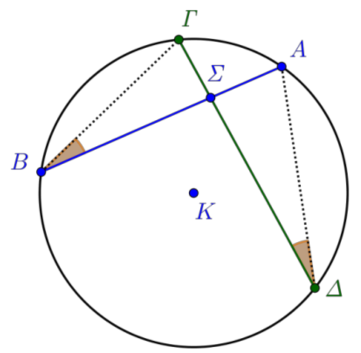
Έτσι, τα τρίγωνα $ΣAΔ$ και $ΣΓB$ είναι όμοια.

(Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.)

Σε όμοια τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ομόλογες πλευρές. Ισχύει:

$$Δ\overset{\triangle}{A}Σ \approx B\overset{\triangle}{Γ}Σ \Rightarrow \frac{ΣA}{ΣΓ} = \frac{ΣΔ}{ΣB} = \frac{ΔA}{BΓ} \Rightarrow (ΣA)(ΣB) = (ΣΓ)(ΣΔ)$$

Περίπτωση 2: Το σημείο Σ βρίσκεται μέσα στον κύκλο.



Συγκρίνω τα τρίγωνα $\Sigma A\Delta$ και $\Sigma\Gamma B$.

- $\Delta\hat{\Sigma}A = B\hat{\Sigma}\Gamma$ (κατακορυφήν γωνίες)
- $\hat{\Delta} = \hat{B}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο τόξο $A\Gamma$)

Έτσι, τα τρίγωνα $\Sigma A\Delta$ και $\Sigma\Gamma B$ είναι όμοια.
(Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.)

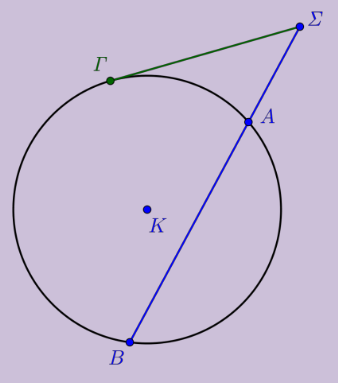
Σε όμοια τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ομόλογες πλευρές. Ισχύει:

$$\overset{\triangle}{\Delta A\Sigma} \approx \overset{\triangle}{B\Gamma\Sigma} \Rightarrow \frac{\Sigma\Gamma}{\Sigma A} = \frac{\Sigma B}{\Sigma\Delta} = \frac{\Delta A}{B\Gamma} \Rightarrow (\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)(\Sigma\Delta)$$

Παρατήρηση
Το γινόμενο $(\Sigma A)(\Sigma B)$ είναι σταθερό. Δηλαδή, δεν εξαρτάται από τη θέση της τέμνουσας ΣAB ή $A\Sigma B$, αντίστοιχα.

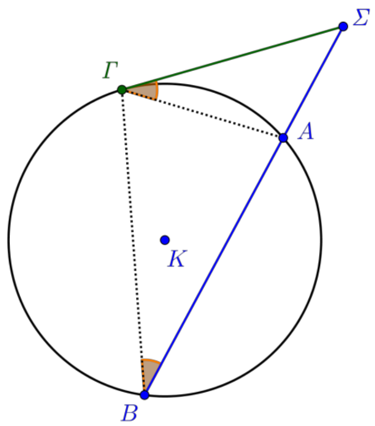
Θεώρημα
Αν ΣAB είναι μια τέμνουσα του κύκλου (K, R) και $\Sigma\Gamma$ είναι ένα εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το σημείο Σ, τότε:

$$(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)^2$$



Απόδειξη

Συγκρίνω τα τρίγωνα $ΣΑΓ$ και $ΣΓΒ$.



Έχουμε ότι:

- $B\hat{\Sigma}\Gamma$ κοινή γωνία
- $\Sigma\hat{\Gamma}A = \Sigma\hat{B}\Gamma$ (Θεώρημα Χορδής Εφαπτομένης)

Έτσι, τα τρίγωνα $ΣΑΓ$ και $ΣΓΒ$ είναι όμοια.

(Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.)

Σε όμοια τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ομόλογες πλευρές. Ισχύει:

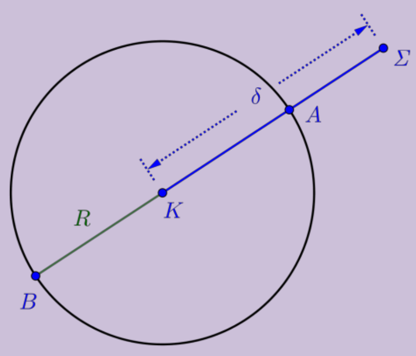
$$\overset{\triangle}{\Sigma\Gamma A} \approx \overset{\triangle}{\Sigma B\Gamma} \Rightarrow \frac{\Sigma\Gamma}{\Sigma B} = \frac{\Sigma A}{\Sigma\Gamma} = \frac{\Gamma A}{B\Gamma} \Rightarrow (\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)^2$$

Πόρισμα

Θεωρούμε κύκλο (K, R), ένα σταθερό σημείο Σ και δ την απόσταση του σημείου Σ από το κέντρο K του κύκλου. Δηλαδή, $\delta = (\Sigma K)$.

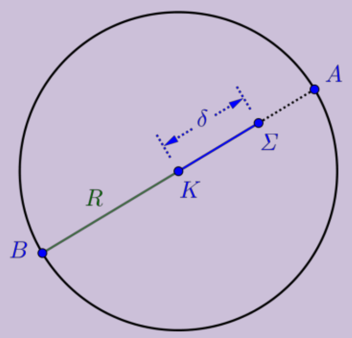
(α) Αν το σημείο Σ βρίσκεται έξω από τον κύκλο, τότε ισχύει η σχέση:

$$(\Sigma A)(\Sigma B) = \delta^2 - R^2$$



(β) Αν το σημείο Σ βρίσκεται μέσα στον κύκλο, τότε ισχύει η σχέση:

$$(\Sigma A)(\Sigma B) = R^2 - \delta^2$$



Απόδειξη

(α) Αν το σημείο Σ βρίσκεται έξω από τον κύκλο, τότε ισχύει $(\Sigma A) = (\Sigma K - AK)$ και $(\Sigma B) = (\Sigma K + KB)$.

Αντικαθιστώντας στο γινόμενο $(\Sigma A)(\Sigma B)$, παίρνουμε ότι:

$$(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma K - KA)(\Sigma K + KB) = (\delta - R)(\delta + R) = \delta^2 - R^2$$

(β) Αν το σημείο Σ βρίσκεται μέσα στον κύκλο, τότε ισχύει $(\Sigma A) = (AK - \Sigma K)$ και $(\Sigma B) = (KB + K\Sigma)$.

Αντικαθιστώντας στο γινόμενο $(\Sigma A)(\Sigma B)$, παίρνουμε ότι:

$$(\Sigma A)(\Sigma B) = (AK - \Sigma K)(KB + \Sigma K) = (R - \delta)(R + \delta) = R^2 - \delta^2$$

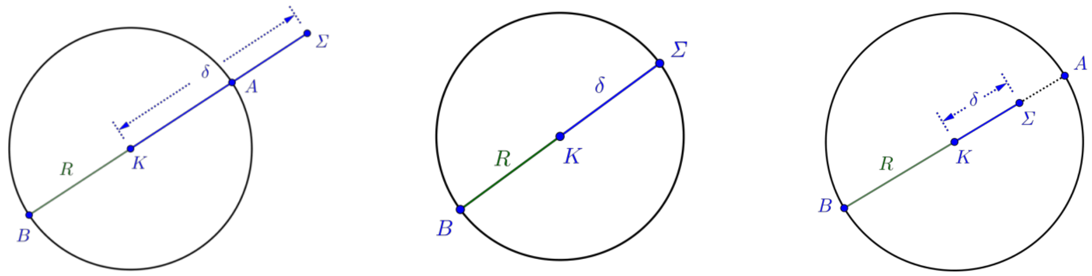
Ορισμός

Δύναμη σημείου Σ ως προς κύκλο (K, R) ονομάζεται ο σταθερός αριθμός $\delta^2 - R^2$, όπου δ είναι η απόσταση του σημείου Σ από το κέντρο K του κύκλου, και συμβολίζεται ως $\Delta_\kappa(\Sigma)$. Δηλαδή:

$$\Delta_\kappa(\Sigma) = \delta^2 - R^2$$

Σημείωση

Με τη δύναμη σημείου ως προς κύκλο μπορούμε να καθορίσουμε τη θέση του σημείου σε σχέση με τον κύκλο.



Θέση σημείου Σ ως προς κύκλο (K, R)

Αν δ είναι η απόσταση ενός τυχαίου σημείου Σ από το κέντρο κύκλου που έχει ακτίνα R, τότε:

- $\Delta_\kappa(\Sigma) > 0 \Leftrightarrow$ Το σημείο Σ βρίσκεται έξω από τον κύκλο (K, R).
- $\Delta_\kappa(\Sigma) = 0 \Leftrightarrow$ Το σημείο Σ ανήκει στον κύκλο (K, R).
- $\Delta_\kappa(\Sigma) < 0 \Leftrightarrow$Το σημείο Σ βρίσκεται μέσα στον κύκλο (K, R).

Η απόδειξη να γίνει από τους μαθητές.

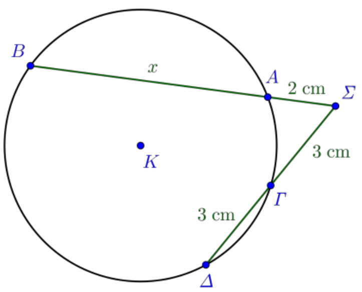
Παράδειγμα 1

Από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρνουμε τις τέμνουσες ΣAB και $\Sigma\Gamma\Delta$. Αν $(AB) = x$ cm, $(\Sigma A) = 2$ cm, $(\Sigma\Gamma) = (\Gamma\Delta) = 3$ cm, να υπολογίσετε το μήκος x του AB.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)(\Sigma\Delta) \Rightarrow 2(x+2) = 3 \cdot 6 \Rightarrow 2x + 4 = 18 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7 \text{ cm}$$



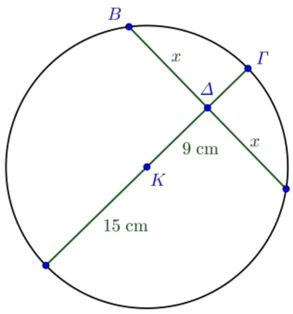
Παράδειγμα 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα μήκους 15 cm. Φέρνουμε χορδή AB που περνά από σημείο Δ, το οποίο απέχει 9 cm από το κέντρο του κύκλου και τέτοιο, ώστε $(B\Delta) = (A\Delta)$. Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής AB.

Λύση

1^{ος} τρόπος

Θέτω $(B\Delta) = (A\Delta) = x$.



Έχουμε ότι:

$$(\Delta A)(\Delta B) = R^2 - \delta^2 \Rightarrow x \cdot x = 15^2 - 9^2 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

2ος τρόπος

Έχουμε ότι:

$$(\Delta\Gamma) = 15 - 9 = 6 \text{ cm}, \quad (\Delta E) = 15 + 9 = 24 \text{ cm}$$

Επομένως:

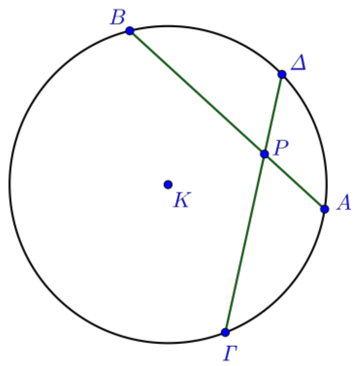
$$(\Delta A)(\Delta B) = (\Delta\Gamma)(\Delta E) \Rightarrow x \cdot x = 6 \cdot 24 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

Παράδειγμα 3

Θεωρούμε κύκλο (O, R) και τις χορδές του $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται στο P. Αν ισχύει η σχέση

$$\frac{PA}{PB} = \frac{P\Delta}{P\Gamma},$$

να αποδείξετε ότι οι χορδές $AB, \Gamma\Delta$ είναι ίσες.



Λύση

Έχουμε ότι:

$$(PA)(PB) = (P\Gamma)(P\Delta) \Rightarrow \frac{PA}{P\Delta} = \frac{P\Gamma}{PB} \quad (1)$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε ότι:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{P\Delta}{P\Gamma} \Rightarrow \frac{PA}{P\Delta} = \frac{PB}{P\Gamma} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), παίρνουμε ότι:

$$\frac{P\Gamma}{PB} = \frac{PB}{P\Gamma} \Rightarrow (PB)^2 = (P\Gamma)^2 \Rightarrow (PB) = (P\Gamma) \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3), παίρνουμε ότι:

$$(PA)(PB) = (P\Gamma)(P\Delta) \Rightarrow (PA) = (P\Delta) \quad (4)$$

Τέλος, από τις σχέσεις (3) και (4), παίρνουμε ότι:

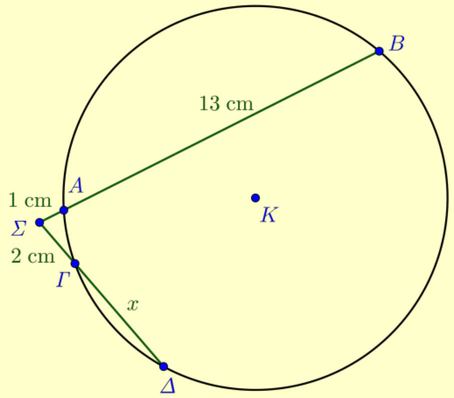
$$(AB) = (PA) + (PB) = (P\Delta) + (P\Gamma) = (\Gamma\Delta)$$

Επομένως, οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι ίσες.

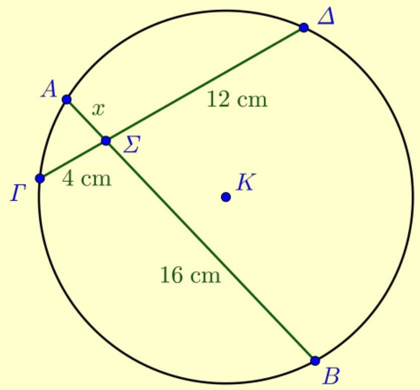
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε την τιμή του αγνώστου στις πιο κάτω περιπτώσεις:

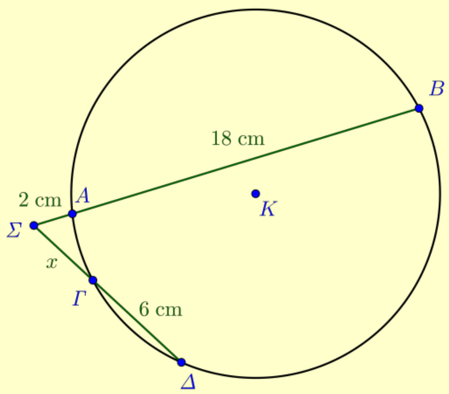
(α) $x =;$



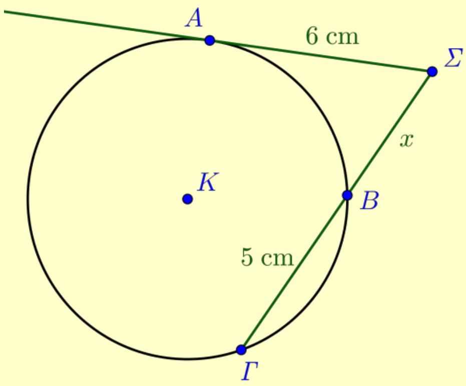
(β) $x =;$



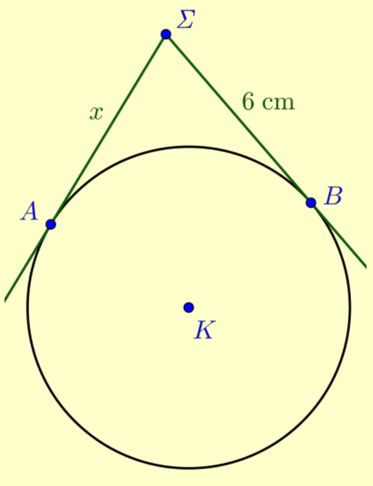
(γ) $x =;$



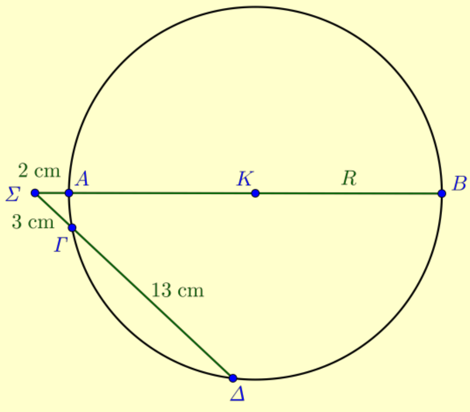
(δ) $x =;$



(ε) $x =;$



(στ) $R =;$



2. Πάνω στην προέκταση της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων παίρνουμε ένα σημείο Σ. Από το Σ φέρουμε εφαπτόμενα τμήματα ΣA και ΣB προς τους δύο κύκλους. Να αποδείξετε ότι $(\Sigma A) = (\Sigma B)$.

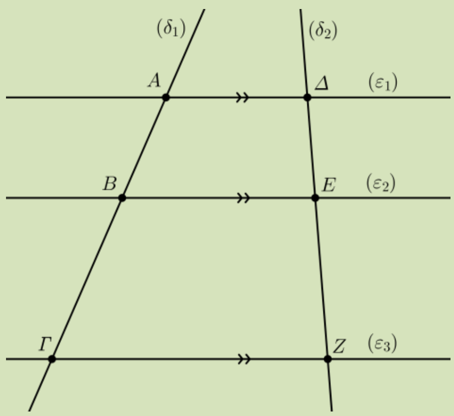
3. Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο T. Από ένα τυχαίο σημείο Σ της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των δύο κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) φέρουμε τέμνουσες ΣAB και $\Sigma\Gamma\Delta$, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)(\Sigma\Delta)$.

4. Πάνω στη διάμετρο $N\Lambda$ κύκλου παίρνουμε δύο σημεία P και Σ που ισαπέχουν από το κέντρο K. Από σημείο M της περιφέρειας φέρουμε τις τέμνουσες MPA και $M\Sigma B$. Να δείξετε ότι:
$$\frac{(MP)}{(M\Sigma)} = \frac{(\Sigma B)}{(PA)}$$

5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Ο κύκλος, ο οποίος διέρχεται από το σημείο A και τα μέσα M, N των πλευρών AB και $A\Gamma$, αντίστοιχα, εφάπτεται της $B\Gamma$ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:
   (α) Το σημείο τομής των MN και $A\Delta$ είναι μέσο της $A\Delta$.
   (β) $(A\Delta)^2 = (\Delta B)(\Delta\Gamma)$

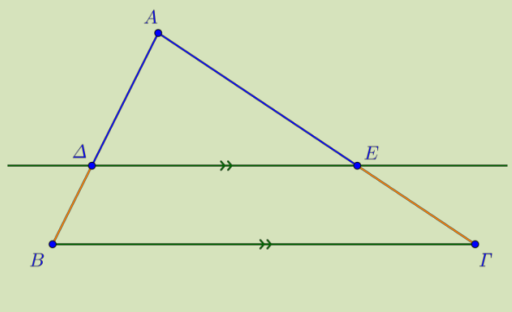
Περίληψη

1. **Θεώρημα Θαλή**
Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται πάνω στη μία ευθεία είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται πάνω στην άλλη ευθεία.
Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα, αν $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$, τότε:
$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$



- Ισχύει και το αντίστροφο του Θεωρήματος Θαλή.
Δηλαδή, αν $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$ και $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$, τότε $\Gamma Z \parallel (\varepsilon_1)$ και $\Gamma Z \parallel (\varepsilon_2)$.

2. **Πόρισμα 1**
Αν ευθείες παράλληλες τέμνουν δύο άλλες ευθείες και ορίζουν ίσα τμήματα πάνω στη μία, τότε ορίζουν ίσα τμήματα και πάνω στην άλλη.
3. **Πόρισμα 2**
Αν μια ευθεία παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ ή τις προεκτάσεις των AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E, αντίστοιχα, τότε οι λόγοι των αντίστοιχων τμημάτων είναι ίσοι. Δηλαδή:
$$\Delta E \parallel B\Gamma \Rightarrow \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}, \ \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}$$



- Ισχύει και το αντίστροφο του πορίσματος.

Δηλαδή, αν $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$, τότε $ΔΕ \parallel ΒΓ$.

4. Δύο πολύγωνα λέγονται όμοια, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
   - Ομόλογες πλευρές δύο όμοιων πολυγώνων λέγονται οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες.
   - Οι κορυφές των ίσων γωνιών δύο όμοιων πολυγώνων λέγονται ομόλογες κορυφές.
   - Οι διάμεσοι, διχοτόμοι και ύψη όμοιων τριγώνων, τα οποία άγονται από ομόλογες κορυφές λέγονται ομόλογες διάμεσοι, ομόλογες διχοτόμοι και ομόλογα ύψη, αντίστοιχα.
5. Λόγος ομοιότητας δύο όμοιων πολυγώνων είναι ο λόγος δύο ομόλογων πλευρών τους και συμβολίζεται με λ.
   - Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε ο λόγος των ομόλογων διαμέσων, ομόλογων διχοτόμων και ομόλογων υψών είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητας λ των δύο τριγώνων.
6. **Πρόταση**

   Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε:

   (α) Ο λόγος των περιμέτρων τους είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους.

   (β) Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.
7. **Πρόταση**

   Γενικά, αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε:

   (α) Ο λόγος των περιμέτρων τους είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους.

   (β) Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.
8. Δύο τρίγωνα λέγονται **όμοια**, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
9. **Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων**.
   - **1^{ο} κριτήριο ομοιότητας τριγώνων**

     Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.
   - **2^{ο} κριτήριο ομοιότητας τριγώνων**

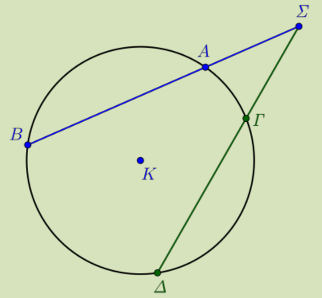
     Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.
   - **3^{ο} κριτήριο ομοιότητας τριγώνων**

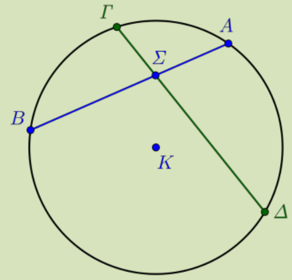
     Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια.

10. **Θεώρημα**

Αν δύο χορδές $AB, \Gamma\Delta$ ενός κύκλου (ή οι προεκτάσεις τους) τέμνονται σε ένα σημείο Σ, τότε ισχύει:

$$(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)(\Sigma\Delta)$$





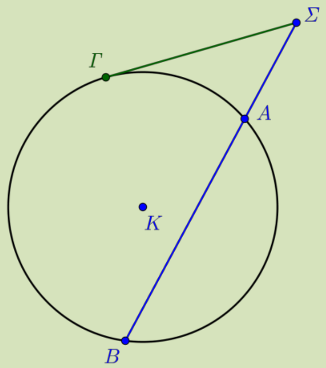
Παρατήρηση

Το γινόμενο $(\Sigma A)(\Sigma B)$ είναι σταθερό. Δηλαδή, δεν εξαρτάται από τη θέση της τέμνουσας ΣAB ή $A\Sigma B$, αντίστοιχα.

11. **Θεώρημα**

Αν ΣAB είναι μια τέμνουσα του κύκλου (K, R) και $\Sigma\Gamma$ είναι ένα εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το σημείο Σ, τότε:

$$(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)^2$$

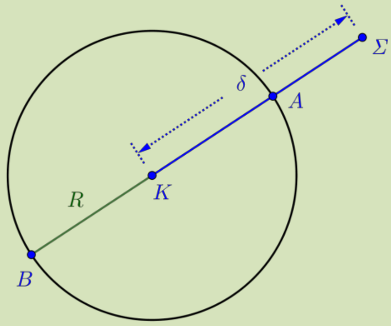


12. **Πόρισμα**

Θεωρούμε κύκλο (K, R), ένα σταθερό σημείο Σ και δ την απόσταση του σημείου Σ από το κέντρο K του κύκλου. Δηλαδή, $\delta = (\Sigma K)$.

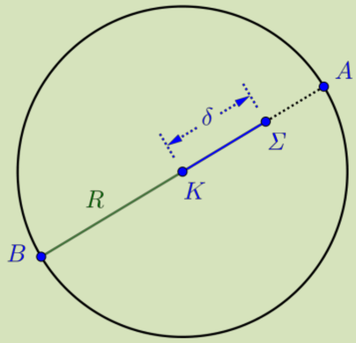
(α) Αν το σημείο Σ βρίσκεται έξω από τον κύκλο, τότε ισχύει η σχέση:

$$(\Sigma A)(\Sigma B) = \delta^2 - R^2$$



(β) Αν το σημείο Σ βρίσκεται μέσα στον κύκλο, τότε ισχύει η σχέση:

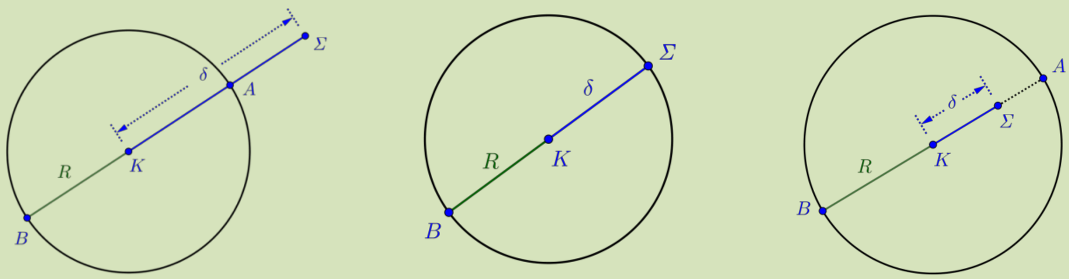
$$(\Sigma A)(\Sigma B) = R^2 - \delta^2$$



13. **Δύναμη σημείου** Σ ως προς κύκλο (κ) με ακτίνα R ονομάζεται ο σταθερός αριθμός $\delta^2 - R^2$, όπου δ είναι η απόσταση του σημείου Σ από το κέντρο K του κύκλου, και συμβολίζεται ως $\Delta_\kappa(\Sigma)$. Δηλαδή:

$$\Delta_\kappa(\Sigma) = \delta^2 - R^2$$

14. Με τη δύναμη σημείου ως προς κύκλο μπορούμε να καθορίσουμε τη θέση του σημείου σε σχέση με τον κύκλο.



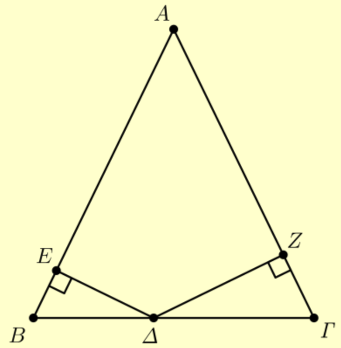
Θέση σημείου Σ ως προς κύκλο (K, R)

Αν δ είναι η απόσταση ενός τυχαίου σημείου Σ από το κέντρο κύκλου που έχει ακτίνα R, τότε:

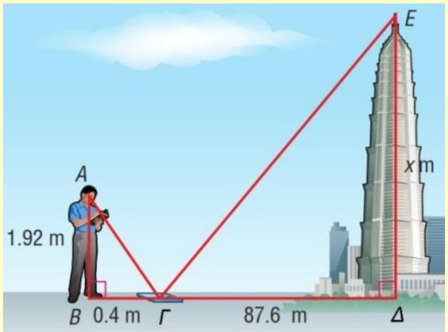
- $\Delta_\kappa(\Sigma) > 0 \Leftrightarrow$ Το σημείο Σ βρίσκεται έξω από τον κύκλο (K, R).
- $\Delta_\kappa(\Sigma) = 0 \Leftrightarrow$ Το σημείο Σ ανήκει στον κύκλο (K, R).
- $\Delta_\kappa(\Sigma) < 0 \Leftrightarrow$Το σημείο Σ βρίσκεται μέσα στον κύκλο (K, R).

Δραστηριότητες Ενότητας

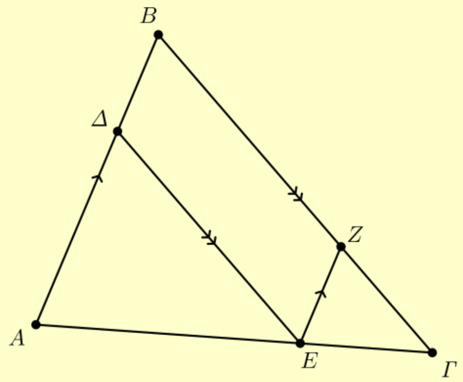
1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Από τυχαίο σημείο $Δ$ της $ΒΓ$ φέρουμε τη $ΔΕ$ κάθετη στην $ΑΒ$ και τη $ΔΖ$ κάθετη στην $ΑΓ$. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $ΒΔΕ$ και $ΓΔΖ$ είναι όμοια.



2. Ο Λίνος παρατηρεί μέσα από έναν καθρέφτη την κορυφή ενός κτηρίου, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το ύψος του κτηρίου.



3. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και σημεία $Δ, Ε$ και $Ζ$ πάνω στις πλευρές του $ΑΒ, ΑΓ$ και $ΒΓ$, αντίστοιχα, ώστε $ΔΕ \parallel ΒΓ$ και $ΕΖ \parallel ΑΒ$. Αν $ΑΒ = 15 \text{ m}$, $ΑΔ = 10 \text{ m}$ και $ΒΓ = 20 \text{ m}$, τότε να υπολογίσετε το μήκος του $ΒΖ$.

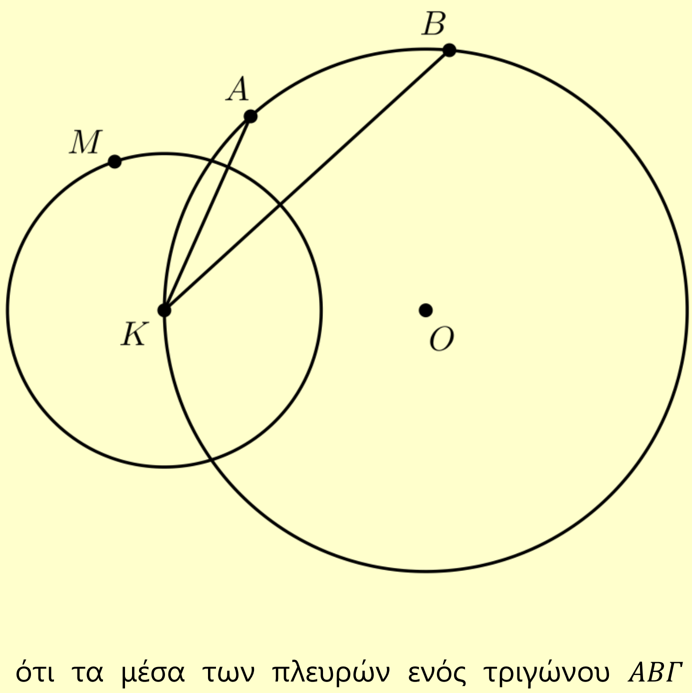


4. Στη διαγώνιο $B\Delta$ ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε σημείο P, ώστε το BP να είναι τετραπλάσιο του ΔP. Αν η ευθεία ΓP τέμνει την $A\Delta$ στο σημείο E, να δείξετε ότι:
$$(EP) = \frac{1}{5}(E\Gamma)$$

5. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$. Αν οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα, να αποδείξετε ότι:
$$(A\Delta)^2 = (\Delta\Gamma)(AB)$$

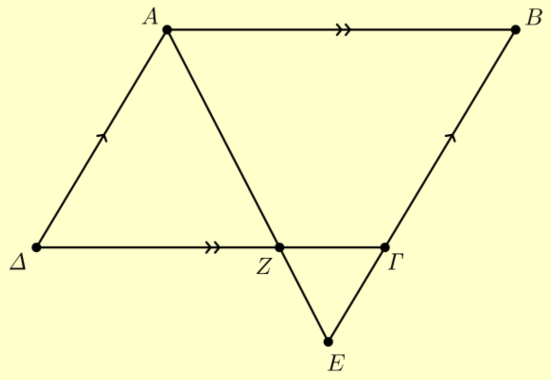
6. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R). Αν η AE είναι η κάθετη από το A στη $B\Delta$ και επιπλέον ισχύει ότι
$$\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{\Gamma\Delta}{EB}$$
να δείξετε ότι η $A\Gamma$ είναι διάμετρος.

7. Ένας κύκλος (O, ρ) διέρχεται από το κέντρο κύκλου (K, R). Αν η εφαπτομένη του κύκλου (K, R) σε ένα σημείο του M τέμνει τον κύκλο (O, ρ) σε σημεία A και B, να δείξετε ότι το γινόμενο $(KA)(KB)$ είναι σταθερό.



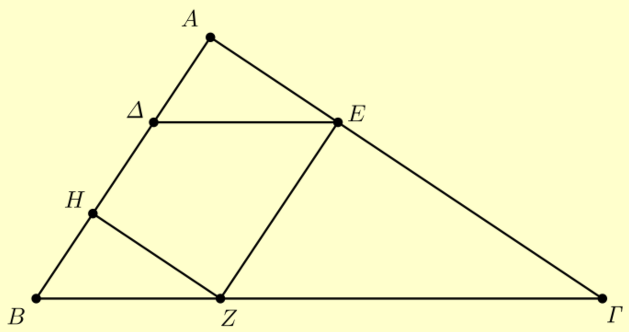
8. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι κορυφές τριγώνου όμοιου με το $AB\Gamma$ και να βρείτε τον λόγο ομοιότητας των δύο τριγώνων.

9. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Από την κορυφή $Α$ φέρουμε ευθεία που τέμνει τη $ΔΓ$ στο σημείο $Ζ$ και την προέκταση της $ΒΓ$ στο $Ε$. Να δείξετε ότι:
   (α) $(ΖΑ)(ΖΓ) = (ΖΔ)(ΖΕ)$
   (β) $(ΑΕ)(ΑΔ) = (ΒΕ)(ΑΖ)$

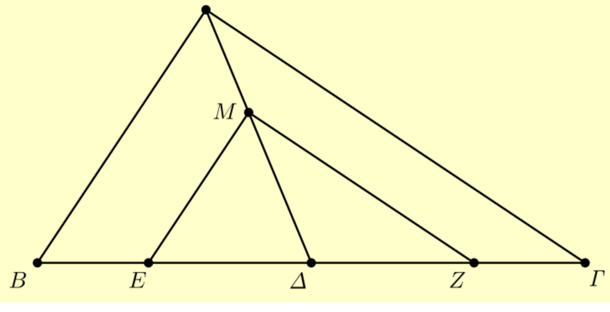


10. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Από σημείο $Δ$ της πλευράς $ΑΒ$ φέρουμε $ΔΕ \parallel ΒΓ$, όπου $Ε$ σημείο της $ΑΓ$. Από το σημείο $Ε$ φέρουμε $ΕΖ \parallel ΑΒ$, όπου $Ζ$ σημείο της $ΒΓ$. Από το σημείο $Ζ$ φέρουμε τη $ΖΗ \parallel ΓΑ$, όπου $Η$ σημείο της $ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{ΗΒ}{ΗΑ}$$



11. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Από σημείο $Μ$ της διαμέσου $ΑΔ$ φέρουμε παράλληλες προς τις $ΑΒ$ και $ΑΓ$, που τέμνουν τη $ΒΓ$ στα σημεία $Ε$ και $Ζ$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
   (γ) $\frac{ΔΕ}{ΔΒ} = \frac{ΔΖ}{ΔΓ}$
   (δ) η $ΜΔ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΜΕΖ$.



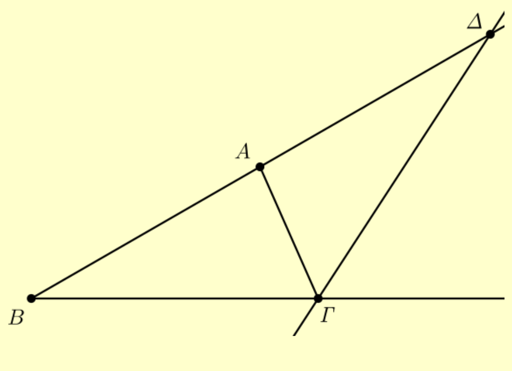
12. Οι διαγώνιοι $ΑΓ$ και $ΒΔ$ του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ \parallel ΓΔ$) τέμνονται στο $Ε$. Αν $ΑΒ = 4\ \mathrm{cm}$, $ΒΔ = 8\ \mathrm{cm}$ και $ΓΔ = 12\ \mathrm{cm}$, να υπολογίσετε το μήκος της $ΒΕ$.

13. Από σημείο $Μ$ που βρίσκεται στην προέκταση της διαμέτρου $ΒΑ$ κύκλου $(Κ, R)$ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $ΜΓ$. Η κάθετος πάνω στη $ΜΑ$ στο σημείο $Μ$ τέμνει την $ΑΓ$ στο $Ε$. Να δείξετε ότι:
$$(ΜΓ)^2 - (ΜΑ)^2 = (ΑΓ)(ΑΕ)$$

14. Από σημείο $Μ$ που βρίσκεται έξω από κύκλο φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα $ΜΑ$ και τέμνουσα $ΜΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:
$$(ΜΓ)(ΑΒ)^2 = (ΜΒ)(ΑΓ)^2$$

15. Δίνεται κύκλος $(Ο, R)$ και η χορδή του $ΑΒ$. Φέρουμε τις εφαπτόμενες $Αx$ και $Βy$ στα σημεία $Α$ και $Β$, αντίστοιχα. Από σημείο $Γ$ του μικρότερου τόξου $ΑΒ$ φέρουμε παράλληλες ευθείες προς την $Αx$ και $Βy$ που τέμνουν την $ΑΒ$ στα σημεία $Δ$ και $Ε$, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:
   (α) τα τρίγωνα $ΑΓΔ$ και $ΓΕΒ$ είναι όμοια
   (β) $(ΓΕ)^2 = (ΑΔ)(ΒΕ)$.

16. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας του τριγώνου τέμνει την προέκταση της απέναντι πλευράς σε ένα σημείο, του οποίου οι αποστάσεις από τα άκρα της πλευράς αυτής είναι ανάλογες προς τις προσκείμενες πλευρές του τριγώνου.
   (Υπόδειξη: Να φέρετε ευθεία παράλληλη από την κορυφή του τριγώνου προς την εξωτερική διχοτόμο, ώστε να τέμνει το τρίγωνο.)



Σημείωση
Το πιο πάνω ονομάζεται «Θεώρημα Εξωτερικής Διχοτόμου» και ισχύει και το αντίστροφό του.

Λύση Προβλήματος

ΠΕΤΡΕΛΑΙΟΚΗΛΙΔΑ

Ένα πετρελαιοφόρο προσέκρουσε σε έναν βράχο στη θάλασσα, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μια τρύπα στις δεξαμενές αποθήκευσης πετρελαίου. Το πετρελαιοφόρο βρισκόταν γύρω στα $65\,\mathrm{km}$ μακριά από την ξηρά. Μετά από μερικές μέρες, το πετρέλαιο εξαπλώθηκε, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

Να εκτιμήσεις, χρησιμοποιώντας την κλίμακα του χάρτη, το εμβαδόν της πετρελαιοκηλίδας σε τετραγωνικά χιλιόμετρα (km^2).

PISA 2012

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Από το $Γ$ φέρουμε τη $ΓΕ \perp ΒΔ$ ($Ε$ σημείο της $ΒΔ$). Η προέκταση της $ΓΕ$ τέμνει την $ΑΒ$ στο $Η$ και την προέκταση της $ΔΑ$ στο $Ζ$. Να αποδείξετε ότι:
   (α) $\frac{ΒΕ}{ΕΗ} = \frac{ΕΖ}{ΕΔ}$
   (β) $(ΓΕ)^2 = (ΕΗ)(ΕΖ)$

2. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ = 2α$ και $ΒΓ = α$. Από το $Α$ φέρουμε κάθετη στη διαγώνιο $ΒΔ$, που τέμνει τη $ΔΓ$ στο $Ε$. Να δείξετε ότι $(ΔΓ) = 4\,(ΔΕ)$.

3. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η διχοτόμος $ΑΔ$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο $Τ$, έτσι ώστε $(ΑΔ)^2 = (ΔΒ)(ΔΓ)$. Να αποδείξετε ότι $(ΑΤ)^2 = 2\,(ΤΓ)^2$.

4. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η διάμεσος $ΑΜ$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο $Τ$, έτσι ώστε $β^2 + γ^2 = 2α^2$. Να αποδείξετε ότι $6(ΜΤ) = α\sqrt{3}$.

5. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και οι διάμεσοί του $ΒΔ$ και $ΓΕ$. Αν $Ο$ είναι το σημείο τομής των διαμέσων, να αποδείξετε ότι:
   (α) $(ΒΟ) = 2(ΔΟ)$
   (β) $\frac{ΓΕ}{ΓΟ} = \frac{3}{2}$

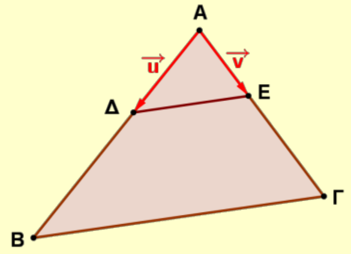
6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $\left(\hat{Α} = 90°\right)$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $(Ο, R)$. Κατασκευάζουμε το ύψος του τριγώνου $ΑΔ$. Ευθεία που διέρχεται από το $Γ$ τέμνει το ύψος $ΑΔ$ σε ένα σημείο $Τ$ και τον κύκλο στο σημείο $Ρ$. Να αποδείξετε ότι:
$$(ΓΤ)(ΓΡ) = (ΓΑ)^2$$

7. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Φέρουμε τη διχοτόμο $ΑΔ$, τη διάμεσο $ΑΜ$ και τον περιγεγραμμένο κύκλο $(κ)$ του τριγώνου $ΑΔΜ$. Αν $Ε, Ζ$ είναι τα σημεία τομής των $ΑΒ$ και $ΑΓ$ με τον κύκλο $(κ)$, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $(ΒΕ) = (ΓΖ)$.

8. Θεωρούμε κύκλο $(Ο, R)$ και τις χορδές του $ΑΒ, ΓΔ$ που τέμνονται στο σημείο $Ρ$. Αν ισχύει ότι $(ΡΑ)(ΡΔ) = (ΡΒ)(ΡΓ)$, να αποδείξετε ότι οι χορδές $ΑΒ, ΓΔ$ είναι ίσες.

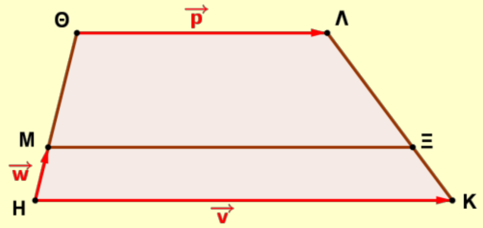
9. Να αποδείξετε ότι η προέκταση της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων διχοτομεί κάθε κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους.

10. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΔ = \frac{1}{3}(ΑΒ)$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}(ΑΓ)$. Αν $\overrightarrow{ΑΔ} = \vec{u}$ και $\overrightarrow{ΑΕ} = \vec{v}$, να υπολογίσετε συναρτήσει του $\vec{u}$ και $\vec{v}$ τα πιο κάτω (το σχέδιο δεν είναι σε κλίμακα).
(α) $\overrightarrow{ΔΕ}$
(β) $\overrightarrow{ΑΒ}$
(γ) $\overrightarrow{ΒΓ}$



11. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται τραπέζιο $ΘΛΚΗ$ με $ΘΛ \parallel ΗΚ$ και $ΜΞ \parallel ΘΛ$. Αν $\overrightarrow{ΘΛ} = \vec{p}$, $\overrightarrow{ΗΚ} = \vec{v}$, $\overrightarrow{ΗΜ} = \vec{w}$, $ΞΚ = 2\text{ cm}$ και $ΚΛ = 6\text{ cm}$, να δείξετε ότι:

$$\overrightarrow{ΜΞ} = \frac{2\vec{v} + \vec{\rho}}{3}$$

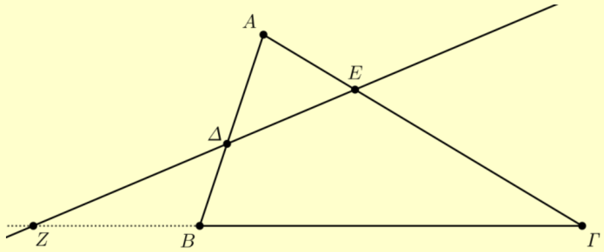


12. Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ \parallel ΓΔ$) και $Μ, Ν$ τα μέσα των $ΑΔ, ΒΓ$, αντίστοιχα. Με τη χρήση διανυσμάτων, να δείξετε ότι:

$$(ΜΝ) = \frac{(ΑΒ) + (ΓΔ)}{2}$$

13. Να αποδείξετε το Θεώρημα Μενελάου:
Αν μια ευθεία τέμνει τις πλευρές $ΑΒ, ΑΓ$ και $ΒΓ$ ενός τριγώνου (ή τις προεκτάσεις τους) στα σημεία $Δ, Ε$ και $Ζ$, αντίστοιχα, τότε ισχύει:

$$\frac{ΒΔ}{ΔΑ} \cdot \frac{ΑΕ}{ΕΓ} \cdot \frac{ΓΖ}{ΖΒ} = 1$$



Υπόδειξη: Να φέρετε $ΒΘ \parallel ΔΕ$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 07

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Έχουμε μάθει ...

- ✓ Να ορίζουμε τη συνάρτηση και να την αναπαριστούμε με πολλαπλούς τρόπους: βελοειδές διάγραμμα, τύπο, πίνακα τιμών, γραφική παράσταση και γράφημα.
- ✓ Να βρίσκουμε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης από τη γραφική της παράσταση.
- ✓ Ότι η εξίσωση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$, ονομάζεται εξίσωση 2^ου^ βαθμού.
- ✓ Ότι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$ είναι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha},$$

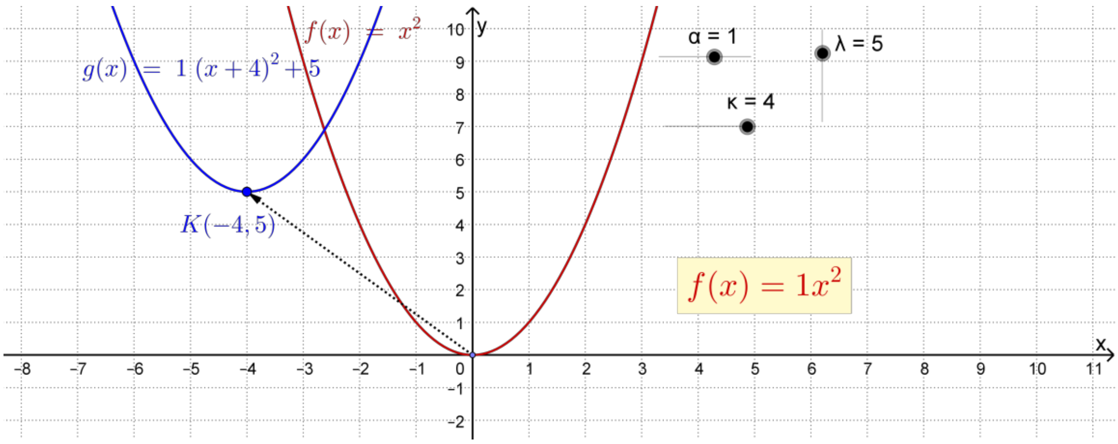
όταν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$.

7.1 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = a(x+\kappa)^2 + \lambda\,,\ a \neq 0$

7.1.1 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2\,,\ a \neq 0$

Διερεύνηση 1

Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En07_Paravoli.ggb»*.



- Να επιλέξετε τους δρομείς *«κ»* και *«λ»* και να δώσετε τις τιμές $\kappa = 0$ και $\lambda = 0$.
- Να δώσετε θετικές τιμές στον δρομέα *«α»*.
  Τι παρατηρείτε για τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g ως προς τη μορφή της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$, σε κάθε περίπτωση;
- Να δώσετε αρνητικές τιμές στον δρομέα *«α»*.
  Τι παρατηρείτε για τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g ως προς τη μορφή της γραφικής παράστασης της $f(x) = -x^2$, σε κάθε περίπτωση;

Ορισμός
Κάθε συνάρτηση f της μορφής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ \ a \neq 0,\ \ x \in \mathbb{R}$ λέγεται **παραβολή**.

- Κάθε συνάρτηση f της μορφής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0,\ x \in \mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί στην μορφή $f(x) = a(x+\kappa)^2 + \lambda,\ \ a \neq 0,\ \ \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

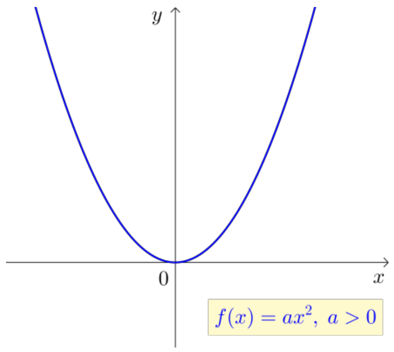
  Για παράδειγμα, η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$ γράφεται:

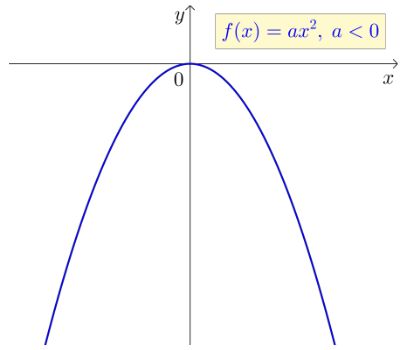
  $$f(x) = 2x^2 + 4x + 1 = 2x^2 + 4x + 2 - 1 = 2(x^2 + 2x + 1) - 1 = 2(x+1)^2 - 1$$

- Αν $\kappa = 0$, $\lambda = 0$, τότε η συνάρτηση f μετατρέπεται στην $f(x) = ax^2,\ \ a \neq 0,\ \ x \in \mathbb{R}$.

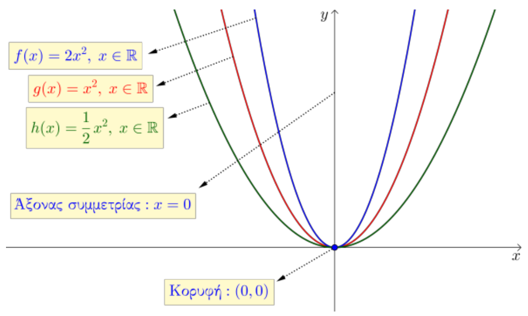
Παρατηρήσεις

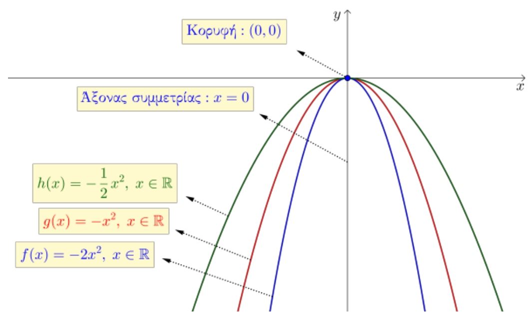
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$, έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των τεταγμένων, ο οποίος ονομάζεται **άξονας** της παραβολής.





- Αν $a > 0$, τότε:
  - το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $[0\,,+\infty)$ και
  - στο $x = 0$ η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή, την $y = 0$, και το σημείο με συντεταγμένες $(0,0)$ λέγεται **κορυφή** της παραβολής.
- Αν $a < 0$, τότε:
  - το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $(-\infty\,,0]$ και
  - στο $x = 0$ η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή, την $y = 0$, και το σημείο με συντεταγμένες $(0,0)$ λέγεται **κορυφή** της παραβολής.
- Η καμπύλη «πλησιάζει» τον άξονα των y, καθώς οι τιμές του $|a|$ αυξάνονται.





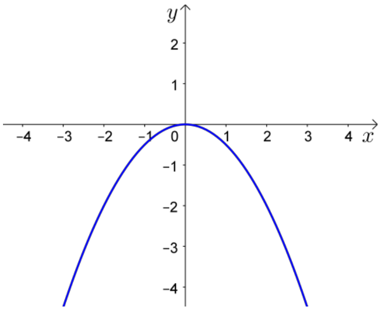
Για παράδειγμα, στα πιο πάνω σχήματα:

- *Οι συναρτήσεις $y = f(x), y = g(x)$ και $y = h(x)$ με τύπο $f(x) = 2x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x \in \mathbb{R}$, αντίστοιχα, παρουσιάζουν ελάχιστη τιμή για $x = 0$, την $y_{\min} = 0$.*
- *Οι συναρτήσεις $y = f(x), y = g(x)$ και $y = h(x)$ με τύπο $f(x) = -2x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $x \in \mathbb{R}$, αντίστοιχα, παρουσιάζουν ελάχιστη τιμή για $x = 0$, την $y_{\max} = 0$.*

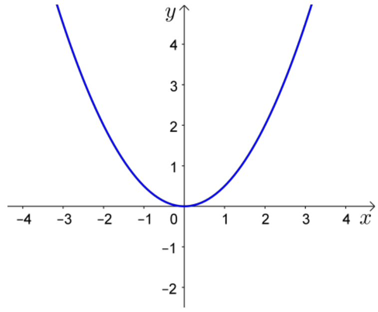
Παράδειγμα 1

Στα πιο κάτω διαγράμματα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις παραβολών με εξίσωση $f(x) = ax^2,\ a \neq 0$.

(α)



(β)



Να βρείτε, σε κάθε περίπτωση, το πρόσημο του a, το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή της παραβολής.

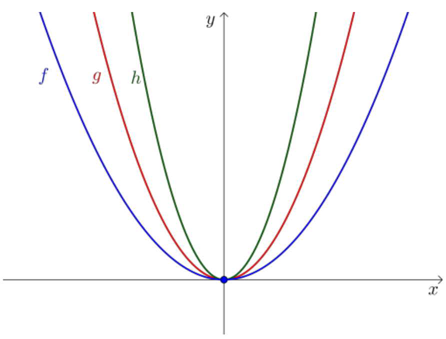
Λύση

(α) Το πρόσημο του a είναι αρνητικό, γιατί η καμπύλη έχει μέγιστη τιμή. Το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, 0]$, αφού η καμπύλη παρουσιάζει μέγιστη τιμή, την $y_{\max} = 0$. Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των τεταγμένων $(y'y)$ και κορυφή την αρχή των αξόνων $(0, 0)$.

(β) Το πρόσημο του a είναι θετικό, γιατί η καμπύλη έχει ελάχιστη τιμή. Το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών είναι το $[0, +\infty)$, αφού η καμπύλη παρουσιάζει ελάχιστη τιμή, την $y_{\min} = 0$. Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των τεταγμένων $(y'y)$ και κορυφή την αρχή των αξόνων $(0, 0)$.

Παράδειγμα 2

Στο πιο κάτω διάγραμμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις παραβολών με εξισώσεις $f(x) = a_1x^2,\ a_1 \neq 0$, $g(x) = a_2x^2,\ a_2 \neq 0$ και $h(x) = a_3x^2,\ a_3 \neq 0$.



Να επιλέξετε την ορθή απάντηση, δικαιολογώντας πλήρως την επιλογή σας.

(α) $a_1 > a_2 > a_3$ (β) $a_1 < a_2 < a_3$ (γ) $a_2 > a_1 > a_3$ (δ) $a_3 > a_1 > a_2$

Λύση

Παρατηρούμε ότι όλες οι καμπύλες είναι της μορφής $y = ax^2$, όπου $a > 0$. Η ορθή απάντηση είναι το (β), αφού η καμπύλη $y = ax^2$, $a > 0$ «πλησιάζει» τον άξονα των τεταγμένων όσο οι τιμές του a αυξάνονται.

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η παραβολή με εξίσωση $y = (\lambda - 3)x^2$, $x \in \mathbb{R}$, να:

(α) διέρχεται από το σημείο $(-1, 2)$

(β) παρουσιάζει ελάχιστη τιμή

(γ) παρουσιάζει μέγιστη τιμή.

Λύση

(α) Οι συντεταγμένες του σημείου $(-1, 2)$ επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής. Επομένως, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{r} y = (\lambda - 3)x^2 \\ (-1, 2) \end{array}\right\} \Longrightarrow 2 = (\lambda - 3)(-1)^2 \Longrightarrow 2 = \lambda - 3 \Longrightarrow \lambda = 2 + 3 \Longrightarrow \lambda = 5$$

(β) Η παραβολή $y = ax^2$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή, όταν $a > 0$. Επομένως, έχουμε:

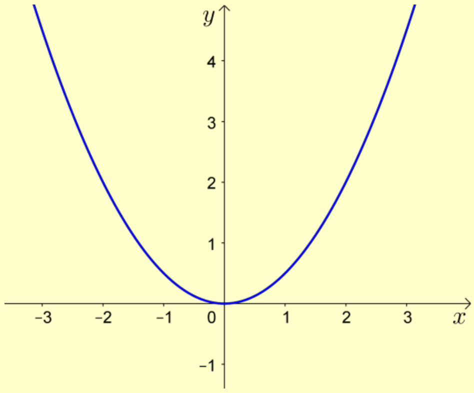
$$\lambda - 3 > 0 \Rightarrow \lambda > 3$$

(γ) Η παραβολή $y = ax^2$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή, όταν $a < 0$. Επομένως, έχουμε:

$$\lambda - 3 < 0 \Rightarrow \lambda < 3$$

Δραστηριότητες

1. Στο πιο κάτω διάγραμμα, δίνεται η γραφική παράσταση παραβολής με εξίσωση $y = f(x) = ax^2,\ a \neq 0$.



Να βρείτε:

(α) το πρόσημο του a

(β) το πεδίο ορισμού

(γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας

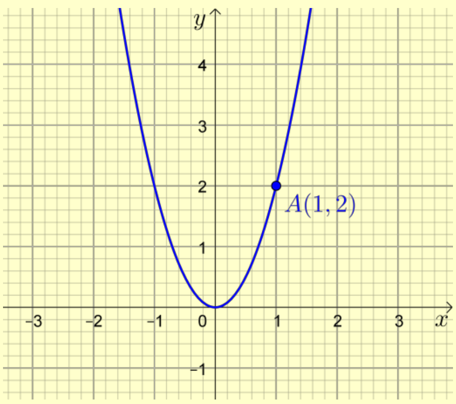
(δ) τις συντεταγμένες της κορυφής

(ε) το σύνολο τιμών της παραβολής.

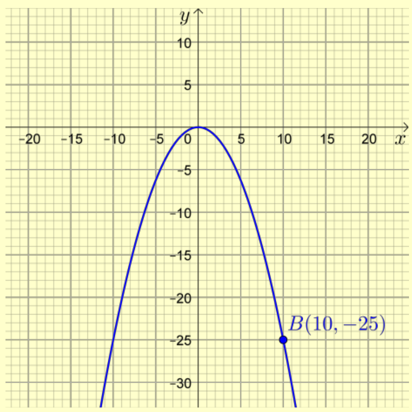
2. Να σχεδιάσετε πρόχειρα στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις παραβολές με εξισώσεις $f(x) = -4x^2,\ x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -2x^2,\ x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = -x^2,\ x \in \mathbb{R}$.

3. Στα πιο κάτω διαγράμματα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις παραβολών με εξίσωση $y = ax^2,\ a \neq 0$.

i.



ii.



Να βρείτε σε κάθε περίπτωση:

(α) την τιμή του a και

(β) τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης με τετμημένη -5.

4. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω παραβολές παρουσιάζουν μέγιστη τιμή και ποιες ελάχιστη τιμή:
   (α) $f(x) = 3x^2$ (β) $f(x) = -5x^2$ (γ) $f(x) = -x^2$

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία η παραβολή με εξίσωση $y = (3\lambda - 12)x^2,\ x \in \mathbb{R}$ να διέρχεται από το σημείο $(2, 12)$.

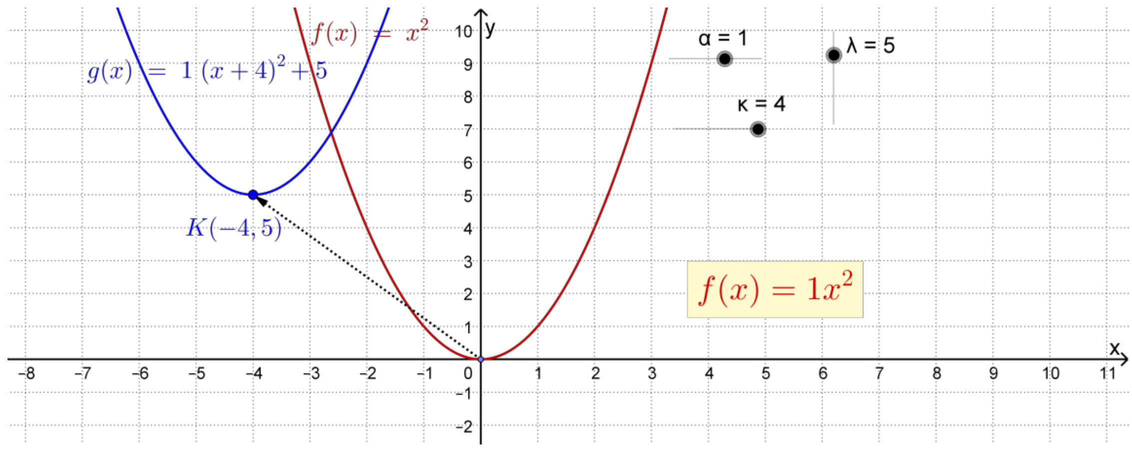
6. Να υπολογίσετε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = (-8\kappa + 16)x^2,\ x \in \mathbb{R}$ να είναι παραβολή και να παρουσιάζει μέγιστη τιμή.

7. Να αναφέρετε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές που παρουσιάζουν τα πιο κάτω ζεύγη παραβολών:
   (α) $f(x) = 2x^2$ και $g(x) = 5x^2$
   (β) $f(x) = -x^2$ και $g(x) = -\frac{2x^2}{3}$

7.1.2 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = a(x+\kappa)^2 + \lambda,\ a \neq 0$

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En07_Paravoli.ggb»*.



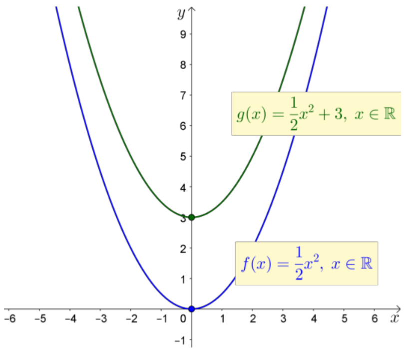
- Να δώσετε τις τιμές $a = 1$, $\kappa = 0$ και να μεταβάλλετε την τιμή του δρομέα «λ». Τι παρατηρείτε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g σε σχέση με τη γραφική παράσταση της f, σε κάθε περίπτωση;
- Να δώσετε τις τιμές $a = -1$, $\kappa = 0$ και να μεταβάλλετε την τιμή του δρομέα «λ». Τι παρατηρείτε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g σε σχέση με τη γραφική παράσταση της f, σε κάθε περίπτωση;
- Να δώσετε τις τιμές $a = 1$, $\lambda = 0$ και να μεταβάλλετε την τιμή του δρομέα «κ». Τι παρατηρείτε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g σε σχέση με τη γραφική παράσταση της f, σε κάθε περίπτωση;
- Να δώσετε τις τιμές $a = -1$, $\lambda = 0$ και να μεταβάλλετε την τιμή του δρομέα «κ». Τι παρατηρείτε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g σε σχέση με τη γραφική παράσταση της f, σε κάθε περίπτωση;
- Να δώσετε την τιμή $a = 1$. Να μεταβάλλετε τις τιμές των δρομέων «κ» και «λ». Τι παρατηρείτε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g σε σχέση με τη γραφική παράσταση της f, σε κάθε περίπτωση;
- Να δώσετε την τιμή $a = -1$. Να μεταβάλλετε τις τιμές των δρομέων «κ» και «λ». Τι παρατηρείτε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g σε σχέση με τη γραφική παράσταση της f, σε κάθε περίπτωση;

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x)=ax^2+\lambda$, με $a\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση κατά $|\lambda|$ μονάδες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=ax^2$, $a\neq 0$.

Παρατηρήσεις

- Αν $\lambda>0$, η κατακόρυφη μετατόπιση είναι λ μονάδες προς τα πάνω.

  Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x)=\frac{1}{2}x^2+3$, $x\in\mathbb{R}$, προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση 3 μονάδων προς τα πάνω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

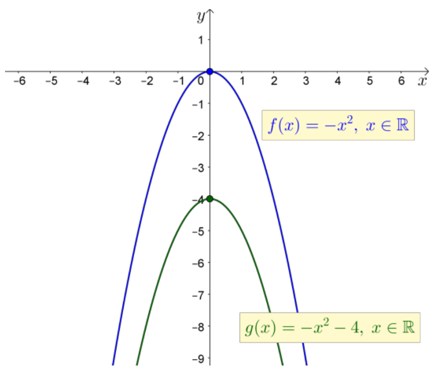


  Η γραφική παράσταση της g με τύπο $g(x)=ax^2+\lambda$ έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(0,\lambda)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x=0$.

  Για παράδειγμα, στο πιο πάνω σχήμα η γραφική παράσταση της g έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(0,3)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x=0$.

- Αν $\lambda<0$, η κατακόρυφη μετατόπιση είναι $|\lambda|$ μονάδες προς τα κάτω.

  Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x)=-x^2-4$, $x\in\mathbb{R}$, προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση 4 μονάδων προς τα κάτω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=-x^2$, $x\in\mathbb{R}$.



Η γραφική παράσταση της g με τύπο $g(x) = ax^2 + \lambda$ έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(0, \lambda)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = 0$.

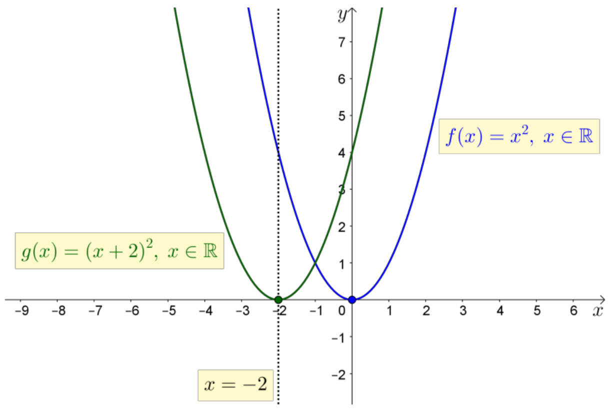
Για παράδειγμα, στο πιο πάνω σχήμα η γραφική παράσταση της g έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(0, -4)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = 0$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = a(x+\kappa)^2$, με $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{R}$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση κατά $|\kappa|$ μονάδες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$.

Παρατηρήσεις

- Αν $\kappa > 0$, η κατακόρυφη μετατόπιση είναι κ μονάδες προς τα αριστερά.

  Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = (x+2)^2$, $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδων προς τα αριστερά της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

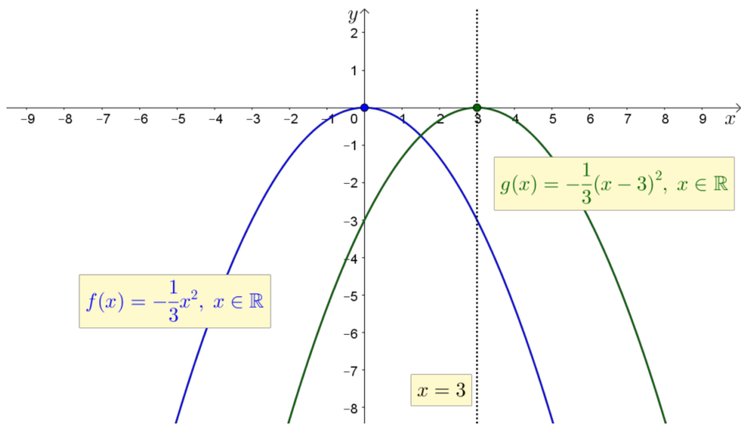


  Η γραφική παράσταση της g με τύπο $g(x) = a(x+\kappa)^2$ έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(-\kappa, 0)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -\kappa$.

  Για παράδειγμα, στο πιο πάνω σχήμα η γραφική παράσταση της g έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(-2, 0)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -2$.

- Αν $\kappa < 0$, η κατακόρυφη μετατόπιση είναι $|\kappa|$ μονάδες προς τα δεξιά.

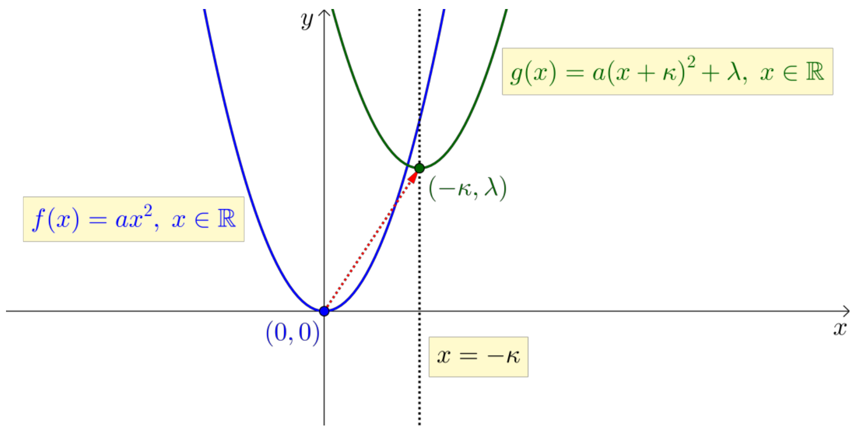
  Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2$, $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση 3 μονάδων προς τα δεξιά της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$, $x \in \mathbb{R}$.



Η γραφική παράσταση της g με τύπο $g(x) = a(x+\kappa)^2$ έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(-\kappa, 0)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -\kappa$.

Για παράδειγμα, στο πιο πάνω σχήμα η γραφική παράσταση της g έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(3, 0)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = 3$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = a(x+\kappa)^2 + \lambda$, με $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ προκύπτει από μετατόπιση κατά $|\kappa|$ μονάδες οριζόντια και κατά $|\lambda|$ μονάδες κατακόρυφα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$. Η γραφική παράσταση της g έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(-\kappa, \lambda)$, άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -\kappa$ και ελάχιστη τιμή λ, όταν $a > 0$ ή μέγιστη τιμή λ, όταν $a < 0$.



Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = 2(x-4)^2 - 3$, $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει από μετατόπιση 4 μονάδων προς τα δεξιά και 3 μονάδων προς τα κάτω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 2x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της g έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(4, -3)$, άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = 4$ και ελάχιστη τιμή, την $y_{\min} = -3$ (αφού $a > 0$).

Παράδειγμα 1

Να αναφέρετε πόσες μονάδες οριζόντια ή κατακόρυφα πρέπει να μετατοπιστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2$, ώστε να προκύψει η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο:

(α) $f_1(x) = x^2 + 2$ (β) $f_2(x) = (x-5)^2$ (γ) $f_3(x) = x^2 + 2x + 3$

Λύση

(α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f_1 με τύπο $f_1(x) = x^2 + 2$ προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδων προς τα πάνω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2$, αφού $\lambda = 2 > 0$.

(β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f_2 με τύπο $f_2(x) = (x-5)^2$ προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση 5 μονάδων προς τα δεξιά της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2$, αφού $\kappa = -5 < 0$.

(γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f_3 με τύπο $f_3(x) = x^2 + 2x + 3$ ή $f_3(x) = (x+1)^2 + 2$ προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση 1 μονάδας προς τα αριστερά και κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδων προς τα πάνω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2$, αφού $\kappa = 1 > 0,\ \lambda = 2 > 0$.

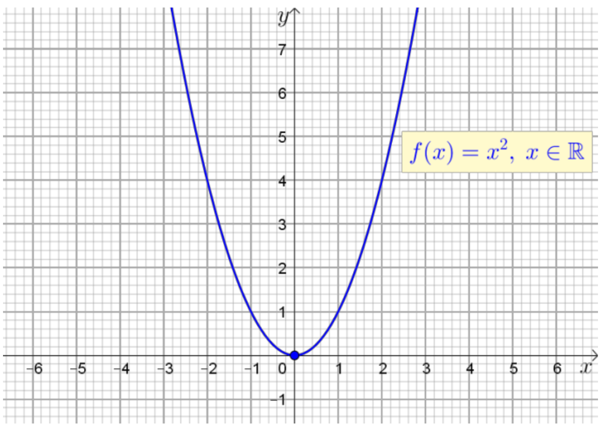
Παράδειγμα 2

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^2$ (β) $g(x) = x^2 + 4$ (γ) $h(x) = -x^2 - 2$

Λύση

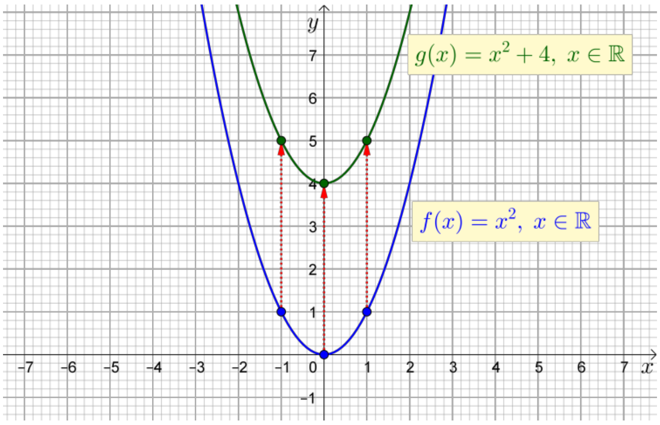
(α) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και ελάχιστη τιμή, την $y_{\min} = 0$.
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(0, 0)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = 0$.



(β) Η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=x^2+4$ προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση 4 μονάδων προς τα πάνω της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=x^2$, αφού $\lambda=4>0$.

Η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=x^2+4$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, σύνολο τιμών το $[4,+\infty)$ και ελάχιστη τιμή, την $y_{\min}=4$.

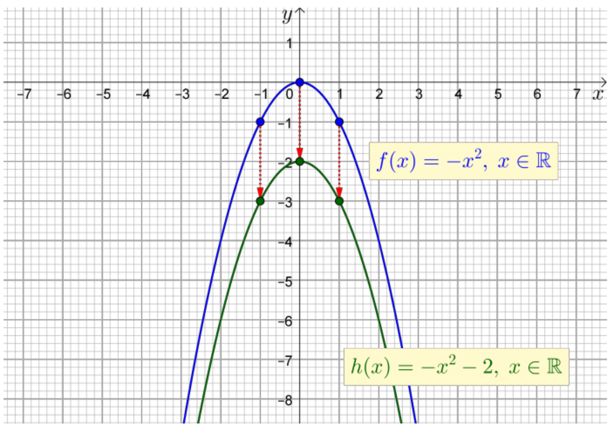
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(0,4)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x=0$.



(γ) Η συνάρτηση h με τύπο $h(x)=-x^2-2$ προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδων προς τα κάτω της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=-x^2$, αφού $\lambda=-2<0$.

Η συνάρτηση h με τύπο $h(x)=-x^2-2$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, σύνολο τιμών το $(-\infty,-2]$ και μέγιστη τιμή, την $y_{\max}=-2$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(0,-2)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x=0$.



Παράδειγμα 3

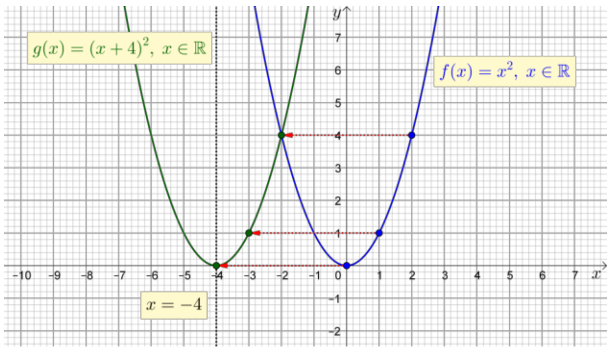
Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = (x+4)^2$.

Λύση

Η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = (x+4)^2$ προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση 4 μονάδων προς τα αριστερά της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2$, αφού $\kappa = 4 > 0$.

Η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = (x+4)^2$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και ελάχιστη τιμή, την $y_{\min} = 0$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(-4, 0)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -4$.



Παράδειγμα 4

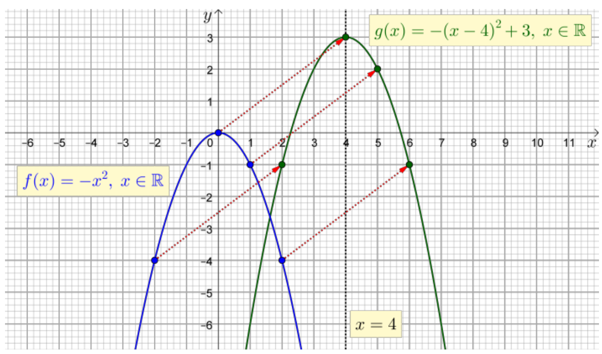
Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = -(x-4)^2 + 3$.

Λύση

Η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = -(x-4)^2 + 3$ προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση 4 μονάδων προς τα δεξιά και 3 μονάδων προς τα πάνω της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = -x^2$, αφού $\kappa = -4 < 0$ και $\lambda = 3 > 0$.

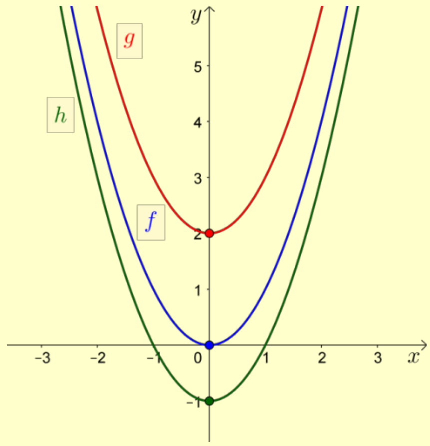
Η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = -(x-4)^2 + 3$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, σύνολο τιμών το $(-\infty, 3]$ και μέγιστη τιμή, την $y_{\max} = 3$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(4, 3)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = 4$.

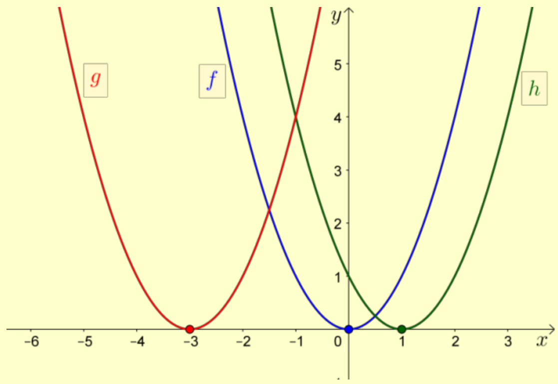


Δραστηριότητες

1. Στο πιο κάτω διάγραμμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και h. Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων g και h, αν η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = x^2$ και οι συναρτήσεις g και h είναι κατακόρυφες μετατοπίσεις της f.



2. Στο πιο κάτω διάγραμμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και h. Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων g και h, αν η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = x^2$ και οι συναρτήσεις g και h είναι οριζόντιες μετατοπίσεις της f.



3. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που προκύπτει από τη μετατόπιση της παραβολής με εξίσωση $y = x^2$ σε καθεμία από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) 2 μονάδες προς τα κάτω (β) 10 μονάδες προς τα πάνω

(γ) 3 μονάδες προς τα κάτω (δ) 0,5 μονάδα προς τα πάνω

4. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που προκύπτει από τη μετατόπιση της παραβολής με εξίσωση $y = -2x^2$ σε καθεμία από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) 1 μονάδα προς τα αριστερά (β) 2 μονάδες προς τα δεξιά

(γ) 4 μονάδες προς τα αριστερά (δ) 0,5 μονάδα προς τα δεξιά

5. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που προκύπτει από τη μετατόπιση της παραβολής με εξίσωση $y = x^2$ σε καθεμία από τις πιο κάτω περιπτώσεις:
   (α) 1 μονάδα προς τα αριστερά και 2 μονάδες προς τα πάνω
   (β) 2 μονάδες προς τα δεξιά και 4 μονάδες προς τα πάνω
   (γ) 3 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα κάτω
   (δ) 5 μονάδες προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα κάτω.

6. Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής των πιο κάτω παραβολών. Στη συνέχεια, να τις παραστήσετε γραφικά.

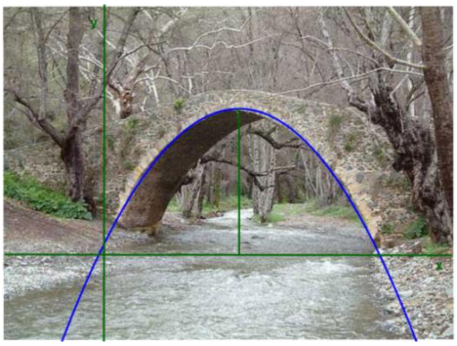
(α)	$f(x) = x^2 + 3$	(β)	$f(x) = x^2 - 4$
(γ)	$f(x) = -x^2 + 1$	(δ)	$f(x) = (x-1)^2 + 3$
(ε)	$f(x) = -(x+1)^2 + 9$	(στ)	$f(x) = 3(x-1)^2 + 7$
(ζ)	$f(x) = (-x-2)^2 + 3$	(η)	$f(x) = x^2 - 4x + 3$
(θ)	$f(x) = -x^2 + 2x + 5$	(ι)	$f(x) = 2x^2 - 6x + 1$

7.2 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$

7.2.1. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$

Διερεύνηση

Στην πιο κάτω εικόνα παρουσιάζεται το γεφύρι του Τζελεφού στο Τρόοδος.



Ο τύπος της παραβολής που εφαρμόζεται στο γεφύρι είναι $y = -0.2x^2 + 2x + 0.4$.
Να υπολογίσετε το ύψος του γεφυριού.

Θεωρούμε συνάρτηση f με τύπο $f(x) = a(x+\kappa)^2 + \lambda$, με $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
Έχουμε:

$$f(x) = a(x+\kappa)^2 + \lambda = a(x^2 + 2\kappa x + \kappa^2) + \lambda = ax^2 + 2a\kappa x + a\kappa^2 + \lambda$$

Η πιο πάνω συνάρτηση γράφεται στη μορφή $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$, όπου:

$$\beta = 2a\kappa, \ \ \gamma = a\kappa^2 + \lambda \qquad (1)$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = a(x+\kappa)^2 + \lambda$ με $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -\kappa$ και κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(-\kappa, \lambda)$. Έτσι, σε συνδυασμό με την (1), έχουμε ότι:

$$\begin{cases} x = -\kappa \\ \beta = 2a\kappa \Rightarrow \kappa = \dfrac{\beta}{2a} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{\beta}{2a}$$

Η παραβολή $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση

$$x = -\frac{\beta}{2a}$$

και κορυφή το σημείο με συντεταγμένες:

$$K\left(-\frac{\beta}{2a}, f\left(-\frac{\beta}{2a}\right)\right)$$

Παρατηρήσεις

- Αν $a > 0$, τότε η παραβολή $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ έχει ελάχιστη τιμή, την $y_{\min} = f\left(-\frac{\beta}{2a}\right)$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $\left[f\left(-\frac{\beta}{2a}\right), +\infty\right)$.

Για παράδειγμα, η παραβολή $f(x) = x^2 + 4x + 3$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -\frac{4}{2\cdot 1} = -2$, ελάχιστη τιμή, την $y_{min} = f(-2) = -1$ και το σύνολο τιμών της είναι το $[-1, +\infty)$.

- Αν $a < 0$, τότε η παραβολή $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ έχει μέγιστη τιμή, την $y_{\max} = f\left(-\frac{\beta}{2a}\right)$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $\left(-\infty, f\left(-\frac{\beta}{2a}\right)\right]$.

  Για παράδειγμα, η παραβολή $f(x) = -2x^2 + 6x - 1$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -\frac{6}{-2\cdot 1} = 3$, μέγιστη τιμή, την $y_{min} = f(3) = -1$ και το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, -1]$.

- Η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ τέμνει τον άξονα των $y'y$ στο σημείο $\big(0, f(0)\big) = (0, \gamma)$.

  Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = -x^2 + x + 5$ τέμνει τον άξονα των $y'y$ στο σημείο $(0, 5)$.

Παράδειγμα 1

Δίνεται η παραβολή $f(x) = 2x^2 + 4x,\ x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας, τις συντεταγμένες της κορυφής της και το σύνολο τιμών της.

Λύση

Για την παραβολή $f(x) = 2x^2 + 4x,\ x \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $a = 2, \beta = 4$ και $\gamma = 0$.
Η εξίσωση του άξονα συμμετρίας είναι:

$$x = -\frac{\beta}{2a} = -\frac{4}{2\cdot 2} - 1$$

Οι συντεταγμένες της κορυφής είναι $\big(-1, f(-1)\big) = (-1, -2)$.
Αφού $a = 2 > 0$, τότε η παραβολή έχει ελάχιστη τιμή, την $y_{\min} = -2$ και το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[-2, +\infty)$.

Παράδειγμα 2

Να εξετάσετε κατά πόσο η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 3 - 2x - x^2,\ x \in \mathbb{R}$ έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή και να την υπολογίσετε.

Λύση

Αφού $a = -1 < 0$, η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή. Για κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ x \in \mathbb{R}$ η μέγιστη τιμή λαμβάνεται, όταν $x = -\frac{\beta}{2a} = -\frac{-2}{2\cdot(-1)} = -1$.
Επομένως, η μέγιστη τιμή της f είναι $y_{\max} = f(-1) = 3 - 2(-1) - (-1)^2 = 4$.

7.2.2. Η εξίσωση $\boldsymbol{ax^2+\beta x+\gamma=0}$, $\boldsymbol{a\neq 0}$

Έχουμε μάθει ότι κάθε εξίσωση της μορφής $ax^2+\beta x+\gamma=0$, $a\neq 0$, μπορεί να λυθεί με τον τύπο:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4a\gamma}}{2a}$$

Η παράσταση $\beta^2-4a\gamma$ ονομάζεται **διακρίνουσα** και συμβολίζεται με Δ. Δηλαδή:

$$\Delta=\beta^2-4a\gamma$$

Η διακρίνουσα καθορίζει το είδος των λύσεων της εξίσωσης $ax^2+\beta x+\gamma=0$, $a\neq 0$.

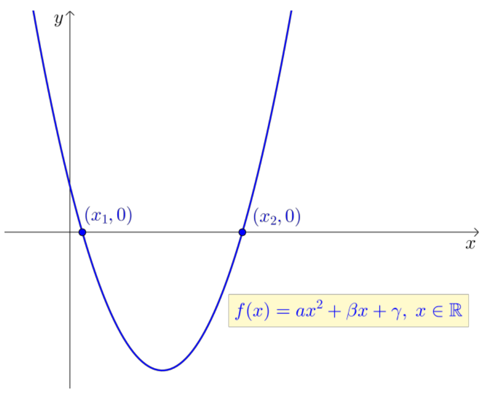
Έστω x_1, x_2 οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2+\beta x+\gamma=0$, $a\neq 0$. Τότε:

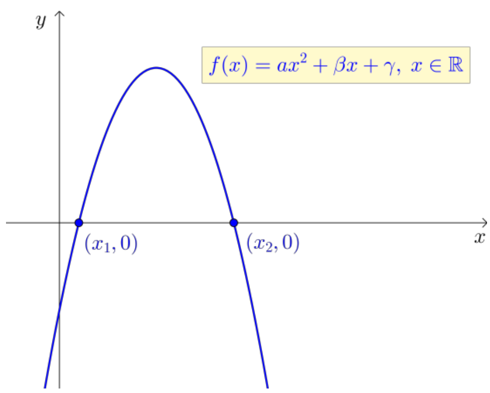
- Αν $\Delta>0$, τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες.
- Αν $\Delta=0$, τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και ίσες.
- Αν $\Delta<0$, τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις.

Για να επιλύσουμε γραφικά την εξίσωση $ax^2+\beta x+\gamma=0$, $a\neq 0$, κάνουμε τη γραφική παράσταση της παραβολής $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$. Οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2+\beta x+\gamma=0$, $a\neq 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής, αν υπάρχουν, της γραφικής παράστασης της παραβολής με τον άξονα $x'x$.

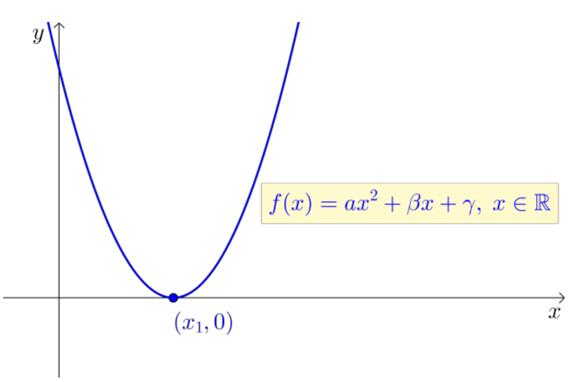
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

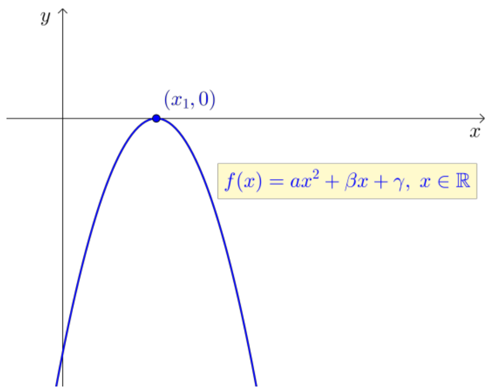
- Αν $\Delta>0$, τότε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$, $a\neq 0$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο διαφορετικά σημεία με συντεταγμένες $(x_1,0)$ και $(x_2,0)$.



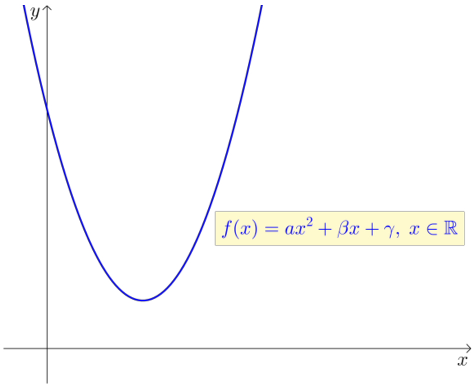


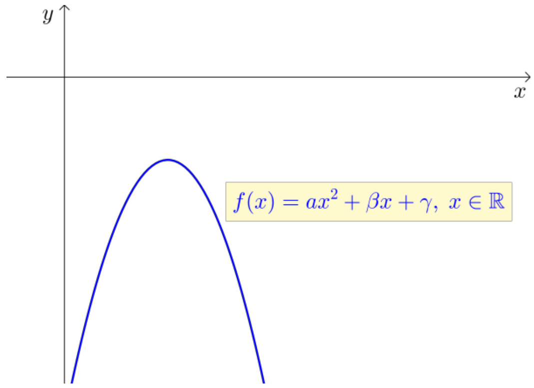
- Αν $\Delta=0$, τότε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1=x_2$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$, $a\neq 0$ εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο με συντεταγμένες $(x_1,0)$.





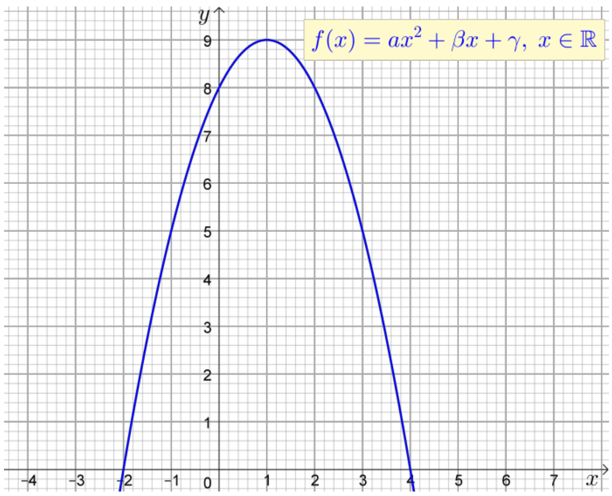
- Αν $\Delta < 0$, τότε $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \ ax^2 + \beta x + \gamma,\ \ a \neq 0$ δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.





Παράδειγμα 1

Στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0$. Με βάση το διάγραμμα, να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.



(α) Να βρείτε το πρόσημο του a.

(β) Να υπολογίσετε την τιμή του γ.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής.

(δ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f.

(ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

(στ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0,\ a \neq 0$.

(ζ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 5$.

Λύση

(α) Έχουμε ότι $a < 0$, αφού η παραβολή έχει μέγιστη τιμή.

(β) Έχουμε ότι $\gamma = 8$, αφού η γραφική παράσταση της παραβολής τέμνει τον άξονα των $y'y$ στο σημείο με συντεταγμένες $(0, 8)$.

(γ) Ο άξονας συμμετρίας της έχει εξίσωση $x = 1$.

(δ) Οι συντεταγμένες της κορυφής της είναι (1,9) και η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι η $y_{\max} = f(1) = 9$.

(ε) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το διάστημα $(-\infty, 9]$, αφού η παραβολή έχει μέγιστη τιμή, την $y_{\max} = f(1) = 9$.

(στ) Η γραφική παράσταση της παραβολής τέμνει τον άξονα των $x'x$ στα σημεία με συντεταγμένες $(-2, 0)$ και $(4, 0)$. Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0,\ a \neq 0$ είναι οι $x_1 = -2$ και $x_2 = 4$.

(ζ) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 5$ είναι οι τετμημένες εκείνων των σημείων (αν υπάρχουν), για τα οποία ισχύει ότι $y = 5$. Τα σημεία με συντεταγμένες $(-1, 5)$ και $(3, 5)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 5$ είναι οι $x_3 = -1$ και $x_4 = 3$.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\kappa + 4)x + \kappa + 7 = 0,\ \kappa \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την τιμή του κ, ώστε η πιο πάνω εξίσωση να έχει:

(α) λύση το -3

(β) δύο λύσεις πραγματικές και ίσες.

Λύση

(α) Το -3 επαληθεύει την εξίσωση $x^2 - (\kappa + 4)x + \kappa + 7 = 0$. Επομένως, έχουμε:

$$(-3)^2 - (\kappa + 4)(-3) + \kappa + 7 = 0 \Leftrightarrow 9 + 3\kappa + 12 + \kappa + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\kappa + 28 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -7$$

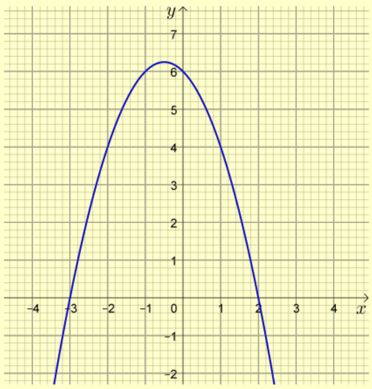
(β) Η εξίσωση $x^2 - (\kappa + 4)x + \kappa + 7 = 0$ έχει δύο πραγματικές και ίσες λύσεις, όταν $\Delta = 0$. Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta = [-(\kappa + 4)]^2 - 4(\kappa + 7) = 0 \quad &\Leftrightarrow \kappa^2 + 4\kappa - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\kappa + 6)(\kappa - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \kappa_1 = -6,\ \ \kappa_2 = 2 \end{aligned}$$

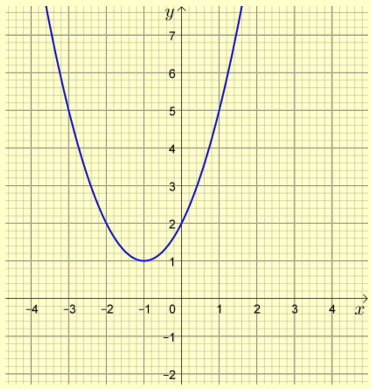
Δραστηριότητες

1. Στα πιο κάτω διαγράμματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των παραβολών της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$. Να βρείτε, για κάθε περίπτωση, το πρόσημο της διακρίνουσας Δ και τις λύσεις $x_1,\ x_2$ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

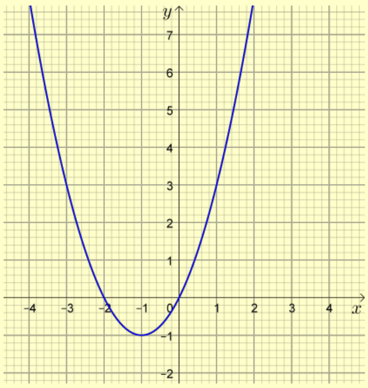
(α)



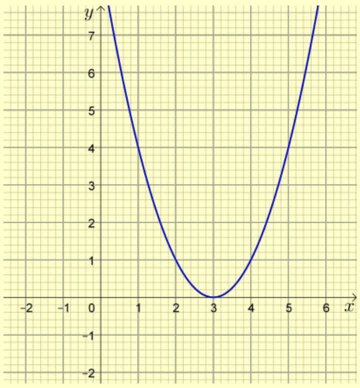
(β)



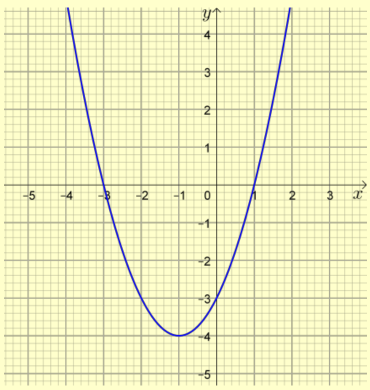
(γ)



(δ)



2. Στο διπλανό διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$. Με βάση το σχήμα, να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.



(α) Να βρείτε το πρόσημο του α.

(β) Να υπολογίσετε την τιμή του γ.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

(δ) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της.

(ε) Να υπολογίσετε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της f.

(στ) Να βρείτε τις λύσεις $x_1,\ x_2$ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

3. Να υπολογίσετε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή των πιο κάτω συναρτήσεων:
   (α) $f(x) = x^2 - 2x + 6,\ \ x \in \mathbb{R}$ (β) $g(x) = 4x - x^2,\ \ x \in \mathbb{R}$

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + \lambda x + \lambda + 4,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ \lambda \in \mathbb{R}$.
   Να υπολογίσετε, για κάθε περίπτωση ξεχωριστά, τις τιμές του λ, ώστε η γραφική παράσταση της f να:
   (α) έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = 2$
   (β) τέμνει τον άξονα των $y'y$ στο σημείο με συντεταγμένες $(0, 2)$.

5. Να υπολογίσετε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η εξίσωση $x^2 + (\kappa + 1)x + 1 = 0$:
   (α) έχει λύση το -2
   (β) έχει δύο πραγματικές και ίσες λύσεις.

6. Για ποιες τιμές των $a,\ \beta \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = x^2 + (\beta - 3)x + 2a - 1$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -1$ και ελάχιστη τιμή το 8;

7. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(2, 0)$.
   (α) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$.
   (β) Να υπολογίσετε τις τιμές των β και γ.
   (γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα των τεταγμένων.

8. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 3x + 1 = 0$.
   (α) Να βρείτε το είδος των λύσεών της.
   (β) Σε πόσα σημεία η παραβολή $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, x \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα των τετμημένων;

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 8x + 20$.
   (α) Να γράψετε την f στη μορφή $(x + a)^2 + \beta,\ \ a, \beta \in \mathbb{R}$.
   (β) Να αναφέρετε την ελάχιστη τιμή της f.
   (γ) Να εξηγήσετε πώς η ελάχιστη τιμή της f μπορεί να βοηθήσει στην εύρεση του προσήμου της διακρίνουσας (χωρίς να υπολογίσετε την τιμή της διακρίνουσας) της εξίσωσης $x^2 + 8x + 20 = 0$.

10. Να βρείτε το μέγιστο εμβαδόν ορθογωνίου με σταθερή περίμετρο $400\ \mathrm{m}$.

11. Ο τύπος που δίνει το ύψος h (σε m) ενός βέλους σε συνάρτηση με το χρόνο t (t σε sec), όταν το ρίξουμε προς τα πάνω με ταχύτητα $20\ \mathrm{ms}^{-1}$, δίνεται από τον τύπο $h(t) = 20t - 5t^2$. Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο μέγιστο ύψος.

7.2.3. Άθροισμα και γινόμενο των λύσεων της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$

Διερεύνηση

Δίνονται οι εξισώσεις:

$$x^2-3x+2=0,\quad x^2-5x+4=0,\quad x^2-7x+12=0$$

Να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των λύσεων τους. Τι παρατηρείτε;

Αν x_1,x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$, τότε γνωρίζουμε ότι οι λύσεις της είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Αν συμβολίσουμε με S το άθροισμα των x_1,x_2, τότε έχουμε:

$$S=x_1+x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}+\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=-\frac{2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$$

Αντίστοιχα, αν συμβολίσουμε με P το γινόμενο των x_1,x_2, τότε έχουμε:

$$P=x_1x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=-\frac{\Delta-\beta^2}{4\alpha^2}=-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}$$

Τύποι του Vieta

Οι x_1,x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$. Αν συμβολίσουμε με S το άθροισμα και με P το γινόμενο των λύσεών της, τότε:

$$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}\,,\quad P=x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$$

Για παράδειγμα, αν x_1,x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2-5x+2=0$, τότε:

$$S=-\frac{-5}{2}=\frac{5}{2}\,,\quad P=\frac{2}{2}=1$$

Παράδειγμα 1

Δίνεται εξίσωση 2[ου] βαθμού με λύσεις τις $x_1=5$ και $x_2=4$. Να υπολογίσετε το άθροισμα S και το γινόμενο P των λύσεών της.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$S=x_1+x_2=5+4=9\,,\qquad P=x_1x_2=5\cdot 4=20$$

Παράδειγμα 2

Αν x_1,x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2-4x-3=0$, τότε να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων *(Οι παραστάσεις αυτές λέγονται συμμετρικές, γιατί αν ανταλλάξουμε το x_1 με το x_2, τότε δεν αλλάζει η τιμή τους)*:

(α) x_1+x_2 (β) x_1x_2

(γ) $2x_1-5x_1x_2+2x_2$ (δ) $(x_1+2)(x_2+2)$

Λύση

Υπολογίζουμε το άθροισμα S και το γινόμενο P των λύσεων x_1, x_2 της πιο πάνω εξίσωσης. Έχουμε ότι:

$$S = -\frac{\beta}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

$$P = \frac{\gamma}{a} = -\frac{3}{2}$$

Επομένως:

(α) $x_1 + x_2 = S = 2$

(β) $x_1 x_2 = P = -\frac{3}{2}$

(γ) $$2x_1 - 5x_1x_2 + 2x_2 = 2x_1 + 2x_2 - 5x_1x_2 = 2(x_1 + x_2) - 5x_1x_2$$
$$= 2S - 5P = 2 \cdot 2 - 5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 4 + \frac{15}{2} = \frac{23}{2}$$

(δ) $$(x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4 = x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4$$
$$= P + 2S + 4 = -\frac{3}{2} + 2 \cdot 2 + 4 = -\frac{3}{2} + 8 = \frac{13}{2}$$

Παράδειγμα 3

Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + (\lambda - 1)x + 2\lambda - 8 = 0$, η οποία έχει λύσεις τους πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2. Να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει:

(α) δύο αντίθετες λύσεις

(β) δύο αντίστροφες λύσεις.

Λύση

(α) Οι λύσεις x_1, x_2 της εξίσωσης $2x^2 + (\lambda - 1)x + 2\lambda - 8 = 0$ είναι αντίθετες. Δηλαδή:

$$x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow S = 0 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{a} = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$, έχουμε ότι $\Delta = 48 > 0$, γεγονός που διασφαλίζει ότι οι λύσεις x_1, x_2 της πιο πάνω εξίσωσης είναι πραγματικές.

Επομένως, η τιμή $\lambda = 1$ είναι δεκτή.

(β) Οι λύσεις x_1, x_2 της εξίσωσης $2x^2 + (\lambda - 1)x + 2\lambda - 8 = 0$ είναι αντίστροφες. Δηλαδή:

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 1 \Leftrightarrow P = 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{a} = 1 \Leftrightarrow a = \gamma \Leftrightarrow 2 = 2\lambda - 8 \Leftrightarrow \lambda = 5$$

Για $\lambda = 5$, έχουμε ότι $\Delta = 0$, γεγονός που διασφαλίζει ότι οι λύσεις x_1, x_2 της πιο πάνω εξίσωσης είναι πραγματικές.

Επομένως, η τιμή $\lambda = 5$ είναι δεκτή.

7.2.4. Μορφές του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma = 0,\ a \neq 0$

Θεωρούμε ένα τριώνυμο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0$ και έστω x_1, x_2 οι δύο πραγματικές ρίζες του. Τότε:

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma = a\left(x^2 + \frac{\beta}{a}x + \frac{\gamma}{a}\right) = a(x^2 - Sx + P) \qquad (2)$$

Αφού $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 x_2$, τότε από την (2) έχουμε:

$$f(x) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) \qquad (3)$$

Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$, αρκεί να βρούμε δύο παράγοντες με άθροισμα $-(x_1 + x_2)$ και γινόμενο $x_1 x_2$. Εύκολα παρατηρούμε ότι αυτοί οι παράγοντες είναι οι $-x_1$ και $-x_2$. Έτσι, από την (3), έχουμε:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Κάθε τριώνυμο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

όπου x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ (αν υπάρχουν).
Ειδικά, αν $\Delta = 0$, τότε έχουμε ότι $x_1 = x_2$ και το τριώνυμο παίρνει τη μορφή:

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

Για παράδειγμα, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου $2x^2 - x - 1$, τότε:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 + 8 = 9, \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = 1,\ \ x_2 = -\frac{1}{2}$$

Επομένως:

$$2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2(x - 1)\left(\frac{2x + 1}{2}\right) = (x - 1)(2x + 1)$$

Παράδειγμα 1

Να απλοποιήσετε το κλάσμα:

$$\frac{5\gamma^2 - \gamma - 4}{25\gamma^2 - 16}$$

Λύση

Αρχικά, πρέπει να ισχύει ότι:

$$25\gamma^2 - 16 \neq 0 \Leftrightarrow \gamma^2 \neq \frac{16}{25} \Leftrightarrow \gamma \neq \pm\frac{4}{5}$$

Το τριώνυμο $5\gamma^2 - \gamma - 4$ έχει ρίζες:

$$\gamma_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{10} = \frac{1 \pm 9}{10} \Rightarrow \gamma_1 = 1,\ \ \gamma_2 = -\frac{4}{5}$$

Επομένως:

$$5\gamma^2 - \gamma - 4 = 5\left(\gamma + \frac{4}{5}\right)(\gamma - 1) = (5\gamma + 4)(\gamma - 1)$$

Η παράσταση $25\gamma^2-16$, ως διαφορά δύο τετραγώνων, παραγοντοποιείται ως εξής:

$$25\gamma^2-16=(5\gamma)^2-4^2=(5\gamma-4)(5\gamma+4)$$

Έτσι:

$$\frac{5\gamma^2-\gamma-4}{25\gamma^2-16}=\frac{(5\gamma+4)(\gamma-1)}{(5\gamma-4)(5\gamma+4)}=\frac{\gamma-1}{5\gamma-4},\quad \gamma\neq\pm\frac{4}{5}$$

7.2.5. Κατασκευή εξίσωσης 2ου βαθμού με λύσεις x_1, x_2

Δίνεται η εξίσωση $ax^2+\beta x+\gamma=0,\ a\neq 0$. Τότε:

$$ax^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{a}x+\frac{\gamma}{a}=0 \qquad \textit{(Διαιρούμε με } a\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2-\left(-\frac{\beta}{a}\right)x+\frac{\gamma}{a}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-Sx+P=0 \qquad \left(S=-\frac{\beta}{a}, P=\frac{\gamma}{a}\right)$$

Η εξίσωση 2ου βαθμού, της οποίας οι λύσεις έχουν άθροισμα S και γινόμενο P είναι η:

$$x^2-Sx+P=0$$

Παράδειγμα 1

Να γράψετε μία εξίσωση 2ου βαθμού, της οποίας οι λύσεις έχουν άθροισμα -3 και γινόμενο -4.

Λύση

Μια τέτοια εξίσωση έχει τη μορφή $x^2-Sx+P=0$. Έχουμε ότι $S=-3$ και $P=-4$. Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2+3x-4=0$.

Παράδειγμα 2

Να γράψετε μία εξίσωση 2ου βαθμού με λύσεις τις $x_1=3$ και $x_2=-5$.

Λύση

Μια τέτοια εξίσωση έχει τη μορφή $x^2-Sx+P=0$. Υπολογίζουμε το άθροισμα S και το γινόμενο P των δύο λύσεων $x_1,\ x_2$.

$$S=x_1+x_2=3-5=-2$$
$$P=x_1x_2=3(-5)=-15$$

Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2+2x-15=0$.

7.2.6. Εξισώσεις και συστήματα που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού

Παράδειγμα 1

Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$$

Λύση

Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y και παίρνουμε $y=4-x$. Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση του πιο πάνω συστήματος και έχουμε:

$$x(4-x)=3 \Leftrightarrow 4x-x^2=3 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=1,\ \ x=3$$

Οι αντίστοιχες τιμές για τα y είναι οι $y=3$, $y=1$. Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι οι $(1,3), (3,1)$.

Παράδειγμα 2

Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} y=2x^2 \\ -2x+y=4 \end{cases}$$

Λύση

Αντικαθιστούμε την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη εξίσωση του πιο πάνω συστήματος και έχουμε:

$$-2x+2x^2=4 \Leftrightarrow 2x^2-2x-4=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=2,\ \ x=-1$$

Οι αντίστοιχες τιμές για τα y είναι οι $y=8$, $y=2$. Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι οι $(2,8), (-1,2)$.

Παράδειγμα 3

Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς με άθροισμα 5 και άθροισμα τετραγώνων 13.

Λύση

Έστω x, y δύο πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 5 και άθροισμα τετραγώνων 13. Τότε, από τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$$

Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y και παίρνουμε $y = 5 - x$. Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση του πιο πάνω συστήματος και έχουμε:

$$\begin{aligned} x^2 + (5 - x\,)^2 = 13x^2 + (5 - x\,)^2 = 13 &\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x^2 - 5x + 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x - 2)(x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2,\ \ x = 3 \end{aligned}$$

Οι αντίστοιχες τιμές για τα y είναι οι $y = 3,\ \ y = 2$.

Οι λύσεις του συστήματος είναι οι $(2, 3), (3, 2)$. Επομένως, οι δύο ζητούμενοι πραγματικοί αριθμοί είναι οι 2 και 3.

Παράδειγμα 4

Να λύσετε την εξίσωση:

$$2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$$

Λύση

Η πιο πάνω εξίσωση είναι 4^{ου} βαθμού. Παρατηρούμε όμως ότι αν θέσουμε $x^2 = \omega$, τότε η πιο πάνω εξίσωση ανάγεται σε εξίσωση 2^{ου} βαθμού, την $2\omega^2 - 5\omega + 2 = 0$. Έτσι, έχουμε ότι

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$$

και:

$$\omega_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow \omega_1 = 2,\ \ \omega_2 = \frac{1}{2}$$

Επομένως, παίρνουμε ότι:

$$\omega = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2},\ \ x_2 = -\sqrt{2}$$
$$\omega = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \ x_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Σημείωση

Οι εξισώσεις της μορφής $\alpha x^{2\kappa} + \beta x^{\kappa} + \gamma = 0,\ \ \alpha \neq 0,\ \ \kappa \in \mathbb{N},\ \ \kappa \neq 1$ ονομάζονται **διτετράγωνες**.

Δραστηριότητες

1. Δίνεται η εξίσωση $ax^2+\beta x+\gamma=0,\ a\neq 0$ με πραγματικές λύσεις x_1, x_2. Να αποδείξετε ότι:
   (α) Αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι αντίθετες, τότε $S=0$.
   (β) Αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι αντίστροφες, τότε $P=1$.

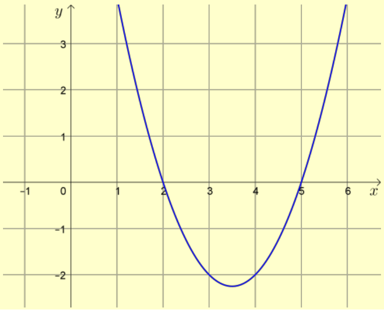
2. Αν η εξίσωση $x^2-7x+3=0$ έχει λύσεις τις x_1, x_2, τότε να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:
   (α) x_1+x_2 (β) x_1x_2 (γ) $3x_1+2x_1x_2+3x_2$
   (δ) $\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_1}$ (ε) $(4x_1+2)(4x_2+2)$ (στ) $x_1^2+x_2^2$
   (ζ) $x_1^3+x_2^3-3x_1^3x_2^3$

3. Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda-2)x+2\lambda-8=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει:
   (α) λύση τον αριθμό -2 (β) λύσεις αντίθετες
   (γ) λύσεις αντίστροφες (δ) λύσεις με άθροισμα 10

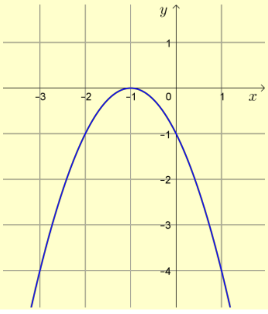
4. Δίνεται η εξίσωση $4x^2+3\mu x+3\mu-5=0,\ \mu\in\mathbb{R}$. Για ποια τιμή του $\mu\in\mathbb{R}$:
   (α) η εξίσωση έχει λύσεις αντίστροφες
   (β) ισχύει $x_1+x_2=x_1x_2$
   (γ) ισχύει $x_1^2+x_2^2=\frac{25}{16}$.

5. Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$ στις πιο κάτω περιπτώσεις:
   (α) να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2+\beta x+\gamma=0$
   (β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{\gamma}{a}$
   (γ) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{\beta}{a}$
   (δ) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3\gamma+3\beta}{2a}$.

i.



ii.



6. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3x^4 - 2x^2 - 5 = 0$$

7. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα:

(α) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$ (β) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3xy = 5 \end{cases}$

8. Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς που, σε κάθε περίπτωση, να έχουν:
   (α) άθροισμα 8 και γινόμενο 12
   (β) διαφορά 4 και γινόμενο 21
   (γ) άθροισμα 2 και άθροισμα τετραγώνων 26
   (δ) διαφορά 2 και άθροισμα τετραγώνων 74.

9. Να εξετάσετε κατά πόσο η ευθεία $y = 2x + 15$ τέμνει και σε ποια σημεία τις πιο κάτω παραβολές:

(α) $f(x) = x^2$ (β) $f(x) = x^2 + 3x + 20$

10. Να μετατρέψετε σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων τα πιο κάτω τριώνυμα:

(α) $a^2 - 15a - 16$ (β) $2\gamma^2 - \gamma - 21$ (γ) $y^2 - 2\kappa y + \kappa^2 - \lambda^2$

11. Να γράψετε μία εξίσωση 2ου βαθμού με λύσεις τις:

(α) $2, -3$ (β) $\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}$ (γ) $-4, 4$ (δ) $7 + \sqrt{3}, 7 - \sqrt{3}$

12. Να απλοποιήσετε τα πιο κάτω κλάσματα:

(α) $\dfrac{a^2 + 8a - 9}{a^2 + 9a}$ (β) $\dfrac{3x^2 + 14x - 24}{6x^2 - 26x + 24}$ (γ) $\dfrac{3x^2 - 7yx + 2y^2}{6x^2 - 5xy + y^2}$

13. Αν η μία λύση της εξίσωσης $\kappa x^2 + \lambda x + \mu = 0, \kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\kappa \neq 0)$ είναι διπλάσια της άλλης, να βρείτε τη σχέση που συνδέει του συντελεστές κ, λ, μ.

14. (α) Να αποδείξετε ότι ο άξονας συμμετρίας της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ μπορεί να πάρει τη μορφή $x = \frac{S}{2}$, όπου S το άθροισμα x_1, x_2 των δύο λύσεων της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$.
   (β) Η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία $(\kappa, 0)$ και $(\lambda, 0)$. Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας της συναρτήσει των κ και λ;

15. Να σχηματίσετε εξίσωση δεύτερου βαθμού με λύσεις τις $x_1 = 3 + \sqrt{5}, x_2 = 3 - \sqrt{5}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(3 + \sqrt{5})^3 + (3 - \sqrt{5})^3$.

16. Δίνεται η εξίσωση $4x^2 - 5x + a - 1 = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την τιμή του a, ώστε η εξίσωση να έχει δύο πραγματικές λύσεις.

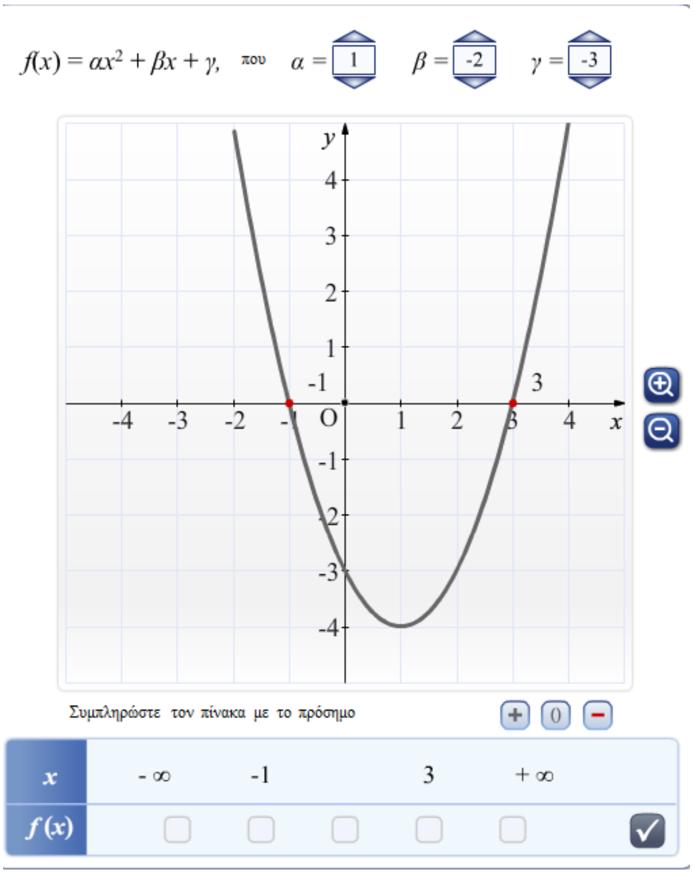
17. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει $\Delta > 0, P > 0$, $S < 0$. Να βρείτε το πρόσημο των λύσεών της.

7.3 ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΙΜΩΝ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

7.3.1 Πρόσημο τιμών τριωνύμου

Διερεύνηση

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο *«ΛΤ_ΜΑΘ_Α_ΨΕΠ07_Πρόσημο τριωνύμου_1.3»*.



- Να δώσετε κατάλληλες τιμές στα α, β και γ, για να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ώστε το τριώνυμο $f(x)$:
  (α) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες
  (β) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και ίσες
  (γ) να μην έχει πραγματικές ρίζες.

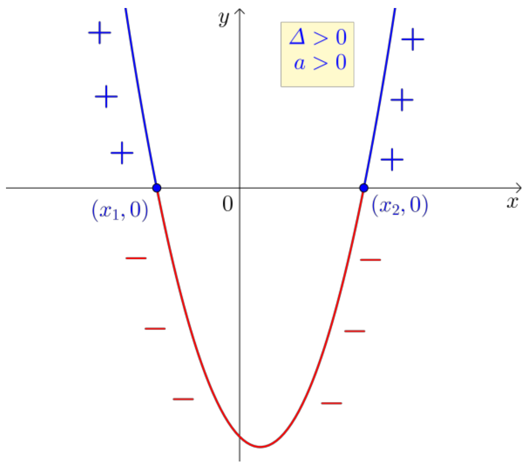
- Να μελετήσετε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ σε κάθε περίπτωση και να καταγράψετε τα συμπεράσματά σας.

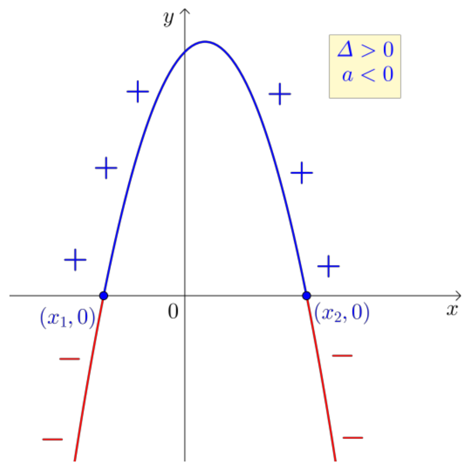
Για το πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0$ διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις:

1η περίπτωση: $\Delta > 0$

Η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία με συντεταγμένες $(x_1, 0)$ και $(x_2, 0)$, όπου x_1, x_2 οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0,\ a \neq 0$.

- Όταν $x \in (x_1, x_2)$, τότε η τιμή $f(x)$ είναι ετερόσημη του a.
- Όταν $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, τότε η τιμή $f(x)$ είναι ομόσημη του a,.





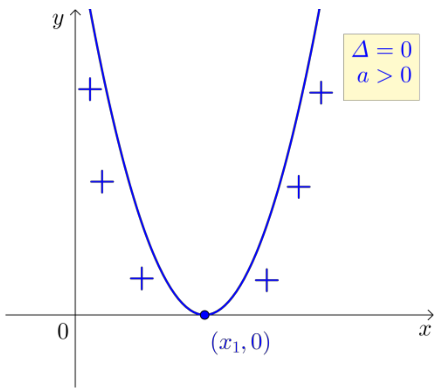
Τα πιο πάνω συνοψίζονται στον πιο κάτω πίνακα προσήμων:

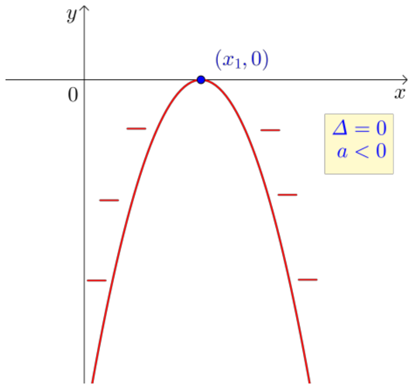
x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Πρόσημο $f(x)$	Ομόσημο του a	0	Ετερόσημο του a	0	Ομόσημο του a

2η περίπτωση: $\Delta = 0$

Η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0$ εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $(x_1, 0)$, όπου $x_1 = -\frac{\beta}{2a}$ η διπλή λύση της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0,\ a \neq 0$.

Η τιμή $f(x)$ είναι ομόσημη του a για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$.





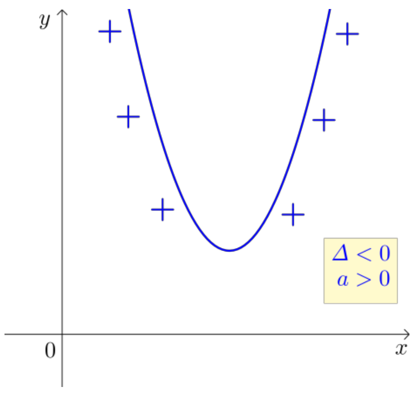
Τα πιο πάνω συνοψίζονται στον πιο κάτω πίνακα προσήμων:

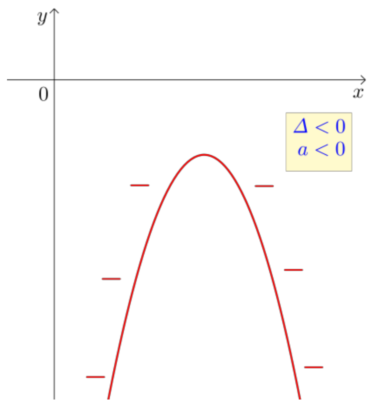
x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
Πρόσημο $f(x)$	Ομόσημο του a	0	Ομόσημο του a

3η περίπτωση: $\Delta < 0$

Η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ δεν τέμνει τον άξονα $x'x$ σε κανένα σημείο του, αφού η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$ δεν έχει πραγματικές λύσεις.

Η τιμή $f(x)$ είναι ομόσημη του a για κάθε $x \in \mathbb{R}$.





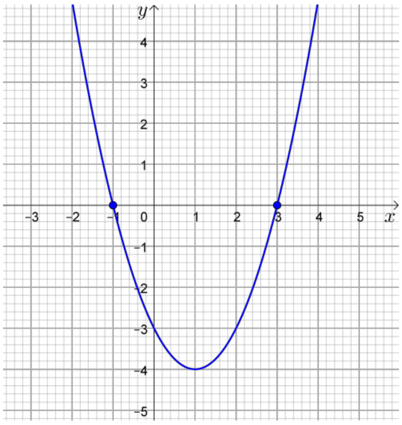
Τα πιο πάνω συνοψίζονται στον πιο κάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$ $+\infty$
Πρόσημο $f(x)$	Ομόσημο του a

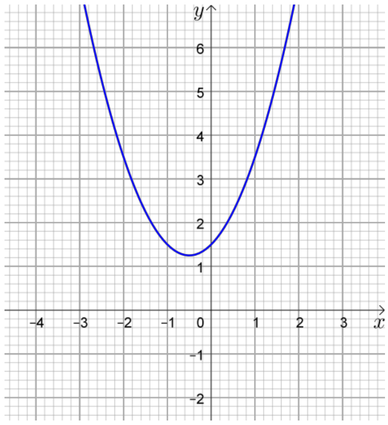
Παράδειγμα 1

Να μελετήσετε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ για τις διάφορες τιμές του x, $x \in \mathbb{R}$ σε κάθε μία από τις πιο κάτω περιπτώσεις.

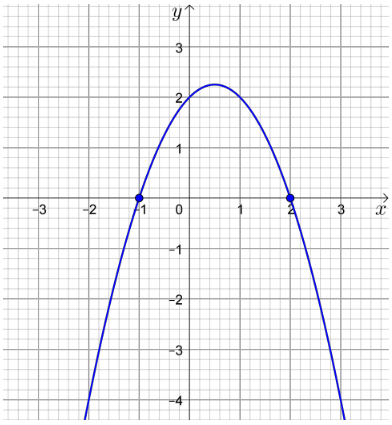
(α)



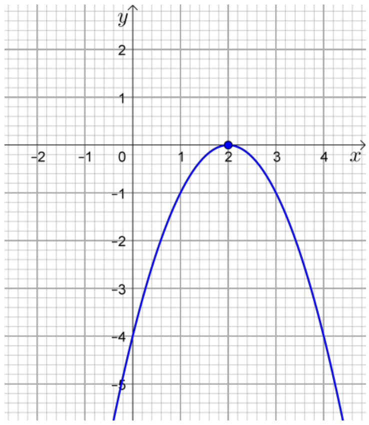
(β)



(γ)



(δ)



Λύση

(α) Το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ έχει ελάχιστη τιμή. Άρα, $a > 0$.

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία, για τα οποία $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Άρα, έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Επομένως, ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου είναι:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Δηλαδή, $f(x) > 0$, όταν $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ και $f(x) < 0$, όταν $x \in (-1, 3)$.

(β) Το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ έχει ελάχιστη τιμή. Άρα, $a > 0$.

Η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$. Άρα, δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Επομένως, ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου είναι:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	

Δηλαδή, $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ έχει μέγιστη τιμή. Άρα, $a < 0$.
Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα των $x'x$ στα σημεία, για τα οποία $x_1 = -1,\ x_2 = 2$. Άρα, έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.
Επομένως, ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου είναι:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Δηλαδή, $f(x) < 0$, όταν $x \in (-\infty, -1) \cup (2\,, +\infty)$ και $f(x) > 0$, όταν $x \in (-1, 2)$.

(δ) Το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ έχει μέγιστη τιμή. Άρα, $a < 0$.
Η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα των $x'x$ στο σημείο, για το οποίο $x_1 = x_2 = 2$. Άρα, έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες.
Επομένως, ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου είναι:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Δηλαδή, $f(x) < 0$, όταν $x \in (-\infty, 2) \cup (2\,, +\infty)$.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε το πρόσημο των πιο κάτω τριωνύμων για τις διάφορες τιμές του x, $x \in \mathbb{R}$:

(α) $x^2 + 2x + 10$ (β) $(x-2)(x+3)$ (γ) $-4x^2 + 12x - 9$

Λύση

(α) *1ος τρόπος*
Έχουμε ότι $a = 1 > 0$ και $\Delta = 4 - 40 = -36 < 0$.
Δηλαδή, το τριώνυμο $x^2 + 2x + 10$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.
Επομένως, ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου $x^2 + 2x + 10$ είναι:

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2+2x+10$	$+$	

Άρα, $x^2 + 2x + 10 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2ος τρόπος

$$x^2+2x+10=x^2+2x+1+9=(x+1)^2+9\geq 9>0,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

Η πιο πάνω μέθοδος ονομάζεται συμπλήρωση τετραγώνου.

(β) Έχουμε ότι $a=1>0$ και $x_1=-3$, $x_2=2$ οι πραγματικές ρίζες του τριωνύμου $(x-2)(x+3)$.

Επομένως, ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου $(x-2)(x+3)$ είναι:

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$(x-2)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα:

$(x-2)(x+3)>0$, όταν $x\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$

$(x-2)(x+3)<0$, όταν $x\in(-3,2)$

$(x-2)(x+3)=0$, όταν $x=-3$ ή $x=2$

(γ) *1ος τρόπος*

Έχουμε ότι $a=-4<0$ και $\varDelta=144-144=0$.

Δηλαδή, το τριώνυμο $-4x^2+12x-9$ έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες τις $x_1=x_2=-\frac{\beta}{2a}=\frac{3}{2}$.

Επομένως, ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου $-4x^2+12x-9$ είναι:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-4x^2+12x-9$		$-$	0	$-$	

Άρα:

$-4x^2+12x-9<0$, όταν $x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

$-4x^2+12x-9=0$, όταν $x=\frac{3}{2}$

2ος τρόπος

$$-4x^2+12x-9=-(4x^2-12x+9)=-(2x-3)^2\leq 0,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

Η ισότητα ισχύει μόνον όταν $x=\frac{3}{2}$.

7.3.2 Ανισώσεις β΄ βαθμού

Διερεύνηση

Σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με σύρμα μήκους 40 m.

(α) Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, υπολογίζοντας το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου για τις διάφορες τιμές που παίρνει το μήκος και το πλάτος του.

Μήκος	1 m	2 m	3 m	5 m	7 m	10 m	12 m	15 m	16 m	18 m
Πλάτος	19 m									
Εμβαδόν	19 m^2									

(β) Να εξηγήσετε γιατί δεν μπορεί να κατασκευαστεί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο των 20 m.

(γ) Αν ζητηθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι μικρότερο από $75\ \mathrm{m}^2$, τότε θα μπορούσε το μήκος του να είναι ίσο με 8,5 m;

(δ) Ποιες τιμές μπορεί να πάρει του μήκος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, ώστε το εμβαδόν του να είναι μικρότερο ή ίσο από $75\ \mathrm{m}^2$;

(ε) Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το μήκος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, αν επιπλέον πρέπει να είναι και μεγαλύτερο από 12 m;

Ανισώσεις β΄ βαθμού

Για να επιλύσουμε μιαν ανίσωση β΄ βαθμού της μορφής $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$, όπου $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0$:

- βρίσκουμε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x, $x \in \mathbb{R}$
- επιλέγουμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$.

Παράδειγμα 1

Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις για τις διάφορες τιμές του $x, x \in \mathbb{R}$:

(α) $x^2 + 2x - 15 < 0$ (β) $(1 - x)(x - 4) \leq 0$ (γ) $x^2 - 12x + 36 > 0$

(δ) $x^2 + x + 1 < 0$ (ε) $-2x^2 + 12x - 4 \geq 0$

Λύση

(α) Έχουμε ότι $a = 1 > 0$ και $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$.

Δηλαδή, το τριώνυμο $x^2 + 2x - 15$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις $x_1 = -5$ και $x_2 = 3$.

Επομένως, ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου $x^2+2x-15$ είναι:

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$x^2-2x+15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα, $x^2+2x-15<0$, όταν $x\in(-5,3)$.

(β) Έχουμε ότι $a=-1<0$.
Το τριώνυμο $(1-x)(x-4)$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις $x_1=1$ και $x_2=4$.
Επομένως, ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου $(1-x)(x-4)$ είναι:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$(1-x)(x-4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα, $(1-x)(x-4)\leq 0$, όταν $x\in(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$.

(γ) *1ος τρόπος*
Έχουμε ότι $a=1>0$ και $x^2-12x+36=(x-6)^2$.
Δηλαδή, το τριώνυμο $x^2-12x+36$ έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες, τις $x_1=x_2=6$.
Επομένως, ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου $x^2-12x+36$ είναι:

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$x^2-12x+36$		$+$	0	$+$	

Άρα, $x^2-12x+36>0$, όταν $x\in(-\infty,6)\cup(6,+\infty)$.

2ος τρόπος

$$x^2-12x+36=(x-6)^2\geq 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Η ισότητα ισχύει μόνον όταν $x=6$.
Άρα, $x^2-12x+36>0$, όταν $x\in(-\infty,6)\cup(6,+\infty)$.

(δ) *1ος τρόπος*
Έχουμε ότι $a=1>0$.
Η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου x^2+x+1 είναι:

$$\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0$$

Δηλαδή, το τριώνυμο x^2+x+1 δεν έχει πραγματικές ρίζες.
Επομένως, ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου x^2+x+1 είναι:

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2+x+1		$+$	

Άρα, $x^2+x+1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχουν τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για τις οποίες να ισχύει $x^2+x+1<0$.

2ος τρόπος

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

Άρα, δεν υπάρχουν τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για τις οποίες να ισχύει $x^2+x+1<0$.

(ε) Έχουμε ότι $\alpha=-2<0$.

Η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου $-2x^2+12x-4$ είναι:

$$\Delta=12^2-4(-2)(-4)=112>0$$

Δηλαδή, το τριώνυμο $-2x^2+12x-4$ έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{112}}{2(-2)}=\frac{-12\pm4\sqrt{7}}{-4}=3\pm\sqrt{7}$$

Επομένως, ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου $-2x^2+12x-4$ είναι:

x	$-\infty$		$3-\sqrt{7}$		$3+\sqrt{7}$		$+\infty$
$-2x^2+12x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα, $-2x^2+12x-4\geq0$, όταν $x\in\left[3-\sqrt{7},3+\sqrt{7}\right]$.

Παράδειγμα 2

Για ποιες τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$, $\kappa\neq2$, η εξίσωση $(\kappa-2)x^2-2\kappa x+2\kappa-3=0$ έχει λύσεις πραγματικές και άνισες;

Λύση

Αφού $\kappa\neq2$, τότε η πιο πάνω εξίσωση είναι 2ου βαθμού. Για να έχει η εξίσωση αυτή δύο πραγματικές και άνισες λύσεις, πρέπει να ισχύει $\Delta>0$. Έχουμε:

$$\Delta>0\Leftrightarrow4\kappa^2-4(\kappa-2)(2\kappa-3)>0\Leftrightarrow-4\kappa^2+28\kappa-24>0$$
$$\Leftrightarrow-4(\kappa^2-7\kappa+6)>0\Leftrightarrow-4(\kappa-1)(\kappa-6)>0$$

Έχουμε ότι $\alpha=1<0$.

Το τριώνυμο $-4(\kappa-1)(\kappa-6)$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις $\kappa_1=1$ και $\kappa_2=6$.

Επομένως, ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου $-4(\kappa-1)(\kappa-6)$ είναι:

κ	$-\infty$		-1		2		6		$+\infty$
$-4(\kappa-1)(\kappa-6)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Επομένως, έχουμε ότι $-4(\kappa-1)(\kappa-6)>0$, όταν $\kappa\in(1,2)\cup(2,6)$. Έτσι, η εξίσωση $(\kappa-2)x^2-2\kappa x+2\kappa-3=0$ έχει λύσεις πραγματικές και άνισες όταν $\kappa\in(1,2)\cup(2,6)$.

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε το πρόσημο των πιο κάτω τριωνύμων για τις διάφορες τιμές του $x, x \in \mathbb{R}$:

   (α) $x^2 - 5x - 6$

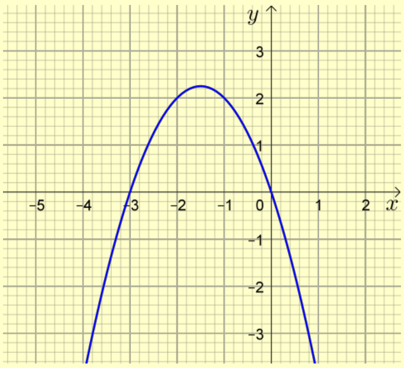
   (β) $(-x-2)(x-7)$

   (γ) $25 - 4x^2$

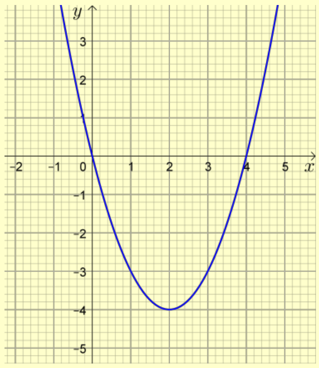
   (δ) $-x^2 + x - 1$

2. Να μελετήσετε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0$ σε κάθε περίπτωση στις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις, κατασκευάζοντας τον αντίστοιχο πίνακα προσήμου.

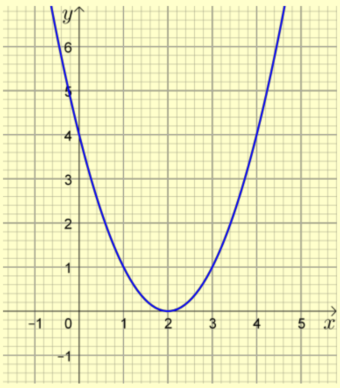
   (α)



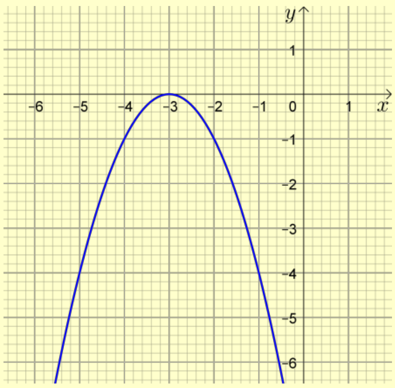
   (β)



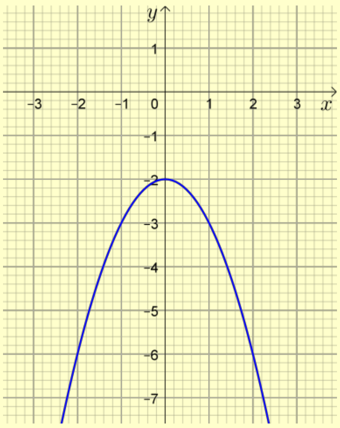
   (γ)



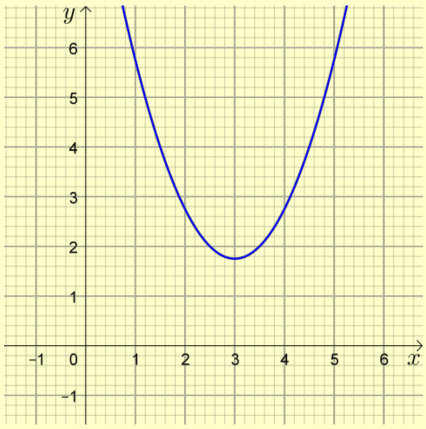
   (δ)



   (ε)



   (στ)



3. Να βρείτε το πρόσημο των πιο κάτω τριωνύμων για τις διάφορες τιμές του $x, x \in \mathbb{R}$:

(α) $5x^2$ (β) $-3x^2$ (γ) x^2+4

(δ) $-x^2-1$ (ε) $(x+4)^2$ (στ) $(x-1)^2$

(ζ) $(x+1)(x-3)$ (η) x^2-3x+2 (θ) $-x^2+2x-3$

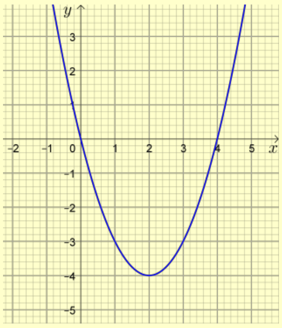
(ι) x^2+x+1 (ια) $-5x^2+4x-3$

4. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-2x^2+\beta x+\gamma$, όπου $\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, με ρίζες τους αριθμούς -8 και 2. Να βρείτε το πρόσημο των:

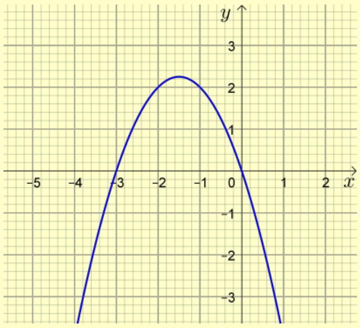
$$f(-20),\ f(-7{,}3),\ f(-8),\ f(0),\ f\left(\frac{1}{2013}\right),\ f(8)$$

5. Στα πιο κάτω διαγράμματα δίνονται γραφικές παραστάσεις παραβολών της μορφής $y=f(x)$. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\geq 0$ σε κάθε περίπτωση.

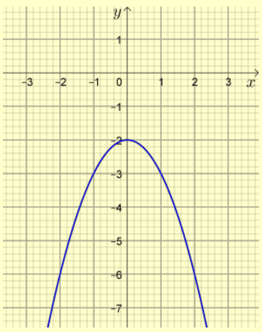
(α)



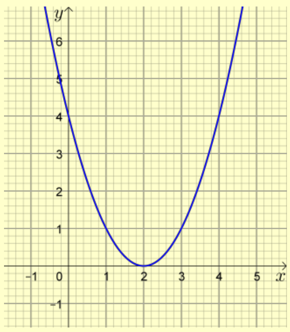
(β)



(γ)



(δ)



6. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις για τις διάφορες τιμές του $x, x \in \mathbb{R}$:

(α) $x^2-36>0$ (β) $6x-3x^2\geq 0$

(γ) $(x-2)(x-3)\leq 30$ (δ) $x^2+3x+6<0$

7. Να λύσετε την ανίσωση $(x+4)^2>4(2x+5)$ για τις διάφορες τιμές του $x, x \in \mathbb{R}$.

8. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $(\lambda-5)x^2-(\lambda-5)x+2=0$ δεν έχει πραγματικές λύσεις;

9. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών του τριωνύμου
$$f(x) = x^2 + (\mu + 1)x + 2\mu - 1$$
για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$.

10. Η εξίσωση $(\kappa - 1)x^2 + 4x + (6 - k) = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$ έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες. Να δείξετε ότι το κ επαληθεύει την ανίσωση $\kappa^2 - 7\kappa + 10 > 0$.

11. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
    (α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες.
    (β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης, να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
    $$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} \leq 0$$
    (γ) Αν $\lambda = 1$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 4$ και $3x_1 + 3x_2$.

12. Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2 + (\lambda - 3)x + 2\lambda - 9$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

13. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \sqrt{-x^2 - 4x + 12}$.

14. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους.

15. Να βρείτε τις πιθανές τιμές του μήκους ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου, ώστε η περίμετρός του να είναι $20\,\mathrm{m}$ και το εμβαδόν του να είναι τουλάχιστον $16\,\mathrm{m}^2$.

16. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = a$, με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.
    (α) Να βρείτε τις τιμές του a, ώστε η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = a$ έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες.
    (β) Να βρείτε την τιμή του a, ώστε η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = a$ να έχει διπλή λύση και να την προσδιορίσετε.
    (γ) Αν $f(x) = x^2 + 2x + 3$, να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
    (δ) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x) - 2} \leq 2$.

7.4 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ – ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Διερεύνηση 1

Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f με τύπο

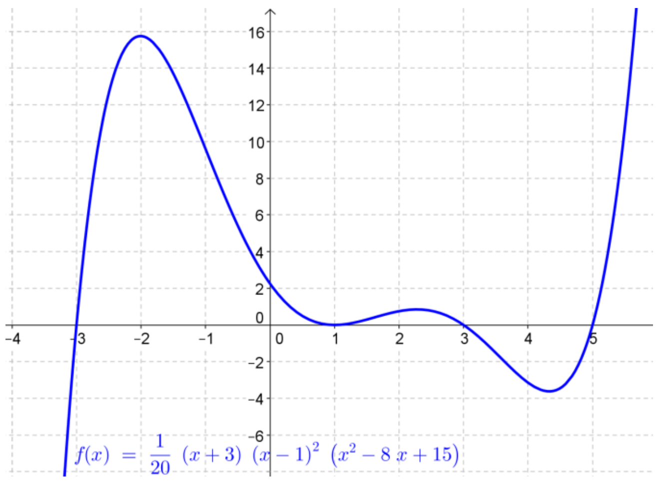
$$f(x) = \frac{1}{20}(x+3)(x-1)^2(x^2-8x+15)$$

για όλες τις πραγματικές τιμές του x, συμπληρώνοντας κατάλληλα το αντίστοιχο πρόσημο για κάθε όρο του γινομένου στον πιο κάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-3	1	3	5	$+\infty$
$x+3$						
$(x-1)^2$						
$x^2-8x+15$						
$f(x)$						

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{20}(x+3)(x-1)^2(x^2-8x+15),\;\; x \in \mathbb{R}$$



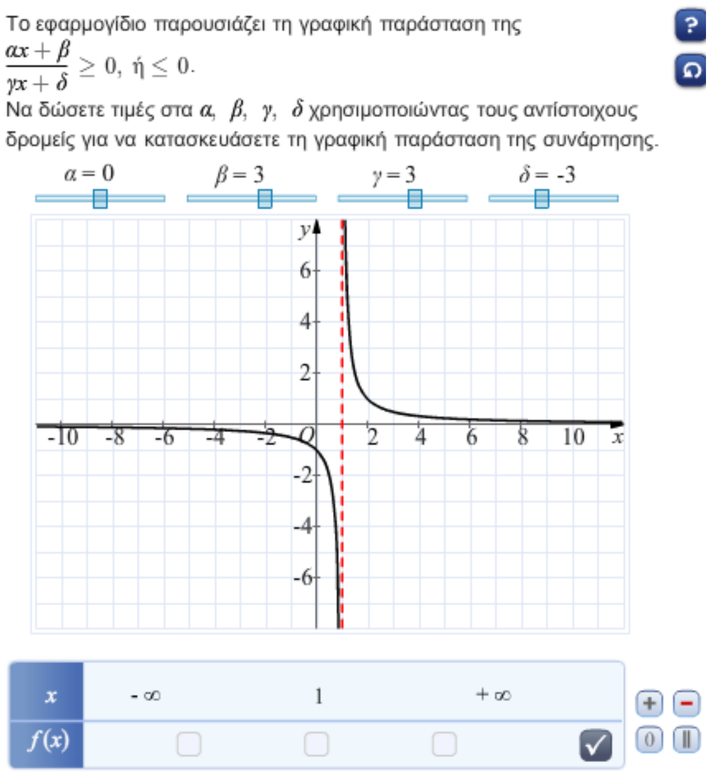
Να συμπληρώσετε σε κάθε τετραγωνάκι στον πιο κάτω πίνακα το αντίστοιχο πρόσημο με βάση τη γραφική παράσταση.

x	$-\infty$	-3	1	3	5	$+\infty$
$f(x)$						

Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$.

Διερεύνηση 2

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο *«ΛΤ_ΜΑΘ_Α_ΨΕΠ08_Λύση ανίσωσης β' βαθμού_1.0»*.



Να επιλέξετε την *«ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Κλασματικές Ανισώσεις»* και να ακολουθήσετε τις οδηγίες των παραγράφων 1.1, 1.2 και 1.3.

Για να βρούμε το πρόσημο του γινομένου $P(x) = A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_\nu(x)$, βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_\nu(x)$ ξεχωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του $P(x)$.

Κατά ανάλογο τρόπο, για να βρούμε το πρόσημο του πηλίκου $Q(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, βρίσκουμε το πρόσημο του αριθμητή και του παρονομαστή ξεχωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του $Q(x)$.

Παράδειγμα 1

Να λύσετε την ανίσωση $(x^2-1)(x-2)>0$.

Λύση

Βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα στο πιο πάνω γινόμενο και, στη συνέχεια. το πρόσημο του γινομένου. Συμπληρώνουμε τον πιο κάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2-1)(x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Εναλλακτικά, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν συνοπτικό πίνακα, όπως φαίνεται πιο κάτω. Τοποθετούμε τις ρίζες του γινομένου κατά αύξουσα σειρά σε άξονα και, στη συνέχεια, το αντίστοιχο πρόσημο του γινομένου $(x^2-1)(x-2)$ σε κάθε διάστημα.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$(x^2-1)(x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Η ανίσωση $(x^2-1)(x-2)>0$ ισχύει, όταν $x\in(-1,1)\cup(2,+\infty)$.

Παράδειγμα 2

Να λύσετε την ανίσωση $x^3-36<9x-4x^2$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$x^3-36<9x-4x^2 \Leftrightarrow x^3+4x^2-9x-36<0 \Leftrightarrow x^2(x+4)-9(x+4)<0$$
$$\Leftrightarrow (x+4)(x^2-9)<0 \Leftrightarrow (x+4)(x-3)(x+3)<0$$

Οι ρίζες του γινομένου $(x+4)(x-3)(x+3)$ είναι οι $-4,-3$ και 3.

x	$-\infty$		-4		-3		3		$+\infty$
$x^3+4x^2-9x-36$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Η ανίσωση $x^3-36<9x-4x^2$ ισχύει, όταν $x\in(-\infty,-4)\cup(-3,3)$.

Παράδειγμα 3

Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x-24}>0$ (β) $\dfrac{x^2}{x+2}\geq 1$

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+2x-24}>0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{(x+6)(x-4)}>0$$

Οι ρίζες του αριθμητή στο πιο πάνω κλάσμα είναι οι -2 και 3, ενώ το κλάσμα δεν ορίζεται για $x=-6$ και $x=4$.

Τοποθετούμε τις ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή κατά αύξουσα σειρά σε άξονα και στη συνέχεια συμπληρώνουμε το αντίστοιχο πρόσημο σε κάθε διάστημα.

x	$-\infty$		-6		-2		3		4		$+\infty$
$\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x-24}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Η ανίσωση

$$\frac{(x-3)(x+2)}{(x+6)(x-4)}>0$$

ισχύει, όταν $x\in(-\infty,-6)\cup(-2,3)\cup(4,+\infty)$.

Σημείωση

Στον πιο πάνω πίνακα, η διπλή γραμμή ‖ δηλώνει ότι το κλάσμα δεν ορίζεται για αυτές τις τιμές.

(β) Έχουμε ότι:

$$\frac{x^2}{x+2}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+2}-1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{x+2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x+2}\geq 0$$

Οι ρίζες του αριθμητή στο πιο πάνω κλάσμα είναι οι -1 και 2, ενώ το κλάσμα δεν ορίζεται για $x=-2$.

Τοποθετούμε τις ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή κατά αύξουσα σειρά σε άξονα και στη συνέχεια συμπληρώνουμε το αντίστοιχο πρόσημο σε κάθε διάστημα.

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$\dfrac{x^2-x-2}{x+2}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Η ανίσωση

$$\frac{x^2}{x+2} \geq 1$$

ικανοποιείται, όταν $x \in (-2,-1] \cup [2,+\infty)$.

Παράδειγμα 4

(α) Να λύσετε την ανίσωση $(3x+2)(x-1)^2 > 0$.

(β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας, κατασκευάζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (3x+2)(x-1)^2$ με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού.

Λύση

(α) Έχουμε ότι οι ρίζες του γινομένου $(3x+2)(x-1)^2$ είναι οι $-\frac{2}{3}$ και 1 (διπλή ρίζα).

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$1''$		$+\infty$
$(3x+2)(x-1)^2$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Η ανίσωση $(3x+2)(x-1)^2 > 0$ ισχύει, όταν $x \in \left(-\frac{2}{3}\,,1\right) \cup (1\,,+\infty)$.

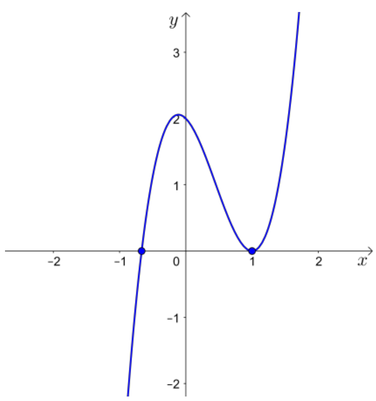
Σημείωση

Το πρόσημο στα διαστήματα $\left(-\frac{2}{3},1\right)$ και $(1,+\infty)$ παραμένει το ίδιο, αφού η τιμή 1 είναι διπλή ρίζα του πολυωνύμου $(3x+2)(x-1)^2$.

Ο διπλός τόνος $''$ μπαίνει στον αριθμό 1 για να τονίσει τη διπλή ρίζα.

(β) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (3x+2)(x-1)^2$ παρατηρούμε ότι το μέρος της καμπύλης που είναι πάνω από τον άξονα των τετμημένων, δηλαδή $f(x) > 0$, αντιστοιχεί στα σημεία του άξονα $x'x$ για τα οποία ισχύει $x > -\frac{2}{3}$, εκτός από το σημείο, για το οποίο ισχύει $x = 1$. Σε αυτό το σημείο ισχύει $f(1) = 0$. Επομένως:

$$(3x+2)(x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{2}{3}\,,1\right) \cup (1\,,+\infty)$$



Δραστηριότητες

1. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του x, $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $P(x) = (x-2)(x^2+2x-8)$.

2. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

(α) $(x^2+2x)(x^2-25) > 0$ (β) $(2x+4)(x^2-2x-15)(x^2-4) < 0$

(γ) $6x-6 \geq x^3 - x^2$ (δ) $(x^2+5)(4x^2-25) > 0$

3. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ αληθεύουν οι πιο κάτω ανισώσεις;

(α) $\dfrac{x^2}{x-3} \leq 0$ (β) $\dfrac{x^2-x-12}{7-x} \leq 0$

(γ) $\dfrac{2x-1}{x^2-4} \leq 1$ (δ) $\dfrac{4x}{3x-x^2} \geq \dfrac{1}{2}$

(ε) $\dfrac{x}{(x-3)^2} \leq 0$ (στ) $\dfrac{x^2-x-20}{3-x} \leq 0$

4. Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$A = \frac{2x^2+x+9}{-x^2+8x-16}, \quad x \neq 4$$

παίρνει αρνητικές τιμές $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 4$.

5. (α) Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$. Αν η εξίσωση έχει δύο λύσεις θετικές, τι συμπεραίνετε για το πρόσημο των Δ, P και S;

(β) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 - (\lambda-3)x + \lambda - 5 = 0$ έχει δύο θετικές λύσεις;

6. (α) Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \ \alpha \neq 0$. Αν $P < 0$, να δείξετε ότι $\Delta > 0$.

(β) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda^3 - 4\lambda = 0$ έχει λύσεις ετερόσημες;

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda-2)x + \lambda - 4 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση έχει λύσεις πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

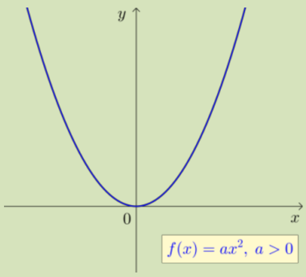
(β) Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

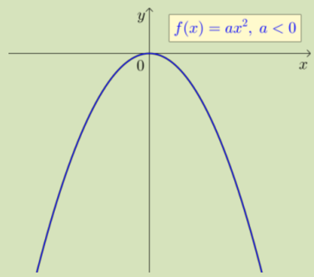
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq 2$$

8. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2 - (2\lambda-5)x + 4$ διατηρεί σταθερό πρόσημο $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Περίληψη

1. Κάθε συνάρτηση f της μορφής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ λέγεται **παραβολή**.
   - Κάθε συνάρτηση f της μορφής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί στην μορφή $f(x) = a(x+\kappa)^2 + \lambda$, $a \neq 0$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
   - Αν $\kappa = 0$, $\lambda = 0$, τότε η συνάρτηση f γράφεται $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$, έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των τεταγμένων, ο οποίος ονομάζεται **άξονας** της παραβολής.





   - Αν $a > 0$, τότε:
     - το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $[0, +\infty)$ και
     - η ελάχιστη τιμή της είναι στο $x = 0$, η $y = 0$ στο σημείο με συντεταγμένες $(0, 0)$, το οποίο λέγεται **κορυφή** της παραβολής.
   - Αν $a < 0$, τότε:
     - το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $(-\infty, 0]$ και
     - η μέγιστη τιμή της είναι στο $x = 0$, η $y = 0$ στο σημείο με συντεταγμένες $(0, 0)$, το οποίο λέγεται **κορυφή** της παραβολής.

   Παρατήρηση

   Η καμπύλη «πλησιάζει» τον άξονα των y, καθώς οι τιμές του $|a|$ αυξάνονται.

3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = ax^2 + \lambda$, με $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση κατά $|\lambda|$ μονάδες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$.
   - Αν $\lambda > 0$, η κατακόρυφη μετατόπιση είναι λ μονάδες προς τα πάνω.
   - Αν $\lambda < 0$, η κατακόρυφη μετατόπιση είναι $|\lambda|$ μονάδες προς τα κάτω.

   Η γραφική παράσταση της g με τύπο $g(x) = ax^2 + \lambda$ έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(0, \lambda)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = 0$.

4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = a(x+\kappa)^2$, με $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{R}$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση κατά $|\kappa|$ μονάδες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$.
   - Αν $\kappa > 0$, η κατακόρυφη μετατόπιση είναι κ μονάδες προς τα αριστερά.
   - Αν $\kappa < 0$, η κατακόρυφη μετατόπιση είναι $|\kappa|$ μονάδες προς τα δεξιά.

   Η γραφική παράσταση της g με τύπο $g(x) = (x+\kappa)^2$ έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(-\kappa, 0)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -\kappa$.

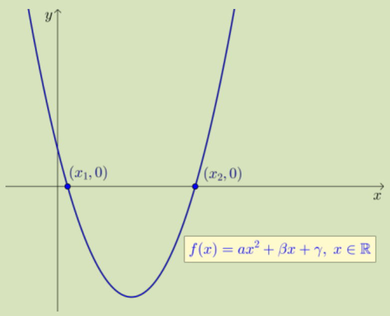
5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = a(x+\kappa)^2 + \lambda$, με $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ προκύπτει από μετατόπιση $|\kappa|$ μονάδων οριζόντια και $|\lambda|$ μονάδων κατακόρυφα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$. Η γραφική παράσταση της g έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(-\kappa, \lambda)$, άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -\kappa$ και ελάχιστη τιμή λ, όταν $a > 0$ ή μέγιστη τιμή λ, όταν $a < 0$.

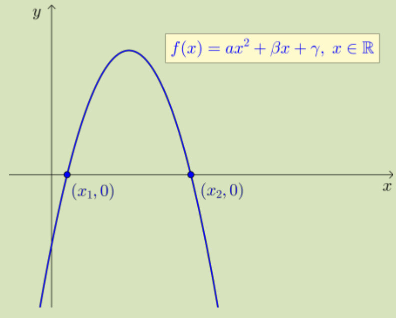
6. Η παραβολή $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -\frac{\beta}{2a}$ και κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $K\left(-\frac{\beta}{2a}, f\left(-\frac{\beta}{2a}\right)\right)$.
   - Αν $a > 0$, τότε η παραβολή $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ έχει ελάχιστη τιμή, την $y_{\min} = f\left(-\frac{\beta}{2a}\right)$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $\left[f\left(-\frac{\beta}{2a}\right), +\infty\right)$.
   - Αν $a < 0$, τότε η παραβολή $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ έχει μέγιστη τιμή, την $y_{\max} = f\left(-\frac{\beta}{2a}\right)$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $\left(-\infty, f\left(-\frac{\beta}{2a}\right)\right]$.
   - Η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ τέμνει τον άξονα των $y'y$ στο σημείο $\big(0, f(0)\big) = (0, \gamma)$.

7. Η παράσταση $\beta^2 - 4a\gamma$ ονομάζεται **διακρίνουσα** και συμβολίζεται με Δ. Δηλαδή, $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$. Η διακρίνουσα καθορίζει το είδος των λύσεων της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0,\ a \neq 0$.

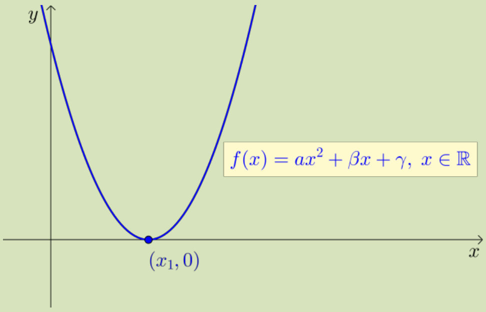
8. Έστω x_1, x_2 οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0,\ a \neq 0$. Τότε:
   - Αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες.
   - Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και ίσες.
   - Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις.

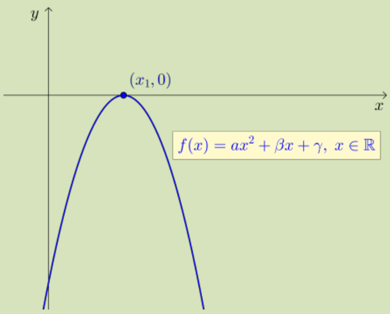
9. Για να επιλύσουμε γραφικά την εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0,\ a \neq 0$, κάνουμε τη γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$. Οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0,\ a \neq 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής, αν υπάρχουν, της γραφικής παράστασης της παραβολής με τον άξονα $x'x$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
   - Αν $\Delta > 0$, τότε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο διαφορετικά σημεία με συντεταγμένες $(x_1, 0)$ και $(x_2, 0)$.



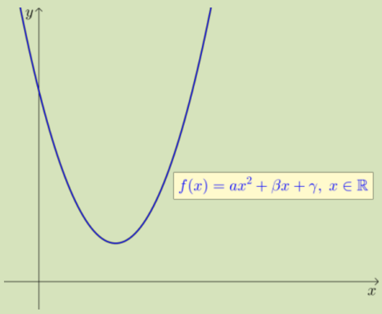


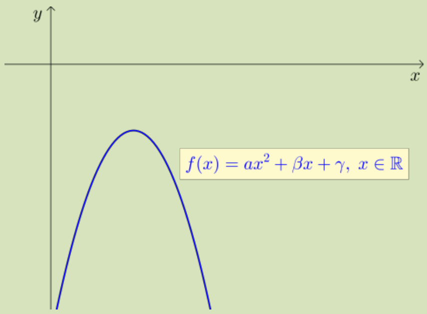
- Αν $\Delta = 0$, τότε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 = x_2$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0$ εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο με συντεταγμένες $(x_1, 0)$.





- Αν $\Delta < 0$, τότε $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0$ δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.





10. Τύποι του Vieta
Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0,\ a \neq 0$, τότε συμβολίζουμε με S το άθροισμα και με P το γινόμενο των λύσεών της. Ισχύει:
$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}\ ,\quad P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{a}$$
11. Κάθε τριώνυμο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0$ μπορεί να γραφεί στη μορφή
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$
όπου x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ (αν υπάρχουν).
Ειδικά, αν $\Delta = 0$, τότε έχουμε ότι $x_1 = x_2$ και το τριώνυμο παίρνει τη μορφή:
$$f(x) = a(x - x_1)^2 = a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2$$
12. Η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού, της οποίας οι λύσεις έχουν άθροισμα S και γινόμενο P είναι η $x^2 - Sx + P = 0$.
13. Για το πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0$ διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις:
$1^η$ περίπτωση: $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Πρόσημο $f(x)$		Ομόσημο του a	0	Ετερόσημο του a	0	Ομόσημο του a	

2η περίπτωση: $\Delta = 0$

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
Πρόσημο $f(x)$	Ομόσημο του a	0	Ομόσημο του a

3η περίπτωση: $\Delta < 0$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
Πρόσημο $f(x)$	Ομόσημο του a

14. Για να βρούμε το πρόσημο του γινομένου $P(x) = A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_\nu(x)$, βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_\nu(x)$ ξεχωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του $P(x)$.
15. Κατά ανάλογο τρόπο, για να βρούμε το πρόσημο του πηλίκου $Q(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, βρίσκουμε το πρόσημο του αριθμητή και του παρονομαστή ξεχωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του $Q(x)$.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας για τις παραβολές $f(x) = 3x^2$ και $g(x) = -2x^2$. Στη συνέχεια, να κατασκευάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις.

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας για τις παραβολές $f(x) = x^2 - 2x - 3$ και $g(x) = -x^2 + 4x$. Στη συνέχεια, να κατασκευάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις.

3. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $y = (\lambda - 3)x^2$ παριστάνει παραβολή που έχει ελάχιστη τιμή;

4. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = 2x^2$.
   (α) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της.
   (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου της παραβολής $A(3, 18)$ ως προς τον άξονα συμμετρίας της.

5. Αν η παραβολή με εξίσωση $y = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0$ τέμνει τον άξονα των $x'x$ στα σημεία με συντεταγμένες $A(-1, 0)$ και $B(9, 0)$, να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της.

6. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = (\kappa + 2)x^2,\ \kappa \in \mathbb{R},\ \kappa \neq -2$.
   (α) Για ποια τιμή του κ η παραβολή διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες $(2, -4)$;
   (β) Για ποια τιμή του $\beta \in \mathbb{R}$ η παραβολή $y = -x^2$ διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες $(-3, \beta + 1)$;

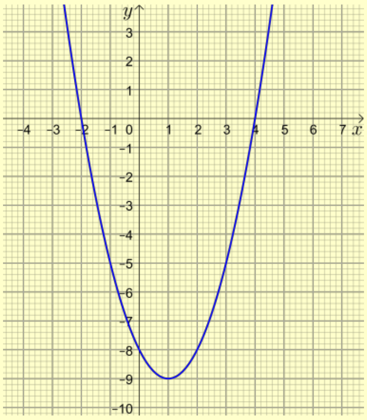
7. Να βρείτε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας (E) ενός κύβου που έχει ακμή x και να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E = E(x)$, που εκφράζει το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κύβου σε συνάρτηση με το μήκος x της ακμής του.

8. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 15 + 2x - x^2,\ x \in \mathbb{R}$.

9. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = (x - 1)^2 + x^2 + (x + 2)^2,\ x \in \mathbb{R}$.

10. Δίνεται η παραβολή $f(x) = x^2$. Να γράψετε τον τύπο των συναρτήσεων g, h, κ με $g(x) = f(x) + 2,\ h(x) = f(x + 2)$ και $\kappa(x) = f(x - 2) + 2$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας τους.

11. Στο πιο κάτω διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0$.



Να βρείτε:

(α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της

(β) το πρόσημο του a

(γ) την τιμή του γ

(δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της

(ε) τις συντεταγμένες της κορυφή της,

(στ) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$

(ζ) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = -10$

(η) τις λύσεις της ανίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma > 0$

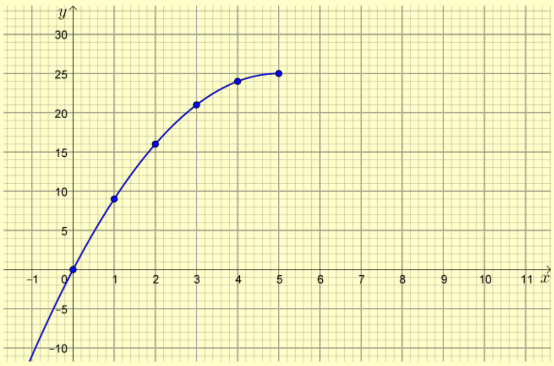
(θ) τις λύσεις της ανίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma < -9$

12. Ο πιο κάτω πίνακας τιμών αντιστοιχεί σε παραβολή της μορφής $y = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ με εξίσωση άξονα συμμετρίας την $x = 3$ και πεδίο ορισμού το $[0, 5]$.

x	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	-1	0	3

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της παραβολής και να βρείτε τον τύπο της.

13. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της παραβολής $y = ax^2 + \beta x + \gamma$, αν το σημείο με συντεταγμένες $(5, 25)$ είναι η κορυφή της παραβολής.



14. Αν αφεθεί ελεύθερα ένα σώμα από ύψος h (σε m), τότε ο χρόνος t (σε sec) που χρειάζεται για να φτάσει στο έδαφος συνδέεται με τη σχέση $h(t) = 5t^2$.
   (α) Να υπολογίσετε το ύψος από το οποίο αφέθηκε μία μπάλα, που χρειάστηκε $2\ \mathrm{sec}$ για να φτάσει στο έδαφος.
   (β) Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο θα πέσει στο έδαφος μία μπάλα, που αφήνεται από ύψος $80\ \mathrm{m}$.
   (γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t) = 5t^2$, αναφέροντας το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

15. Η παραβολή με εξίσωση $y = ax^2 + \beta x + \gamma,\ a \neq 0$ τέμνει τον άξονα των $x'x$ στα σημεία με τετμημένες 3 και 9, ενώ τέμνει τον άξονα των $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 27. Να βρείτε:
   (α) την εξίσωση της παραβολής
   (β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της
   (γ) τις συντεταγμένες της κορυφής της.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda+1)x^2 - (\lambda+1)x + 2, x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (α) Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$.
   (β) Αν $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.
   (γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο $B(2,0)$, να υπολογίσετε την τιμή του λ και να εξετάσετε κατά πόσο η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα των τετμημένων και σε άλλο σημείο.
   (δ) Αν $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα των τετμημένων.

17. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:
   (α) Αν $a = 2$ και το τριώνυμο f έχει κορυφή το σημείο $K(1,-3)$, τότε:
   Α. $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ **Β.** $f(x) = 2(x-1)^2 - 3$
   Γ. $f(x) = 2(x+1)^2 + 3$ **Δ.** $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$
   (β) Αν $f(1) < 0, f(3) > 0$ και $f(5) < 0$, τότε:
   Α. $\Delta = 0$ και $a > 0$ **Β.** $\Delta > 0$ και $a > 0$ **Γ.** $\Delta > 0$ και $a < 0$
   (γ) Αν το τριώνυμο f έχει κορυφή το σημείο $K(1,2)$ και $a > 0$, τότε:
   Α. $\Delta > 0$ **Β.** $\Delta = 0$ **Γ.** $\Delta < 0$ **Δ.** $\gamma < 0$
   (δ) Αν το τριώνυμο f έχει κορυφή το σημείο $K(1,0)$, τότε:
   Α. $\beta = 0$ **Β.** $\Delta < 0$ **Γ.** $\Delta > 0$ **Δ.** $\Delta = 0$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x - 21$.
   (α) Να μετασχηματίσετε τη συνάρτηση f στη μορφή $f(x) = (x-a)^2 + \beta,\ a, \beta \in \mathbb{Z}$.
   (β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f.
   (γ) Να αναφέρετε τον άξονα συμμετρίας της και την κορυφή της παραβολής $y = x^2 - 4x - 21$.
   (δ) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής $y = (x-a)^2 + \beta\ , a, \beta \in \mathbb{R}$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

19. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παραβολών:
   (α) $f(x) = x^2 + 2x$ (β) $g(x) = 2x^2 - 5x + 2$ (γ) $h(x) = 5 + 4x - x^2$

20. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α)	Η εξίσωση $x^2 + x - 11 = 0$ έχει το άθροισμα των λύσεων της ίσο με 1.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Το γινόμενο των λύσεων της εξίσωσης $3x^2 + 6x - 1 = 0$ είναι -2.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Μία εξίσωση με λύσεις $x_1 = 2, x_2 = 4$ είναι η $x^2 + 6x + 8 = 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 + 4x - 20 = 0$ είναι οι x_1 και x_2, τότε η παράσταση $x_1 + x_2 - x_1x_2$ ισούται με 16.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Η εξίσωση $5x^2 + 11x + 5 = 0$ έχει λύσεις αντίστροφες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Η εξίσωση $x^2 + \lambda x - \mu^2 = 0, \mu \in \mathbb{R}$ έχει δύο λύσεις αντίθετες, όταν $\mu = 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	Αν το $\sqrt{\kappa}\ , \kappa > 0$ είναι ρίζα του τριωνύμου $x^2 + \sqrt{\kappa}x + \lambda$, τότε $\lambda < 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

21. Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους περιττούς αριθμούς με γινόμενο 63.

22. Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς που να έχουν άθροισμα 8 και γινόμενο 15.

23. Αν $x_1\ , x_2$ είναι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 6x - 3 = 0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
   (α) $-3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2$ (β) $\dfrac{12}{x_1^2} + \dfrac{12}{x_2^2}$ (γ) $x_1^4 + x_2^4$

24. Να σχηματίσετε εξίσωση δεύτερου βαθμού με ακέραιους συντελεστές, που να έχουν λύσεις τα πιο κάτω ζεύγη:

(α) $\frac{1}{4}$ και $-\frac{2}{3}$ (β) $3+\sqrt{3}$ και $3-\sqrt{3}$ (γ) $-\frac{2}{5}$ και $\frac{2}{5}$

25. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A=\frac{1}{5+\sqrt{5}}\,,\quad B=\frac{1}{5-\sqrt{5}}$$

(α) Να δείξετε ότι:

$$A+B=\frac{1}{2},\quad AB=\frac{1}{20}$$

(β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δεύτερου βαθμού με λύσεις τους αριθμούς A και B.

26. Η εξίσωση $3x^2+6x-1=0$ έχει λύσεις τους αριθμούς x_1, x_2. Να σχηματίσετε εξίσωση δεύτερου βαθμού με λύσεις τους αριθμούς $x_1+2x_2,\ x_2+2x_1$.

27. Δίνεται η εξίσωση $x^2-x+(\lambda-\lambda^2)=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

(α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει λύσεις πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

(β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει δύο λύσεις ίσες;

(γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$A=\frac{1}{\sqrt{S-P}}\,,$$

όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των λύσεων της εξίσωσης, αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

28. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία τα πιο κάτω τριώνυμα έχουν μη αρνητικές τιμές:

(α) $x^2-8x+12$ (β) $-4y^2+12y-9$

29. Να βρείτε το πρόσημο του πηλίκου:

$$P(x)=\frac{x+3}{x^2+3x-10}\,,\quad x\in\mathbb{R}-\{-5,2\}$$

30. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

(α) $-x^2+x+20<0$ (β) $x^3+2x^2-24x\le 0$

(γ) $\dfrac{\lambda^2}{\lambda+4}\ge 0$ (δ) $\dfrac{y^2}{y+3}\ge 4$

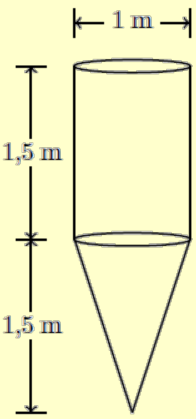
31. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2 + (2\lambda - 3)x - 3\lambda - 7$ δεν έχει πραγματικές ρίζες;

32. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0,\ \alpha \neq 0$.
   (α) Να αποδείξετε ότι αν $-\frac{5}{2} \leq \alpha \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.
   (β) Να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης, όταν $\alpha = 2$.
   (γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$.

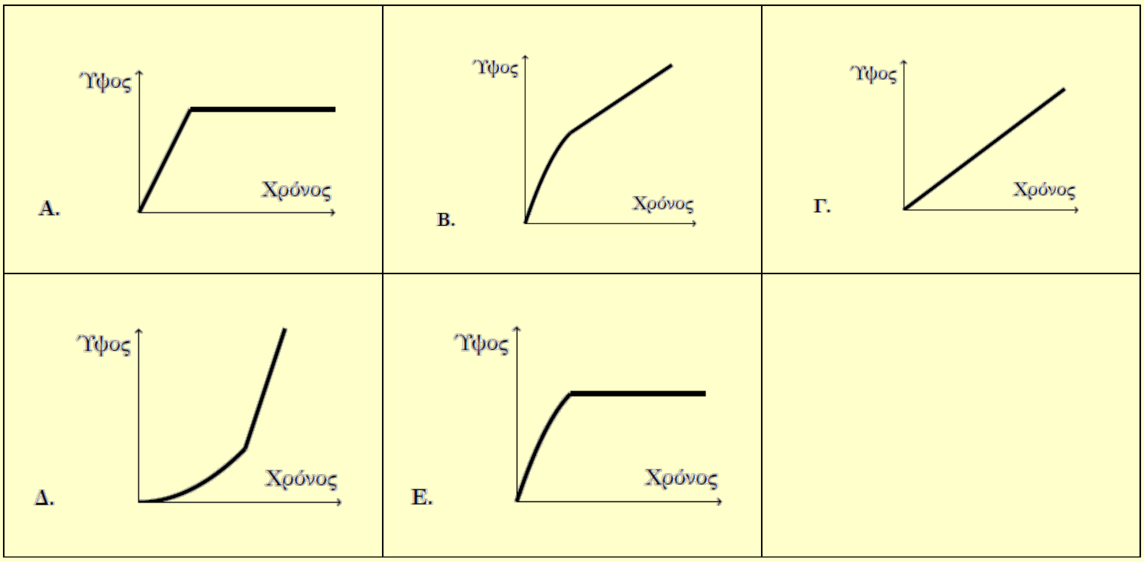
Λύση Προβλήματος

ΝΤΕΠΟΖΙΤΟ ΝΕΡΟΥ

Ένα ντεπόζιτο νερού έχει τη μορφή και τις διαστάσεις που φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα.



Αρχικά, το ντεπόζιτο είναι άδειο. Μετά το γεμίζουμε νερό με ρυθμό ένα λίτρο ανά δευτερόλεπτο. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις δείχνει τον τρόπο με τον οποίο το ύψος του νερού μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου;

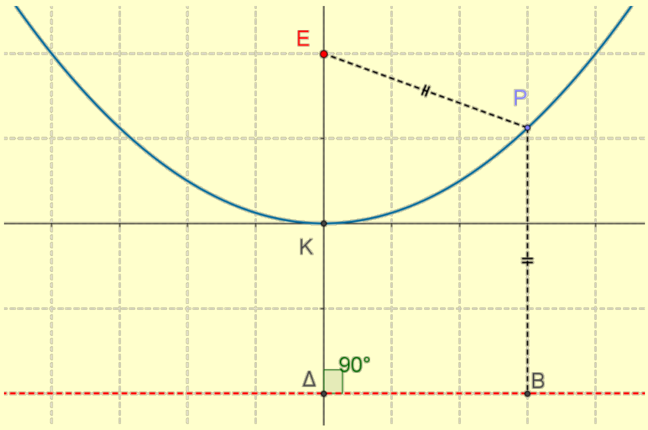


PISA 2003

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Δίνεται η παραβολή (Π) με τύπο $y = x^2$. Αν A και B είναι σημεία της παραβολής με τετμημένες -2 και 3:
   (α) να βρείτε τις τεταγμένες των σημείων A και B
   (β) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB
   (γ) να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την παραβολή (Π) και την ευθεία AB.

2. Για την παραβολή $y = \frac{x^2}{4}$, το σημείο $E(0, a)$ είναι σταθερό σημείο στον άξονά της.



   Αν η ΔB είναι ευθεία κάθετη στον άξονα της παραβολής με $EP = PB$, $EK = K\Delta$ και το P είναι τυχαίο σημείο της παραβολής:
   (α) Να υπολογίσετε την τιμή του a.
   (β) Να βρείτε την αντίστοιχη τιμή του a, αν ο τύπος της παραβολής ήταν $y = x^2$.
   (γ) Να διατυπώσετε λεκτικά την πιο πάνω ιδιότητα της παραβολής.

3. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η διακρίνουσα της εξίσωσης παίρνει ελάχιστη τιμή και να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της.

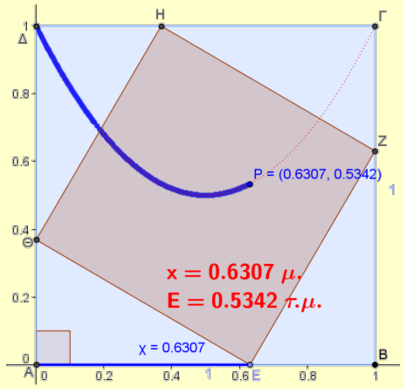
4. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(\kappa + 2, \kappa), \kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ η απόσταση (AB) γίνεται ελάχιστη.

5. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & , x < 0 \\ x^2 - 2x & , x \geq 0 \end{cases}$
   και, από τη γραφική παράσταση, να βρείτε:
   (α) τον άξονα συμμετρίας της (αν υπάρχει)
   (β) τις τομές με τους άξονες
   (γ) τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της
   (δ) το σύνολο τιμών της

6. Αν το τριώνυμο $P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2, να αποδείξετε ότι:

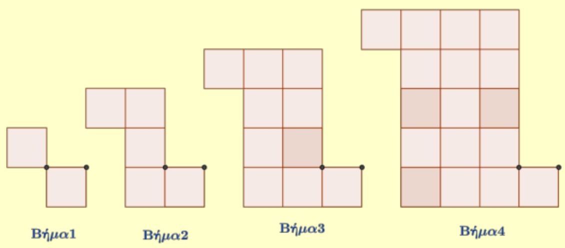
$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

7. Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En07_Emvado tetragonou1.ggb»*.



Να μετακινήσετε το σημείο E της πλευράς AB. Το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει μήκος πλευράς 1 cm. Το σημείο E «κινείται» στην πλευρά AB, έτσι ώστε να δημιουργεί το τετράγωνο $EZH\Theta$ μέσα στο αρχικό τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Αν $AE = x$, να υπολογίσετε την τιμή του x, για την οποία το εμβαδόν του $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο. Τι δηλώνουν οι συντεταγμένες του σημείου P κατά την κίνηση του σημείου E;

8. Δίνονται τα πιο κάτω σχήματα.



(α) Με βάση το σχήμα, να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Βήμα	1	2	3	4
Αριθμός Τετραγώνων	2			

(β) Να αναφέρετε το μοτίβο που δείχνει την αύξηση στα τετραγωνάκια σε κάθε επόμενο βήμα.

(γ) Να προβλέψετε τον αριθμό των τετραγώνων στα επόμενα τέσσερα βήματα.

(δ) Να υπολογίσετε τον αριθμό των τετραγώνων στο ν βήμα.

9. Για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2 - 3\kappa x + (2\kappa^2 - \kappa + 3)$ μετασχηματίζεται σε διαφορά δύο τετραγώνων;

10. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ορίζεται η παράσταση:
$$A(x) = \sqrt{-x^2 - 4x + 12} - \sqrt{x^2 - 1}$$

11. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 2 και γινόμενο 4.

12. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.
    (α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει λύσεις πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
    (β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει δύο λύσεις ίσες;
    (γ) Να υπολογίσετε τις τιμές του λ, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

13. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 8x + 15}, \quad x \in \mathbb{R} - \{3, 5\}$$
δεν μπορεί να πάρει τιμές στο διάστημα $[1, 4)$.

14. Το κέρδος σε ευρώ ενός τουριστικού γραφείου από μία σχολική εκδρομή x μαθητών δίνεται από τον τύπο $K(x) = 80x - x^2$.
    (α) Να βρείτε πόσοι μαθητές θα πρέπει να πάνε εκδρομή, έτσι ώστε το ελάχιστο κέρδος του τουριστικού γραφείου να είναι €975.
    (β) Για ποιον αριθμό μαθητών το γραφείο έχει μέγιστο κέρδος;

15. Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο λογισμικό, για να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \frac{1}{8}(x^4 + x^3 - 12x^2 + 4x + 16)$ και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{8}(x^4 + x^3 - 12x^2 + 4x + 16) \leq 0$.

16. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$. Να μετατρέψετε το τριώνυμο στη μορφή $f(x) = (x + \kappa)^2 + \lambda$, εκφράζοντας τα κ και λ συναρτήσει των β και γ.

17. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, ισχύει:
    (α) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
    (β) $(x - 3y)^2 + 4(3y - x) + 8 > 0$

18. Να διερευνήσετε, για διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, το είδος και το πρόσημο των λύσεων των πιο κάτω εξισώσεων:
    (α) $2x^2 - 4x + 3(2\kappa - 1) = 0$
    (β) $2x(x - \kappa) = \kappa^2$

19. Δίνεται το τριώνυμο $g(x) = x^2 + (a + 2)x + (a + 2)$. Να αποδείξετε ότι η τιμή $g(a)$ είναι θετική για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

20. (α) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$ και της ευθείας $y = x$.

(β) Από τις γραφικές παραστάσεις, να λύσετε τις ανισώσεις $x^2 \geq \frac{1}{x}$ και $\frac{1}{x} < x$. Στη συνέχεια, να επαληθεύσετε αλγεβρικά τα αποτελέσματά σας.

21. Αν x_1 , x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 3x - a = 0$, να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$2 - \frac{a}{x_1 + 2} < \frac{a}{x_2 + 2}$$

22. Η απόσταση φρεναρίσματος A (σε μέτρα) ενός αυτοκινήτου, που κινείται με ταχύτητα u, υπολογίζεται κατά προσέγγιση από τον τύπο $A(u) = \frac{1}{20}u^2 + u$, $(u > 0)$. Να προσδιορίσετε τις ταχύτητες που έχουν ως αποτέλεσμα αποστάσεις φρεναρίσματος μικρότερες από 75 m.

23. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^2 - 4x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

24. (α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός a με $0 < a < 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από το μικρότερο στο μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς $0,\ 1,\ a,\ a^2,\ \sqrt{a}$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια του ερωτήματος (α).

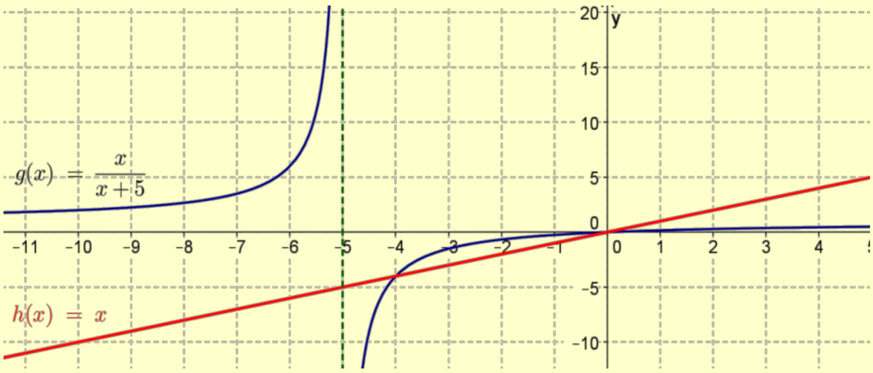
ii. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1 + a} < 1 + \sqrt{a}$.

25. Δίνεται η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$$g(x) = \frac{x}{x+5}\ ,\ \ h(x) = x$$

Να βρείτε τα διαστήματα για τα οποία ισχύει:

$$\frac{x}{x+5} \leq x$$



ΕΝΟΤΗΤΑ 08

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Έχουμε μάθει ...

- Να ορίζουμε τη μεταβλητή και να τη διακρίνουμε σε ποιοτική ή ποσοτική.
- Να παρουσιάζουμε και να παριστούμε, με κατάλληλα διαγράμματα, στατιστικά δεδομένα.
- Να ορίζουμε και να υπολογίζουμε τα τρία βασικά μέτρα θέσης:
  - ✓ Μέση τιμή
  - ✓ Διάμεσος
  - ✓ Επικρατούσα τιμή.

8.1 ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

8.1.1. Ιδιότητες μέσης τιμής

Διερεύνηση

Οι βαθμοί του Ανδρέα σε 4 διαγωνίσματα στα Μαθηματικά ήταν $15, 18, 18, 17$. Για τα ίδια διαγωνίσματα, ο Βασίλης είχε πάρει 2 μονάδες περισσότερες σε κάθε διαγώνισμα από τον Ανδρέα, ο Γιάννης είχε πάρει 4 μονάδες λιγότερες από τον Ανδρέα σε κάθε διαγώνισμα, ενώ ο Δημήτρης είχε πάρει σε κάθε διαγώνισμα μία μονάδα περισσότερη από το μισό των βαθμών του Ανδρέα.

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών του κάθε παιδιού.

(β) Να επεξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε και να αναφέρετε πώς συνδέονται οι μέσοι όροι της βαθμολογίας των παιδιών.

Πρόταση

Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι ν παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X με μέση τιμή $\bar{x}$, τότε η μέση τιμή $\bar{y}$ των παρατηρήσεων $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ μιας μεταβλητής Y, για τις οποίες ισχύει $y_i = a x_i + \beta,\ i = 1, 2, \ \ldots, \nu,$ και $a, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $\bar{y} = a\bar{x} + \beta$.

Απόδειξη

Έχουμε ότι:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_\nu}{\nu} = \frac{(ax_1 + \beta) + (ax_2 + \beta) + \ldots + (ax_\nu + \beta)}{\nu}$$

$$= \frac{a(x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu) + (\beta + \beta + \ldots + \beta)}{\nu}$$

$$= a \cdot \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu} + \frac{\nu\beta}{\nu} = a\bar{x} + \beta$$

Επομένως, ισχύει ότι $\bar{y} = a\bar{x} + \beta$.

Παράδειγμα 1

Αν ο μέσος όρος του μηνιαίου μισθού των υπαλλήλων ενός εργοστασίου πέρυσι ήταν €850 και φέτος σε κάθε υπάλληλο δοθεί αύξηση €50, τότε να υπολογίσετε τον νέο μέσο όρο των μισθών των υπαλλήλων του εργοστασίου.

Λύση

Έχουμε ότι $\bar{x} = €850$, $y_i = x_i + 50$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \nu$ και $\bar{y} = \bar{x} + 50$. Επομένως, ο νέος μέσος όρος των μισθών είναι $\bar{y} = 850 + 50 = €900$.

Παράδειγμα 2

Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι παρατηρήσεις των μεταβλητών X, Y και Z.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Z	507	607	707	807	907	1007	1107	1207	1307

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής X.

(β) Να εκφράσετε τις παρατηρήσεις των μεταβλητών Y και Z συναρτήσει των παρατηρήσεων της μεταβλητής X.

(γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής Y και των παρατηρήσεων της μεταβλητής Z.

Λύση

(α) Η μέση τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής X είναι:

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+\ldots+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

(β) Έχουμε:

$$Y = 10X, \quad Z = 100X + 407$$

(γ) Η μέση τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής Y και των παρατηρήσεων της μεταβλητής Z είναι, αντίστοιχα:

$$\bar{y} = 10\bar{x} = 10 \cdot 5 = 50, \quad \bar{z} = 100\bar{x} + 407 = 100 \cdot 5 + 407 = 907$$

8.1.2. Σταθμισμένος μέσος

Διερεύνηση

- Σε μια αγορά οι τιμές στους ξηρούς καρπούς ανά κιλό εμφανίζονται στον πιο κάτω πίνακα:

Καρύδια (Kg)	Αμύγδαλα (Kg)	Φουντούκια (Kg)
17 ευρώ	14 ευρώ	13 ευρώ

Κάποιος αγοράζει 2 Kg καρύδια, 2 Kg αμύγδαλα και 1 Kg φουντούκια. Πόσο του στοίχισε ανά κιλό η συνολική αγορά των ξηρών καρπών;

- Ο καθηγητικός σύλλογος ενός Λυκείου απονέμει κάθε χρόνο ένα βραβείο στον τελειόφοιτο μαθητή που συγκεντρώνει την υψηλότερη βαθμολογία στα μαθήματα των Ελληνικών, των Μαθηματικών και της Φυσικής, βάσει ενός τελικού βαθμού. Ο τελικός βαθμός προκύπτει από την τελική εξέταση τους κάθε μαθήματος, με βαρύτητα ίση των εβδομαδιαίων περιόδων που διδάσκεται το κάθε μάθημα. Ένας μαθητής πήρε τους βαθμούς που εμφανίζονται στον πιο κάτω πίνακα:

Βαθμός Ελληνικών (4 περίοδοι)	Βαθμός Μαθηματικών (7 περίοδοι)	Βαθμός Φυσικής (5 περίοδοι)
17	18	16

  Ποιος είναι ο τελικός βαθμός του μαθητή;

- Ποια είναι η μέση τιμή των αριθμών $12, 12, 12, 12, 15, 15$;

- Πώς σχετίζονται τα τρία προβλήματα πιο πάνω;

Πρόταση

Αν οι παρατηρήσεις $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_\nu$ μιας μεταβλητής X έχουν συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$, τότε ο **σταθμισμένος μέσος** (weighted average) ορίζεται ως η ποσότητα που δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_\nu x_\nu}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu}$$

Σημείωση

Ο απλός μέσος όρος είναι ειδική περίπτωση του σταθμισμένου μέσου με συντελεστές βαρύτητας ίσους με την μονάδα, δηλαδή $w_1 = w_2 = w_3 \ldots = w_\nu = 1$.

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τον σταθμισμένο μέσο όρο πέντε ομάδων με τιμές $83, 78, 95, 69$ και 100 με αντίστοιχη βαρύτητα $1, 2, 3, 4$ και 5.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1\cdot 83 + 2\cdot 78 + +3\cdot 95 + 4\cdot 69 + 5\cdot 100}{1+2+3+4+5}\\ &= \frac{83+156+285+276+500}{15}\\ &= \frac{1300}{15} = 86{,}67\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Ο βαθμός στο τέλος ενός τετραμήνου, σε ένα εξεταζόμενο μάθημα, υπολογίζεται από τους βαθμούς της προφορικής αξιολόγησης με βαρύτητα 60%, μιας γραπτής άσκησης με βαρύτητα 10% και του δοκιμίου εξέτασης τετραμήνου με βαρύτητα 30%. Αν ένας μαθητής είχε στα Μαθηματικά βαθμό 18 στην προφορική αξιολόγηση, βαθμό 14 στη γραπτή άσκηση και βαθμό 16 στο δοκίμιο εξέτασης τετραμήνου, τότε να υπολογίσετε τον τελικό βαθμό τετραμήνου του μαθητή στα Μαθηματικά.

Λύση

Ο τελικός βαθμός τετραμήνου του μαθητή στα Μαθηματικά είναι:

$$\bar{x} = \frac{0{,}6 \cdot 18 + 0{,}1 \cdot 14 + 0{,}3 \cdot 16}{0{,}6 + 0{,}1 + 0{,}3} = 17$$

Παράδειγμα 3

Ο μέσος όρος της μάζας 6 αγοριών είναι 64 Kg και ο μέσος όρος της μάζας 4 κοριτσιών είναι 59 Kg. Να υπολογίσετε τον μέσο όρο βάρους και των 10 παιδιών και να σχολιάσετε το αποτέλεσμα σε σχέση με τον σταθμισμένο μέσο.

Λύση

Για την ομάδα των αγοριών έχουμε:

$$\overline{x_1} = 64, \;\; \nu_1 = 6$$

Τότε, έχουμε ότι το συνολικό άθροισμα της μάζας και των 6 παιδιών είναι:

$$\Sigma_1 = \overline{x_1} \cdot \nu_1 = 64 \cdot 6 = 384 \text{ Kg}$$

Για την ομάδα των κοριτσιών έχουμε:

$$\overline{x_2} = 59, \;\; \nu_2 = 4$$

Τότε, έχουμε ότι το συνολικό άθροισμα της μάζας και των 4 παιδιών είναι:

$$\Sigma_2 = \overline{x_2} \cdot \nu_2 = 59 \cdot 4 = 236 \text{ Kg}$$

Επομένως, ο μέσος όρος της μάζας και των 10 παιδιών είναι:

$$\bar{x} = \frac{384 + 236}{10} = \frac{620}{10} = 62 \text{ Kg}$$

Διαφορετικά, υπολογίζουμε τον πιο πάνω μέσο όρο ως εξής:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{6 \cdot 64 + 4 \cdot 59}{6 + 4} = \frac{384 + 236}{6 + 4} = \frac{620}{10} = 62 \text{ Kg}$$

Παράδειγμα 4

Ο τελικός βαθμός ενός φοιτητή στα 7 μαθήματά του υπολογίζεται με τον σταθμισμένο μέσο όρο. Η βαρύτητα του κάθε μαθήματος είναι οι περίοδοι διδασκαλίας του. Οι περίοδοι διδασκαλίας του κάθε μαθήματος φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

Μάθημα	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
Βαθμός	8	7,5	9	7	10	6	5
Περίοδοι	4	2	3,5	2,5	3	2	1

Να υπολογίσετε τον τελικό βαθμό του φοιτητή αυτού.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot 8 + 2 \cdot 7{,}5 + 3{,}5 \cdot 9 + 2{,}5 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5}{4 + 2 + 3{,}5 + 2{,}5 + 3 + 2 + 1} = \frac{143}{18} = 7{,}94$$

8.1.3. Μέτρα διασποράς

Διερεύνηση

Ένας καθηγητής θέλει να συγκρίνει τα δύο τμήματά του A_1 και A_2, ως προς την επίδοση τους στα Μαθηματικά.

Τμήμα A_1	1	3	7	10	13	15	15	17	19	20
Τμήμα A_2	5	6	8	9	14	14	15	16	16	17

Τι προτείνετε στον καθηγητή να κάνει για να συγκρίνει τα τμήματά του;

Τα μέτρα θέσης δεν είναι αρκετά για να περιγράψουν διαφορές χαρακτηριστικών δύο πληθυσμών. Ως εκ τούτου, χρειάζονται επιπρόσθετα μέτρα, τα οποία ονομάζονται **μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας**.

Ορισμός

Εύρος των παρατηρήσεων (Range) ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης ($x_{\min}$) από τη μέγιστη παρατήρηση ($x_{\max}$) και συμβολίζεται με R:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Παρατήρηση
Οι ακραίες τιμές καθορίζουν την τιμή του εύρους του πληθυσμού.

Για παράδειγμα, στις τιμές $6, 11, 10, 11, 13, 14, 15, 15, 16, 17, 18$, το εύρος είναι $R = 18 - 6 = 12$ μονάδες. Αν αλλάξουν οι ακραίες τιμές από 6 σε 2 και από 18 σε 19, τότε το εύρος αυξάνεται σε $R = 19 - 2 = 17$ μονάδες.

Άλλα μέτρα διασποράς μετρούν τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων από τον μέσο όρο.

- Ο μέσος όρος των παρατηρήσεων $11, 14, 14, 16, 20$ είναι:
  $$\frac{75}{5} = 15$$
  Βρίσκουμε τις αποκλίσεις όλων των τιμών από τον μέσο όρο:
  $$(11 - 15),\ (14 - 15),\ (14 - 15),\ (16 - 15),\ (20 - 15)$$
  Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των αποκλίσεων από τον μέσο όρο είναι:
  $$(-4) + (-1) + (-1) + (+1) + (+5) = 0$$

Η πιο πάνω παρατήρηση γενικεύεται για κάθε σύνολο παρατηρήσεων, δηλαδή το άθροισμα όλων των αποκλίσεων από τον μέσο όρο είναι πάντα μηδέν. Επομένως, το άθροισμα όλων των αποκλίσεων από τον μέσο όρο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο για τη μέτρηση της διασποράς των παρατηρήσεων και ως εκ τούτου παίρνουμε το άθροισμα των τετραγώνων.

Ορισμοί
- **Διακύμανση ή διασπορά** ν παρατηρήσεων $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_\nu$ ορίζεται ως ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή. Συμβολίζεται με s^2 και δίνεται από τον τύπο:
  $$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_\nu - \bar{x})^2}{\nu}$$
- **Τυπική απόκλιση** (standard deviation) είναι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς. Συμβολίζεται με s και δίνεται από τον τύπο:
  $$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_\nu - \bar{x})^2}{\nu}}$$

- Η τυπική απόκλιση που αναφέρεται στο σύνολο ενός πληθυσμού συμβολίζεται με σ, ενώ η τυπική απόκλιση που αναφέρεται σε δείγμα ενός πληθυσμού συμβολίζεται με s.

Παρατήρηση
Η τυπική απόκλιση έχει την ίδια μονάδα μέτρησης με εκείνη των παρατηρήσεων.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, από τις τιμές $11, 14, 14, 16, 20$ *με μέσο όρο* 5, *η διασπορά υπολογίζεται ως*

$$s^2 = \frac{(11-15)^2+(14-15)^2+(14-15)^2+(16-15)^2+(20-15)^2}{5}$$
$$= \frac{(-4)^2+(-1)^2+(-1)^2+(+1)^2+(+5)^2}{5} = \frac{44}{5} = 8{,}8$$

και η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{8{,}8} = 2{,}97$ *(σε δύο δεκαδικά ψηφία).*

Ορισμός

Συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας (CV) ορίζεται το πηλίκο της τυπικής απόκλισης (s) προς την απόλυτη τιμή της μέσης τιμής $(\bar{x})$ των παρατηρήσεων. Δηλαδή, ισχύει:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$$

Παρατηρήσεις

- Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι **ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης** και εκφράζεται συνήθως ως ποσοστό.
- Ο συντελεστής μεταβλητότητας ορίζεται, όταν $|\bar{x}| \neq 0$.
- Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι **μικρότερος από** $\mathbf{10}\%$, λέγεται ότι τα δεδομένα παρουσιάζουν **ομοιογένεια**.
- Ένα δείγμα A έχει **μεγαλύτερη ομοιογένεια** από ένα δείγμα B, αν $CV_A < CV_B$.

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση των δεδομένων του πίνακα.

Αριθμός παιδιών (x_i)	Αριθμός οικογενειών (f_i)
0	5
1	10
2	7
3	4
4	3
5	2
6	1

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων:

$$\bar{x} = \frac{0\cdot 5+1\cdot 10+2\cdot 7+3\cdot 4+4\cdot 3+5\cdot 2+6\cdot 1}{32} = \frac{64}{32} = 2$$

Η διακύμανση s^2, ως ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των μεταβλητών από τον μέσο όρο, υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_\nu-\bar{x})^2}{\nu}$$
$$= \frac{(-2)^2\cdot 5+(-1)^2\cdot 10+0^2\cdot 7+1^2\cdot 4+2^2\cdot 3+3^2\cdot 2+4^2\cdot 1}{32}$$
$$= \frac{20+10+0+4+12+18+16}{32} = \frac{80}{32} = 2{,}5$$

Επομένως, η τυπική απόκλιση είναι $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{2{,}5}\simeq 1{,}58$.

Τα πιο πάνω αποτελέσματα μπορούν να εξαχθούν και με τη βοήθεια του πιο κάτω πίνακα.

Αριθμός παιδιών (x_i)	Αριθμός οικογενειών (f_i)	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2\cdot f_i$
0	5	$(0-2)^2=4$	$4\cdot 5=20$
1	10	$(1-2)^2=1$	$1\cdot 10=10$
2	7	$(2-2)^2=0$	$0\cdot 7=0$
3	4	$(3-2)^2=1$	$1\cdot 4=4$
4	3	$(4-2)^2=4$	$4\cdot 3=12$
5	2	$(5-2)^2=9$	$9\cdot 2=18$
6	1	$(6-2)^2=16$	$16\cdot 1=16$
Σύνολο	32		80

Επομένως:

$$s^2=\frac{80}{32}=2{,}5,\quad s=\sqrt{s^2}=\sqrt{2{,}5}\simeq 1{,}58$$

Παράδειγμα 2

Ο μέσος μισθός των υπαλλήλων μιας εταιρείας A είναι $\bar{x}_A=€2200$ και η αντίστοιχη τυπική απόκλιση είναι $s_A=€270$, ενώ ο μέσος μισθός των υπαλλήλων μιας εταιρείας B είναι $\bar{x}_B=€1100$ και η αντίστοιχη τυπική απόκλιση είναι $s_B=€220$. Σε ποια από τις δύο εταιρείες υπάρχει ομοιογένεια μισθών;

Λύση

Υπολογίζουμε τον συντελεστή μεταβλητότητας των μισθών για κάθε εταιρεία. Είναι:

$$CV_A=\frac{s_A}{|\bar{x}_A|}=\frac{270}{2200}=12{,}2\%$$
$$CV_B=\frac{s_B}{|\bar{x}_B|}=\frac{220}{1100}=20\%$$

Παρατηρούμε ότι αν και η τυπική απόκλιση μισθών στην εταιρεία A είναι μεγαλύτερη από την τυπική απόκλιση μισθών στην εταιρεία B, ο συντελεστής μεταβλητότητας στην εταιρεία A είναι μικρότερος. Αυτό μάς δείχνει ότι στην εταιρεία A υπάρχει μεγαλύτερη ομοιογένεια μισθών από ότι στην εταιρεία B.

Δραστηριότητες

1. Να διακρίνετε ποια από τα ακόλουθα είναι μέτρα θέσης ή μέτρα διασποράς:
   (α) Διάμεσος
   (β) Εύρος
   (γ) Διακύμανση
   (δ) Μέση τιμή
   (ε) Επικρατούσα τιμή
   (στ) Τυπική απόκλιση
   (ζ) Σταθμισμένος μέσος

2. Η βαθμολογία 16 μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν:
   $$8, 15, 13, 20, 9, 13, 17, 19, 20, 9, 10, 10, 15, 13, 14, 17$$

   Να υπολογίσετε:
   (α) τα τρία βασικά μέτρα θέσης (μέση τιμή, διάμεσο, επικρατούσα τιμή)
   (β) το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

3. Η μέση τιμή ηλικίας των υπαλλήλων μιας εταιρείας είναι 32 χρόνια. Ποια θα είναι η μέση τιμή ηλικίας των ίδιων υπαλλήλων ύστερα από τρία χρόνια;

4. Αν η τιμή 12 έχει βαρύτητα 0,2, η τιμή 14 έχει βαρύτητα 0,3 και η τιμή 17 έχει βαρύτητα 0,5, τότε να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πιο πάνω τιμών.

5. Η μέση επίδοση 17 αγοριών και 13 κοριτσιών στο μάθημα των Μαθηματικών μιας τάξης είναι 16,8. Η μέση επίδοση των κοριτσιών είναι 15,6. Να υπολογίσετε τη μέση επίδοση των αγοριών.

6. Ένας φοιτητής πήρε σε 5 διαφορετικά μαθήματα για το πρώτο εξάμηνο τους βαθμούς $7, 8$ $,9, 10$ και 6. Ποια θα είναι η τελική του βαθμολογία, αν τα μαθήματα έχουν βαρύτητα ίση με τις περιόδους διδασκαλίας του κάθε μαθήματος, που είναι αντίστοιχα $2, 3, 1, 4$ και 5;

7. Τα μήκη 5 διαφορετικών τιμών x σε mm είναι:
   $$210, 220, 230, 240, 250$$

   (α) Να βρείτε τη μέση τιμή των μηκών x.
   (β) Να βρείτε τη μέση τιμή των μηκών y, z, ω, αν:
   $$y = \frac{x}{10}, \quad z = x - 200, \quad \omega = \frac{x - 200}{10}$$

8. Η τυπική απόκλιση ενός δείγματος με ν παρατηρήσεις είναι ίση με μηδέν. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τις παρατηρήσεις αυτές;

9. Στις τρεις πιο κάτω λίστες δεδομένων, ο μέσος όρος είναι ο αριθμός 50. Χωρίς να κάνετε τις σχετικές πράξεις, να αναφέρετε σε ποια από τις τρεις λίστες υπάρχει η μικρότερη και σε ποια η μεγαλύτερη διασπορά των παρατηρήσεων, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Λίστα 1	0	20	40	50	60	80	100
Λίστα 2	0	48	49	50	51	52	100
Λίστα 3	0	1	2	50	98	99	100

10. Η μέση τιμή 6 διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι 7,5. Να υπολογίσετε την τυπική τους απόκλιση.

11. Οι μέγιστες ημερήσιες θερμοκρασίες του μηνός Ιούνιου 2020 ήταν οι ακόλουθες:

$$\begin{array}{cccccccccc} 27, & 26, & 27, & 25, & 25, & 26, & 29, & 28, & 28, & 27 \\ 28, & 27, & 25, & 26, & 28, & 28, & 28, & 26, & 29, & 31 \\ 28, & 27, & 28, & 27, & 29, & 31, & 35, & 29, & 30, & 32 \end{array}$$

(α) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή των πιο πάνω θερμοκρασιών.
(β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο τιμή των πιο πάνω θερμοκρασιών
(γ) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των πιο πάνω θερμοκρασιών.

12. Για τον τελικό βαθμό στο μάθημα της Στατιστικής, ένας φοιτητής βαθμολογείται με 10% για τη συμμετοχή του στην τάξη, με 40% για την ενδιάμεση εξέταση και με 50% για την τελική εξέταση. Ποιος θα είναι ο τελικός βαθμός ενός φοιτητή που βαθμολογήθηκε με 87 από τα 100 για τη συμμετοχή του στην τάξη, με 72 από τα 100 στην ενδιάμεση εξέταση και με 47 από τα 100 στην τελική εξέταση;

13. Αν σε ένα δείγμα ο μέσος όρος είναι $\bar{x} = 15$ και ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι $CV = 20\%$, τότε να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση του δείγματος.

14. Αν στον πιο κάτω πίνακα η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 7{,}5$:
   (α) να συμπληρώσετε τον πίνακα και να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των τιμών
   (β) να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας.

Τιμές (x_i)	Συχνότητα (f_i)
5	3
6	5
7	12
8	9
9	…
10	3
Σύνολο	

15. Από ένα δείγμα 30 μαθητών της B' Γυμνασίου, ο μέσος όρος της μάζας τους ήταν $\bar{x}_1 = 48\ \mathrm{Kg}$ με τυπική απόκλιση $s_1 = 7\ \mathrm{Kg}$, ενώ από ένα δεύτερο δείγμα 40 μαθητών Γ' Λυκείου, ο μέσος όρος της μάζας τους ήταν $\bar{x}_2 = 76\ \mathrm{Kg}$ με τυπική απόκλιση $s_2 = 7\ \mathrm{Kg}$. Να εξετάσετε κατά πόσο τα δύο δείγματα έχουν τον ίδιο ή διαφορετικό συντελεστή μεταβλητότητας.

16. Σε ένα διαγώνισμα, η μέση τιμή της βαθμολογίας για το τμήμα A' ήταν 16,5 και η τυπική απόκλιση 3,2.
   (α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας.
   (β) Να συγκρίνετε την ομοιογένεια των βαθμών του τμήματος A' με τους αντίστοιχους βαθμούς του τμήματος B' που είχε τον ίδιο μέσο όρο, αλλά η τυπική απόκλισή του ήταν 1,5.

17. Αν σε μία τάξη ο μέσος όρος της βαθμολογίας ν_1 αγοριών είναι $\bar{x}$ και ο μέσος όρος της βαθμολογίας ν_2 κοριτσιών είναι $\bar{y}$, τότε:
   (α) να αποδείξετε ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας όλων των παιδιών της τάξης είναι:
$$\frac{\nu_1\bar{x} + \nu_2\bar{y}}{\nu_1 + \nu_2}$$
   (β) να υπολογίσετε τον μέσο όρο της βαθμολογίας μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα στο μάθημα των Μαθηματικών, αν τα 11 κορίτσια είχαν μέσο όρο 16,7 και τα 9 αγόρια είχαν μέσο όρο 13,7.

8.2. ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΑ - ΕΝΔΟΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ

8.2.1 Τεταρτημόρια

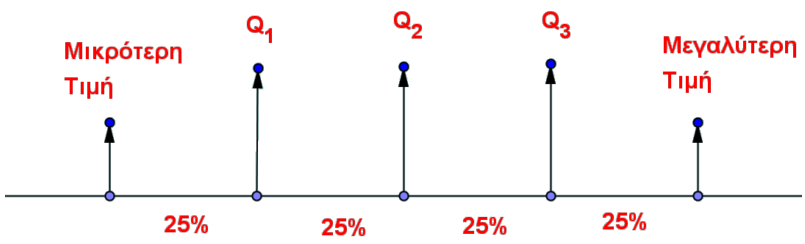
Διερεύνηση

Οι βαθμοί των 18 μαθητών ενός τμήματος Γυμνασίου σε μια εξέταση είναι:

$$8, 9, 12, 15, 11, 13, 13, 17, 19, 14, 15, 17, 18, 15, 17, 8, 16, 9$$

Ο καθηγητής θέλει να δώσει βραβείο στους μαθητές που πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο από το 75% του πλήθους των μαθητών της τάξης και να δώσει επιπλέον εργασία για το σπίτι στους μαθητές που πήραν βαθμό μικρότερο ή ίσο από το 25% του πλήθους των μαθητών της τάξης. Να βρείτε τους βαθμούς των μαθητών που θα βραβευτούν και τους βαθμούς των μαθητών που θα πάρουν επιπλέον εργασία.

Η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα δείγμα, έτσι ώστε το πολύ 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες από αυτή και το πολύ 50% να είναι μεγαλύτερες από αυτή. Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε το **πρώτο τεταρτημόριο** ως την τιμή που χωρίζει το δείγμα, έτσι ώστε το πολύ 25% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες από αυτή και το πολύ 75% των παρατηρήσεων μεγαλύτερες από αυτή. Το **τρίτο τεταρτημόριο** χωρίζει το δείγμα, έτσι ώστε το πολύ 75% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες από αυτό και το πολύ 25% μεγαλύτερες από αυτό. Το **πρώτο τεταρτημόριο συμβολίζεται με $\boldsymbol{Q_1}$** και το **τρίτο τεταρτημόριο με $\boldsymbol{Q_3}$**. Η διάμεσος είναι το δεύτερο τεταρτημόριο και συμβολίζεται με $\boldsymbol{Q_2}$.



Για να υπολογίσουμε το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο, βρίσκουμε την διάμεσο του πρώτου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων και τη διάμεσο του δεύτερου μισού των παρατηρήσεων, αντίστοιχα.

- Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός, είναι εύκολο να διακρίνουμε το πρώτο και δεύτερο μισό των διατεταγμένων παρατηρήσεων για να υπολογίσουμε το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.
- Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, αφαιρούμε τη διάμεσο από το δείγμα και διακρίνουμε το πρώτο και το δεύτερο μισό των υπολοίπων διατεταγμένων παρατηρήσεων.

Παράδειγμα 1

Τα ύψη των παικτών μιας ομάδας καλαθόσφαιρας σε cm είναι:

$$181\ ,210, 193, 197, 196, 205, 189, 204, 193, 199, 205, 187$$

(α) Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2 και Q_3.

(β) Αν στην ομάδα ενταχθούν ακόμα 3 παίκτες με ύψη $182, 195$ και 209, να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2 και Q_3 της νέας σύνθεσης της ομάδας.

Λύση

(α) Για να υπολογίσουμε τα τεταρτημόρια, πρέπει πρώτα να κατατάξουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

$$181, 187, 189, 193, 193, 196, 197, 199, 204, 205, 205, 210$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός. Επομένως, η διάμεσος είναι:

$$Q_2 = \frac{196 + 197}{2} = 196{,}5$$

Για να υπολογίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο, βρίσκουμε τη διάμεσο του πρώτου μισού των παρατηρήσεων:

$$181, 187, 189, 193, 193, 196$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός. Επομένως, το πρώτο τεταρτημόριο είναι:

$$Q_1 = \frac{189 + 193}{2} = 191$$

Για να υπολογίσουμε το τρίτο τεταρτημόριο, βρίσκουμε τη διάμεσο του δεύτερου μισού των παρατηρήσεων:

$$197, 199, 204, 205, 205, 210$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός. Επομένως, το τρίτο τεταρτημόριο είναι:

$$Q_3 = \frac{204 + 205}{2} = 204{,}5$$

(β) Οι παρατηρήσεις της νέας σύνθεσης της ομάδας σε αύξουσα σειρά είναι:

$$181, 182, 187, 189, 193, 193, 195, 196, 197, 199, 204, 205, 205, 209, 210$$

Η διάμεσος είναι μεσαία παρατήρηση των διατεταγμένων παρατηρήσεων:

$$Q_2 = 196$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός. Επομένως, αφαιρούμε την διάμεσο Q_2 από τις διατεταγμένες παρατηρήσεις, για να διακρίνουμε το πρώτο και το δεύτερο μισό των υπολοίπων διατεταγμένων παρατηρήσεων:

$$181, 182, 187, 189, 193, 193, 195, 197, 199, 204, 205, 205, 209, 210$$

Για να υπολογίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο, βρίσκουμε τη διάμεσο των παρατηρήσεων:

$$181, 182, 187, 189, 193, 193, 195$$

Άρα, $Q_1 = 189$.

Για να υπολογίσουμε το τρίτο τεταρτημόριο, βρίσκουμε τη διάμεσο των παρατηρήσεων:

$$197, 199, 204, 205, 205, 209, 210$$

Άρα, $Q_3 = 205$.

8.2.2 Ενδοτεταρτημοριακό εύρος

Το εύρος, η διασπορά και η τυπική απόκλιση επηρεάζονται από ακραίες παρατηρήσεις. Ένα μέτρο διασποράς, το οποίο δεν επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις, είναι το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου από το τρίτο τεταρτημόριο και συμβολίζεται με IQR. Δηλαδή,

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος περιλαμβάνει το «ενδιάμεσο» 50% των παρατηρήσεων.

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων του *Παραδείγματος 1(α).*

Λύση

Έχουμε υπολογίσει το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_1 = 191 \text{ και } Q_3 = 204{,}5$$

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι:

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 204{,}5 - 191 = 13{,}5$$

8.3 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΜΕ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

8.3.1 Φυλλογράφημα

Εξερεύνηση

Ο Αντρέας σπουδάζει στην Αγγλία και βρίσκεται σε ένα σταθμό τραμ. Το πρόγραμμα αναχώρησης των τραμ παρουσιάζεται στο πιο κάτω διάγραμμα.

(α) Αν σήμερα είναι Τρίτη και η ώρα είναι $13:05$, σε πόσα λεπτά θα αναχωρήσει το επόμενο τραμ;

(β) Πότε υπάρχουν οι περισσότερες αναχωρήσεις, το πρωί ή το βράδυ, το Σάββατο ή την Κυριακή;

Monday to Friday		Saturday		Sunday & Bank Holiday	
05:		05:		05:	
06:	04 24 44	06:	04 24 44	06:	
07:	04 17 27 37 47 57	07:	04 24 44	07:	58
08:	07 17 27 37 47 57	08:	00 15 27 39 51	08:	24 54
09:	07 17 27 39 51	09:	03 15 27 39 51	09:	24 44
10:	03 15 27 39 51	10:	03 15 27 39 51	10:	04 24 44
11:	03 15 27 39 51	11:	03 15 27 39 51	11:	04 24 44
12:	03 15 27 39 51	12:	03 15 27 39 51	12:	04 24 44
13:	03 15 27 39 51	13:	03 15 27 39 51	13:	04 24 44
14:	03 15 27 39 51	14:	03 15 27 39 51	14:	04 24 44
15:	03 15 25 37 47 57	15:	03 15 27 39 51	15:	04 24 44
16:	07 17 27 37 47 57	16:	03 15 27 39 51	16:	04 24 55
17:	07 17 27 37 47 57	17:	03 15 27 44	17:	24 54
18:	07 27 47	18:	04 24 44	18:	24 54
19:	07 24 44	19:	04 24 44	19:	24 54
20:	04 24 44	20:	04 24 44	20:	24 54
21:	04 24 44	21:	04 24 44	21:	24 54
22:	04 24 44	22:	04 24 44	22:	24 38
23:	04 24 37	23:	04 24 38	23:	
00:		00:		00:	
First Tram – 06:04		First Tram – 06:04		First Tram – 07:58	
Last Tram – 23:37		Last Tram – 23:37		Last Tram – 22:38	

Διερεύνηση

Δίνεται το δείγμα A:

$$3, 7, 11, 16, 20, 21, 21, 21, 29, 31, 32, 32, 45, 48, 53$$

Αφού ανακαλύψετε τον τρόπο παρουσίασης του δείγματος A στο πιο κάτω διάγραμμα, να συμπληρώσετε το διάγραμμα με το δείγμα B:

$$8, 12, 18, 18, 25, 26, 26, 17, 18, 20, 20, 21, 21, 22, 24, 24, 25, 30, 31$$

A		B
3	**5**	
85	**4**	
221	**3**	
91110	**2**	
61	**1**	
73	**0**	

Το πιο πάνω διάγραμμα λέγεται **φυλλογράφημα**. Το φυλλογράφημα χρησιμοποιείται, όταν πρέπει να παρουσιάσουμε πολλές παρατηρήσεις με έναν πιο απλό και συνοπτικό τρόπο.

Για να κατασκευάσουμε ένα φυλλογράφημα, πρέπει να καθορίσουμε ποια ψηφία των παρατηρήσεων θα αποτελούν το «**κορμό**» και ποια ψηφία θα αποτελούν τα «**φύλλα**». Στο φυλλογράφημα διπλής όψης, όπως στην πιο πάνω διερεύνηση, ο «κορμός» είναι το ψηφίο των δεκάδων και τα «φύλλα» το ψηφίο των μονάδων. Στο πρόγραμμα των τραμ, στην πιο πάνω εξερεύνηση, ο «κορμός» είναι η ώρα και τα «φύλλα» είναι τα λεπτά. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε τον «κορμό», κατατάσσοντας τους αριθμούς που τον αποτελούν σε αύξουσα σειρά, ξεκινώντας από κάτω προς τα πάνω και βάζουμε τους αριθμούς που αποτελούν τα «φύλλα» σε αύξουσα σειρά με το μικρότερο να είναι πιο κοντά στον κορμό.

Μπορούμε εύκολα, με τη βοήθεια του φυλλογραφήματος, να υπολογίσουμε τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, γιατί οι παρατηρήσεις κατατάσσονται σε αύξουσα σειρά.

Το **φυλλογράφημα διπλής όψης** είναι ένα χρήσιμο εργαλείο, για να συγκρίνουμε τα χαρακτηριστικά δύο διαφορετικών πληθυσμών.

Παράδειγμα 1

Το επόμενο φυλλογράφημα διπλής όψης δείχνει τα παραπτώματα που χρεώθηκε κάθε ομάδα του Ευρωπαϊκού πρωταθλήματος για τα έτη 2008 και 2009. Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές εντοπίζετε ανάμεσα στις δυο χρονιές;

2008		**2009**
11	**4**	
	3	**7**
332	**3**	**233**
8865	**2**	**889**
44331110	**2**	**001112223**
987776665	**1**	**56888899**
321	**1**	**22444**
7	**0**	**69**

Λύση

Παρατηρούμε, από το φυλλογράφημα διπλής όψης, ότι το 2009 τα παραπτώματα είχαν μικρή μείωση. Η διάμεσος για το 2008 είναι 21 και για το 2009 είναι 20. Το εύρος των παρατηρήσεων για το 2008 είναι $41 - 7 = 36$ ενώ για το 2009 είναι $37 - 6 = 31$. Οι επικρατούσες τιμές των παραπτωμάτων για το 2008 είναι 16 και 17 ενώ η επικρατούσα τιμή για το 2009 είναι 18.

Παράδειγμα 2

Σε ένα τμήμα Α΄ Λυκείου καταγράφουμε την περίμετρο του καρπού των παιδιών.

Αγόρια	14,6	14,3	18,3	17,3	14,3	17,6	18	15,5	16,2	16,3	16,5	16,9
Κορίτσια	16,2	16,6	13,9	14,1	14,9	17,7	17,3	14,1	15,6			

(α) Να κατασκευάσετε ένα φυλλογράφημα διπλής όψης.

(β) Υπάρχει διαφορά στην περίμετρο του καρπού των αγοριών από την περίμετρο του καρπού των κοριτσιών;

Λύση

(α) Για να κατασκευάσουμε το φυλλογράφημα πρέπει να κατατάξουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.

Αγόρια	14,3	14,3	14,6	15,5	16,2	16,3	16,5	16,9	17,3	17,6	18	18,3
Κορίτσια	13,9	14,1	14,1	14,9	15,6	16,2	16,6	17,3	17,7			

Επιλέγουμε τα πρώτα δύο ψηφία στον «κορμό» και το δεκαδικό ψηφίο «στα φύλλα».

Αγόρια		**Κορίτσια**
30	**18**	
63	**17**	**37**
9532	**16**	**26**
5	**15**	**6**
633	**14**	**119**
	13	**9**

(β) Παρατηρούμε την κατανομή των παρατηρήσεων στο φυλλογράφημα και συμπεραίνουμε ότι τα αγόρια έχουν μεγαλύτερη περίμετρο καρπού σε σχέση με τα κορίτσια.

Δραστηριότητες

1. Δίνονται οι ώρες χρήσης του διαδικτύου από μια ομάδα 25 μαθητών:

$$12, 12, 3, 1, 8, 6, 7, 17, 23, 8 ,19, 13, 20, 5, 3 ,2 ,27, 2, 1, 13, 10, 10, 9, 8, 4$$

Να κατασκευάσετε το φυλλογράφημα.

2. Δίνεται το φυλλογράφημα για τις πωλήσεις ηλεκτρονικών παιχνιδιών σε ένα κατάστημα για το μήνα Μάρτιο.

2	5
2	12
1	668
1	01112233334
0	55577889
0	011122

(α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο, το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.

(β) Να υπολογίσετε πόσα ηλεκτρονικά παιχνίδια πωλήθηκαν το Μάρτιο.

3. Δίνεται ο χρόνος που χρειάζονται μαθητές από δύο διαφορετικά Λύκεια της Κύπρου, για να πάνε στο σχολείο το πρωί.

Λύκειο A	15	10	12	16	17	20	8	5	6	10	12	5	8	11	9	9
Λύκειο B	23	23	17	5	31	31	31	17	17	17	31	31	23	23	23	7

(α) Να κατασκευάσετε ένα φυλλογράφημα διπλής όψης.

(β) Τι παρατηρείτε;

4. Δίνεται το φυλλογράφημα διπλής όψης για τις δέκα καλύτερες επιδόσεις όλων των εποχών στο άλμα εις μήκος. Τη δέκατη καλύτερη επίδοση όλων των εποχών έχει ο Λούης Τσάτουμας με 8,66 m.

Ανοικτός Στίβος		Κλειστός στίβος
50	89	
76	88	
44431	87	
6	86	
	85	8
	84	245
	83	001148

(α) Να υπολογίσετε την καλύτερη επίδοση όλων των εποχών στον κλειστό στίβο.

(β) Να υπολογίσετε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των επιδόσεων στον ανοικτό και στον κλειστό στίβο.

(γ) Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα στα ερωτήματα (α) και (β).

8.3.2 Θηκόγραμμα

Διερεύνηση

Δίνεται ο αριθμός των τροχαίων παραβάσεων σε μια βδομάδα.

Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο	Κυριακή
30	16	18	17	16	19	13

(α) Ποιες παρατηρήσεις στο πιο πάνω δείγμα είναι ακραίες παρατηρήσεις;

(β) Ποιο είναι το κριτήριο ώστε να χαρακτηρίσουμε μια παρατήρηση ακραία;

Οι ακραίες παρατηρήσεις είναι οι παρατηρήσεις που είναι απομακρυσμένες από τις υπόλοιπες παρατηρήσεις. Συγκεκριμένα, ακραίες παρατηρήσεις θα θεωρούμε τις παρατηρήσεις που δεν ανήκουν στο διάστημα $[Q_1 - 1{,}5\ (IQR), Q_3 + 1{,}5\ (IQR)]$, όπου Q_1 το πρώτο τεταρτημόριο, Q_3 το τρίτο τεταρτημόριο και IQR το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

Αν υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις σε ένα δείγμα, ελέγχουμε κατά πόσο προέκυψαν από κάποιο λάθος στη συλλογή και καταγραφή των παρατηρήσεων. Στην περίπτωση που δεν προέκυψαν από κάποιο λάθος, τις μελετούμε, γιατί μπορεί να κρύβουν χρήσιμες πληροφορίες.

Παράδειγμα 1

Δίνεται ο αριθμός των πωλήσεων που έκαναν 7 πωλητές μιας εταιρείας σε μια βδομάδα:

$$30, 16, 18, 17, 16, 19, 2$$

(α) Να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις.

(β) Να εξετάσετε κατά πόσο είναι χρήσιμες οι ακραίες παρατηρήσεις για την εταιρεία.

Λύση

(α) Για να βρούμε τα τεταρτημόρια, κατατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

$$2, 16, 16, 17, 18, 19, 30$$

Το πρώτο τεταρτημόριο είναι η διάμεσος των παρατηρήσεων:

$$2, 16, 16$$

Συνεπώς, $Q_1 = 16$.

Το τρίτο τεταρτημόριο είναι η διάμεσος των παρατηρήσεων:

$$18, 19, 30$$

Επομένως, $Q_3 = 19$.

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $IQR = 19 - 16 = 3$.

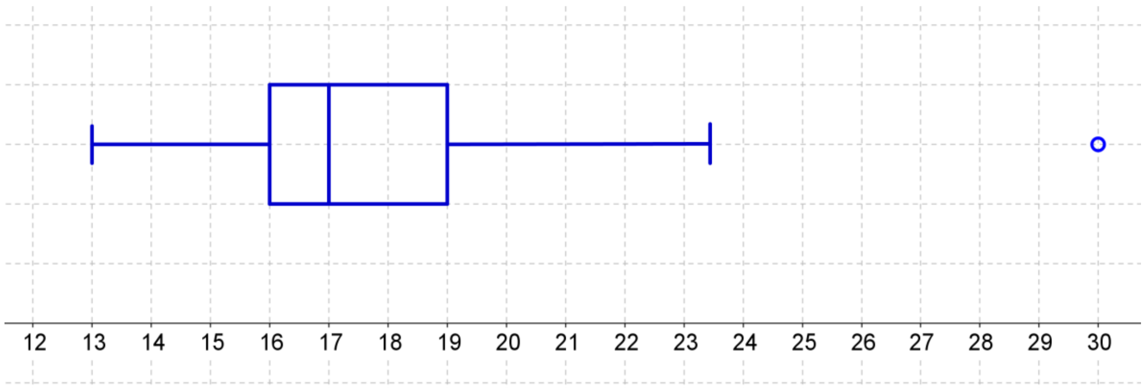
Ακραίες είναι οι παρατηρήσεις που είναι είτε μικρότερες από $16 - 1{,}5 \cdot 3 = 11{,}5$, είτε μεγαλύτερες από $19 + 1{,}5 \cdot 3 = 23{,}5$.

Συνεπώς, ακραίες παρατηρήσεις είναι το 2 και το 30.

(β) Παρατηρούμε ότι οι ακραίες παρατηρήσεις είναι χρήσιμες, γιατί ο πωλητής με τις 30 πωλήσεις μπορεί να πάρει έπαινο ή αύξηση ενώ για τον πωλητή με τις 2 πωλήσεις μπορούν να εξεταστούν οι λόγοι της μικρής απόδοσης.

Διερεύνηση 1

Τα τεταρτημόρια και η ακραία παρατήρηση στο δείγμα του τελευταίου παραδείγματος παρουσιάζονται στο πιο κάτω διάγραμμα.



Να κατασκευάσετε ένα αντίστοιχο διάγραμμα για το δείγμα:

$$12, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 17, 8, 9, 10$$

Διερεύνηση 2

(α) Να ανοίξετε το αρχείο *«κατανόηση στατιστικών παραμέτρων.html»* και να επιλέξετε το σύνδεσμο *«εξερευνώντας το θηκόγραμμα»*.

(β) Να μετακινήσετε ένα πράσινο σημείο, ώστε να αλλάξει η διάμεσος στο δείγμα.

(γ) Να μετακινήσετε ένα πράσινο σημείο, ώστε να μην αλλάξει η διάμεσος στο δείγμα.

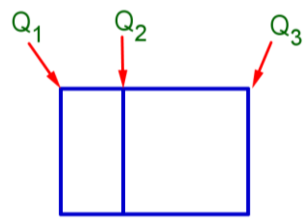
(δ) Να επαναλάβετε τα ερωτήματα (β) και (γ) για την ελάχιστη παρατήρηση, τη μέγιστη παρατήρηση, το πρώτο τεταρτημόριο και το τρίτο τεταρτημόριο.

(ε) Μπορείτε να μετακινήσετε ένα πράσινο σημείο χωρίς να αλλάξει η μέση τιμή;

(στ) Να επαναλάβετε τα παραπάνω ερωτήματα για διάφορα μεγέθη δείγματος.

Ένας άλλος τρόπος παρουσίασης δεδομένων, που παρουσιάζει και τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν, είναι το **θηκόγραμμα.** Για να σχεδιάσουμε το θηκόγραμμα πρέπει να υπολογίσουμε όλα τα τεταρτημόρια, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, τη μέγιστη και την ελάχιστη παρατήρηση.

Αρχικά κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τη μια του πλευρά στο πρώτο τεταρτημόριο και την απέναντι σε αυτή πλευρά στο τρίτο τεταρτημόριο. Το μήκος των πλευρών είναι αυθαίρετο και η απόσταση μεταξύ τους είναι ίση με το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Η διάμεσος παριστάνεται με ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο με τις πιο πάνω πλευρές μέσα στο ορθογώνιο.



Στη συνέχεια, από τα μέσα των πλευρών που παριστάνουν το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα με μήκος το πολύ 1,5 (IQR). Αν η ελάχιστη τιμή είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος που φέρουμε από το Q_1, τότε το άκρο του τμήματος είναι η ελάχιστη τιμή. Ομοίως, αν η μέγιστη τιμή είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος που φέρουμε από το Q_3, τότε το άκρο του τμήματος είναι η μέγιστη τιμή. Στο τέλος σημειώνουμε τις ακραίες παρατηρήσεις.

Παράδειγμα 2

Δίνεται ο αριθμός των εργαζομένων σε 20 βιοτεχνίες.

10	25	31	12	10	9	5	24	26	68
14	7	8	19	24	13	28	19	51	14

Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα.

Λύση

Κατατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

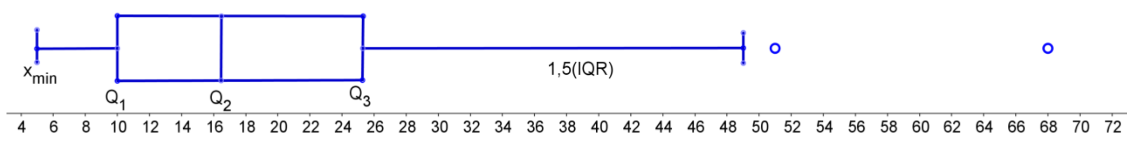
$$5, 7, 8, 9, 10, 10, 12, 13, 14, 14, 19, 19, 24, 24, 25\ 26, 28, 31, 51, 68$$

Υπολογίζουμε τα τεταρτημόρια:

$$Q_2 = \frac{14+19}{2} = 16{,}5 \qquad Q_1 = \frac{10+10}{2} = 10 \qquad Q_3 = \frac{25+26}{2} = 25{,}5$$

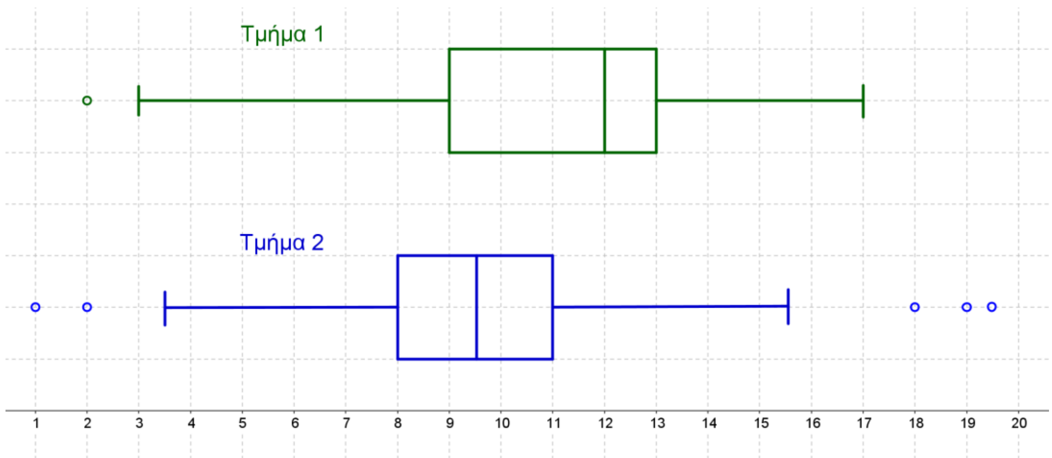
Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $IQR = 25{,}5 - 10 = 15{,}5$ και $1{,}5(IQR) = 23{,}25$. Παρατηρούμε ότι οι ακραίες παρατηρήσεις είναι το 51 και το 68.

Κατασκευάζουμε το θηκόγραμμα.



Παράδειγμα 3

Τα πιο κάτω θηκογράμματα παρουσιάζουν τους βαθμούς των μαθητών των τμημάτων σε μαθηματικό διαγωνισμό.



(α) Να βρείτε ποιο τμήμα έχει το μεγαλύτερο εύρος βαθμών.

(β) Να βρείτε ποιο τμήμα έχει το μεγαλύτερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος βαθμών.

(γ) Σε ποιο τμήμα παρουσιάζουν συμμετρία οι βαθμοί;

(δ) Να βρείτε ποιο είναι το καλύτερο τμήμα.

(ε) Να βρείτε το τμήμα και τη βαθμολογία των δύο μαθητών με το καλύτερο βαθμό.

Λύση

(α) Στο τμήμα 1 το εύρος είναι $17 - 2 = 15$ ενώ στο τμήμα 2 είναι $19{,}5 - 1 = 18{,}5$. Συνεπώς, το τμήμα 2 έχει μεγαλύτερο εύρος.

(β) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι το μήκος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε ένα θηκόγραμμα. Συνεπώς, το τμήμα 1 έχει μεγαλύτερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

(γ) Το θηκόγραμμα στο τμήμα 2 είναι συμμετρικό ενώ στο τμήμα 1 δεν είναι. Άρα, στο τμήμα 2 παρουσιάζουν συμμετρία οι βαθμοί.

(δ) Στο τμήμα 1 η διάμεσος των βαθμών είναι 12, ενώ στο τμήμα 2 είναι 9,5. Επομένως, γενικά το τμήμα 1 είναι καλύτερο από το τμήμα 2, παρά το γεγονός ότι οι τρεις καλύτεροι βαθμοί είναι στο τμήμα 2.

(ε) Παρατηρούμε ότι οι δύο καλύτεροι βαθμοί, 19 και 19,5, είναι δυο ακραίες παρατηρήσεις στο τμήμα 2.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Ένα δείγμα έχει πάντα ακραίες παρατηρήσεις.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Οι ακραίες παρατηρήσεις είναι ασήμαντες και δεν πρέπει να τις χρησιμοποιούμε , όταν κάνουμε στατιστική ανάλυση.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Από ένα θηκόγραμμα μπορούμε να βρούμε τη μέγιστη και την ελάχιστη παρατήρηση στο δείγμα.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(δ)	Το μήκος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε ένα θηκόγραμμα είναι ίσο με το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ε)	Σε ένα θηκόγραμμα, όταν το μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων που είναι έξω από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι $1{,}5(IQR)$, τότε υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις στο δείγμα.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

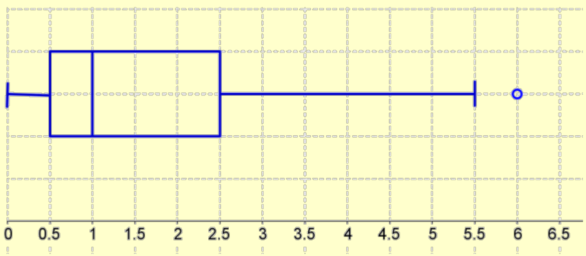
2. Δίνονται οι μηνιαίες πωλήσεις αυτοκινήτων μιας εταιρείας.

Γεν	Φεβ	Μαρ	Απρ	Μάης	Ιουν	Ιουλ	Αυγ	Σεπ	Οκτ	Νοε	Δεκ
15	13	12	3	19	29	30	12	13	17	19	12

(α) Να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν.

(β) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα.

3. Στο πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζεται ο αριθμός των παιδιών που έχουν οι οικογένειες που ζουν σε μια πολυκατοικία.



(α) Να βρείτε, αν υπάρχουν, ακραίες παρατηρήσεις.

(β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη παρατήρηση και το εύρος των παρατηρήσεων.

(γ) Να βρείτε τη διάμεσο, το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

(δ) Να εξετάσετε κατά πόσο η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερη από τη διάμεσο και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(ε) Να εξετάσετε κατά πόσο είναι συμμετρικό το δείγμα.

4. Τα τέρματα που έχει πετύχει ο κάθε παίκτης των ομάδων Ρεάλ και Μπαρτσελόνα στο ισπανικό πρωτάθλημα δίνονται στο πιο κάτω φυλλογράφημα διπλής όψεως.

Ρεάλ		Μπαρτσελόνα
	4	0
5	3	
4	2	46
9	1	
75433222110000	0	000000011122237

Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα για την καθεμιά από τις δύο ομάδες και να τις συγκρίνετε.

Περίληψη

1. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι ν παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X με μέση τιμή $\bar{x}$, τότε η μέση τιμή $\bar{y}$ των παρατηρήσεων $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ μιας μεταβλητής Y, για τις οποίες ισχύει $y_i = \alpha x_i + \beta, i = 1,2, \ldots, \nu,$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $\bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta$.

2. Αν οι παρατηρήσεις x_1, x_2, x_3, …, x_ν μιας μεταβλητής X έχουν συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$, τότε ο **σταθμισμένος μέσος** (weighted average) ορίζεται ως η ποσότητα που δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_\nu x_\nu}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu}$$

3. **Μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας** είναι τα μέτρα που εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα κεντρικά μέτρα θέσης.

   - **Εύρος των παρατηρήσεων** (Range) ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης ($x_{\min}$) από τη μέγιστη παρατήρηση ($x_{\max}$) και συμβολίζεται με R:

   $$R = x_{\max} - x_{\min}$$

   - **Διακύμανση ή διασπορά** ν παρατηρήσεων x_1, x_2, x_3, …, x_ν ορίζεται ως ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή. Συμβολίζεται με s^2 και δίνεται από τον τύπο:

   $$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_\nu - \bar{x})^2}{\nu}$$

   - **Τυπική απόκλιση** (standard deviation) είναι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς. Συμβολίζεται με s και δίνεται από τον τύπο:

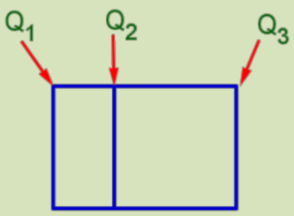
   $$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_\nu - \bar{x})^2}{\nu}}$$

   - **Συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας** (CV) ορίζεται το πηλίκο της τυπικής απόκλισης (s) προς την απόλυτη τιμή της μέσης τιμής $(\bar{x})$ των παρατηρήσεων. Δηλαδή, ισχύει:

   $$CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$$

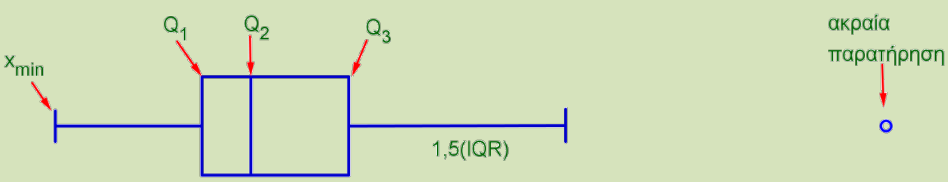
4. Ορίζουμε το **πρώτο τεταρτημόριο** ως την τιμή που χωρίζει το δείγμα, έτσι ώστε το πολύ 25% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες από αυτή και το πολύ 75% των παρατηρήσεων μεγαλύτερες από αυτή. Το **τρίτο τεταρτημόριο** χωρίζει το δείγμα, έτσι ώστε το πολύ 75% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες από αυτό και το πολύ 25% μεγαλύτερες από αυτό. Το **πρώτο τεταρτημόριο συμβολίζεται με $\boldsymbol{Q_1}$** και το **τρίτο τεταρτημόριο με $\boldsymbol{Q_3}$**. Η διάμεσος είναι το δεύτερο τεταρτημόριο και συμβολίζεται με $\boldsymbol{Q_2}$.

5. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου από το τρίτο τεταρτημόριο και συμβολίζεται με IQR. Δηλαδή:
$$IQR = Q_3 - Q_1$$
6. Για να κατασκευάσουμε ένα φυλλογράφημα, πρέπει να καθορίσουμε ποια ψηφία θα αποτελούν τον «κορμό» και ποια ψηφία θα αποτελούν τα «φύλλα». Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε τον «κορμό», κατατάσσοντας τους αριθμούς που τον αποτελούν σε αύξουσα σειρά, ξεκινώντας από κάτω προς τα πάνω και βάζουμε τους αριθμούς που αποτελούν τα «φύλλα» σε αύξουσα σειρά με το μικρότερο να είναι πιο κοντά στον «κορμό».
7. Για να σχεδιάσουμε ένα θηκόγραμμα πρέπει να υπολογίσουμε όλα τα τεταρτημόρια, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, τη μέγιστη και την ελάχιστη παρατήρηση.



Αρχικά κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τη μια του πλευρά στο πρώτο τεταρτημόριο και την απέναντι σε αυτή πλευρά στο τρίτο τεταρτημόριο. Το μήκος των πλευρών είναι αυθαίρετο και η απόσταση μεταξύ τους είναι ίση με το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Η διάμεσος παριστάνεται με ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο με τις πιο πάνω πλευρές μέσα στο ορθογώνιο.

Στη συνέχεια, από τα μέσα των πλευρών που παριστάνουν το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα με μήκος το πολύ 1,5 (IQR). Αν η ελάχιστη τιμή είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος που φέρουμε από το Q_1, τότε το άκρο του τμήματος είναι η ελάχιστη τιμή. Ομοίως, αν η μέγιστη τιμή είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος που φέρουμε από το Q_3, τότε το άκρο του τμήματος είναι η μέγιστη τιμή. Στο τέλος σημειώνουμε τις ακραίες παρατηρήσεις.



Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α)	Ο μέσος όρος και η διάμεσος των τιμών $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ συμπίπτουν.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Η τυπική απόκλιση σε ένα δείγμα με ν −παρατηρήσεις αλλάζει, όταν σε κάθε τιμή προσθέσουμε 2 μονάδες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν $\bar{x} = 4$ και $CV = 50\%$, τότε η τυπική απόκλιση είναι 2.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Η διάμεσος 11 διαφορετικών παρατηρήσεων αλλάζει, αν αφαιρέσουμε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη παρατήρηση.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Αν η κάθε παρατήρηση μιας μεταβλητής X πολλαπλασιασθεί επί 5, τότε και η νέα μέση τιμή θα πολλαπλασιασθεί επί 5.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Αν η κάθε παρατήρηση μιας μεταβλητής X πολλαπλασιασθεί επί 5, τότε και η νέα διασπορά θα πολλαπλασιασθεί επί 5.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Αν η μέση τιμή σε ένα δείγμα των παρατηρήσεων $5, 8, 9, \alpha$ και 16 είναι 10, τότε να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση στο δείγμα αυτό.

3. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση σε εξέταση ενός μαθήματος σε Παγκύπριες εξετάσεις είναι 10,5 και 3,8, αντίστοιχα. Έχει αποφασιστεί να δοθούν σε όλους τους μαθητές 2 επιπλέον μονάδες, γιατί είχε δοθεί μία άσκηση με λανθασμένα δεδομένα που δεν μπορούσε να λυθεί και είχαν βαθμολογηθεί όλοι με μηδέν. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η νέα μέση τιμή θα είναι 12,5 και η τυπική απόκλιση στο μάθημα θα παραμείνει η ίδια. Να εξετάσετε κατά πόσο είναι ορθός ο ισχυρισμός του μαθητή.

4. Ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα $80\ \mathrm{km/h}$ από την πόλη A στην πόλη B και επιστρέφει από την πόλη B στην πόλη A με σταθερή ταχύτητα $120\ \mathrm{km/h}$. Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου για όλη τη διαδρομή.

5. Στον πιο κάτω πίνακα δίνονται οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ και οι αντίστοιχες συχνότητές τους. Από τον πίνακα απουσιάζουν η 2η και η 3η συχνότητα.

Τιμές (x_i)	Συχνότητα (f_i)
7	16
8	…
9	…
10	26
Σύνολο	100

(α) Να προσδιορίσετε τις τιμές των συχνοτήτων που απουσιάζουν, αν $\bar{x} = 8{,}63$.
(β) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση.

6. Σε ένα Λύκειο υπάρχουν 500 μαθητές. Η A' τάξη του Λυκείου έχει 200 μαθητές με μέσο όρο ηλικίας 15,7 χρόνια, ενώ η B' τάξη έχει 180 μαθητές με μέσο όρο ηλικίας 16,9 χρόνια. Οι υπόλοιποι μαθητές της Γ' Λυκείου έχουν μέσο όρο ηλικίας 17,7 χρόνια. Να υπολογίσετε τον μέσο όρο ηλικίας όλων των μαθητών του σχολείου.

7. Αν $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\nu$ είναι ν παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s_x και $\kappa > 0$ είναι μια σταθερά, να βρείτε τον μέσο όρο και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων $y_1, y_2,\ \ldots, y_\nu$ συναρτήσει των s_x και κ και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα, όταν:
(α) $y_1 = x_1 + \kappa, y_2 = x_2 + \kappa, \ldots\ , y_\nu = x_\nu + \kappa$
(β) $y_1 = x_1 - \kappa, y_2 = x_2 - \kappa, \ldots\ , y_\nu = x_\nu - \kappa$
(γ) $y_1 = x_1 \cdot \kappa,\ y_2 = x_2 \cdot \kappa, \ldots\ ,\ y_\nu = x_\nu \cdot \kappa$

8. Μια εταιρεία εξετάζει τη διάρκεια ζωής δύο ειδών μπαταριών A και B. Παίρνει τυχαία 7 μπαταρίες από το κάθε είδος και καταγράφει τις ώρες λειτουργίας τους. Οι ώρες (σε χιλιάδες) φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

Είδος A	22	20	22	26	24	22	18
Είδος B	24	26	32	24	19	23	20

(α) Να κατασκευάσετε ένα φυλλογράφημα διπλής όψης για τα δύο είδη μπαταριών.
(β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο, τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση για τη διάρκεια ζωής των μπαταριών.
(γ) Να βρείτε ποιο από τα δύο είδη παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.

9. Ο χρόνος αναμονής 20 πελατών μιας τράπεζας μέχρι να εξυπηρετηθούν είναι:

$$3, 2, 12, 2, 3, 6, 14, 15\ 16, 5, 7, 12, 11, 10, 25, 3, 27, 5, 7, 13$$

Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα και να ελέγξετε κατά πόσο υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις.

10. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των απουσιών που έκαναν οι μαθητές σε ένα τμήμα τους μήνες Οκτώβριο και Νοέμβριο.

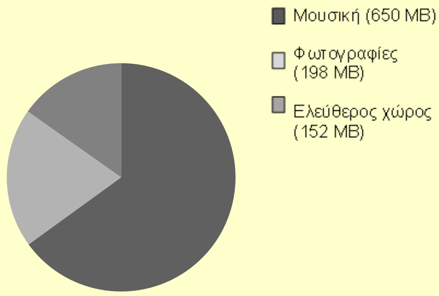
Οκτώβριος	14	7	0	9	21	7	3	0	0	25	2	3	8	7	14	25	0
Νοέμβριος	7	8	2	0	0	5	14	7	0	14	4	7	2	0	0	3	0

Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα για κάθε μήνα και να συγκρίνετε τις απουσίες των μαθητών.

Λύση Προβλήματος

ΡΑΒΔΟΣ ΜΝΗΜΗΣ

Η ράβδος μνήμης (USB Stick) είναι μια μικρή, φορητή, ηλεκτρονική συσκευή αποθήκευσης δεδομένων. Ο Ιωάννης έχει μια ράβδο μνήμης στην οποία αποθηκεύει αρχεία μουσικής και φωτογραφίες. Η ράβδος μνήμης έχει χωρητικότητα $1\,\text{GB}$ $(1000\,\text{MB})$. Στο πιο κάτω γράφημα παρουσιάζεται η κατανομή της χωρητικότητας της ράβδου μνήμης του Ιωάννη.



Ερώτηση 1: Ο Ιωάννης θέλει να μεταφέρει στη ράβδο μνήμης ένα άλμπουμ με φωτογραφίες χωρητικότητας $350\,\text{MB}$, αλλά δεν υπάρχει αρκετός ελεύθερος χώρος στη ράβδο μνήμης. Παρόλο που δεν θέλει να διαγράψει κανένα από τα άλμπουμ με τις φωτογραφίες που ήδη υπάρχουν, εντούτοις είναι πρόθυμος να διαγράψει μέχρι και δύο άλμπουμ μουσικής. Το μέγεθος των άλμπουμ μουσικής στη ράβδο μνήμης του Ιωάννη είναι:

Άλμπουμ	Μέγεθος
Άλμπουμ 1	100 MB
Άλμπουμ 2	75 MB
Άλμπουμ 3	80 MB
Άλμπουμ 4	55 MB
Άλμπουμ 5	60 MB
Άλμπουμ 6	80 MB
Άλμπουμ 7	75 MB
Άλμπουμ 8	125 MB

Διαγράφοντας το πολύ δύο άλμπουμ μουσικής, είναι δυνατόν ο Ιωάννης να έχει αρκετό ελεύθερο χώρο στη ράβδο μνήμης του, ώστε να μπορεί να προσθέσει το άλμπουμ με τις φωτογραφίες; Να βάλεις σε κύκλο "Ναι" ή "Όχι" και να υποστηρίξεις την απάντησή σου, δείχνοντας τους κατάλληλους υπολογισμούς.

Απάντηση: Ναι / Όχι

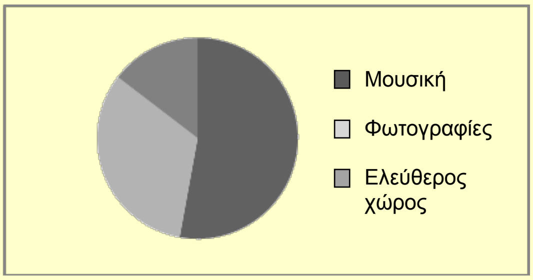
Ερώτηση 2: Κατά τη διάρκεια των επόμενων εβδομάδων, ο Ιωάννης διαγράφει κάποιες φωτογραφίες και κάποια από τα αρχεία μουσικής, αλλά ταυτόχρονα προσθέτει καινούρια αρχεία φωτογραφιών και μουσικής. Η νέα κατάσταση χωρητικότητας της ράβδου μνήμης παρουσιάζεται στον πιο κάτω πίνακα:

Μουσική	550 MB
Φωτογραφίες	338 MB
Ελεύθερος χώρος	112 MB

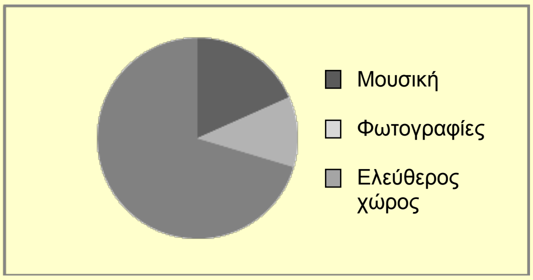
Ο αδερφός του Ιωάννη του έδωσε μια καινούρια ράβδο μνήμης χωρητικότητας 2GB (2000 MB), η οποία είναι εντελώς άδεια. Έτσι, ο Ιωάννης μετέφερε το περιεχόμενο της παλιάς ράβδου μνήμης στην καινούρια.

Ποιο από τα παρακάτω γραφήματα αναπαριστά την κατανομή της χωρητικότητας της καινούριας ράβδου μνήμης; Να βάλεις σε κύκλο Α, Β, Γ ή Δ.

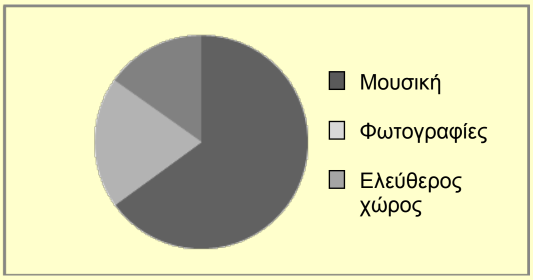
Α



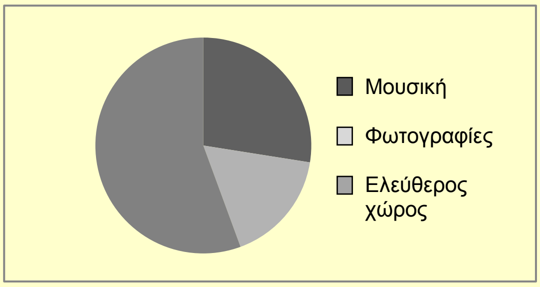
Β



Γ



Δ



PISA 2012

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση πέντε διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι $\sqrt{2}$.

2. Η μέση τιμή 22 παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X είναι 64. Διαπιστώθηκε ότι οι μισές παρατηρήσεις είχαν υπερεκτιμηθεί κατά 6 μονάδες η καθεμιά και ότι δέκα από τις υπόλοιπες παρατηρήσεις είχαν υποεκτιμηθεί κατά 11 μονάδες η καθεμιά. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων με τα ορθά δεδομένα.

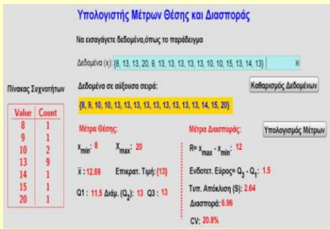
3. Σε ένα δείγμα 5 παρατηρήσεων το άθροισμά τους είναι 30 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 200. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος.

4. Να αποδείξετε ο τύπος
$$s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_\nu-\bar{x})^2}{\nu}$$
που δίνει τη διασπορά για ν παρατηρήσεις σε ένα δείγμα μπορεί να γραφεί και ως:
$$s^2 = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_\nu^2}{\nu}-(\bar{x})^2$$

5. Ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X έχει μέση τιμή $\bar{x}=15$ και διασπορά $s_x^2=16$. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά ενός δείγματος μιας άλλης μεταβλητής Y, αν σε κάθε παρατήρηση της y_i ισχύει $y_i=3x_i+10$, $i=1,2,\ \ldots,\ \nu$.

6. Η μέση τιμή 5 παρατηρήσεων είναι 4 και η διασπορά τους είναι 10. Αν για τις 4 παρατηρήσεις ισχύει $(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+(x_4-\bar{x})^2=14$, να υπολογίσετε την 5η παρατήρηση x_5.

7. Να ανοίξετε το αρχείο *«ALyk_En08_YpologistisStat.ggb»*. Να συμπληρώσετε τους βαθμούς για κάθε τμήμα στην κατάλληλη θέση (Δεδομένα (x)) και στη συνέχεια να πατήσετε το κουμπί (Υπολογισμός μέτρων), για να πάρετε όλα τα μέτρα θέσης και διασποράς. Να συγκρίνετε τα δύο τμήματα.



Τμήμα A'	13	13	14	15	15	15	15	16	16	18
Τμήμα B'	10	13	14	14	15	15	15	16	18	20

8. Στον διπλανό πίνακα παρουσιάζονται οι βαθμολογίες των Παγκύπριων Εξετάσεων στα Νέα Ελληνικά των μαθητών των τμημάτων $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ενός σχολείου.

   (α) Ποιο τμήμα έχει τον πιο ψηλό μέσο όρο;

   (β) Ποιες οι διαφορές των μέσων όρων και ποιες των διαμέσων των βαθμών;

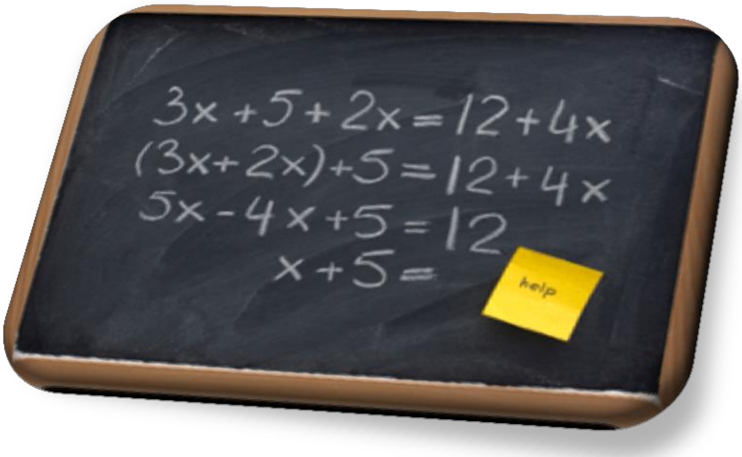
   (γ) Υπάρχουν διαφορές ως προς το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των βαθμών των τριών τμημάτων;

   (δ) Να επιλέξετε άλλες κατάλληλες στατιστικές μεθόδους για να συγκρίνετε τους βαθμούς των τριών τμημάτων. Να διατυπώσετε τα συμπεράσματα σας.

Γ_1	Γ_2	Γ_3
13	10	16
18	12	4
12	15	11
15	12	6
11	14	7
13	14	16
17	13	12
16	12	13
17	7	12
16	14	8
12	14	12
9	14	8
8	11	11
18	13	8
16	11	12
14	10	12
17	18	8
17	15	7
11	11	12
12	11	9
16	14	10
13	16	10
15	14	10

Απαντήσεις Δραστηριοτήτων

Β΄ τεύχους



Ενότητα 05: Ορίζουσες - Ευθεία

Σελίδα 10 Ορίζουσες 2×2

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) 0 (β) $-\sqrt{6}$ (γ) -2	(δ) -4 (ε) 1 (στ) $(a-\beta)^2$
2.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ	(γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΣΩΣΤΟ
3.	(α) 10 (β) -10	(γ) 80
4.	$\lambda = 8$ ή $\lambda = -1$	

Σελίδα 14 Ορίζουσες 3×3

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) 98	(β) 28
2.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ	(γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΣΩΣΤΟ
3.	(α) 396 (β) 0	(γ) 62 (δ) 30
5.	$x = \frac{11}{2}$ ή $x = 2$	

Σελίδα 25 Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $3x + 2y = 3$ (β) $x = -2$ (γ) $y = 3$
2.	$\sqrt{3}x - 3y + 6 + 2\sqrt{3} = 0$
3.	(α) $3x + y + 1 = 0$ (β) $x + y - 3 = 0$ (γ) $5x - y + 15 = 0$
4.	(α) $3x - 2y + 9 = 0$ (β) $3x - 5y - 3 = 0$
5.	$x - 6y + 17 = 0$
6.	(α) $AB: y = 4x - 1,\ A\Gamma: y = 3,\ B\Gamma: x = 2$ (β) $75{,}96°,\ 0°,\ 90°$
7.	Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους
8.	$3x - 4y - 15 = 0$
9.	$\kappa = 2$
10.	$a = -\dfrac{3}{2}$
11.	$\hat{A} = 54{,}16°, \hat{B} = 77{,}47°, \hat{\Gamma} = 48{,}37°$

12.	(α) $45°$ (γ) $18{,}43°$ (β) $71{,}57°$ (δ) $45°$
13.	(α) $AB: y = 4x - 1,\ A\Gamma: y = 3,\ B\Gamma: x = 2$ (β) $75{,}96°,\ 0°,\ 90°$
14.	(β) $x - 2y + 3 = 0$
15.	$(-34, -14)$
16.	(α) $y = -2x + 1$ (β) $y = -2x - 1$
17.	$(-2, -2)$

Σελίδα 31 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας $Ax + By + \Gamma = 0$

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $\lambda = \frac{1}{3}$ (γ) $\lambda = 0$ (β) $\lambda = -1$ (δ) Δεν ορίζεται
2.	(α) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \frac{5}{3}$ (β) $(0, 2), (2, 0)$
3.	$a = \frac{5}{2}$
5.	$3x + y = 8$
6.	$-6x + 3y = 20$
7.	$x - y = 7$
9.	(α) Η εξίσωση (ε) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R},\ \mu \neq -1$ (β) $\mu = 1$ (γ) Δεν υπάρχει (δ) $\mu = 0$
10.	(β) $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (γ) $(1, 6)$
11.	(α) $(1, 5), (5, 7), (-1, 1), (3, 3)$
12.	$y = x, x - 3y + 7 = 0$
13.	$A(8,1)$

Σελίδα 41 Απόσταση σημείου από ευθεία – Εμβαδόν τριγώνου

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $\frac{27}{5}$ (γ) 4 (β) 9
2.	(α) $\frac{33\sqrt{41}}{41}$ (γ) 1 (β) $\frac{9\sqrt{5}}{5}$
3.	9 και 18
4.	(α) $\frac{3}{2}$ (β) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (γ) $\frac{\sqrt{130}}{2}$
5.	$A\Delta = 4, E_{AB\Gamma} = 20$ τετραγωνικές μονάδες
6.	$\frac{9}{2}$

7.	$x = 2$ και $3x + 4y - 10 = 0$
8.	$E = 25$ τετραγωνικές μονάδες
9.	$E_{ΑΒΓΔ} = 19$ τετραγωνικές μονάδες
10.	$\frac{1}{2}\lvert\lambda^2(\kappa - \mu) + \kappa^2(\mu - \lambda) + \mu^2(\lambda - \kappa)\rvert$

Σελίδα 44 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) -10 (β) -2	(γ) -38 (δ) 0	
2.	(α) 0 (β) $(a - \beta)x$	(γ) -2	
5.	(α) $x = \pm 1$	(β) $x = 1\,,\ x = 3$	
6.	(α) $(a - \beta)^2$	(β) $(x - y)^2(x + y)$	
9.	(α) $\lambda = -\frac{5}{3}$	(β) $\lambda = \sqrt{3}$	
10.	(α) $\lambda = \sqrt{3}$ (β) $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	(γ) $\lambda = 9$ (δ) Δεν ορίζεται	
11.	(α) $y = -3x - 3$	(β) $y = 3$	(γ) $x = -2$
12.	$x + y = 5$		
14.	$8{,}13°$		
15.	$56{,}31°$		
17.	$\lambda \neq 1,\ \ \lambda = -\frac{3}{2}$		
18.	$B(-1,-2), \Gamma(-3{,}0), \Delta(0{,}3)$		
19.	$B(-1,-2), \Gamma(-3{,}0), \Delta(0{,}3)$		
21.	(α) $2x - 3y - 7 = 0$ (β) $4x + 3y + 11 = 0$ (γ) $x + 3y + 1 = 0$		
22.	(δ) $\Gamma(3{,}0)$ ή $\Gamma(10{,}0)$, $(\Gamma\Delta) = \frac{7\sqrt{5}}{5}$		
23.	(α) 6 (β) 3 (γ) 6 (δ) 8		
25.	$x + y = -1, \qquad x - y = -3$		
26.	(α) $\frac{x}{\kappa} + \frac{y}{\lambda} = 1$ (β) $\kappa x - \lambda y + \lambda^2 - \kappa^2 = 0$		

Σελίδα 48 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού	
Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
4.	$x-y+9=0$ και $x-y-3=0$
5.	$y=\frac{2}{3}x+2$ και $y=\frac{2}{3}x-2$
6.	$\kappa=1$

Ενότητα 06: Θεώρημα Θαλή - Ομοιότητα

Σελίδα 57 Θεώρημα Θαλή

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$EZ = 6 \text{ cm}$
2.	$E\Gamma = \frac{16}{3} \text{ cm}$
3.	$EZ = 6 \text{ cm}, \ H\Theta = 3 \text{ cm}, \ EH = 15 \text{ cm}$
4.	$x = 4, \ y = 4$
7.	(α) E μέσο $A\Gamma$ (β) Ισοσκελές ή ισόπλευρο τρίγωνο

Σελίδα 66 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α), (γ), (δ)	
2.	(α) $\frac{1}{2}$ (β) $\frac{1}{2}$ (γ) $\frac{1}{4}$	
3.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΛΑΘΟΣ	(γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΛΑΘΟΣ
4.	$EZ = 6, \ ZH = 7{,}5, \ H\Theta = 9, \ \Theta E = 12,$ $\hat{E} = 63°, \ \hat{Z} = 143°, \ \hat{H} = 80°, \ \hat{\Theta} = 74°$	
5.	100 cm^2	
6.	$8 \text{ cm}, \ 12 \text{ cm}, \ 16 \text{ cm}$	

Σελίδα 76 Όμοια τρίγωνα

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) Όμοια – Ίσες γωνίες (β) Όμοια – Δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες (γ) Όμοια – Πλευρές ανάλογες (δ) Όμοια – Ίσες γωνίες
2.	$\hat{A} = \hat{E}, \hat{B} = \hat{Z}, \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$
3.	(α) Όμοια – Πλευρές ανάλογες (β) Όμοια – Δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες (γ) Δεν είναι όμοια (δ) Όμοια – Ίσες γωνίες (ε) Όμοια – Ίσες γωνίες (στ) Δεν είναι όμοια
4.	$5{,}95 \text{ m}$
5.	$\Gamma E = 4 \text{ cm}$
7.	$\Delta E = 2{,}5 \text{ cm}$

Σελίδα 88 Δύναμη σημείου ως προς κύκλο

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $x = 5\ \mathrm{cm}$ (β) $x = 3\ \mathrm{cm}$ (γ) $x = 4\ \mathrm{cm}$ (δ) $x = 4\ \mathrm{cm}$ (ε) $x = 6\ \mathrm{cm}$ (στ) $R = 11\ \mathrm{cm}$

Σελίδα 94 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
2.	$420{,}48\ \mathrm{m}$
3.	$BZ = \frac{40}{3}\ \mathrm{cm}$
8.	$\lambda = \frac{1}{2}$
12.	$BE = 2\ \mathrm{cm}$

Σελίδα 99 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
10.	$\overrightarrow{\Delta E} = -\vec{u} + \vec{v}$, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{u}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = -3\vec{u} + 3\vec{v}$

Ενότητα 07: Συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ Εξισώσεις – Ανισώσεις

Σελίδα 107 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2,\ a \neq 0$

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $a > 0$ (β) $\mathbb{R}$ (γ) $x = 0$ (δ) $K(0,0)$ (ε) $[0, +\infty)$
3.	(α) $a = 2,\ a = -\frac{1}{4}$ (β) $(-5, 50), \left(-5, -\frac{25}{4}\right)$
4.	Μέγιστη τιμή (α), Ελάχιστη τιμή (β) και (γ)
5.	$\lambda = 5$
6.	$\kappa > 2$

Σελίδα 116 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = a(x+\kappa)^2 + \lambda,\ a \neq 0$

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$g(x) = x^2 + 2,\ x \in \mathbb{R},\ h(x) = x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$
2.	$g(x) = (x+3)^2,\ h(x) = (x-1)^2$
3.	(α) $y = x^2 - 2$ (β) $y = x^2 + 10$ (γ) $y = x^2 - 3$ (δ) $y = x^2 + 0{,}5$
4.	(α) $y = -2(x+1)^2$ (β) $y = -2(x-1)^2$ (γ) $y = -2(x+4)^2$ (δ) $y = -2(x-0{,}5)^2$
5.	(α) $y = (x+1)^2 + 2$ (β) $y = (x-2)^2 + 4$ (γ) $y = (x+3)^2 - 1$ (δ) $y = (x-5)^2 - 3$
6.	(α) Άξονας συμμετρίας: $x = 0$, Κορυφή: $(0{,}3)$ (β) Άξονας συμμετρίας: $x = 0$, Κορυφή: $(0, -4)$ (γ) Άξονας συμμετρίας: $x = 0$, Κορυφή: $(0{,}1)$ (δ) Άξονας συμμετρίας: $x = 0$, Κορυφή: $(0, -4)$ (ε) Άξονας συμμετρίας: $x = -1$, Κορυφή: $(-1{,}9)$ (στ) Άξονας συμμετρίας: $x = 1$, Κορυφή: $(1{,}7)$ (ζ) Άξονας συμμετρίας: $x = -2$, Κορυφή: $(-2{,}3)$ (η) Άξονας συμμετρίας: $x = 2$, Κορυφή: $(2, -1)$ (θ) Άξονας συμμετρίας: $x = -1$, Κορυφή: $(-1{,}2)$ (ι) Άξονας συμμετρίας: $x = \frac{3}{2}$, Κορυφή: $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

Σελίδα 123 Η εξίσωση $\boldsymbol{ax^2+\beta x+\gamma=0,\ a\neq 0}$	
Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
1.	(α) $\Delta>0\,,\ x_1=-3\,,\ x_2=2$ (β) $\Delta<0$ δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες (γ) $\Delta>0,\ x_1=-2\,,\ x_2=0$ (δ) $\Delta=0,\ x_1=\ x_2=3$
2.	(α) $a>0$ (β) $\gamma=-3$ (γ) $[-4,+\infty)$ (δ) $x=-1$ (ε) $y_{\min}=5$ (στ) $x_1=-3\,,\ x_2=1$
3.	(α) $y_{\min}=5$ (β) $y_{\max}=4$
4.	(α) $\lambda=-4$ (β) $\lambda=-2$
5.	(α) $\kappa=\frac{3}{2}$ (β) $\kappa=1$ ή $\kappa=-3$
6.	$a=5\,,\ \beta=5$
7.	(α) $x_1=-1\,,\ x_2=2$ (β) $\beta=-2\,,\ \gamma=-4$ (γ) $(0,-4)$
8.	(α) Δύο ρίζες πραγματικές και άνισες (β) Σε δύο διαφορετικά σημεία
9.	(α) $f(x)=(x+4)^2+4$ (β) $f_{\min}=4$
10.	$E_{\max}=10000\ \mathrm{m}^2$
11.	$2\ \mathrm{sec}$

Σελίδα 131 Άθροισμα και γινόμενο των λύσεων της εξίσωσης $\boldsymbol{ax^2+\beta x+\gamma,\ a\neq 0}$			
Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**		
2.	(α) 7 (β) 3	(γ) 27 (δ) $\frac{7}{3}$	(ε) 108 (στ) 43 (ζ) 199
3.	(α) $\lambda=2$ (β) $\lambda=2$		(γ) $\lambda=\frac{9}{2}$ (δ) $\lambda=12$
4.	(α) $\mu=3$ (β) $\mu=\frac{5}{6}$ (γ) $\mu=\frac{5}{3}\,,\mu=1$		

5.	(α) (i) $x_1 = 2\,, x_2 = 5$ (ii) $x_1 = x_2 = -1$ (β) (i) 10 (ii) 1 (γ) (i) -7 (ii) 2 (δ) (i) $\frac{9}{2}$ (ii) $\frac{9}{2}$
6.	$x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$
7.	(α) $(2,-1), \left(\frac{22}{19}, \frac{29}{19}\right)$ (β) $\left(\frac{5}{3}, 1\right), \left(-\frac{1}{3}, -5\right)$
8.	(α) $6\ ,2$ (β) $7\ ,3$ ή $-7\ ,-3$ (γ) $\sqrt{12}+1\ ,\ 1-\sqrt{12}$ (δ) $7\ ,5$ ή $-7\ ,-5$
9.	(α) Η ευθεία τέμνει την παραβολή στα σημεία: $(-3,9)$ και $(5,25)$. (β) Η ευθεία δεν τέμνει την παραβολή.
10.	(α) $(a-16)(a+1)$ (β) $(2\gamma-7)(\gamma+3)$ (γ) $(y-\kappa+\lambda)(y-\kappa-\lambda)$
11.	(α) $x^2+x-6=0$ (β) $15x^2+x-2=0$ (γ) $x^2-16=0$ (δ) $x^2-14x+46=0$
12.	(α) $\frac{a-1}{a}$ (β) $\frac{x+6}{2(x-3)}$ (γ) $\frac{x-2y}{2x-y}$
13.	$2\lambda^2 = 9\kappa\mu$
14.	(β) $x = \frac{\kappa+\lambda}{2}$
15.	$x^2-6x+4=0,\ 144$
16.	$a \le \frac{41}{16}$
17.	Η εξίσωση έχει δύο αρνητικές ρίζες.

Σελίδα 143 Πρόσημο τιμών τριωνύμου – Ανισώσεις δεύτερου βαθμού

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $x^2-5x-6>0$ για $x<-1$ ή $x>6$ $x^2-5x-6<0$ για $-1<x<6$ (β) $(-x-2)(x-7)>0$ για $-2<x<7$ $(-x-2)(x-7)<0$ για $x<-2$ ή $x>7$ (γ) $25-4x^2>0$ για $-\frac{5}{2}<x<\frac{5}{2}$ $25-4x^2<0$ για $x<-\frac{5}{2}$ ή $x>\frac{5}{2}$ (δ) $-x^2+x-1<0, \forall x \in \mathbb{R}$

(α) $f(x) > 0$ για $-3 < x < 0$, $f(x) < 0$ για $x < -3, x > 0$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(β) $f(x) > 0$ για $x < 0, x > 4$, $f(x) < 0$ για $0 < x < 4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(γ) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

2.

(δ) $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

(ε) $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

(στ) $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

3.

(α) $5x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
(β) $-3x^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
(γ) $x^2 + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
(δ) $-x^2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$
(ε) $(x+4)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
(στ) $(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
(ζ) $(x+1)(x-3) > 0$, για $x < -1, x > 3$
$(x+1)(x-3) < 0$, για $-1 < x < 3]$
(η) $x^2 - 3x + 2 > 0$ για $x < 1, x > 2$
$x^2 - 3x + 2 < 0$ για $1 < x < 2$
(θ) $-x^2 + 2x - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$
(ι) $x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
(ια) $-5x^2 + 4x - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

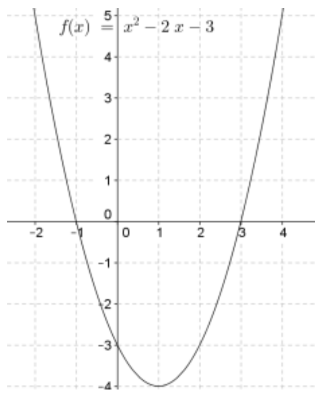
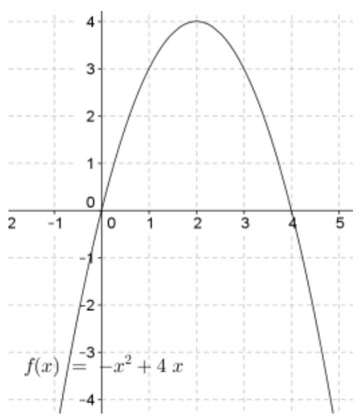
4.	$f(-20) < 0, f(-7{,}3) > 0, f(-8) = 0, f(0) > 0,$ $f\left(\frac{1}{2013}\right) > 0, f(8) < 0$
5.	(α) $x \leq 0$ ή $x \geq 4$ (β) $-3 \leq x \leq 0$ (γ) Αδύνατη (δ) $x \in \mathbb{R}$
6.	(α) $x < -6$ ή $x > 6$ (β) $0 \leq x \leq 2$ (γ) $-3 \leq x \leq 8$ (δ) Αδύνατη ανίσωση
7.	$x < -2$ ή $x > 2$
8.	$5 < \lambda < 13$
9.	Για $1 < \mu < 5$, η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες. Για $\mu < 1, \mu > 5$, η εξίσωση έχει 2 πραγματικές ρίζες (άνισες) Για $\mu = 1, \mu = 5$, η εξίσωση έχει 2 πραγματικές ρίζες (ίσες)
11.	(β) $-1 \leq \lambda \leq 1$ (γ) Για $\lambda = 1$, $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 4 < 3x_1 + 3x_2$
12.	$5 < \lambda < 9$
13.	Π.Ο: $[-6{,}2]$
14.	$0 < x < 1$
15.	$2 \leq$ Μήκος ≤ 8
16.	(α) $a > 2$ (β) Για $a = 2$, $x_1 = x_2 = -1$ (γ) $f(x) = (x+1)^2 + 2 \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$ (δ) $-3 \leq x \leq 1$

Σελίδα 151 Ανισώσεις ανώτερου βαθμού – Κλασματικές ανισώσεις

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$P(x) > 0$ για $x \in (-4{,}2) \cup (2, +\infty)$ $P(x) < 0$ για $x \in (-\infty, -4)$
2.	(α) $x \in (-\infty, -5) \cup (-2{,}0) \cup (5, +\infty)$ (β) $x \in (-\infty, -3) \cup (2{,}5)$ (γ) $x \in (-\infty, -\sqrt{6}] \cup [1, \sqrt{6}]$ (δ) $x < -\frac{5}{2}$, $x > \frac{5}{2}$

3.	(α) $x \in (-\infty, 3)$ (β) $x \in [-3,4] \cup (7, +\infty)$ (γ) $x \in (-\infty, -2) \cup [-1,2) \cup [3, +\infty)$ (δ) $x \in [-5,0) \cup (0,3)$ (ε) $x \leq 0$ (στ) $-4 \leq x < 3,\ x \geq 5$
5.	(α) $\Delta \geq 0, P > 0, S > 0$ (β) $\lambda > 5$
6.	(β) $\lambda < -2, 0 < \lambda < 2$
7.	(β) $\lambda < 4,\ \lambda \geq 6$
8.	$\frac{1}{2} < \lambda < \frac{9}{2}$

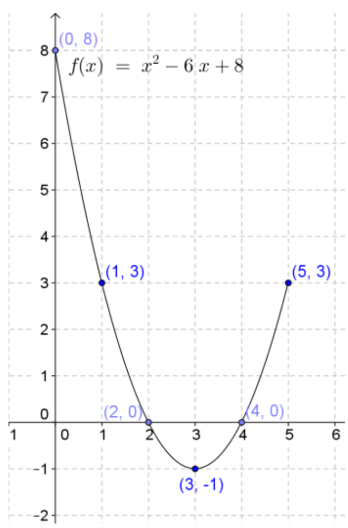
Σελίδα 156 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	<u>Για τη συνάρτηση f:</u> Π.Ο.: $\mathbb{R}$, Σ.Τ:$[0, +\infty)$, Κορυφή: $(0,0)$, Άξονας συμμετρίας $x = 0$. <u>Για τη συνάρτηση g:</u> Π.Ο.: $\mathbb{R}$, Σ.Τ:$(-\infty, 0]$, Κορυφή: $(0,0)$, Άξονας συμμετρίας $x = 0$.
2.	Η f έχει Π.Ο: $\mathbb{R}$, Σ.Τ: $[-4, \infty)$, Κορυφή $(1, -4)$  Η g έχει Π.Ο: $\mathbb{R}$, Σ.Τ: $(-\infty, 4]$, Κορυφή $(2, 4)$ 

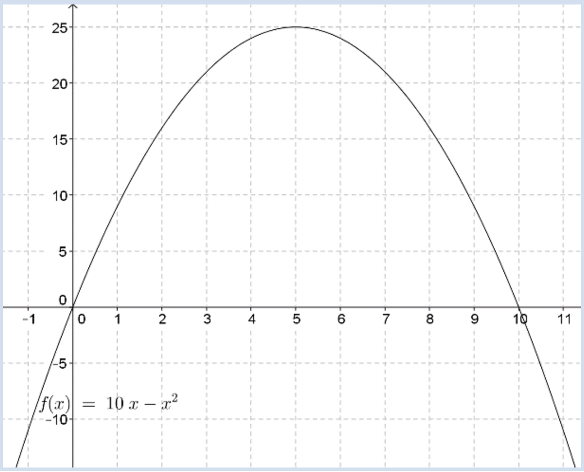
3.	Για $\lambda > 3$
4.	(α) $x = 0$ (β) $(-3{,}18)$
5.	Άξονας Συμμετρίας: $x = 4$
6.	(α) Για $\kappa = -3$ (β) $\beta = -10$
7.	$E_{o\lambda} = 6x^2\ , x > 0$
8.	$f_{\max} = 16$
9.	$f_{\min} = \dfrac{14}{3}$
10.	$g(x) = x^2 + 2,\ \ K(0{,}2),\ \ x = 0$ $h(x) = (x+2)^2, K(-2{,}0),\ \ x = -2$ $\kappa(x) = (x-2)^2 + 2, K(2{,}2),\ \ x = 2$
11.	(α) Π.Ο.: $\mathbb{R}$, Σ.Τ:$[-9, +\infty)$ (β) $a > 0$ (γ) $\gamma = -8$ (δ) Άξονας συμμετρίας $x = 1$. (ε) Κορυφή: $(1, -9)$. (στ) $x_1 = -2\ , x_2 = 4$ (ζ) Δεν υπάρχουν πραγματικές λύσεις (η) $x < -2,\ \ x > 4$ (θ) Αδύνατη ανίσωση

12.

$f(x) = x^2 - 6x + 8\ \ , x \in [0{,}5]$



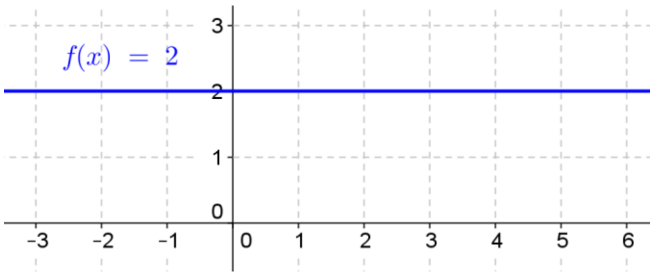
13.



14.
(α) 20 m
(β) 4 sec
(γ) Π.Ο: $[0\,,+\infty)$, Σ.Τ: $[0\,,+\infty)$

15.
(α) $y = x^2 - 12x + 27$
(β) $x = 6$
(γ) $(6, -9)$

16.
(β) Αν $\lambda = -1$, $f(x) = 2$



(γ) $\lambda = -2$, $(-1{,}0)$

17.
(α) B
(β) Γ
(γ) Γ
(δ) Δ

18.
(α) $y = (x-2)^2 - 25$
(γ) Άξονας συμμετρίας: $x = 2$, Κορυφή: $(2, -25)$
(δ) Άξονας συμμετρίας: $x = a$, Κορυφή: (a, β)

19.
(α) Σ.Τ: $[-1, +\infty)$
(β) Σ.Τ: $[-\frac{9}{8}, +\infty)$
(γ) Σ.Τ: $(-\infty\,, 9]$

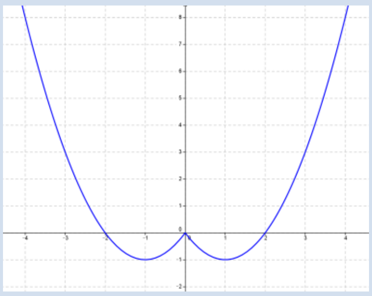
20.
(α) ΛΑΘΟΣ
(β) ΛΑΘΟΣ
(γ) ΛΑΘΟΣ
(δ) ΣΩΣΤΟ
(ε) ΣΩΣΤΟ
(στ) ΣΩΣΤΟ
(ζ) ΣΩΣΤΟ

21. $7, 9$ ή $-9\,, -7$

22. $3\,,5$

23.	(α) 54 (β) 56 (γ) 1746
24.	(α) $12x^2 + 5x - 2 = 0$ (β) $x^2 - 6x + 6 = 0$ (γ) $25x^2 - 4 = 0$
25.	(β) $20x^2 - 10x + 1 = 0$
26.	$3x^2 + 18x + 23 = 0$
27.	(α) $\varDelta = (2\lambda - 1)^2$ (β) $\lambda = \frac{1}{2}$
28.	(α) $x \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$ (β) $y = \frac{3}{2}$
29.	$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-5\,, -3] \cup (2, +\infty)$ $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty\,, -5) \cup (-3, 2)$
30.	(α) $x \in (-\infty, -4) \cup (5, +\infty)$ (γ) $\lambda \in (-4, +\infty)$ (β) $x \in (-\infty, -6] \cup [0, 4]$ (δ) $y \in [-2, -3) \cup [6, +\infty)$
31.	Για καμία τιμή του λ
32.	(β) $x_1 = \frac{1}{2}\,, x_2 = 2$ (γ) $x = 1$

Σελίδα 163 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $y_A = 4,\ y_B = 9$ (β) $y = x + 6$
2.	(α) $a = 1$ (β) $a = \frac{1}{4}$
3.	$\lambda = 3,\ \varDelta_{\min} = -12$
4.	Για $\kappa = 1$
5.	 (α) $x = 0$ (β) $(-2{,}0), (0{,}0), (2{,}0)$ (γ) Ελάχιστη τιμή: -1 (δ) Σ.Τ.: $[-1, +\infty)$

7.	Για $x = \frac{1}{2}$ $P(x, E(x))$, όπου $E(x)$ η συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν του τετραγώνου για $0 \leq x \leq 1$.
8.	(α) Αριθμός τετραγώνων: $2,5,10,17,\ldots$ (β) Αύξηση στα τετραγωνάκια: $3,5,7,9,\ldots$ (γ) $26, 37, 50, 65, \ldots$ (δ) $\nu^2 + 1$
9.	$\kappa \in (-\infty, -6) \cup (2\,, +\infty)$
10.	$x \in [-6, -1] \cup [1,2]$
12.	(α) $\Delta = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$ (β) $\lambda = \frac{1}{2}$ (γ) Για καμία τιμή του λ
14.	(α) 15 μαθητές (β) 40
15.	$-4 \leq x \leq -1$
16.	$f(x) = \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \gamma$
18.	(α) Για $\kappa < \frac{1}{2}$ ρίζες πραγματικές ετερόσημες Για $\kappa = \frac{1}{2}$ μία ρίζα ίση με 0 και η άλλη θετική Για $\frac{1}{2} < \kappa < \frac{5}{6}$ δύο ρίζες πραγματικές θετικές και άνισες Για $\kappa = \frac{5}{6}$ ρίζες πραγματικές θετικές και ίσες Για $\kappa > \frac{5}{6}$ δεν έχει πραγματικές ρίζες (β) Για $\kappa \neq 0$ δύο πραγματικές ετερόσημες ρίζες Για $\kappa = 0$ ρίζες πραγματικές και ίσες με 0.
20.	(β) $x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$, $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$
21.	$\frac{20}{9} < a < 10$
22.	$0 < u < 30$
23.	Σ.Τ.: $[-3, +\infty)$
24.	(α) $x \in (0,1)$ (β) $0 < a^2 < a < \sqrt{a} < 1$
25.	$x \geq 0$ ή $-5 < x \leq -4$

Ενότητα 08: Στατιστική

Σελίδα 178 Μέτρα θέσης και διασποράς

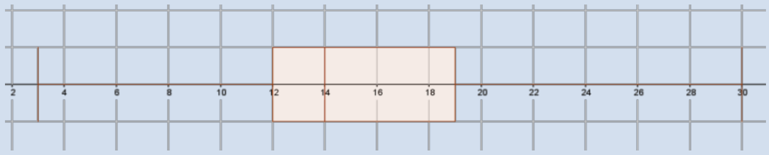
Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	Μέτρα θέσης: Διάμεσος, Μέση Τιμή, Επικρατούσα τιμή, Σταθμισμένος Μέσος Μέτρα διασποράς: Εύρος, Διακύμανση, Τυπική Απόκλιση
2.	(α) Μέση Τιμή=13,88, Διάμεσος= 13,5, Επικρατούσα Τιμή= 13 (β) Εύρος= 12, Τυπική απόκλιση= 3,85, Συντελεστής μεταβολής: $CV = 27{,}78\%$
3.	35 χρόνια
4.	Μέση Τιμή= 15,1
5.	Μέση επίδοση αγοριών: 17,72
6.	Τελική βαθμολογία: 7,8
7.	(α) Μέση Τιμή: $\bar{x} = 230$ (β) $\bar{y} = 23$, $\bar{z} = 30$, $\bar{\omega} = 3$
8.	Όλες οι τιμές πρέπει να συμπίπτουν με τη μέση τιμή, δηλαδή $(x_1 = x_2 = \ldots = x_\nu = \bar{x})$
9.	Μικρότερη Διασπορά: Λίστα 2 Μεγαλύτερη Διασπορά: Λίστα 3
10.	1,71
11.	(α) 28 (β) 28 (γ) 2,16
12.	61
13.	Τυπική απόκλιση: 3
14.	(α) Αντίστοιχη Συχνότητα: 6, Σύνολο: 38, Τυπική Απόκλιση: 1,33 (β) $CV = 17{,}73\%$
15.	$CV_1 > CV_2$
16.	(α) $CV = 19{,}39\%$ (β) $CV_B = 9{,}09\%$ Μεγαλύτερη ομοιογένεια βαθμών στο τμήμα Β.
17.	(β) 15,35

Σελίδα 188 Φυλλογράφημα

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
2.	(α) $x_\delta = 11, Q_1 = 5, Q_3 = 13$ (β) 312
4.	(α) 8,58 (β) <u>Ανοικτός Στίβος</u>: Εύρος: 0,28 m, IQR: 0,13 m <u>Κλειστός Στίβος</u>: Εύρος: 0,29 m, IQR: 0,14 m

Σελίδα 194 Θηκόγραμμα

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ (ε) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ (δ) ΣΩΣΤΟ

2.	(α) Δεν υπάρχουν ακραίες τιμές. (β) 
3.	(α) 6 (β) Ελάχιστη παρατήρηση: 0, Μέγιστη παρατήρηση: 6, Εύρος: 6 (γ) $x_\delta = 1,\ Q_1 = 0{,}5,\ Q_3 = 2{,}5,\ IQR = 2$ (δ) $\bar{x} > x_\delta$ (ε) Δεν είναι συμμετρικό το δείγμα.

Σελίδα 198 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΣΩΣΤΟ (γ) ΣΩΣΤΟ (ε) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ (δ) ΛΑΘΟΣ (στ) ΛΑΘΟΣ
2.	3,74
3.	Ο ισχυρισμός είναι ορθός.
4.	96 km/h
5.	(α) 31 , 27 (β) $s = 1{,}04$
6.	16,61
7.	(α) Μέση Τιμή: $\bar{x} + \kappa$, Τυπική απόκλιση: s_x (β) Μέση Τιμή: $\bar{x} - \kappa$, Τυπική απόκλιση: s_x (γ) Μέση Τιμή: $\kappa \cdot \bar{x}$, Τυπική απόκλιση: $\kappa \cdot s_x$
8.	(β) Είδος A: $x_\delta = 22,\ \bar{x} = 22,\ s = 2{,}58$ Είδος B: $x_\delta = 24,\ \bar{x} = 24,\ s = 4{,}28$ (γ) Το πρώτο δείγμα έχει περισσότερη ομοιογένεια.
9.	Δεν υπάρχουν ακραίες τιμές.

Σελίδα 203 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
2.	66
3.	Μέση Τιμή 6 Τυπική απόκλιση= 2
5.	Μέση Τιμή: 55, Τυπική απόκλιση: $s_Y^2 = 144$
6.	$x_5 = 10$ ή $x_5 = -2$
8.	(α) Γ_1 (β) $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1{,}34,\ x_{\delta_1} - x_{\delta_2} = 2$ $\bar{x}_1 - \bar{x}_3 = 4,\ x_{\delta_1} - x_{\delta_3} = 5$ $\bar{x}_2 - \bar{x}_3 = 2{,}65,\ x_{\delta_2} - x_{\delta_3} = 3$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$\in$	ανήκει
$\notin$	δεν ανήκει
$\forall$	για κάθε
$\exists$	υπάρχει
$\cup$	ένωση συνόλων
$\cap$	τομή συνόλων
$\subset$	γνήσιο υποσύνολο
$\subseteq$	υποσύνολο
$\emptyset$ ή $\{\ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
$\neq$	άνισο
$\equiv$	ταυτοτικά ίσο
$\cong$	κατά προσέγγιση ίσο
$\mathbb{N}$	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}$	ακέραιοι αριθμοί $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}^+$	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}^-$	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1,-2,-3,-4,\ldots\}$
$\mathbb{Q}$	ρητοί αριθμοί $\{α/β:\ α,β∈Z\ \text{και}\ β≠0\}$
$\mathbb{Q}^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{Q}_0^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
$\mathbb{Q}^-$	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{R}$	πραγματικοί αριθμοί
$\Rightarrow$	απλή συνεπαγωγή
$\Leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
$\perp$	κάθετες
$\parallel$	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή

=		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
.		Υποδιαστολή
EXP		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
Ans		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
$x^{\square}$	ή x^y ή ^	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
SHIFT	ή 2^{nd} F	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
AC		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
DEL		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
Abs		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
(-)		Εισαγωγή Προσήμου –
a b/c	ή $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$	Κλάσμα
S⇔D	ή a b/c	Μετατροπή Κλάσματος ⇔ Δεκαδικό
CLR		Σβήσιμο μνήμης
M+		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
M-		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
M		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3+4$	3 + 4 =	3+4 7
2,34 − 1,1	2 · 3 4 − 1 · 1 =	2.34 − 1.1 1.24
$3 \cdot 2$	3 x 2 =	$3X2$ 6
2^5	2 x^y 5 =	2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$	5 EXP 3 =	$5E3$ ή $5X103$ 5000
$\frac{3}{4}$	a b/c 3 ↓ 4 → = ή 3 a b/c 4 =	$\frac{3}{4}$ 3⌟4
$2\frac{3}{4}$	SHIFT ▪ 2 → 3 ↓ 4 = ή 2 a b/c 3 a b/c 4 =	$2\frac{3}{4}$ 2⌟3⌟4
$\sqrt{4}$	√ 4 =	$\sqrt{4}$ 2
5^2	5 X² =	5^2 25
$2 \cdot (7-3)$	2 x (7 − 3) =	$2X(7-3)$ 8
$2 \cdot (7-3)$	7 − 3 = 2 x Ans =	$2XAns$ 8
$2-(-3)$	2 − ((-) 3) =	$2-(-3)$ 5
$\lvert -3 \rvert$	Abs (-) 3 =	$\lvert -3 \rvert$ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	S⇔D ή SHIFT a b/c	$\frac{1}{4}$
$9-6:2$	Υπολογισμός και αποθήκευση 9 − 6 ÷ 2 = M+	$9-6:\ 2M+$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9-6:2) - 6:(9-6:2)$	3 X M − 6 ÷ M =	$3\,X\,M - 6:\ M$ 17

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ 1°- 89°

Γωνία	ημω	συνω	εφω
1°	0,017	0,999	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,395	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,348
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
28°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
38°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Γωνία	ημω	συνω	εφω
46°	0,720	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,470	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,748
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,333
78°	0,978	0,203	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	0,999	0,018	57,290