

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ



ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Λυκείου Κοινού Κορμού

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Κοινού Κορμού

Το παρόν βιβλίο αφιερώνεται στην μνήμη της Επιθεωρήτριας Μαθηματικών Μέσης Εκπαίδευσης Ευτυχίας Καλλεπίτη.

Συγγραφή:	Δημητρίου – Καραντάνου Τέρψα Ιωάννου Ιωάννης Καραντάνος Δημήτρης Κωνσταντινίδης Κυριάκος Λοϊζιάς Σωτήρης Ματθαίου Κυριάκος	Παπαγιάννης Κωνσταντίνος Παραγυίου Θεόκλητος Σεργίδης Μάριος Στυλιανού Ανδρέας Τιμοθέου Σάββας Χατζηγεωργίου Έλενα
Συντονιστές:	Χρίστου Κωνσταντίνος, <i>Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου</i> Βίδρας Αλέκος, <i>Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου</i>	
Εποπτεία:	Φιλίππου Ανδρέας, <i>Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης</i> Γιασουμής Νικόλας, <i>Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης</i> Παπαγιάννη Όλγα, <i>Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης</i> Χατζηχρίστου Χρυσούλα, <i>Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης</i>	
Σχεδιασμός εξωφύλλου:	Σιαμμάς Χρύσης, <i>Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων</i>	
Επιμέλεια έκδοσης:	Ιωάννου Άστρα Μαρίνα, <i>Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων</i>	
Συντονισμός έκδοσης:	Παρπούνας Χρίστος, <i>Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων</i>	

Α΄ έκδοση 2017

Εκτύπωση: Printco Manufacturing & Trading Ltd

© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ISBN: 978-9963-54-107-2



Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση του βιβλίου «Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Κοινού Κορμού», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Το βιβλίο έχει έναν διττό ρόλο να εκπληρώσει, να μνηθεί ο μαθητής στη συλλογιστική την οποία εκφράζει το αξεπέραστο λογικό-επαγωγικό σύστημα των Μαθηματικών και παράλληλα να ανταποκριθεί στις σύγχρονες εκπαιδευτικές επιταγές.

Όλο το υλικό που περιλαμβάνεται στο παρόν βιβλίο, σύμφωνα με τα Νέα Αναλυτικά Προγράμματα και τους Δείκτες Επιτυχίας και Επάρκειας που τίθενται από την εκπαιδευτική μεταρρύθμιση, αποσκοπεί αφενός στη βοήθεια των μαθητών/τριών να κατανοήσουν τη μαθηματική λογική και σκέψη και αφετέρου στη συνεισφορά της μαθηματικής παιδείας του τόπου.

Το βιβλίο «Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Κοινού Κορμού» περιλαμβάνει την ύλη των Μαθηματικών που προβλέπεται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Β΄ τάξης Λυκείου, του οποίου η εφαρμογή άρχισε από το σχολικό έτος 2016 – 2017 και είναι εμπλουτισμένο με αυστηρούς ορισμούς και αποδείξεις όπως επίσης με πολλές εφαρμογές και παραδείγματα, που ανταποκρίνονται στις δυνατότητες και στα ενδιαφέροντα των μαθητών/τριών. Επιπρόσθετα, καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια, ώστε να είναι δυνατή η ολοκλήρωση της διδασκαλίας του στον διδακτικό χρόνο, ο οποίος προβλέπεται από το εγκεκριμένο ωρολόγιο πρόγραμμα.

Το κλειδί της επιτυχίας στο μάθημα των Μαθηματικών είναι η ουσιαστική κατανόηση των εννοιών, η ανάπτυξη αναλυτικής και συνθετικής σκέψης, η μεθοδολογική αντιμετώπιση ομαδοποιημένων προβλημάτων και η αποφυγή της αποστήθισης. Η ορθή χρήση του βιβλίου δημιουργεί στον μαθητή, εκτός από το φιλικό περιβάλλον, όλες εκείνες τις προϋποθέσεις, κυριότερες των οποίων είναι ο προβληματισμός και η αυτενέργεια, για ανάπτυξη μιας κριτικής, διερευνητικής και ορθολογιστικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τους Καθηγητές του Πανεπιστημίου Κύπρου Κωνσταντίνο Χρίστου και Αλέκο Βίδα.

Δρ Κυπριανός Δ. Λούης

Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΧΟΜΕΝΑ	Σελίδα
1. Τριγωνομετρία	7
▪ Εισαγωγή στην Τριγωνομετρία	8
▪ Νόμος Ημιτόνων	9
▪ Νόμος Συνημιτόνων	14
▪ Εμβαδόν τριγώνου	18
2. Συναρτήσεις	25
▪ Εισαγωγή στις συναρτήσεις	26
▪ Η έννοια της συνάρτησης	28
▪ Γράφημα – Γραφική παράσταση συνάρτησης	35
▪ Πεδίο ορισμού – Σύνολο τιμών πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής που ορίζεται με τύπο	45
▪ Ισότητα συναρτήσεων	49
▪ Πράξεις συναρτήσεων	53
▪ Συναρτήσεις $1 - 1$	57
▪ Συναρτήσεις με απόλυτες τιμές – Συναρτήσεις πολλαπλού τύπου	62
3. Εκθετική – Λογαριθμική Συνάρτηση	71
▪ Εισαγωγή	72
▪ Δυνάμεις με άρρητο εκθέτη	74
▪ Εκθετική συνάρτηση	75
▪ Εκθετικές εξισώσεις	83
▪ Εφαρμογές εκθετικής συνάρτησης	86
▪ Έννοια του λογάριθμου	90
▪ Ιδιότητες λογάριθμων	98
▪ Λογαριθμική συνάρτηση	104
▪ Λογαριθμικές εξισώσεις	109
4. Όριο – Παράγωγος	119
▪ Εισαγωγή στο όριο	120
▪ Η έννοια του ορίου – Πλευρικά όρια συνάρτησης	121

▪ Όριο πολυωνυμικής – ρητής συνάρτησης στο $a \in \mathbb{R}$	130
▪ Όριο συνάρτησης στο άπειρο	132
▪ Εισαγωγή στην παράγωγο	137
▪ Παράγωγος αριθμός	138
▪ Παράγωγος συνάρτηση	141
▪ Παράγωγος βασικών συναρτήσεων – Κανόνες παραγωγίσισης	144
▪ Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου	151
5. Ακολουθίες	161
▪ Εισαγωγή	162
▪ Η έννοια της ακολουθίας	163
▪ Ειδικές ακολουθίες	169
6. Γεωμετρία	189
▪ Εγγεγραμμένα – Εγγράψιμα Τετράπλευρα	190
▪ Κανονικά πολύγωνα	197
▪ Μέτρηση κύκλου	209
7. Στατιστική	227
▪ Σύγκριση δύο πληθυσμών	228
▪ Σύγκριση δύο πληθυσμών - Διαγράμματα	234
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ	251
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	281

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 1.1 Εισαγωγή στη Τριγωνομετρία
- 1.2 Νόμος ημιτόνων
- 1.3 Νόμος συνημιτόνων
- 1.4 Εμβαδόν τριγώνου

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Η Τριγωνομετρία έχει ως πρωταρχικό σκοπό την επίλυση τριγώνων, δηλαδή τον υπολογισμό των άγνωστων πλευρών ή γωνιών του τριγώνου, όταν δίνονται επαρκή δεδομένα. Η τριγωνομετρία έχει εφαρμογές στη Φυσική, στη Μηχανική, στη Γεωγραφία, στην Αστρονομία, στη Ναυτιλία, κ.α

Ιστορικό Σημείωμα

Η ιστορία της τριγωνομετρίας αρχίζει στη Βαβυλώνα. Οι Βαβυλώνιοι καθιέρωσαν τη μέτρηση των γωνιών σε μοίρες και έκαναν τα πρώτα βήματα στην Αστρονομία που οδήγησαν στη γέννηση της τριγωνομετρίας. Οι Βαβυλώνιοι είχαν συγκεντρώσει έναν τεράστιο αριθμό δεδομένων από παρατηρήσεις και είναι σήμερα γνωστό ότι ένα μεγάλο μέρος των παρατηρήσεων αυτών πέρασε στους Έλληνες.

Οι Έλληνες αστρονόμοι Ίππαρχος, Μενέλαος και Πτολεμαίος, εργάστηκαν ώστε να μετατρέψουν την αστρονομία από απλή περιγραφική σε μαθηματική. Προσπάθησαν να αναλύσουν τις τροχιές των ουράνιων σωμάτων και να προβλέψουν τη θέση τους συναρτήσει του χρόνου. Στην προσπάθειά τους αυτή αντιμετώπιζαν προβλήματα που μόνο με την ανάπτυξη της τριγωνομετρίας θα μπορούσαν να επιλυθούν.

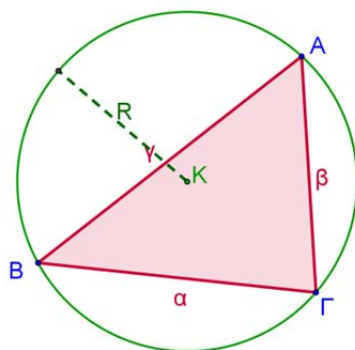
Ο Ίππαρχος κατασκεύασε ένα τριγωνομετρικό πίνακα για την επίλυση τριγώνων. Στον πίνακα αυτό σε κάθε γωνία απέδιδε μία τιμή που ήταν το μήκος της χορδής η οποία αντιστοιχούσε στη γωνία όταν την έκανε επίκεντρη με σταθερή ακτίνα. Ο Μενέλαος συνέχισε το έργο του Ίππαρχου και ο Πτολεμαίος έγραψε τη «Μαθηματική Σύνταξη», ένα από σημαντικότερα επιστημονικά συγγράμματα, αποτέλεσε το σημείο αναφοράς για τους αστρονόμους μέχρι τον 16^ο αιώνα μ.Χ.

Η τριγωνομετρία αναπτύσσεται στη σημερινή της μορφή στα χρόνια της Αναγέννησης. Ο Viète F. ήταν ο πρώτος που έλυσε εξίσωση τρίτου βαθμού με τη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Μετέτρεψε την τριγωνομετρία, από εργαλείο για την αστρονομία, σε ένα βασικό εργαλείο για τα μαθηματικά. Ο Euler L. χρησιμοποίησε την τριγωνομετρία στην αναλυτική μελέτη των περιοδικών συναρτήσεων και την συνέδεσε με τις λογαριθμικές και εκθετικές συναρτήσεις. Ο Fourier J. μελέτησε τριγωνομετρικές σειρές οι οποίες σήμερα έχουν το όνομά του και έχουν εφαρμογές στη στατιστική, στην ηλεκτρολογία, στην ανάλυση σήματος και εικόνας, στην κβαντομηχανική, στην οικονομετρία κ.α.

1.2 ΝΟΜΟΣ ΗΜΙΤΟΝΩΝ

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «Blyk_Kor_En01_nomosimitonon.ggb». Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R .



$$R=4.1$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 8.2$$

$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = 8.2$$

$$\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 8.2$$

Να μετακινήσετε τις κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$ σε διάφορες θέσεις και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο τα μήκη των πλευρών του είναι ανάλογα προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του. Ο λόγος αυτός είναι ίσος με το διπλάσιο της ακτίνας R του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο.

Δηλαδή, σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς a σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 45^\circ$ και ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου $R = 8$ cm.

Λύση

$$\frac{a}{\eta\mu A} = 2R \Rightarrow a = 2R\eta\mu A \Rightarrow$$

$$a = 2 \cdot 8 \cdot \eta\mu 45^\circ \Rightarrow a = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας B σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta = 10$ cm και ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου $R = 5$ cm.

Λύση

$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = 2R \Rightarrow \eta\mu B = \frac{\beta}{2R} \Rightarrow$$

$$\eta\mu B = \frac{10}{2 \cdot 5} \Rightarrow \eta\mu B = 1 \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς α σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$ και $\beta = 4$ cm.

Λύση

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Rightarrow \frac{\alpha}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{4}{\eta\mu 40^\circ} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{4\eta\mu 60^\circ}{\eta\mu 40^\circ} \Rightarrow \alpha = 5,4 \text{ cm}$$

Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

Παράδειγμα 4

Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 1$ cm, $\gamma = \sqrt{3}$ cm και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Λύση:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \hat{\Gamma}} \Rightarrow \frac{1}{\eta\mu A} = \frac{\sqrt{3}}{\eta\mu 60^\circ} \Rightarrow$$

$$\eta\mu A = \frac{\eta\mu 60^\circ}{\sqrt{3}} \Rightarrow \eta\mu A = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\hat{A} = 30^\circ \text{ ή } \hat{A} = 150^\circ$$

Η τιμή $\hat{A} = 150^\circ$ απορρίπτεται.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow$$

$$30^\circ + \hat{B} + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Rightarrow \frac{1}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 90^\circ} \\ \Rightarrow \beta = 2 \text{ cm}$$

Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

$$\hat{A} + \hat{\Gamma} = 150^\circ + 60^\circ = 210^\circ > 180^\circ$$

Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 180° .

Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

Παράδειγμα 5

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση:

$$\frac{\alpha - \beta}{\gamma} = \frac{\eta\mu A - \eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}$$

Λύση

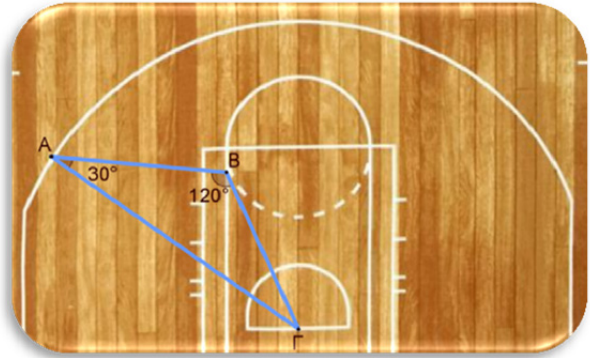
$$\begin{aligned}\frac{\alpha - \beta}{\gamma} &= \frac{2R\eta\mu A - 2R\eta\mu B}{2R\eta\mu\Gamma} \\ &= \frac{2R(\eta\mu A - \eta\mu B)}{2R\eta\mu\Gamma} \\ &= \frac{\eta\mu A - \eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R \Rightarrow \alpha = 2R\eta\mu A$$

Παράδειγμα 6

Δύο φίλοι βρίσκονται στα σημεία A και B , στο διπλανό σχήμα. Τα μέτρα των γωνιών A και B είναι 30° και 120° , αντίστοιχα. Αν η απόσταση AG είναι $6,75$ m, να υπολογίσετε τις αποστάσεις AB και $B\Gamma$.



Λύση:

$$\begin{aligned}\frac{AG}{\eta\mu B} &= \frac{B\Gamma}{\eta\mu\Gamma} \Rightarrow \frac{6,75}{\eta\mu 120^\circ} = \frac{B\Gamma}{\eta\mu 30^\circ} \\ &\Rightarrow B\Gamma = 3,9 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} &= 180^\circ \Rightarrow \\ 30^\circ + 120^\circ + \hat{\Gamma} &= 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ\end{aligned}$$

$$AB = B\Gamma = 3,9 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

(Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 180° .)

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, γιατί $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

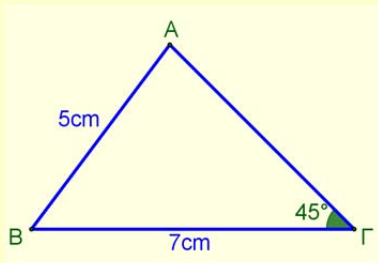
Οι αποστάσεις AB και $B\Gamma$ είναι $3,9$ m.

Δραστηριότητες

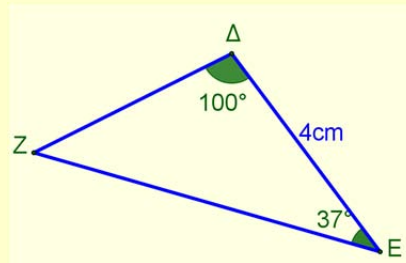
1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 150^\circ$ και $R = 2$ cm. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς β του τριγώνου.
2. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\gamma = 7$ cm και $R = 21$ cm. Να υπολογίσετε το ημίτονο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου.
3. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ και $R = 3$ cm.

4. Να επιλύσετε τα πιο κάτω τρίγωνα:

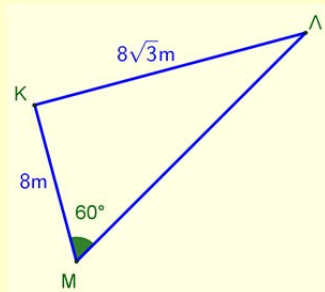
(α)



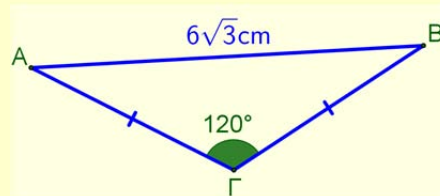
(β)



(γ)



(δ)



5. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 30^\circ$ και $a = 3$ cm, να αποδείξετε ότι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο είναι $R = 3$ cm.

6. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση:

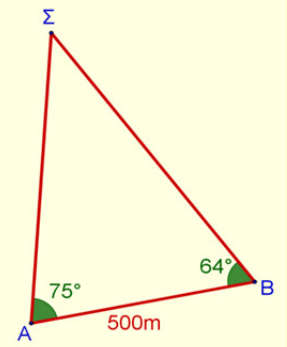
$$\eta\mu A + \eta\mu B = \frac{\alpha + \beta}{2R}$$

7. Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 4$ cm, $\beta = 2\sqrt{2}$ cm και $\hat{B} = 30^\circ$.

8. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση:

$$\beta(\eta\mu A - \eta\mu\Gamma) + \alpha(\eta\mu\Gamma - \eta\mu B) + \gamma(\eta\mu B - \eta\mu A) = 0$$

9. Δύο εμπορικά πλοία βρίσκονται στις θέσεις A και B , σε απόσταση 500 m όπως φαίνεται στο σχήμα. Στη θέση Σ βρίσκεται ένα λιμάνι. Οι γωνίες ΣAB και ΣBA έχουν μέτρο 75° και 64° , αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την απόσταση του πλοίου που βρίσκεται στην θέση A από το λιμάνι.



1.3 ΝΟΜΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

Διερεύνηση

Στο πιο κάτω σχήμα παρουσιάζεται ένας αρχαιολογικός χώρος. Οι αρχαιολόγοι πρόκειται να κατασκευάσουν μια σήραγγα από το σημείο B στο σημείο Γ . Ένας τοπογράφος βρίσκεται στο σημείο A και έκανε τις εξής μετρήσεις:

$$AB = 136 \text{ m}, \quad A\Gamma = 119 \text{ m} \text{ και } \widehat{B\hat{A}\Gamma} = 73^\circ$$

Μπορείτε να υπολογίσετε το μήκος της σήραγγας;



Θεώρημα

Το τετράγωνο μιας πλευράς τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο των δύο άλλων πλευρών επί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν οι πλευρές αυτές.

Δηλαδή, σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\upsilon A$$

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\upsilon B$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\upsilon \Gamma$$

Παράδειγμα 1

Να λύσετε τον τύπο $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\upsilon A$ ως προς το $\sigma\upsilon\upsilon A$.

Λύση

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\upsilon A \Rightarrow$$

$$2\beta\gamma\sigma\upsilon\upsilon A = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\upsilon A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς α του τριγώνου $AB\Gamma$ με $\beta = 2$ cm, $\gamma = 4$ cm και $\hat{A} = 60^\circ$.

Λύση

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\text{συν}A$$

$$\alpha^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \text{συν}60^\circ \Rightarrow$$

$$\alpha^2 = 16 \Rightarrow \alpha = 4 \text{ cm}$$

Εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας B του τριγώνου $AB\Gamma$ με $\alpha = 2$ cm, $\beta = 4$ cm και $\gamma = 5$ cm.

Λύση

$$\begin{aligned}\text{συν}B &= \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} \\ &= \frac{2^2 + 5^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{13}{20}\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\text{συν}B \Rightarrow$$

$$\text{συν}B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}$$

Παράδειγμα 4

Να επιλύσετε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 2\sqrt{3}$ cm, $\gamma = 2$ cm και $\hat{B} = 30^\circ$.

Λύση

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\text{συν}B$$

$$\beta^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot (2\sqrt{3}) \cdot 2 \cdot \text{συν}30^\circ \Rightarrow$$

$$\beta^2 = 4 \Rightarrow \beta = 2 \text{ cm}$$

$$\hat{\Gamma} = \hat{B} = 30^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\hat{A} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$$

Εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma = 2$ cm.

Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 180° .

Παράδειγμα 5

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $a = 2\beta \text{ συν}\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Λύση:

$$\begin{aligned} a = 2\beta \text{ συν}\Gamma &\Rightarrow a = 2\beta \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} \\ &\Rightarrow \alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \\ &\Rightarrow \beta^2 = \gamma^2 \Rightarrow \beta = \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \text{ συν}\Gamma \Rightarrow \\ \text{συν}\Gamma &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} \\ \beta > 0 \text{ και } \gamma > 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Παράδειγμα 6

Δύο κρουαζιερόπλοια ξεκινούν την ίδια ώρα από το λιμάνι της Λεμεσού. Το ένα κατευθύνεται με ταχύτητα 60 km/h προς το Λίβανο και το άλλο με ταχύτητα 70 km/h προς το Ισραήλ. Αν η γωνία μεταξύ των δύο δρομολογίων είναι 28° , να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των δύο πλοίων μετά από 2 ώρες.



Λύση

Μετά από δύο ώρες τα δύο κρουαζιερόπλοια θα έχουν καλύψει αποστάσεις $AB = 60 \cdot 2 = 120$ km το ένα και $A\Gamma = 70 \cdot 2 = 140$ km το άλλο.



$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \text{ συν}A \Rightarrow \\ \alpha^2 &= 120^2 + 140^2 - 2 \cdot 120 \cdot 140 \text{ συν}28^\circ \Rightarrow \\ \alpha^2 &= 4333 \Rightarrow a = 65,8 \text{ km} \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

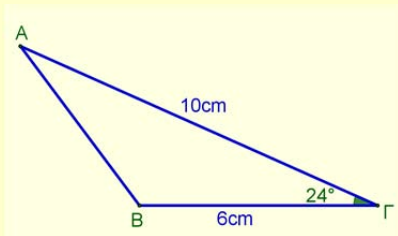
Η απόσταση μεταξύ των δύο πλοίων μετά από δύο ώρες θα είναι 65,8 km.

Δραστηριότητες

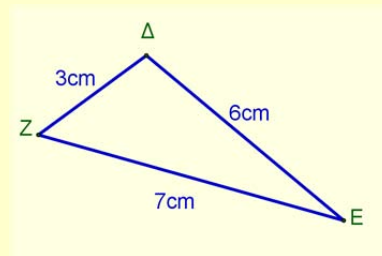
1. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς α του τριγώνου $AB\Gamma$ με $\beta = 3$ cm, $\gamma = 6$ cm και $\hat{A} = 120^\circ$.
2. Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ με $\alpha = 2$ cm, $\beta = 4$ cm και $\gamma = 5$ cm.
3. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ το συνημίτονο της γωνιάς \hat{A} είναι $\text{συν}A = \frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$.

4. Να επιλύσετε τα πιο κάτω τρίγωνα:

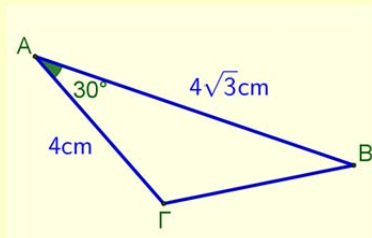
(α)



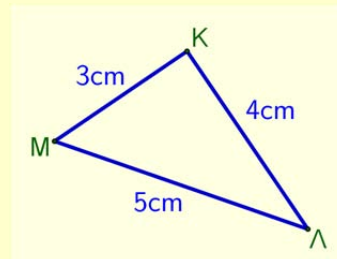
(β)



(γ)



(δ)



5. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση:

$$\alpha \text{συν}B + \beta \text{συν}A = \gamma$$
6. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\alpha \text{συν}B = \beta \text{συν}A$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
7. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\alpha = \beta \text{συν}\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
8. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{2\text{συν}\Gamma}{\alpha\beta} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2}$$

1.4 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Διερεύνηση

Στο πιο κάτω χάρτη παρουσιάζεται ένα οικόπεδο της αποκλειστικής οικονομικής ζώνης (ΑΟΖ) μιας χώρας. Το μέτρο της γωνίας B είναι 38° και οι αποστάσεις AB και BF είναι 1052 km και 1514 km, αντίστοιχα. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγωνικού οικοπέδου.



Θεώρημα

Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με το ημιγινόμενο δύο των μηκών των πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης σε αυτές γωνίας.

Δηλαδή, σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$E = \frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2}, \quad E = \frac{\alpha\gamma\eta\mu B}{2}, \quad E = \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2}$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ με $\alpha = 5$ cm, $\beta = 4$ cm και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Λύση

$$E = \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \eta\mu 30^\circ}{2} = 5 \text{ cm}^2$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς γ τριγώνου $AB\Gamma$ με $E = 4$ cm, $\beta = 2$ cm και $\hat{A} = 30^\circ$.

Λύση

$$E = \frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2} \Rightarrow 4 = \frac{2\gamma\eta\mu 30^\circ}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{4}{\eta\mu 30^\circ} = 8 \text{ cm}$$

Παράδειγμα 3

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:

$$(\alpha) \quad E = 2R^2 \eta\mu A \eta\mu B \eta\mu \Gamma$$

$$(\beta) \quad E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

Λύση

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad E &= \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2} = \frac{(2R\eta\mu A)(2R\eta\mu B)\eta\mu\Gamma}{2} \\ &= 2R^2 \eta\mu A \eta\mu B \eta\mu \Gamma \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων
 $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R \Rightarrow \alpha = 2R\eta\mu A.$

$$(\beta) \quad E = \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2} = \frac{\alpha\beta \frac{\gamma}{2R}}{2} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων
 $\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2R \Rightarrow \eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{2R}.$

Παράδειγμα 4

Στο πιο κάτω χάρτη παρουσιάζεται ένα οικοδομικό τρίγωνο στη Λευκωσία. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του οικοδομικού τριγώνου, αν:

$$A\Gamma = 81 \text{ m}, B\Gamma = 95 \text{ m}, AB = 74 \text{ m}$$



Λύση

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\Gamma &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} = \frac{95^2 + 81^2 - 74^2}{2 \cdot 95 \cdot 81} \\ &= \frac{337}{513} = 0,657 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Gamma = 48,93^\circ$$

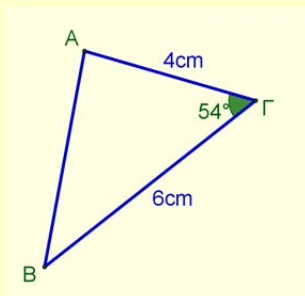
$$\begin{aligned} E &= \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2} = \frac{95 \cdot 81 \cdot \eta\mu 48,93^\circ}{2} \\ &= 2900,9 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma \Rightarrow \\ \sigma\upsilon\nu\Gamma &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} \end{aligned}$$

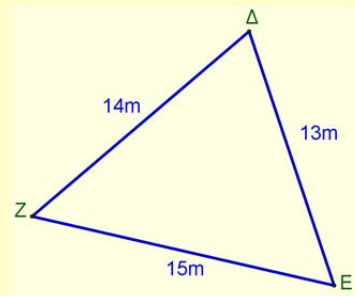
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ με $\alpha = 4 \text{ cm}$, $\gamma = 3 \text{ cm}$ και $\hat{B} = 30^\circ$.
2. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς β τριγώνου $AB\Gamma$ με $E = 3\sqrt{2} \text{ cm}^2$, $\gamma = 3 \text{ cm}$ και $\hat{A} = 45^\circ$.
3. Να υπολογίσετε το ημίτονο της γωνίας Γ τριγώνου $AB\Gamma$ με $E = 5 \text{ cm}^2$, $\alpha = 4 \text{ cm}$ και $\beta = 10 \text{ cm}$.
4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των πιο κάτω τριγώνων:

(α)

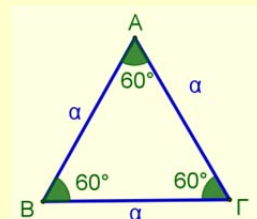


(β)



5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ με $\alpha = 3 \text{ cm}$, $\hat{B} = 30^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 120^\circ$.

6. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.



7. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται $E = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\alpha = 2 \text{ cm}$ και $\beta = 4 \text{ cm}$. Να επιλύσετε το τρίγωνο.

8. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 4E\sigma\phi A$$

9. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E = \beta R\eta\mu\Gamma\eta\mu B$.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$, όταν:
 - (α) $\alpha = 3 \text{ m}$, $\hat{B} = 120^\circ$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$
 - (β) $\beta = 5 \text{ cm}$, $\gamma = 5\sqrt{3} \text{ cm}$, $\hat{A} = 30^\circ$
 - (γ) $\alpha = 4 \text{ cm}$, $\beta = 4\sqrt{3} \text{ cm}$, $\gamma = 4 \text{ cm}$
 - (δ) $E = 9\sqrt{3} \text{ m}^2$, $\beta = 3\sqrt{3} \text{ m}$, $\gamma = 6 \text{ m}$
 - (ε) $R = 2 \text{ cm}$, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = 40^\circ$

2. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 12R^2$. Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 3$$

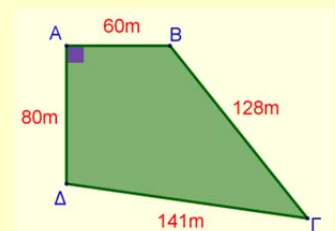
3. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = \beta\gamma$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 60^\circ$.

4. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις:
 - (α) $\alpha\eta\mu A + \beta\eta\mu B + \gamma\eta\mu \Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2R}$
 - (β) $\frac{3\alpha + 2\beta}{2R} = 3\eta\mu A + 2\eta\mu B$
 - (γ) $\alpha\sigma\upsilon\nu B - \beta\sigma\upsilon\nu A = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma}$
 - (δ) $\frac{2\alpha - \gamma}{3\beta + \gamma} = \frac{2\eta\mu A - \eta\mu \Gamma}{3\eta\mu B + \eta\mu \Gamma}$
 - (ε) $E = \frac{\alpha^2 \eta\mu B \eta\mu \Gamma}{2\eta\mu A}$
 - (στ) $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2} = \frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi \Gamma}$
 - (ζ) $\frac{\alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\eta\mu(B + \Gamma)}{\eta\mu B - \eta\mu \Gamma}$

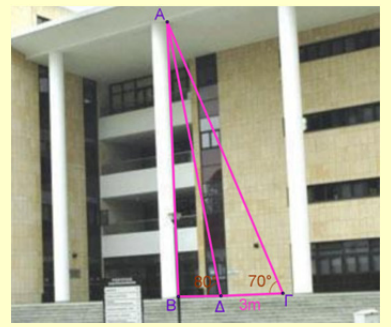
5. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει μία από τις πιο κάτω σχέσεις, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
 - (α) $\alpha\eta\mu A = \beta\eta\mu B$
 - (β) $\eta\mu A = 2\eta\mu B \sigma\upsilon\nu \Gamma$

6. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει μία από τις πιο κάτω σχέσεις, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
 - (α) $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B = \eta\mu^2 \Gamma$
 - (β) $\gamma\sigma\upsilon\nu B - \beta\sigma\upsilon\nu \Gamma = \alpha$
 - (γ) $\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$

7. Ο ιδιοκτήτης του διπλανού τεμαχίου γης υποστηρίζει ότι το εμβαδόν του τεμαχίου είναι 8700 m^2 . Η Άρτεμις θέλει να αγοράσει το τεμάχιο και υποστηρίζει ότι ο ιδιοκτήτης δεν λέει την αλήθεια. Ποιος από τους δύο έχει δίκιο;



8. Ο Θεμιστοκλής προσπάθησε να μετρήσει το ύψος της κολώνας στην είσοδο του Υπουργείου Οικονομικών. Στο σημείο Δ μέτρησε με ένα γωνιόμετρο τη γωνία $A\hat{\Delta}B = 80^\circ$. Στη συνέχεια μετακινήθηκε σε απόσταση 3 m στο σημείο Γ , όπως φαίνεται στο σχήμα, όπου μέτρησε τη γωνία $A\hat{\Gamma}B = 70^\circ$. Να υπολογίσετε το ύψος του κολώνας.



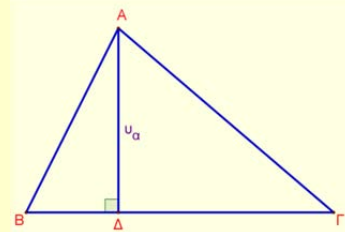
Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 120^\circ$. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = 3\beta^2$.

2. Στο διπλανό σχήμα φέρουμε το ύψος u_α στο τρίγωνο $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

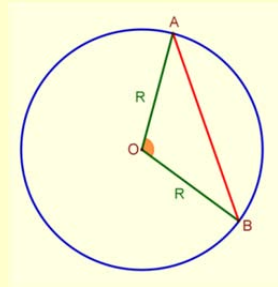
(α) $u_\alpha = \frac{\beta\gamma}{2R}$

(β) $E_{AB\Gamma} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$



3. Στο διπλανό σχήμα φέρουμε χορδή AB σε κύκλο $K(O, R)$. Να αποδείξετε ότι:

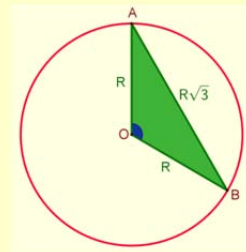
$$AB = R\sqrt{2 - 2\cos(\hat{A\hat{O}B})}$$



4. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\alpha = 5 \text{ cm}$, $\beta = 5\sqrt{3} \text{ cm}$ και $\hat{A} = 30^\circ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

5. Σε κύκλο $K(O, R)$ γράφουμε χορδή $AB = R\sqrt{3}$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι:

$$E = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$



ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 2.1 Εισαγωγή στις συναρτήσεις
- 2.2 Η έννοια της συνάρτησης
- 2.3 Γράφημα- Γραφική παράσταση συνάρτησης
- 2.4 Πεδίο ορισμού-Σύνολο τιμών πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής που ορίζεται με τύπο
- 2.5 Ισότητα συναρτήσεων
- 2.6 Πράξεις συναρτήσεων
- 2.7 Συναρτήσεις 1-1
- 2.8 Συναρτήσεις με απόλυτες τιμές – Συναρτήσεις πολλαπλού τύπου

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

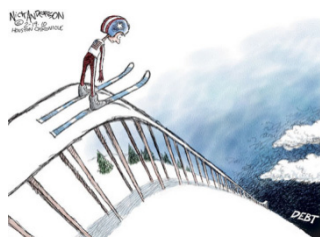
Η έννοια της συνάρτησης είναι από τις θεμελιώδεις έννοιες των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Ανάλυσης. Η συνάρτηση είναι το κατάλληλο μέσο, για να εκφράσουμε και να περιγράψουμε τον φυσικό κόσμο με Μαθηματικά. Με τις συναρτήσεις είμαστε σε θέση να παρατηρήσουμε πώς οι τιμές μιας μεταβλητής επηρεάζονται ή εξαρτώνται από τις τιμές μιας άλλης μεταβλητής, όπως:



- Η απόσταση που χρειάζεται ένα αυτοκίνητο, για να σταματήσει είναι συνάρτηση της ταχύτητάς του.
- Το εμβαδόν του κύκλου είναι συνάρτηση του τετραγώνου της ακτίνας του.
- Η ατμοσφαιρική πίεση είναι συνάρτηση του υψόμετρου.
- Η απόσταση που καλύπτει ένα αντικείμενο και η ταχύτητα που έχει, όταν αφήνεται να πέσει ελεύθερα, είναι συνάρτηση του χρόνου που κινείται.
- Ο αριθμός των ψαριών σε μια λίμνη είναι συνάρτηση του πλήθους των ατόμων που ψαρεύουν σε αυτή.

Εκτός από την αντιστοιχία μεταξύ των μεγεθών, η συνάρτηση περιγράφει και διαδικασίες ποσοτικών μεταβολών, κάτι που συμβάλλει στον ακριβή υπολογισμό ορίων, όπως είναι:

- ✓ η κλίση της εφαπτομένης μιας καμπύλης σε ένα σημείο της,
- ✓ η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, όταν είναι γνωστή η συνάρτηση της μετατόπισης του κινητού σε σχέση με το χρόνο,
- ✓ το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης και ευθειών ή μεταξύ δύο καμπυλών.



Οι διαδικασίες που μας επιτρέπουν να «διέλθουμε» από τις απλές διαδικασίες, όπως τη κλίση μιας ευθείας ή το εμβαδόν μιας ορθογώνιας περιοχής, σε πιο σύνθετες, όπως η κλίση της καμπύλης σε σημείο της ή το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη και συγκεκριμένη ευθεία, λέγεται στα Μαθηματικά «Ανάλυση» και έχει τη

βάση της στην έννοια της συνάρτησης.

Ιστορικό Σημείωμα

Η έννοια της συνάρτησης εμφανίζεται με διάφορες όψεις σε διαφορετικές χρονικές περιόδους, χωρίς να καθορίζεται ο ακριβής χρόνος σύλληψης της έννοιας. Σύμφωνα με τον D.E. Smith η πραγματική ιδέα της συνάρτησης με χρήση συντεταγμένων πρωτοεμφανίστηκε από τον Descartes (1596-1650) και τον Pierre de Fermat (1601-1665).

Ο Leibniz εισήγαγε για πρώτη φορά (Αύγουστος 1673) τη λέξη «συνάρτηση» που προέρχεται από το λατινικό ρήμα «fungor» και σημαίνει εκτελώ, λειτουργώ. Ακόμη εισήγαγε τις λέξεις: σταθερά, μεταβλητή, συντεταγμένες, παράμετρος. Ο Johann Bernoulli πρώτος όρισε τη συνάρτηση (1718) με αναλυτικό τρόπο σύμφωνα με τον οποίο

«συνάρτηση μεταβλητού μεγέθους είναι μια ποσότητα που σχηματίζεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτό το μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές».

Εισήγαγε το ελληνικό γράμμα φ για τον συμβολισμό της συνάρτησης και μάλιστα ως «φχ»

Τον 18^ο αιώνα ο Euler εισάγει τον συμβολισμό f για τη συνάρτηση και γράφει $f(x)$. Ορίζει τις έννοιες της «σταθεράς», της «μεταβλητής ποσότητας» και ορίζει τη συνάρτηση μιας μεταβλητής και περισσοτέρων μεταβλητών.

Το (1748) ο Euler δίνει τον ορισμό:

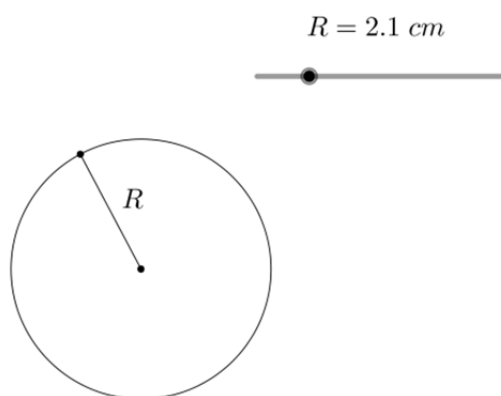
«συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι εκείνη η αναλυτική έκφραση, που προκύπτει από τη σύνθεση με οποιοδήποτε τρόπο της ποσότητας με αριθμούς ή και άλλες σταθερές ποσότητες»

2.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «*Blyk_Kor_En02_EnnoiaSinartisis*».

Να μετακινήσετε το δρομέα «*R*» σε διάφορες θέσεις και να διατυπώσετε τις παρατηρήσεις σας για την αντίστοιχη τιμή του εμβადού του κυκλικού δίσκου σε κάθε περίπτωση.



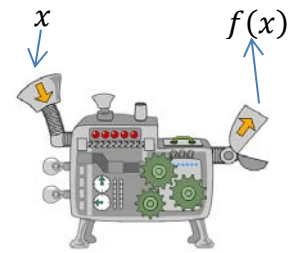
Ορισμός

Έστω δύο μη κενά σύνολα A, B . Ονομάζουμε **συνάρτηση** f από το σύνολο A στο σύνολο B , μια αντιστοιχία (κανόνα), όπου σε κάθε στοιχείο x του συνόλου A ($\forall x \in A$) αντιστοιχίζεται ένα και μόνον ένα στοιχείο y του συνόλου B και την συμβολίζουμε με $f: A \rightarrow B$. Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** της f και το B **πεδίο τιμών** της f .

Είναι ήδη γνωστό ότι τη συνάρτηση $f: A \rightarrow B$, την αναπαριστούμε με διάφορους τρόπους τους οποίους και θα γνωρίσουμε πιο κάτω, όπως:

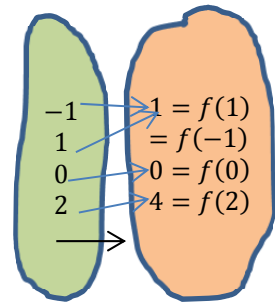
- Βελοδιάγραμμα (Τα σύνολα A, B παρουσιάζονται σε δύο βέννεια διαγράμματα και με βέλη, κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε μόνο ένα στοιχείο στο B)
- Γράφημα (Ένα σύνολο με τα διατεταγμένα ζεύγη της συνάρτησης f)
- Γραφική παράσταση (Μία αναπαράσταση σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων των σημείων που αντιστοιχούν στο γράφημα της συνάρτησης)
- Τύπο (Μία σχέση της μορφής $y = f(x)$ με $x \in A, f(x) \in B$).
- Λεκτικά (Μία λεκτική έκφραση η οποία αποδίδει τη συνάρτηση)

Μερικές φορές είναι χρήσιμο να σκεφτόμαστε ότι η συνάρτηση f είναι ένας μηχανισμός που «υποδέχεται» τα στοιχεία του πεδίου ορισμού στην είσοδο, τα επεξεργάζεται με κάποιο τρόπο και «επιστρέφει» τα επεξεργασμένα πλέον στοιχεία στην έξοδο.



Οι περιορισμοί που έχουμε σε μια τέτοια μηχανή είναι:

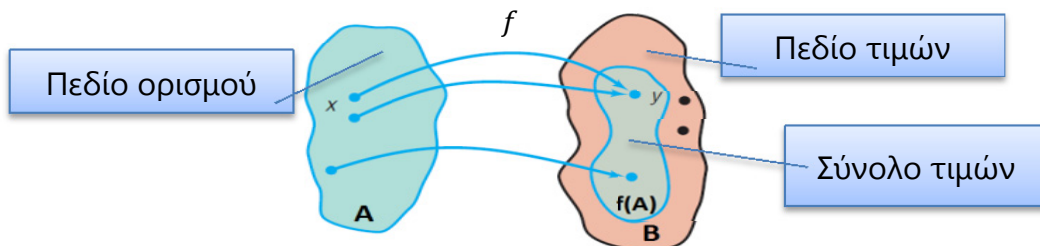
- (α) Η μηχανή στην είσοδο δέχεται **μόνο τα στοιχεία του πεδίου ορισμού**.
- (β) **Όλα** τα στοιχεία του πεδίου ορισμού τυγχάνουν επεξεργασίας.
- (γ) Για κάθε στοιχείο που εισάγεται στη μηχανή, έχουμε **ακριβώς μία εξαγωγή**.



Έχουμε ήδη αναφέρει ότι αν η f είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών, τότε για κάθε x στο A υπάρχει η αντίστοιχη εικόνα $f(x)$ στο σύνολο τιμών της. Αναφερόμαστε στο σύμβολο αυτό ως την **τιμή** της συνάρτησης f στο x .

x	$f(x) = x^2$
-----	--------------

Το σύνολο όλων των δυνατών τιμών $f(x)$ (με x στοιχείο του A) λέγεται **σύνολο τιμών** (Σ.Τ.) της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Ισχύει $f(A) \subseteq B$.



Η μεταβλητή x που παίρνει τιμές από το πεδίο ορισμού A μιας συνάρτησης λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ η μεταβλητή y της οποίας η κάθε τιμή, εξαρτάται από την τιμή της μεταβλητής x , λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή** και συμβολίζεται με $f(x)$. Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε πως ο συμβολισμός $f(x)$ δεν σημαίνει πολλαπλασιασμός « f επί x ». Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $y = f(x) = 3x^2 + x - 1$ έχουμε:

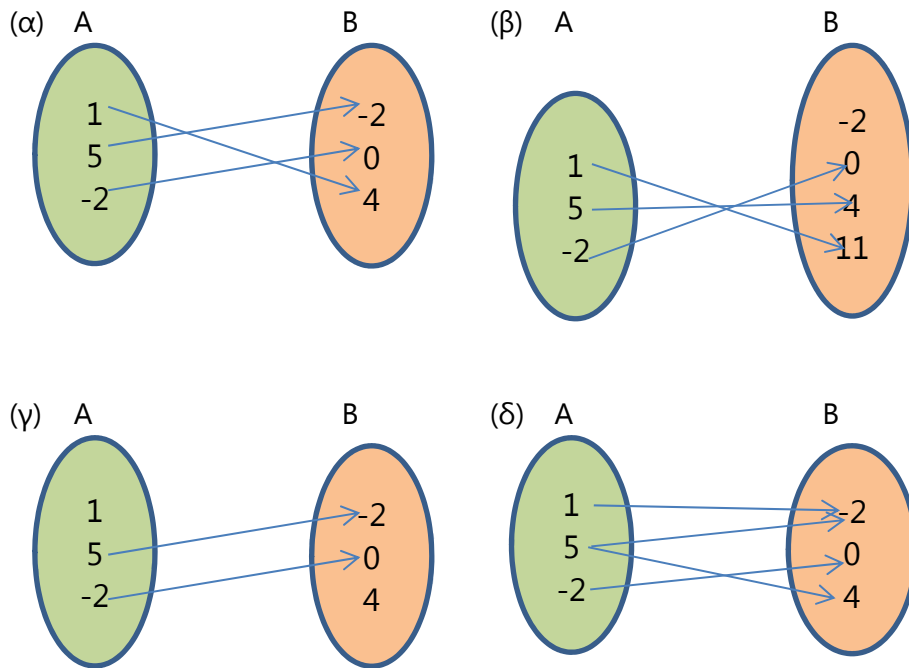
$$f(2) = 3 \cdot (2)^2 + 2 - 1 = 3 \cdot 4 + 2 - 1 = 12 + 2 - 1 = 13.$$

(Αντικαθιστούμε στον τύπο της f στη θέση του x , τον αριθμό $\frac{3}{4}$.)

Πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B ($A, B \neq \emptyset$), ονομάζουμε κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow B$, όταν το $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1

Να εξετάσετε κατά πόσον οι πιο κάτω αντιστοιχίες $f: A \rightarrow B$ είναι συναρτήσεις. Σε περίπτωση που η αντιστοιχία είναι συνάρτηση, να αναφέρετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.



Λύση

- (α) Η αντιστοιχία είναι συνάρτηση, αφού κάθε στοιχείο από το σύνολο A αντιστοιχίζεται σε ακριβώς ένα στοιχείο στο σύνολο B . Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \{-2, 1, 5\}$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $f(A) = \{-2, 0, 4\} = B$.
- (β) Η αντιστοιχία είναι συνάρτηση, αφού κάθε στοιχείο από το σύνολο A αντιστοιχίζεται σε ακριβώς ένα στοιχείο στο σύνολο B . Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \{-2, 1, 5\}$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $f(A) = \{0, 4, 11\} \subseteq B$.
- (γ) Η αντιστοιχία δεν είναι συνάρτηση, αφού υπάρχει στοιχείο στο σύνολο A , το 1, το οποίο δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο στο σύνολο B .
- (δ) Η αντιστοιχία δεν είναι συνάρτηση, αφού υπάρχει στοιχείο στο σύνολο A , το 5, το οποίο αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία, το -2 και το 4, στο σύνολο B .

Παράδειγμα 2

Ο Αντώνης και ο Γιώργος είναι φοιτητές και συγκατοικούν. Κάθε βδομάδα οργανώνουν ένα σχέδιο για τις εργασίες του σπιτιού, όπως φαίνεται πιο κάτω.

	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο	Κυριακή
Γιώργος	✓		✓		✓		✓
Αντώνης		✓		✓		✓	

Να εξετάσετε κατά πόσον τα πιο πάνω ορίζουν συνάρτηση. Στην περίπτωση που είναι συνάρτηση, να αναφέρετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο βελοειδές διάγραμμα.

Λύση

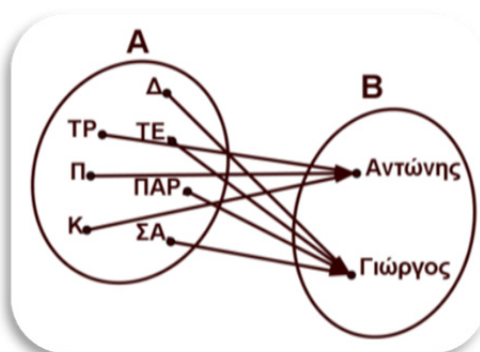
Η πιο πάνω οργάνωση των εργασιών ορίζει συνάρτηση, γιατί για κάθε μέρα εργάζεται ακριβώς ένας φοιτητής. Η μέρα είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης ενώ ο φοιτητής η εξαρτημένη μεταβλητή.

Το πεδίο ορισμού είναι:

$A = \{\text{Δευτέρα, Τρίτη, Τετάρτη, Πέμπτη, Παρασκευή, Σάββατο, Κυριακή}\}$,
και το σύνολο τιμών $B = \{\text{Γιώργος, Αντώνης}\}$.

Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει τύπος που να εκφράζει τη συνάρτηση και ο κανόνας ορίζεται **λεκτικά, ή με πίνακα**.

Με το αντίστοιχο βελοδιάγραμμα, παρατηρούμε ότι μπορούν δύο διαφορετικά στοιχεία του συνόλου A να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του συνόλου B .



Παράδειγμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x + 3$ και πεδίο ορισμού $A = \{-2, 0, \frac{3}{2}, 2, 3\}$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Λύση

$$\text{Για } x = -2, \text{ τότε } f(-2) = 2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$$

$$\text{Για } x = 0, \text{ τότε } f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

$$\text{Για } x = \frac{3}{2}, \text{ τότε } f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 = 6$$

$$\text{Για } x = 2, \text{ τότε } f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$

$$\text{Για } x = 3, \text{ τότε } f(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$$

Έτσι, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = \{-1, 3, 6, 7, 9\}$.

Παράδειγμα 4

Δίνεται το σύνολο $A = \{-2, -1, 0, \sqrt{2}, 2\}$.

Να ορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f , η οποία αναπαριστάται λεκτικά ως εξής:

«Κάθε στοιχείο του συνόλου A υψώνεται στο τετράγωνο και στη συνέχεια αυξάνεται κατά 3.»

Στη συνέχεια, να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Λύση

Αν $x \in A$, τότε η λεκτική αναπαράσταση της συνάρτησης f ερμηνεύεται με τον τύπο:

$f(x) = x^2 + 3$. Για τον υπολογισμό του συνόλου τιμών έχουμε:

$$\text{Για } x = -2, \text{ τότε } f(-2) = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7.$$

$$\text{Για } x = -1, \text{ τότε } f(-1) = (-1)^2 + 3 = 1 + 3 = 4.$$

$$\text{Για } x = 0, \text{ τότε } f(0) = 0^2 + 3 = 3.$$

$$\text{Για } x = \sqrt{2}, \text{ τότε } f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 3 = 2 + 3 = 5.$$

$$\text{Για } x = 2, \text{ τότε } f(2) = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7.$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι: $f(A) = \{3, 4, 5, 7\}$.

Παράδειγμα 5:

Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^2 - 3x$, να υπολογίσετε τα πιο κάτω:

(α) $f(3)$

(β) $f(-x)$

(γ) $f(2x)$

(δ) $f(x - 1)$

Λύση

(α) Αντικαθιστούμε όπου x την τιμή 3 στον τύπο της συνάρτησης f και παίρνουμε:

$$f(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 3 = 18 - 9 = 9$$

(β) Αντικαθιστούμε όπου x το $-x$ στον τύπο της συνάρτησης f και παίρνουμε:

$$f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 - 3 \cdot (-x) = 2x^2 + 3x$$

(γ) Αντικαθιστούμε όπου x το $2x$ στον τύπο της συνάρτησης f και παίρνουμε:

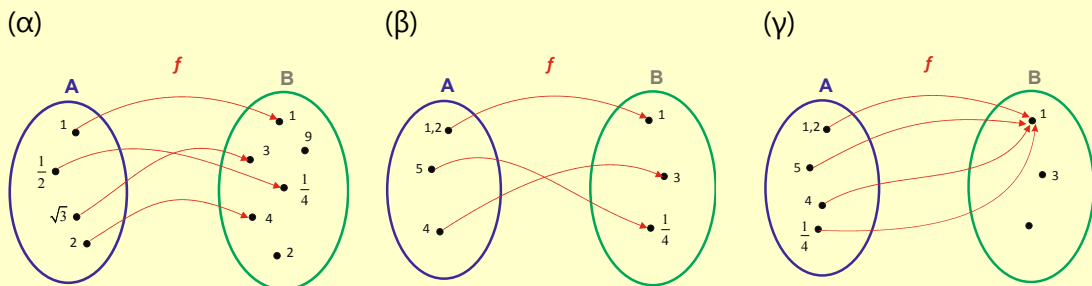
$$f(2x) = 2 \cdot (2x)^2 - 3 \cdot (2x) = 2 \cdot 4x^2 - 6x = 8x^2 - 6x$$

(δ) Αντικαθιστούμε όπου x το $x - 1$ στον τύπο της συνάρτησης f και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} f(x-1) &= 2 \cdot (x-1)^2 - 3 \cdot (x-1) = 2x^2 + 3 \\ &= 2 \cdot (x^2 - 2x + 1) - 3x + 3 \\ &= 2x^2 - 4x + 2 - 3x + 3 \\ &= 2x^2 - 7x + 5 \end{aligned}$$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων.



2. Να υπολογίσετε τις τιμές που αναγράφονται δίπλα από κάθε συνάρτηση f .

(α) $f(x) = 3x^2 + 2x - 4, f(0)$

(β) $f(x) = -2x^2 + x - 1, f(2)$

(γ) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, f(t)$

(δ) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4}, f(-t)$

(ε) $f(x) = |x| + 4, f(1) + f(-1)$

(στ) $f(x) = \sqrt{x^2+x}, f(2x)$

3. Αν $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε την παράσταση $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, a \in \mathbb{R}, x \neq a$.
4. Αν $f(x) = 2x^3 + Ax^2 + 4x - 5, x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 5$, να υπολογίσετε την τιμή του A .
5. Η συνάρτηση h με τύπο $h(x) = 20 - 4,9x^2, x \in [0, +\infty)$, περιγράφει το ύψος από το έδαφος στο οποίο βρίσκεται μια πέτρα, όταν αυτή πέφτει από ένα βράχο ύψους 20 m . (h είναι η απόσταση της πέτρας από το έδαφος σε μέτρα και x είναι ο χρόνος σε δευτερόλεπτα).

(α) Ποια είναι η απόσταση της πέτρας από το έδαφος, ύστερα από:

- i. 1 δευτερόλεπτο
- ii. 1,1 δευτερόλεπτα
- iii. 1,2 δευτερόλεπτα
- iv. 1,3 δευτερόλεπτα

(β) Ύστερα από πόσα δευτερόλεπτα η πέτρα θα απέχει από το έδαφος:

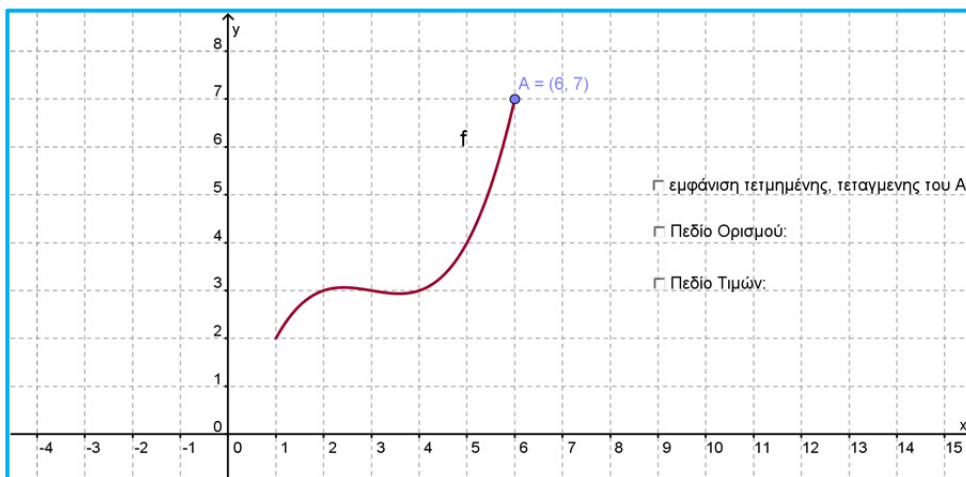
- i. 15 μέτρα
- ii. 10 μέτρα
- iii. 5 μέτρα

(γ) Ύστερα από πόσα δευτερόλεπτα η πέτρα θα κτυπήσει στο έδαφος;

2.3. ΓΡΑΦΗΜΑ-ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Διερεύνηση 1

Να ανοίξετε το αρχείο «Blyk_Kor_En02_PO_PT.ggb».



(α) Να μετακινήσετε το σημείο A και να παρατηρήσετε τις τιμές των συντεταγμένων του καθώς κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(β) Να επιλέξετε το « εμφάνιση τετμημένης, τεταγμένης του A »». Να μετακινήσετε το σημείο A σε διάφορες θέσεις και να καταγράψετε τις τιμές της τετμημένης και τεταγμένης του A σε πίνακα. Τι παρατηρείτε;

Ακολουθώντας, να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Ορισμοί

Γράφημα συνάρτησης $f: A \rightarrow B$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $(x, y), x \in A, y \in B$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$ και συμβολίζεται με G , δηλαδή $G = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A, y \in B\}$.

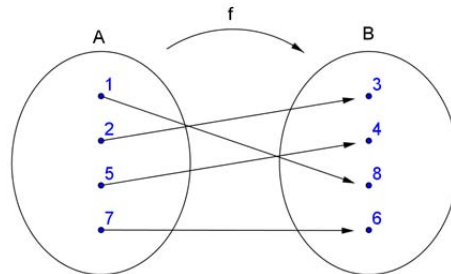
Γραφική παράσταση συνάρτησης f είναι η αναπαράσταση των διατεταγμένων ζευγών $(x, f(x))$ του γραφήματος G της συνάρτησης σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.

Παράδειγμα 1

Δίνεται το βελοειδές διάγραμμα της συνάρτησης $f: A \rightarrow B$.

(α) Να βρείτε το γράφημα της συνάρτησης f .

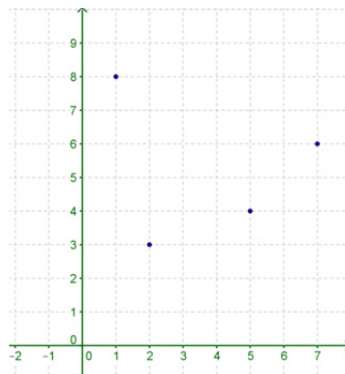
(β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



Λύση

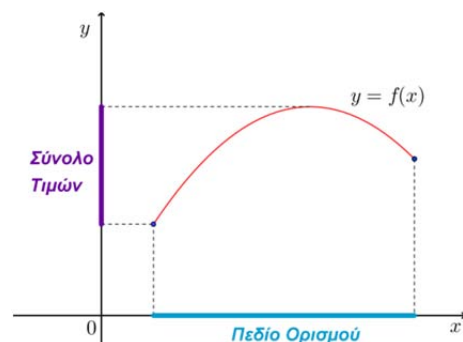
(α) Η συνάρτηση f αντιστοιχίζει τα στοιχεία του συνόλου $A = \{1, 2, 5, 7\}$ με τα στοιχεία του συνόλου $B = \{3, 4, 8, 6\}$ έτσι ώστε $f(1) = 8$, $f(2) = 3$, $f(5) = 4$ και $f(7) = 6$. Επομένως, το γράφημα είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x, y) : $G = \{(1, 8), (2, 3), (5, 4), (7, 6)\}$.

(β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα και αποτελείται (μόνο) από τα 4 σημεία:



Βασική παρατήρηση

Το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της γραφικής παράστασης είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης.



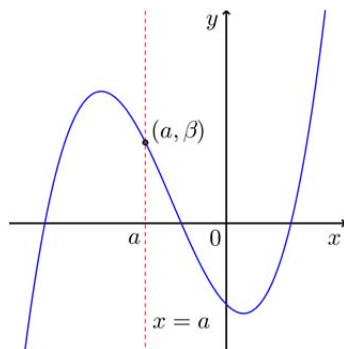
Σημείωση

Από τον ορισμό της συνάρτησης δεν μπορεί το ίδιο x του πεδίου ορισμού να αντιστοιχίζεται σε διαφορετικά y του πεδίου τιμών. Αυτό σημαίνει ότι στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν μπορεί μία τετμημένη να αντιστοιχεί σε δύο ή περισσότερες τεταγμένες. Έτσι, για να εξετάσουμε κατά πόσο μια γραφική παράσταση αναπαριστά συνάρτηση, σε ορισμένες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε ένα πρακτικό τρόπο ο οποίος αναφέρεται ως έλεγχος της κατακόρυφης γραμμής, που μας λέει ότι «μια καμπύλη» στο καρτεσιανό επίπεδο είναι γραφική παράσταση συνάρτησης αν και μόνον αν κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει την καμπύλη αυτή σε ένα σημείο το πολύ».

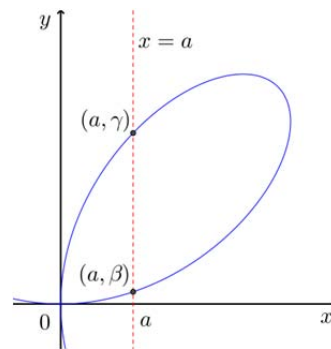
Παράδειγμα 2

Να εξετάσετε κατά πόσο η καθεμία από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις καμπύλων ορίζει συνάρτηση.

(α)



(β)



Λύση

- (α) Η καμπύλη είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, γιατί σε κάθε στοιχείο $x = a$ του άξονα των τετμημένων αντιστοιχεί μόνο ένα στοιχείο $y = \beta$ του άξονα των τεταγμένων.
- (β) Η καμπύλη δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, γιατί υπάρχει στοιχείο, του άξονα των τετμημένων (το $x = a$) το οποίο αντιστοιχεί σε δύο στοιχεία του άξονα των τεταγμένων (τα β και γ).

Παράδειγμα 3

Να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω γραφήματα είναι συναρτήσεις. Σε περίπτωση που ένα γράφημα είναι συνάρτηση, να αναφέρετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

(α) $\{(-3, 9), (-2, 4), (0, 0), (1, 1), (-3, 8)\}$

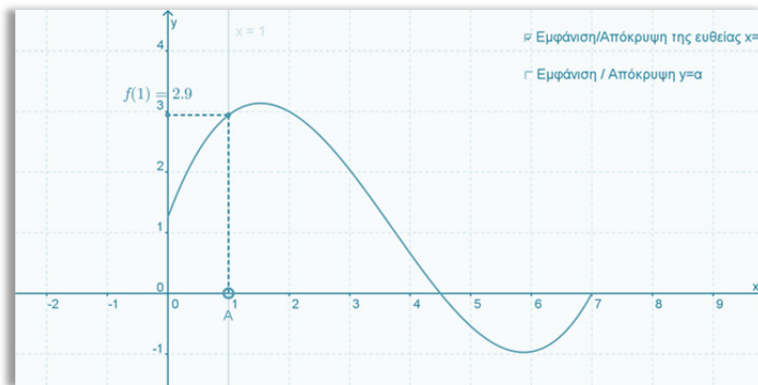
(β) $\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}$

Λύση

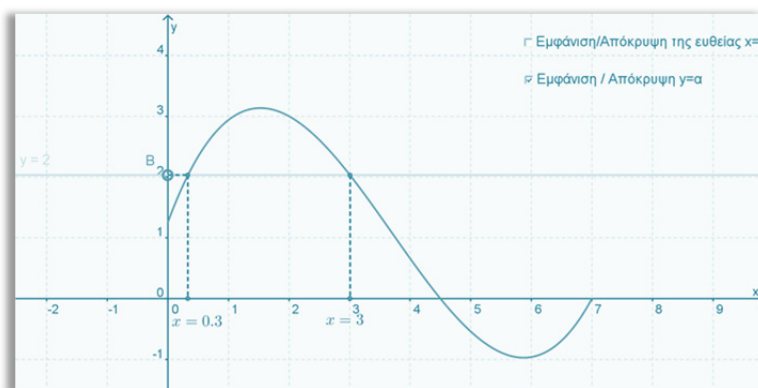
- (α) Το σύνολο $\{(-3, 9), (-2, 4), (0, 0), (1, 1), (-3, 8)\}$ δεν είναι γράφημα συνάρτησης, αφού υπάρχουν δύο διατεταγμένα ζεύγη, $(-3, 9)$ και $(-3, 8)$, με ίδιο πρώτο στοιχείο και διαφορετικά δεύτερα στοιχεία.
- (β) Το σύνολο $\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}$ είναι γράφημα συνάρτησης, αφού δεν υπάρχουν διατεταγμένα ζεύγη, όπου το πρώτο στοιχείο τους να αντιστοιχίζεται. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\{1, 2, 3, 4\}$ και το σύνολο τιμών της είναι το $\{4, 5, 6, 7\}$.

Παράδειγμα 4:

Να χρησιμοποιήσετε το αρχείο «[Blyk_Kor_En02_paradeigma.ggb](#)», για να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα για τη συνάρτηση f .



- (α) Να επιλέξετε το « Εμφάνιση/Απόκρυψη της ευθείας $x=a$ ». Μετακινώντας το σημείο A , να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(2)$ και $f(5)$.



- (β) Να επιλέξετε το « Εμφάνιση / Απόκρυψη $y=a$ » και μετακινώντας το σημείο B να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 2$ και $f(x) = 1$.

- (γ) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f ;

Λύση

- (α) Από τη γραφική παράσταση (με τη βοήθεια του εφαρμογιδίου), παρατηρούμε ότι $f(1) = 2,9$, $f(2) = 3$ και $f(5) = -0,5$.
- (β) Από το σχήμα, παρατηρούμε ότι τα σημεία με τεταγμένη $y = 2$ που ανήκουν στη γραφική παράσταση της f έχουν τετμημένες $x = 0,3$ και $x = 3$.
Το σημείο με τεταγμένη $y = 1$, που ανήκει στη γραφική παράσταση της f , έχει τετμημένη $x = 3,8$.
- (γ) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται, όταν $0 \leq x \leq 7$.
Άρα, το πεδίο ορισμού είναι το κλειστό διάστημα $[0,7]$.

Παράδειγμα 5

Να υπολογίσετε το a , ώστε το σημείο $(2,10)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - ax$.

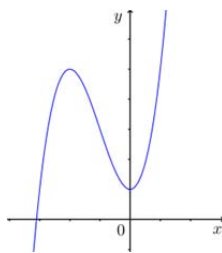
Λύση

Επειδή το σημείο $(2,10)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση $y = f(x)$ ή $y = x^2 - ax$ της γραφικής παράστασης. Δηλαδή ισχύει $f(2) = 10$, οπότε θα έχουμε:
 $2^2 - 2a = 10 \Leftrightarrow 4 - 2a = 10 \Leftrightarrow a = -3$

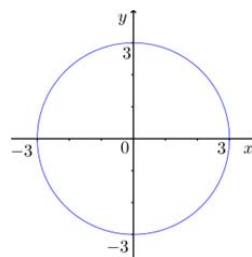
Παράδειγμα 6

Να εξετάσετε κατά πόσο οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Στις περιπτώσεις που ορίζεται συνάρτηση, να αναφέρετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

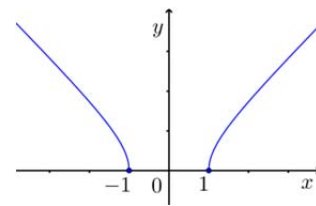
(α)



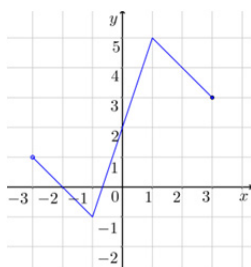
(β)



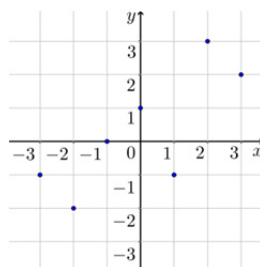
(γ)



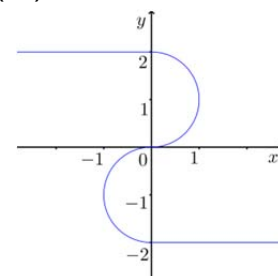
(δ)



(ε)



(στ)



Λύση

Οι γραφικές παραστάσεις (α), (γ), (δ) και (ε) είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, αφού κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει την καθεμιά από αυτές σε ένα το πολύ σημείο.

Το πεδίο ορισμού σε κάθε περίπτωση αντίστοιχα είναι:

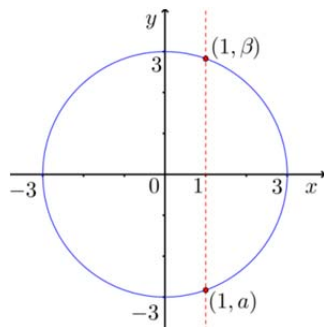
- (α) $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$
- (γ) $\{x \mid x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$
- (δ) $\{x \mid x \in [-3, 3]\}$
- (ε) $\{x \mid x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Το σύνολο τιμών σε κάθε περίπτωση αντίστοιχα είναι:

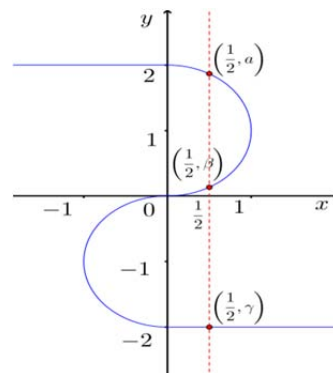
- (α) $\{y \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$
- (γ) $\{y \mid y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} = [0, +\infty)$
- (δ) $\{y \mid y \in [-3, 3]\} = [-1, 5]$
- (ε) $\{y \mid y = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Οι γραφικές παραστάσεις (β) και (στ) δεν είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, αφού υπάρχει σε κάθε περίπτωση τουλάχιστον μια κατακόρυφη ευθεία που τέμνει την κάθε γραφική παράσταση σε περισσότερα από ένα σημεία. Μπορούμε να το διαπιστώσουμε πολύ εύκολα, παρατηρώντας τα πιο κάτω σχήματα.

(β)



(στ)



Για να εξετάσουμε αν ένας τύπος ορίζει συνάρτηση, με το y να εξαρτάται από το x , συνήθως επιλύουμε τον τύπο αυτό ως προς y . Αν σε κάποια τιμή του x αντιστοιχούν περισσότερες από μία τιμές του y , τότε ο τύπος αυτός δεν ορίζει συνάρτηση.

Παράδειγμα 7

Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω τύποι ορίζουν συναρτήσεις με ανεξάρτητη μεταβλητή το x .

(α) $y = 3x - 1, x \in \mathbb{R}$

(β) $x^2 + y^2 = 9, x \in [-3, 3]$

Λύση

(α) Αν $x = \kappa$, τότε $y = 3\kappa - 1$. Συμπεραίνουμε ότι ο τύπος αυτός ορίζει συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή την x , γιατί για μία τιμή του x ($x = \kappa$), έχουμε μόνο μία τιμή του y ($y = 3\kappa - 1$).

(β) Επιλύουμε τον τύπο ως προς y :

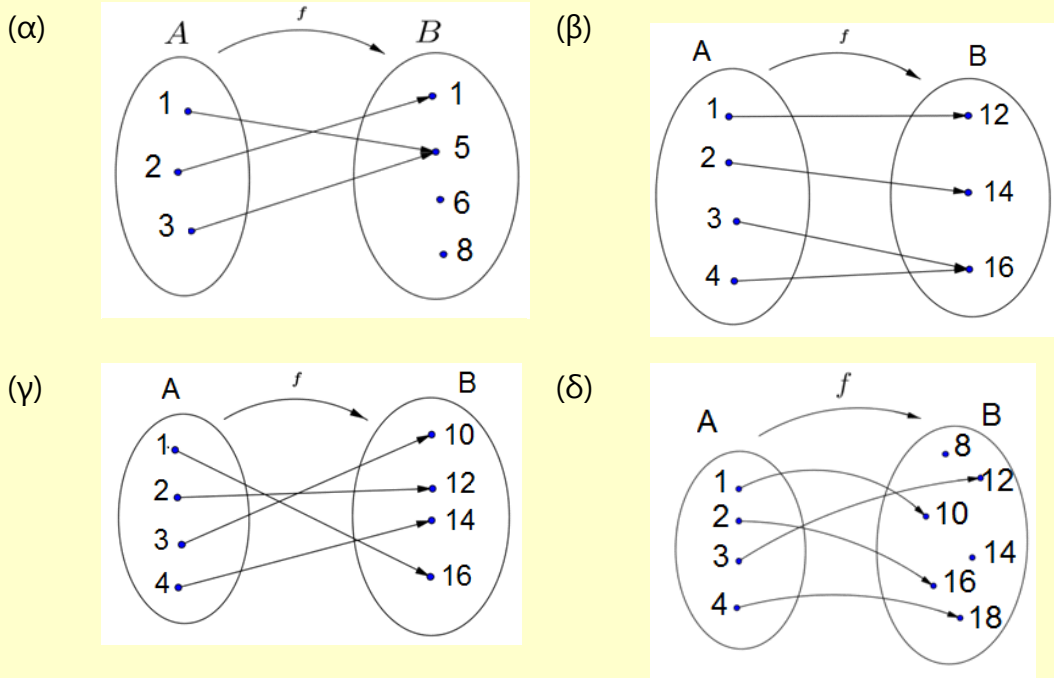
$$x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = 9 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

Για οποιανδήποτε τιμή του x στο διάστημα $[-3, 3]$, έχουμε δύο αντίστοιχες τιμές για το y .

Για παράδειγμα, αν $x = 0$, τότε $y = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Συμπεραίνουμε ότι ο τύπος αυτός δεν ορίζει συνάρτηση.

Δραστηριότητες

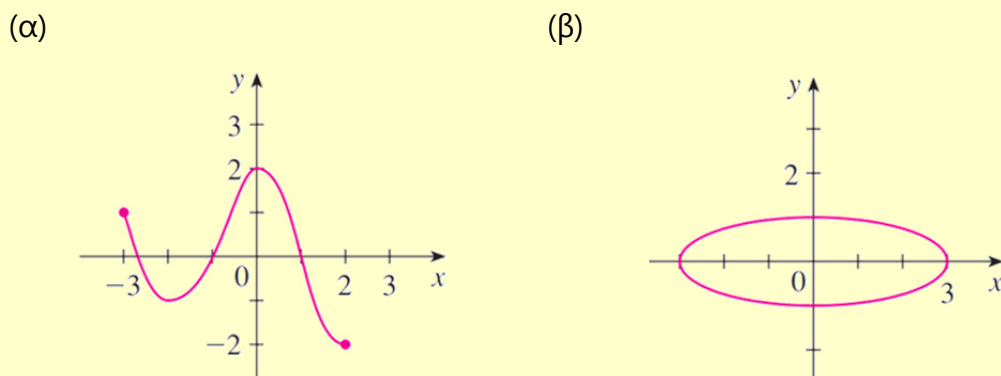
1. Να γράψετε τα γραφήματα των πιο κάτω συναρτήσεων:



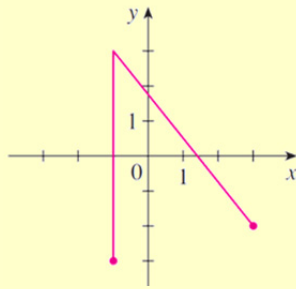
2. Να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω σύνολα είναι γραφήματα συναρτήσεων. Στην περίπτωση που ορίζεται συνάρτηση, να αναφέρετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

- (α) $\{(2, 1), (-2, 5), (0, 4), (1, -7)\}$ (β) $\{(1, 8), (-4, -5), (-3, 3), (1, 1)\}$
 (γ) $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}$ (δ) $\{(2, 4), (-6, 0), (-3, 0), (4, -2), (2, 2)\}$

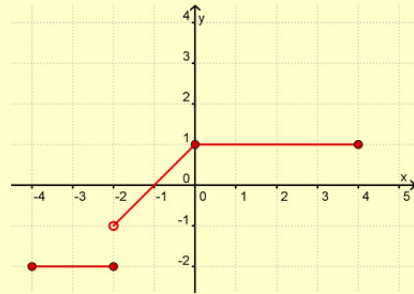
3. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις ορίζουν συνάρτηση της μορφής $y = f(x)$.



(γ)



(δ)



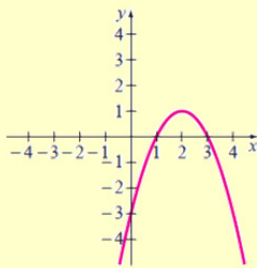
4. Αν το σημείο $(3,8)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

(α) $g(x) = x^2 + a$

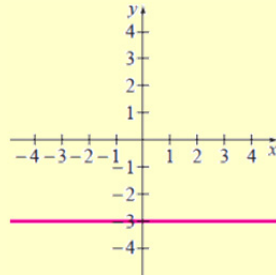
(β) $g(x) = ax + 2$,

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων, για τις γραφικές παραστάσεις που δίνονται πιο κάτω:

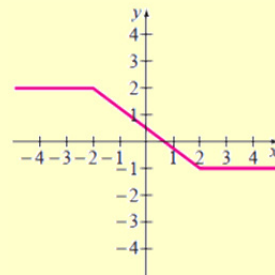
(α)



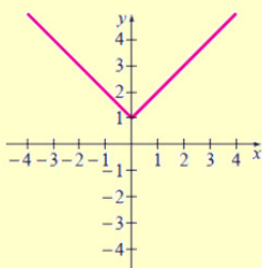
(β)



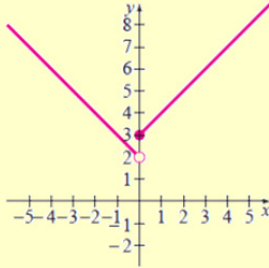
(γ)



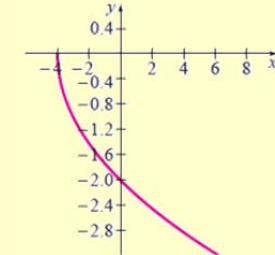
(δ)



(ε)



(στ)



6. Να εξετάσετε κατά πόσο οι τύποι που δίνονται ορίζουν συναρτήσεις με ανεξάρτητη μεταβλητή το x .

(α) $y = x^2, x \in \mathbb{R}$

(β) $y = x^5, x \in \mathbb{R}$

(γ) $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$

(δ) $y^2 = 16 - x^2, x \in [-4, 4]$

(ε) $y^2 = x, x \geq 0$

(στ) $x + 2y = 1, x \in \mathbb{R}$

(ζ) $x^2 - y^2 = -1, x \in \mathbb{R}, y > 0$

(η) $y = \frac{3x-1}{x-4}, x \neq 4$

(θ) $y = |x|, x \in \mathbb{R}$

7. Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο «[1.4 Η έννοια της συνάρτησης](#)» και να ακολουθήσετε τις οδηγίες ώστε να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται συνάρτηση ή όχι για καθεμιά από τις γραφικές παραστάσεις.

Για να ελέγξουμε κατά πόσο μια γραφική παράσταση ορίζει συνάρτηση ή όχι, φέρουμε μια κάθετη εθεία στον άξονα των τεταγμένων και ελέγχουμε σε πόσα σημεία τέμνει τη γραφική παράσταση. Αν έχουμε περισσότερα από ένα σημείο τομής, τότε δεν ορίζεται συνάρτηση.

Να επλέξετε διαδοχικά τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων. Να μαρκωνίζετε το δρομίο \rightarrow και να παρατηρήσετε σε πόσα σημεία τέμνει η ευθεία β τη γραφική παράσταση. Να απαντήσετε το ερώτημα που βρίσκεται στο κάτω μέρος του εφαρμογίου.

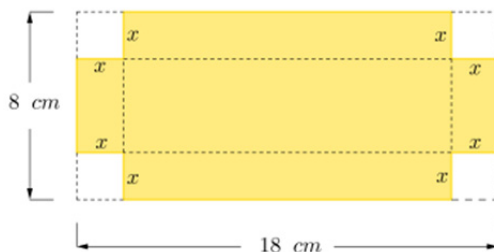
Η ερώτηση που αναφορικά με το πρόβλημα: **Ναι** **Όχι**

2.4 ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ-ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΠΟΥ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΜΕ ΤΥΠΟ

Διερεύνηση

Οι διαστάσεις ενός χαρτονιού, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, είναι 18 cm και 8 cm. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, ανοικτό στο πάνω μέρος, χρησιμοποιώντας το χαρτόνι αυτό. Για να κατασκευάσουμε το κουτί αυτό, αποκόπτουμε ίσα τετράγωνα από τις τέσσερις γωνίες του χαρτονιού και διπλώνουμε προς τα πάνω τα τέσσερα μικρά ορθογώνια που σχηματίζονται κατά μήκος των διακεκομμένων ευθύγραμμων τμημάτων.

- (α) Έστω V ο όγκος του κουτιού που θα σχηματιστεί, όταν τα τετράγωνα που θα αποκόψουμε έχουν μήκος πλευράς x . Να βρεθεί ένας τύπος που να εκφράζει τον όγκο V του κουτιού ως συνάρτηση του x .
- (β) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του όγκου V .
- (γ) Να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας *Geogebra*, για να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του όγκου V του κουτιού και να δώσετε μια εκτίμηση για το σύνολο τιμών της συνάρτησης αυτής.



2.4.1. ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όταν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f δεν δίνεται, τότε το πεδίο ορισμού της f ορίζεται ως το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, για το οποίο οι τιμές της συνάρτησης f είναι πραγματικοί αριθμοί.

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης που ορίζεται με τύπο της μορφής $y = f(x)$ ελέγχουμε:

- Αν η f είναι πολυωνυμική (π.χ. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ ή $f(x) = 3x + 1$), τότε το πεδίο ορισμού είναι το \mathbb{R} .
- Αν η f είναι ρητή (π.χ. $f(x) = \frac{1}{x}$ ή $f(x) = \frac{2x}{x-3}$), δηλαδή, εμφανίζεται μεταβλητή στον παρονομαστή, τότε εξαιρούμε όλους εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς που μηδενίζουν τον παρονομαστή.
- Αν στην εξίσωση εμφανίζεται ρίζα, (π.χ. $f(x) = \sqrt{x-4}$), τότε εξαιρούμε όλους εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς που δίνουν αρνητικό υπόριζο.

- Γενικά σε μια συνάρτηση με τύπο $y = f(x)$ προσπαθούμε να βρούμε τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x , έτσι ώστε το $f(x)$ να έχει έννοια πραγματικού αριθμού.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων, που ορίζονται με τύπο:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) & f(x) = x^2 - 2x \\ (\beta) & g(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \\ (\gamma) & h(x) = \sqrt{2 - x} \\ (\delta) & k(x) = \frac{\sqrt{x + 5}}{x - 2} \end{array}$$

Λύση

(α) Στη συνάρτηση f το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών (το \mathbb{R}), ως πολυωνυμική συνάρτηση.

(β) Στη συνάρτηση g το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο
 $A = \{x \mid x \neq -1, x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$,
 ως ρητή συνάρτηση.

(γ) Στη συνάρτηση h εμφανίζεται τετραγωνική ρίζα και επομένως θα πρέπει το υπόριζο να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός.

Δηλαδή:

$$2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$$

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το σύνολο:

$$A = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$$

(δ) Στη συνάρτηση k μας λέει να υπολογίσουμε τη τετραγωνική ρίζα του $x + 5$ και να διαιρέσουμε το αποτέλεσμα με $x - 2$. Γνωρίζουμε ότι η τετραγωνική ρίζα ορίζεται μόνο για μη-αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Συνεπώς, θα πρέπει το υπόριζο να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός.

Δηλαδή:

$$x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$$

Γνωρίζουμε ότι η διαίρεση με το 0 δεν ορίζεται. Συνεπώς, ο παρονομαστής $x - 2$ δεν μπορεί να είναι ίσος με 0, δηλαδή ο x δεν μπορεί να ισούται με 2.

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης k είναι το σύνολο:

$$A = \{x \mid x \geq -5, x \neq 2\} = [-5, 2) \cup (2, +\infty)$$

2.4.2. ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΜΕ ΤΥΠΟ

Σε ειδικές περιπτώσεις, για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης, που ορίζεται με τύπο της μορφής $y = f(x)$:

- επιλύουμε τον τύπο ως προς x
- περιορίζουμε το x στο πεδίο ορισμού της f και υπολογίζουμε τις τιμές που μπορεί να πάρει το y

Παράδειγμα 1

Να βρείτε το σύνολο τιμών για καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

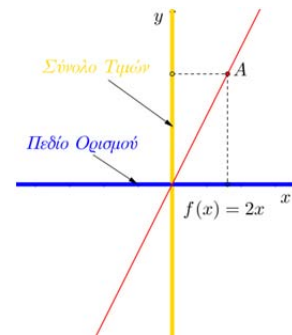
(α) $f(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$, (β) $g(x) = 2x, x \in [-2, 2]$ (γ) $h(x) = \frac{2x}{x+1}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Λύση

(α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A = \mathbb{R}$.

- Μετασχηματίζουμε τον τύπο ως προς x και παίρνουμε $x = \frac{y}{2} \in \mathbb{R}$.
- Πρέπει το $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{y}{2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$.

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

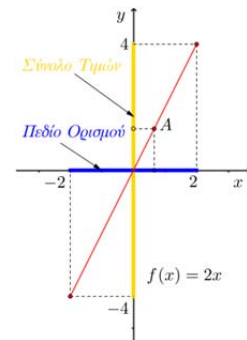


(β) Η συνάρτηση ορίζεται από τον τύπο $y = 2x$, όπου $x \in [-2, 2]$.

- Μετασχηματίζουμε τον τύπο ως προς x και έχουμε $x = \frac{y}{2}$.
- Πρέπει $x \in [-2, 2] \Leftrightarrow \frac{y}{2} \in [-2, 2] \Leftrightarrow$

$$-2 \leq \frac{y}{2} \leq 2 \Leftrightarrow -4 \leq y \leq 4$$

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι το $[-4, 4]$.



(γ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι:

$$A = \{x \mid x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

- Μετασχηματίζουμε τον τύπο ως προς x και παίρνουμε:

$$y = \frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow y(x+1) = 2x \Leftrightarrow yx + y = 2x \Leftrightarrow$$

$$yx - 2x = -y \Leftrightarrow x(y-2) = -y \Leftrightarrow x = \frac{-y}{y-2}$$

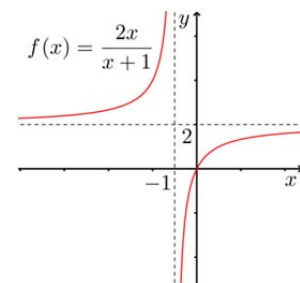
- Πρέπει $x \in \mathbb{R}$ και $x \neq -1$. Για να είναι $x \in \mathbb{R}$ έχουμε, $y \in \mathbb{R}: y \neq 2$. Μένει να διασφαλίσουμε ότι $x \neq -1$. Πράγματι, έχουμε:

$$\frac{-y}{y-2} \neq -1 \Leftrightarrow -y \neq -y + 2 \Leftrightarrow 0 \neq 2,$$

που προφανώς αληθεύει για όλες τις τιμές του $y \neq 2$.

Έτσι, το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο:

$$\{y \mid x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{2\}$$



Δραστηριότητες

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μιας από τις πιο κάτω συναρτήσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:
(α) $f(x) = x^2 - 2x + 5$
(β) $g(x) = 2x + 10$
(γ) $h(x) = 3$
2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μιας από τις πιο κάτω συναρτήσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:
(α) $f(x) = \frac{3}{x-4}$
(β) $g(x) = \frac{2x}{x^2-16}$
(γ) $h(x) = \frac{1}{x^3-4x}$
(δ) $f(x) = \frac{x^4-1}{x^3+8}$
3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μιας από τις πιο κάτω συναρτήσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:
(α) $f(x) = \sqrt{x+2}$
(β) $g(x) = \sqrt{x^2-25}$
(γ) $g(x) = \sqrt{4-8x}$
(δ) $h(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$
4. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:
(α) $y = 7x - 4$
(β) $y = 7x - 4, x \in [3,31]$
(γ) $y = \frac{x+2}{3x-1}$
(δ) $y = \frac{2x-3}{4x+8}$

2.5 ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Διερεύνηση

Να γράψετε τα γραφήματα των πιο κάτω συναρτήσεων και να τα σχολιάσετε. Να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω ζεύγη συναρτήσεων f και g θεωρούνται ίσα ή όχι, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

- ✓ $f(x) = x^2 + 3, x \in \{-1,0,1\}, g(x) = x^4 + 3, \{-1,0,1\}$
- ✓ $f(x) = x^2 + 3, x \in \{-1,0,1\}, g(x) = x^3 + 3, \{-1,0,1\}$
- ✓ $f(x) = x^2 + 3, x \in \{-1,0,1\}, g(x) = x^2 + 3, \{2,3,4\}$
- ✓ $f(x) = x^2 + 3, x \in \{-1,0,1\}, g(x) = x^4 + 3, \{-3, -2, -1,0,1,2,3\}$

Ορισμός

Δύο πραγματικές συναρτήσεις $f_1: A_1 \rightarrow B_1$ και $f_2: A_2 \rightarrow B_2$, είναι **ίσες**, αν και μόνο αν έχουν:

- το ίδιο πεδίο ορισμού ($A_1 = A_2$)
- το ίδιο πεδίο τιμών ($B_1 = B_2$) και
- τις ίδιες τιμές για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού τους ($f_1(x) = f_2(x), \forall x \in A_1$)

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f_1, f_2 είναι ίσες, γράφουμε $f_1 = f_2$.

Όταν ζητείται να αποδείξουμε ότι δύο πραγματικές συναρτήσεις f και g είναι ίσες, τότε με βάση τον ορισμό ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- (α) Ελέγχουμε ότι έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.
- (β) Ελέγχουμε ότι έχουν το ίδιο πεδίο τιμών.
- (γ) Για κάθε x στο πεδίο ορισμού τους πρέπει να ισχύει $f(x) = g(x)$, να έχουν δηλαδή το ίδιο γράφημα.

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις:

- ✓ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x^2, x \in \mathbb{N}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ **δεν είναι ίσες** γιατί δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.
- ✓ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ με τύπο $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, **δεν είναι ίσες** γιατί δεν έχουν το ίδιο πεδίο τιμών (παρόλο που έχουν ίδιο πεδίο ορισμού, ίδιο σύνολο τιμών και ίδιο τύπο).
- ✓ Αν $A = \{-1,0,1\}$ και $B = \{0,1\}$, οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow B$ με τύπο $f(x) = x^2, x \in A$ και $g: A \rightarrow B$ με τύπο $g(x) = x^4, x \in A$ **είναι ίσες** γιατί έχουν ίδιο πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών και ισχύει $f(x) = g(x), \forall x \in A$.

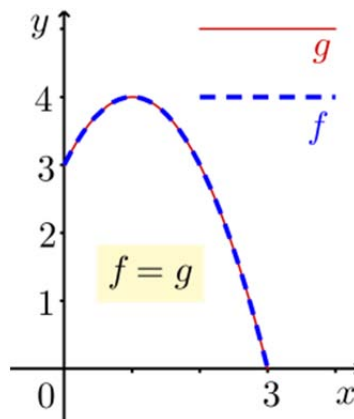
Ειδικότερα, όταν οι πραγματικές συναρτήσεις $f_1: A_1 \rightarrow B_1$ και $f_2: A_2 \rightarrow B_2$ έχουν $B_1 = B_2 = \mathbb{R}$, τότε για να είναι ίσες **αρκεί να εξετάσουμε** ότι ισχύει:

- $A_1 = A_2$ και
- $f_1(x) = f_2(x), \forall x \in A_1$

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{2x^3+2x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$ είναι ίσες γιατί έχουν ίδιο πεδίο ορισμού και ισχύει:

$$g(x) = \frac{2x^3 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{2x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = 2x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Οι γραφικές παραστάσεις δύο ίσων συναρτήσεων συμπίπτουν. Για παράδειγμα, οι γραφικές παραστάσεις των πραγματικών συναρτήσεων f, g με $f(x) = -x^2 + 2x + 3, x \in [0,3]$ και $g(x) = 4 - (1 - x)^2, x \in [0,3]$ συμπίπτουν.



Παράδειγμα 1

Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = x$ και $g(x) = \frac{x^3+2x}{x^2+2}$ είναι ίσες.

Λύση

Οι δύο συναρτήσεις $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \frac{x^3+2x}{x^2+2}, x \in \mathbb{R}$, έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού (το \mathbb{R}) και για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού τους έχουν τις ίδιες τιμές:

$$g(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 2} = \frac{x(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Επομένως, οι συναρτήσεις είναι ίσες.

Παράδειγμα 2

Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις $f: \{-1,0,1\} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \{-1,0,1\} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπους $f(x) = 3x^4 + 5$ και $g(x) = 3x^6 + 5$ είναι ίσες.

Λύση

Οι δύο συναρτήσεις περιγράφονται με διαφορετικό τύπο. Παρατηρούμε, όμως, ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν:

- ίδιο πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \{-1,0,1\}$
- ίδιες αντίστοιχες τιμές για όλα τα στοιχεία του πεδίου ορισμού τους, δηλαδή $f(-1) = 8 = g(-1)$, $f(0) = 5 = g(0)$ και $f(1) = 8 = g(1)$

Ισχύει $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$.

Επομένως, οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες.

Δύο πραγματικές συναρτήσεις είναι δυνατόν να μην είναι ίσες, αλλά σε κατάλληλο υποσύνολο του \mathbb{R} , να είναι ίσες.

Παράδειγμα 3

Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, είναι ίσες. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του \mathbb{R} , ώστε οι συναρτήσεις να είναι ίσες.

(α) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, $g(x) = x + 3$

(β) $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x - 1$

Λύση

(α) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{3\}$, αφού δεν ορίζεται στο $x = 3$, ενώ η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $B = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση. Επομένως, οι δύο συναρτήσεις δεν είναι ίσες, αφού έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού.

Παρατηρούμε ότι $A \cap B = \mathbb{R} - \{3\}$ και

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3, \forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

Επομένως, οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες στο $\mathbb{R} - \{3\}$.

(β) Οι δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού ($A = B = \mathbb{R}$), αλλά δεν είναι ίσες, αφού «πολλές τιμές» f είναι διαφορετικές από τις αντίστοιχες τιμές της g . Για παράδειγμα, $f(0) \neq g(0)$, $f(1) \neq g(1)$ κτλ.

Αναζητώντας κάποια $a \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει $f(a) = g(a)$, έχουμε ισοδύναμα:

$$a + 2 = 2a - 1 \Leftrightarrow a = 3$$

Τελικά, $f = g$ στο μονομελές σύνολο $A \cap B = \{3\}$.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

(α) Αν $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$ και $g(x) = \frac{2x^2+3}{x}$, τότε $f = g$ στο $\mathbb{R} - \{0\}$.

(β) Αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^4$, τότε $f = g$ στο $\{-1,0,1\}$.

(γ) Αν $f(x) = \frac{x^2-100}{x-10}$, $x \in \mathbb{R} - \{10\}$, και $g(x) = x + 10$, $x \in \mathbb{R}$, τότε $f = g$ στο $\mathbb{R} - \{10\}$.

2. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πραγματικές συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, είναι ίσες. Στις περιπτώσεις που ισχύει $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του \mathbb{R} για το οποίο είναι $f = g$.

$$(α) \quad f(x) = \frac{3x^3 + 9x}{x^2 + 3}, \quad g(x) = 3x$$

$$(β) \quad f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}, \quad g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

3. Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις $f: \{-2,0,2\} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \{-2,0,2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - 4x + 10$ και $g(x) = 10$ είναι ίσες.
4. Να εξηγήσετε γιατί οι συναρτήσεις $f(x) = 2x + 1$, $x \in \{0,1,2,3\}$ και $g(x) = 2x + 1$, $x \in \{0,1,2,4\}$ δεν είναι ίσες.

2.6 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Διερεύνηση 1

Πιο κάτω δίνονται τα γραφήματα των συναρτήσεων f , g και h με κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \{-1,0,1,2,3,4\}$.

G_f	G_g	G_h
$(-1, -2)$	$(-1, 1)$	$(-1, -1)$
$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
$(1, 2)$	$(1, 1)$	$(1, 3)$
$(2, 4)$	$(2, 4)$	$(2, 8)$
$(3, 6)$	$(3, 9)$	$(3, 15)$
$(4, 8)$	$(4, 16)$	$(4, 24)$

- (α) Να εκφράσετε τη συνάρτηση h συναρτήσει των f και g .
- (β) Να εκφράσετε τη συνάρτηση g συναρτήσει των h και f .
- (γ) Να βρείτε ένα τύπο για τη συνάρτηση h , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Διερεύνηση 2

- (α) Στο πιο κάτω σχήμα, να αναφέρετε κατά πόσο μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές $f(2) + g(2)$, $f(3) + g(3)$, $f(4) + g(4)$ και $f(5) - g(5)$, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.
- (β) Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω «νέων» συναρτήσεων, οι οποίες δημιουργούνται από τις f και g .

$$h = g + f, p = g - f, q = g \cdot f, r = \frac{g}{f}, s = \frac{f}{g}$$

- (γ) Να αναφέρετε κατά πόσο το πεδίο ορισμού των «νέων» συναρτήσεων διαφέρει από το πεδίο ορισμού των δύο αρχικών συναρτήσεων f και g .
- (δ) Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο [«Blyk_Kor_En02_NeesSynartiseis2.ggb»](#) και να ελέγξετε την ορθότητα των απαντήσεών σας, πατώντας το κατάλληλο κουμπί που βρίσκεται στο πλάϊ.



- (ε) Να βρείτε τον τύπο της κάθε νέας συνάρτησης, αν γνωρίζετε ότι η f είναι γραμμική εξίσωση και g έχει τύπο τριωνύμου δεύτερου βαθμού.

Ορισμοί

Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $A \cap B \neq \emptyset$, τότε ορίζουμε:

- **άθροισμα** των συναρτήσεων f και g τη συνάρτηση $f + g$ με:

$$f + g: A \cap B \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } (f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in A \cap B$$

- **διαφορά** των συναρτήσεων f και g τη συνάρτηση $f - g$ με:

$$f - g: A \cap B \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } (f - g)(x) = f(x) - g(x), x \in A \cap B$$

- **γινόμενο** των συναρτήσεων f και g τη συνάρτηση $f \cdot g$ με:

$$f \cdot g: A \cap B \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in A \cap B$$

- **πηλίκο** των συναρτήσεων f και g τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$ με:

$$\frac{f}{g}: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in \Gamma, \text{ με } \Gamma = \{x \in A \cap B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$$

Αν, γενικά, έχουμε δύο πραγματικές συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, τότε δεχόμαστε ότι:

- τα A και B είναι τα αντίστοιχα πεδία ορισμού τους και είναι υποσύνολα του \mathbb{R}
- η τιμή $f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, $\forall x \in A$
- η τιμή $g(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, $\forall x \in B$

Έτσι, η τιμή $f(x) + g(x)$ ορίζεται μόνο όταν το x ανήκει συγχρόνως και στα δύο σύνολα A και B . Δηλαδή το $f(x) + g(x)$ ορίζεται μόνο όταν $x \in A \cap B$ και ισχύει, φυσικά, όταν το σύνολο $A \cap B$ είναι μη κενό ($A \cap B \neq \emptyset$).

Παράδειγμα 1

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = x^2 - 9$ και $g(x) = x + 3$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ και $\frac{g}{f}$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού των δύο συναρτήσεων f και g είναι το \mathbb{R} .

Η συνάρτηση $f + g$ ορίζεται στο \mathbb{R} . Άρα έχουμε,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 9 + x + 3 = x^2 + x - 6, x \in \mathbb{R}.$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 9) \cdot (x + 3) = (x - 3)(x + 3)^2, x \in \mathbb{R}.$$

Για τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$ πρέπει $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$.

Συνεπώς, $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$. Άρα το πεδίο ορισμού της είναι $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$.

$$\text{Έτσι, } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x^2-9)}{(x+3)} = x - 3, x \in \mathbb{R} - \{-3\}.$$

Παρατήρηση

Το αποτέλεσμα της διαίρεσης $\frac{f}{g}$ μας δίνει την συνάρτησης $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 3$ η οποία είναι πολυώνυμο, με πεδίο ορισμού είναι το \mathbb{R} .

Ωστόσο, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το \mathbb{R} , γιατί υπάρχει ο περιορισμός στη συνάρτηση g :

$$g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$$

Για τη συνάρτηση $\frac{g}{f}$, το πεδίο ορισμού είναι το $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$.

Συνεπώς, $x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 3$. Είναι:

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{(x+3)}{(x^2-9)} = \frac{1}{x-3}, \quad x \neq \pm 3$$

Παράδειγμα 2

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = 3x + 1$, $x \in [0,3)$ και $g(x) = 2x - 4$, $x \in (1,5]$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f - g$, $\frac{f}{g}$ και $\frac{g}{f}$.

Λύση

Τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων f και g είναι $A = [0,3)$ και $B = (1,5]$, αντίστοιχα. Τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων ανήκουν στο σύνολο $A \cap B = (1,3)$. Έτσι:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (3x + 1) - (2x - 4) = x + 5, \quad x \in (1,3)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+1}{2x-4}, \quad x \in (1,3) \text{ και } 2x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

Επομένως,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x+1}{2x-4}, \quad x \in (1,3), \quad x \neq 2 \quad \text{ή} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x+1}{2x-4}, \quad x \in (1,2) \cup (2,3).$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{2x-4}{3x+1}, \quad x \in (1,3), \quad x \neq -\frac{1}{3}. \text{ Παρατηρούμε ότι } -\frac{1}{3} \notin (1,3).$$

Έτσι, η συνάρτηση ορίζεται σε όλο το $(1,3)$, δηλαδή:

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{2x-4}{3x+1}, \quad x \in (1,3)$$

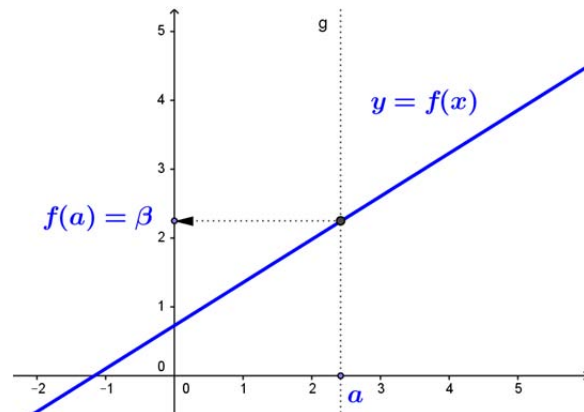
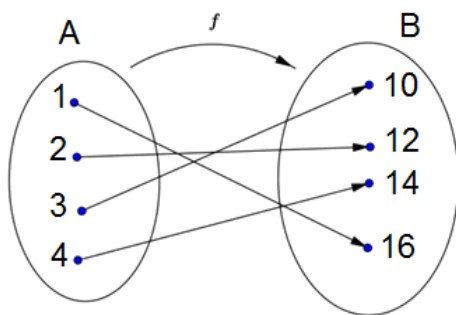
Δραστηριότητες

- Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.
 - Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού τα σύνολα \mathbb{R} και $\mathbb{R} - \{0\}$, αντίστοιχα. Τότε, το πεδίο ορισμού της $f + g$ είναι το \mathbb{R} . ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
 - Οι συναρτήσεις $f - g$ και $f \cdot g$ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
 - Για τις συναρτήσεις $f(x) = x^2, x \in [-2, 2]$ και $g(x) = x^4, x \in [1, 2]$ το $(f + g)(0) = 0$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
 - Για τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το σύνολο $\mathbb{R} - \{10\}$. Τότε, $g(10) = 0$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
 - Η συνάρτηση $f + g$ ορίζεται όταν $f(x) = x - 2, x \in [-2, 2]$ και $g(x) = -x + 2, x \in [-1, 1]$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
- Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f + g$ και $f - g$ όταν $f(x) = 2x - 5$ και $g(x) = x + 3$.
- Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται το άθροισμα των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \sqrt{-1 - x}$.
- Δίνονται συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \frac{4x}{x^2 - 25}$ και $g(x) = 1 - \frac{7}{x+2}$. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$ (Να γίνουν όλες τις δυνατές πράξεις).
- Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f + g$ και $\frac{g}{f}$, όταν $f(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ και $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.
- Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x + 4, x \in [0, 3]$ και $g(x) = 3x, x \in [4, 7]$.
Να αιτιολογήσετε γιατί δεν είναι δυνατόν να ορισθούν οι συναρτήσεις $f + g$ και $\frac{f}{g}$.

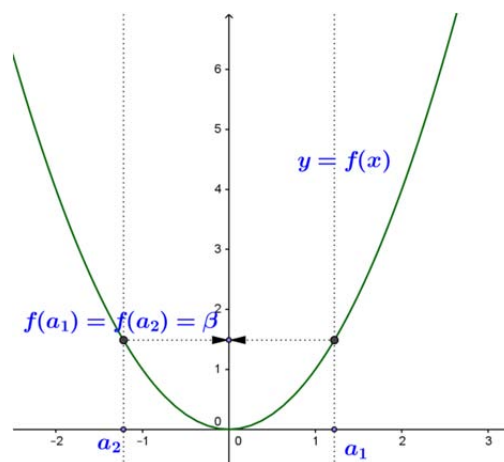
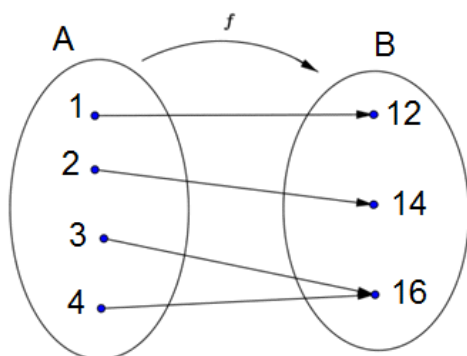
2.7 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 1-1

Διερεύνηση

(α) Να παρατηρήσετε την ομοιότητα που παρουσιάζουν οι δύο πιο κάτω συναρτήσεις που αναπαριστώνται με βελοειδές διάγραμμα και γραφική παράσταση.



(β) Να παρατηρήσετε την ομοιότητα που παρουσιάζουν οι δύο πιο κάτω συναρτήσεις που αναπαριστώνται με βελοειδές διάγραμμα και γραφική παράσταση.



(γ) Να σχολιάσετε τα δύο είδη διαφορετικών συναρτήσεων.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι ένα προς ένα ($1 - 1$), όταν για κάθε δύο διαφορετικά στοιχεία του Π , O έχουν διαφορετικές τιμές.

Δηλαδή, $\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ή ισοδύναμα $\forall x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Παράδειγμα 1

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 4x + 3, x \in \mathbb{R}$ είναι $1 - 1$.

Λύση

1^{ος} τρόπος

Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 4x_1 \neq 4x_2 \Rightarrow 4x_1 + 3 \neq 4x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Επομένως διαφορετικά πρότυπα αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές.

2^{ος} τρόπος

Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε ισχύει:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 4x_1 + 3 = 4x_2 + 3 \Rightarrow 4x_1 = 4x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Παράδειγμα 2

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)^2, x \in \mathbb{R}$ δεν είναι $1 - 1$.

Λύση

Θα δείξουμε ότι υπάρχουν διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού, τα οποία αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του συνόλου τιμών.

Δηλαδή, ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Για τη συγκεκριμένη συνάρτηση, έχουμε $1 \neq 3$ και $f(1) = 1 = f(3)$, που μας εξασφαλίζει ότι η συνάρτησή μας δεν είναι $1 - 1$.

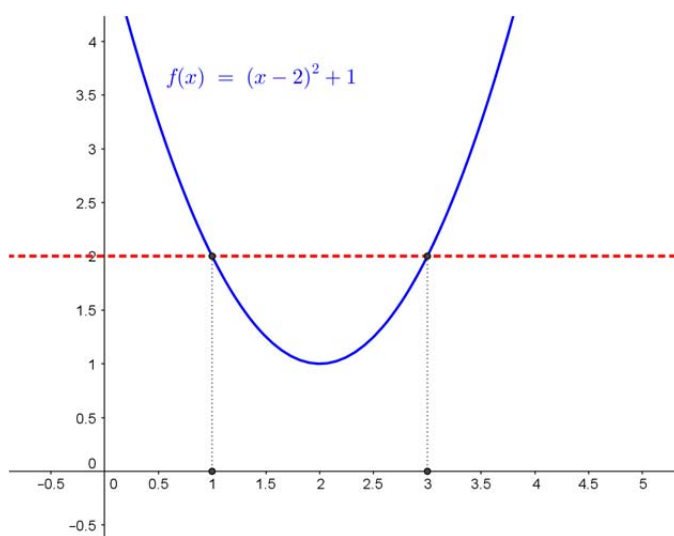
Παρατηρήσεις

- ✓ Όταν εξετάζουμε αν μία συνάρτηση είναι $1 - 1$ και πάρουμε ένα τυχαίο στοιχείο y του συνόλου των τιμών της, θα πρέπει η εξίσωση $f(x) = y$ να έχει ακριβώς μία μόνο λύση συναρτήσεως του y .
- ✓ Εδώ έχουμε την ίδια διαδικασία που ακολουθούμε στην εύρεση του συνόλου τιμών. Έτσι, αν για κάποιο y η εξίσωση $f(x) = y$ μας δίνει δύο (τουλάχιστον) λύσεις τότε θα ισχύει $f(x_1) = y$ και $f(x_2) = y$, οπότε θα έχουμε $f(x_1) = f(x_2)$ με $x_1 \neq x_2$ και έτσι η συνάρτηση δεν είναι $1 - 1$. Στο προηγούμενο μας παράδειγμα η εξίσωση $(x - 2)^2 = y$ μας δίνει δύο λύσεις όταν το $y > 1$ και επομένως η f δεν είναι $1 - 1$.

$$(x - 2)^2 = y \Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{y} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{y}$$

Δηλαδή $x_1 = 2 + \sqrt{y}$ και $x_2 = 2 - \sqrt{y}$ για τα οποία ισχύει $x_1 \neq x_2$, αλλά $f(x_1) = f(x_2)$.

- ✓ Γραφικά, τα πιο πάνω ερμηνεύονται ότι, αρκεί μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των τετμημένων να τέμνει το πολύ σε ένα σημείο τη γραφική παράσταση της f . Στην πιο κάτω γραφική δεν έχουμε 1 – 1 συνάρτηση, γιατί η ευθεία $y = 2$ τέμνει την καμπύλη σε δύο σημεία.



Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α) Για να είναι μία συνάρτηση **1 – 1** πρέπει για κάθε x_1, x_2 του **Π. Ο.** πρέπει να ισχύει $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(β) Η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in (0,3]$ είναι 1-1. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(γ) Η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in (-3,3]$ είναι 1-1. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(δ) Αν $f(x) = 2 + x$ και $g(x) = 3 - x$, τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι 1 – 1. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(ε) Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = 5, x \in \mathbb{R}$ είναι 1-1. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Να δώσετε παραδείγματα συναρτήσεων 1-1 και παραδείγματα συναρτήσεων που να μην είναι 1-1, οι οποίες να αναπαριστώνται με

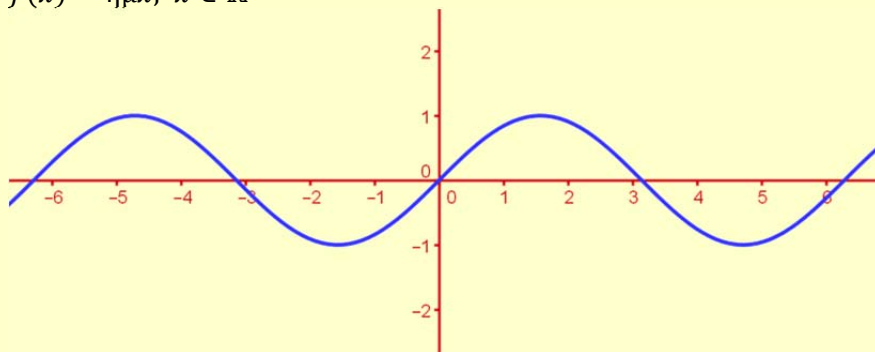
- (α) βελοειδές διάγραμμα
(β) γραφική παράσταση
(γ) τύπο

3. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι 1 – 1, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

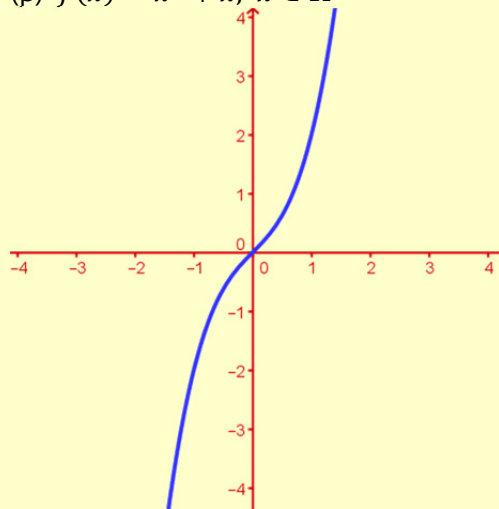
- (α) $f(x) = 3x - 2, x \in \mathbb{R}$
(β) $g(x) = x^2 + 2, x \in \mathbb{R}$
(γ) $h(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$
(δ) $\kappa(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

4. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω συναρτήσεις στις οποίες δίνεται η γραφική τους παράσταση είναι 1-1, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

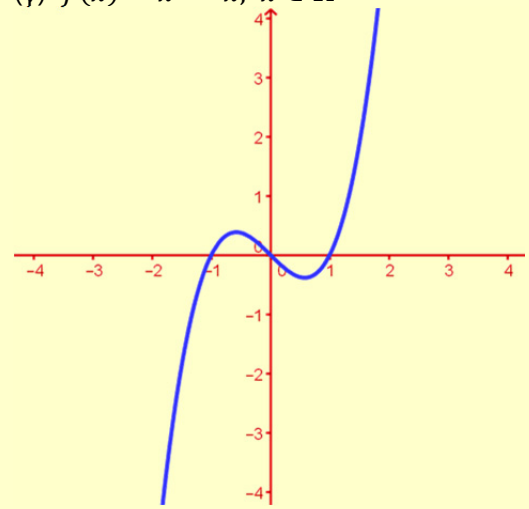
(α) $f(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$



(β) $f(x) = x^3 + x, x \in \mathbb{R}$

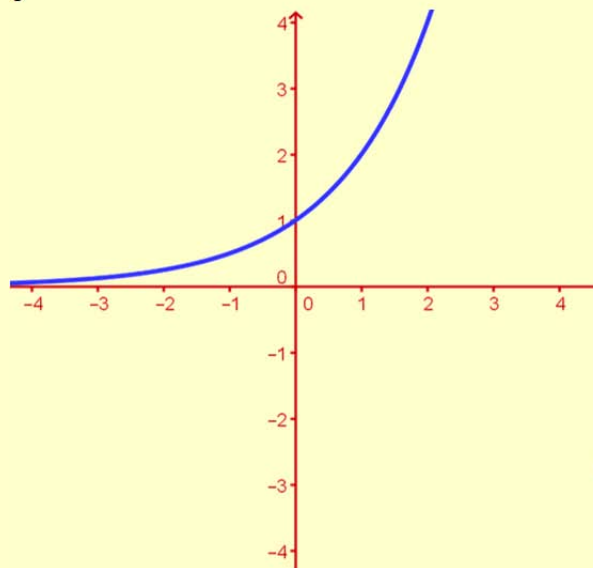


(γ) $f(x) = x^3 - x, x \in \mathbb{R}$

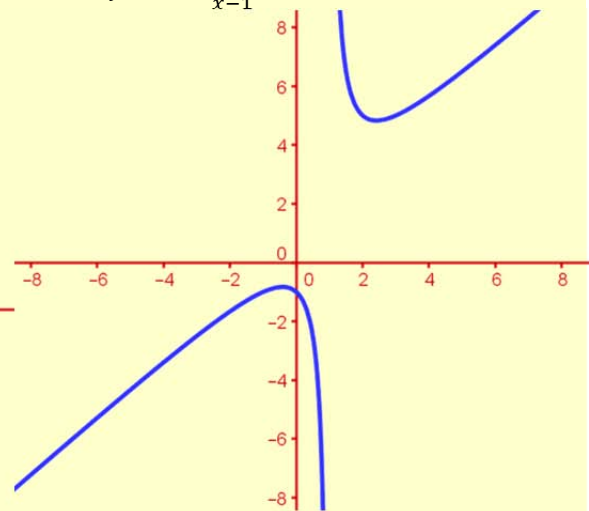


(δ) $f(x) = 2^x$

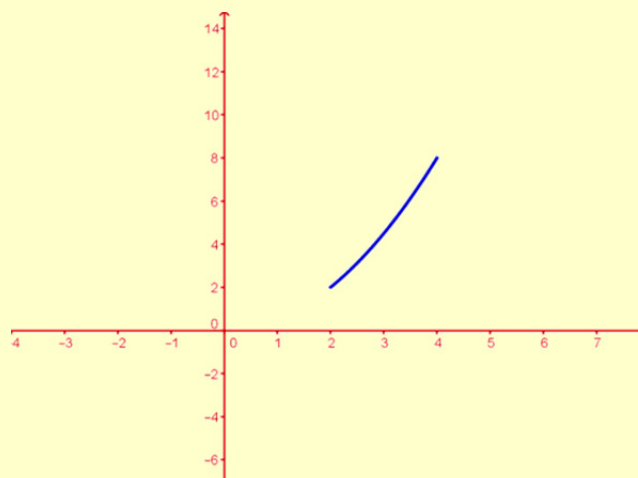
σ



(ε) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$



5. Δίνεται η γραφική παράσταση μέρους μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[-4,7]$. Να σχεδιάσετε το μέρος της γραφικής παράστασης που λείπει έτσι ώστε να προκύψει συνάρτηση που να
- (α) είναι 1 – 1
 - (β) μην είναι 1 – 1



2.8 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ – ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

Εξερεύνηση

Μια εταιρεία διαθέτει ένα πολυώροφο κτήριο στάθμευσης με έξι υπέργειους και έξι υπόγειους ορόφους. Χρεώνει για στάθμευση μιας μέρας ανάλογα με την απόσταση του ορόφου που σταθμεύει κάποιος και η πληρωμή γίνεται με προπληρωμένη κάρτα. Η χρέωση για στάθμευση στο ισόγειο είναι €0. Αν κάποιος σταθμεύσει στον πρώτο όροφο θα πληρώσει €1, αν σταθμεύσει στον τρίτο όροφο θα πληρώσει €3, αν σταθμεύσει στο -2, θα πληρώσει €2, στο -5 €5 κτλ. Ο Σωκράτης και ο Άδωνης σταθμεύουν στο κτήριο στάθμευσης καθημερινά. Έχουν συμφωνία μεταξύ τους να πληρώνουν το ίδιο ποσό για στάθμευση για κάθε μέρα με την προϋπόθεση να μην σταθμεύουν στον ίδιο όροφο, εκτός και αν σταθμεύσουν και οι δύο στο ισόγειο.

Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «[Blyk_Kor_En02_parking.ggb](#)» και να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας.

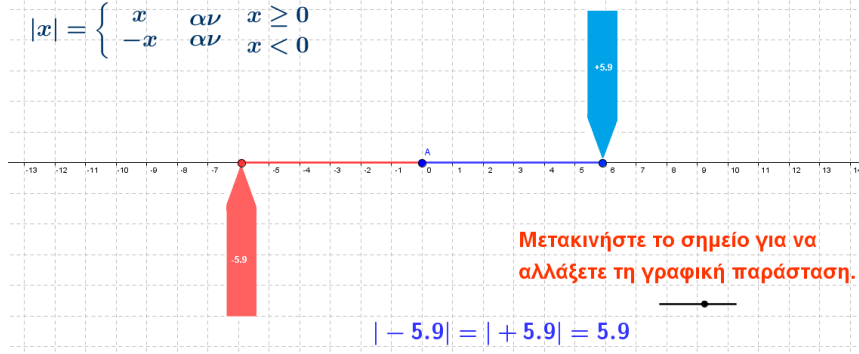
The image shows a screenshot of a parking application interface. On the left, there is a 3D rendering of a parking garage with 12 levels. The levels are labeled from top to bottom: Όροφος (+6), Όροφος (+5), Όροφος (+4), Όροφος (+3), Όροφος (+2), Όροφος (+1), ΙΣΟΓΕΙΟ, Όροφος (-1), Όροφος (-2), Όροφος (-3), Όροφος (-4), Όροφος (-5), and Όροφος (-6). A black car is parked on the +3 level, labeled 'Σωκράτης', and a red car is parked on the +1 level, labeled 'Άδωνης'. On the right, there is a control panel with a button labeled 'Αλλαγή Ορόφου του Σωκράτη' and a slider labeled 'Μετακίνηση Ορόφου του Άδωνη'. Below the slider is a red speech bubble containing the text: 'Ο Άδωνης δεν βρίσκεται στο σωστό όροφο. Βοηθήστε τον Άδωνη να σταθμεύσει στο σωστό όροφο.'

Διερεύνηση

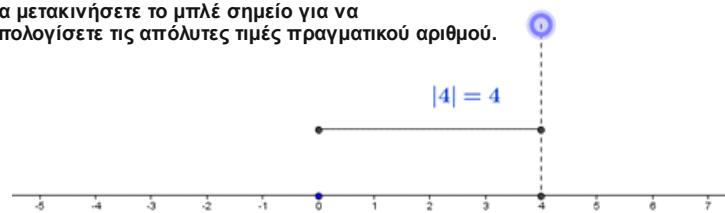
Να χρησιμοποιήσετε τα εφαρμογίδια «Blyk_Kor_En02_apoliti1.ggb», «Blyk_Kor_En02_apoliti2.ggb» και να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας.

Απόλυτη τιμή για κάθε πραγματικό αριθμό x .

$$|x| = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq 0 \\ -x & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$



Να μετακινήσετε το μπλέ σημείο για να υπολογίσετε τις απόλυτες τιμές πραγματικού αριθμού.

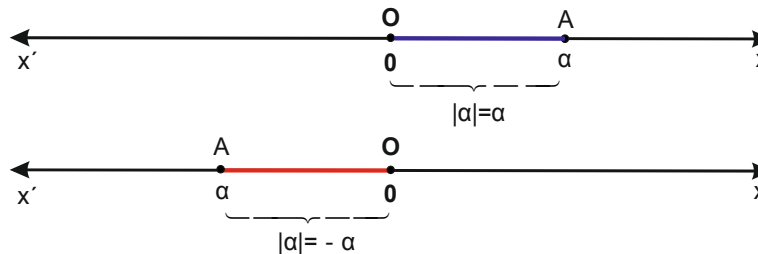


Ορισμός

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού x συμβολίζεται με $|x|$ και ισχύει:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq 0 \\ -x & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό a που παριστάνεται με το σημείο A πάνω σε έναν άξονα.



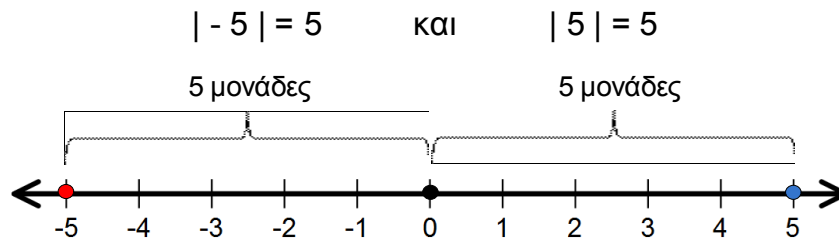
Ο συμβολισμός $|a|$ αναπαριστά γεωμετρικά, την απόσταση του σημείου A από το σημείο O .

Η απόσταση δεν είναι ποτέ αρνητικός αριθμός. Έτσι η $|a|$ είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού a , δηλαδή $|a| \geq 0$.

Παράδειγμα 1

Να ερμηνεύσετε τις απόλυτες τιμές $|5|$ και $|-5|$ στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τη σχέση που τις συνδέει.

Λύση



Συνεπώς, $|-5| = |5|$.

Δύο αριθμοί που είναι τοποθετημένοι συμμετρικά της αρχής του άξονα των πραγματικών αριθμών έχουν ίσες απόλυτες τιμές και είναι αντίθετοι (αντίθετοι Οι αριθμοί που έχουν άθροισμα 0 λέγονται αντίθετοι). Δηλαδή, $|a| = |-a|$ για κάθε τιμή του a .

Η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός, ενώ η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του. Αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε συμβολικά ως εξής:

Παράδειγμα 2

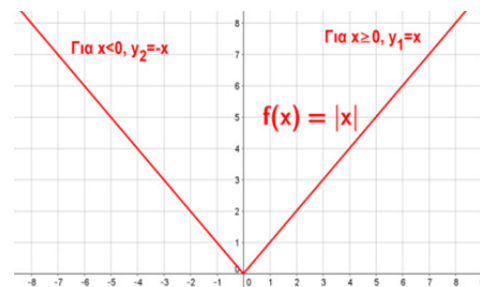
Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Λύση

Για $x \geq 0$, $f(x) = |x| = x$.

Έτσι, σχεδιάζουμε την ημιευθεία $y_1 = x, x \geq 0$ και για $x < 0$, $f(x) = |x| = -x$ σχεδιάζουμε την ημιευθεία $y_2 = -x, x < 0$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρατηρούμε ότι έχει σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.



Σημείωση: Η συνάρτηση f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των τεταγμένων.

Ορισμός

Μια συνάρτηση ονομάζεται **πολλαπλού τύπου** (ή τμηματική) όταν παρουσιάζει διαφορετικό τύπο σε ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του πεδίου ορισμού της.

Η συνάρτηση $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ στο διάστημα $[0, +\infty)$ παρουσιάζει διαφορετικό τύπο από το διάστημα $(-\infty, 0)$ και επομένως η συνάρτηση $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ θεωρείται πολλαπλού τύπου (τμηματική).

Παράδειγμα 3

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι τμηματικές και να τις αναπαραστήσετε γραφικά σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

(α) $f(x) = |x - 2|, x \in \mathbb{R}$

(β) $g(x) = |x - 2| - x, x \in \mathbb{R}$

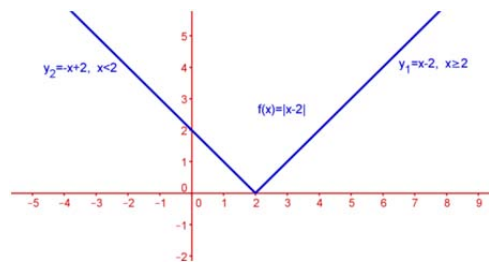
Λύση

(α) Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε,

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{αν } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{αν } x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{αν } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι τμηματική, γιατί σε διαφορετικά διαστήματα παρουσιάζει διαφορετικό τύπο.

Φέρουμε την ημιευθεία $y_1 = x - 2$ για $x \geq 2$ και για $x < 2$ φέρουμε την ημιευθεία $y_2 = -x + 2$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



(β) Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε,

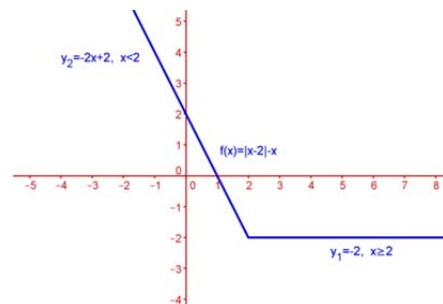
$$|x - 2| - x = \begin{cases} x - 2 - x & \text{αν } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) - x & \text{αν } x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow |x - 2| - x = \begin{cases} -2 & \text{αν } x \geq 2 \\ -2x + 2 & \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι πολλαπλού τύπου γιατί σε διαφορετικά διαστήματα παρουσιάζει διαφορετικό τύπο.

Για $x \geq 2$ σχεδιάζουμε την ημιευθεία $y_1 = -2$ και για $x < 2$ σχεδιάζουμε την ημιευθεία $y_2 = -2x + 2$.

Σημείωση

Δεν είναι κάθε συνάρτηση, η οποία περιέχει απόλυτο, τμηματική. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = |x^2 + 1|, x \in \mathbb{R}$, γράφεται και $f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$, η οποία δεν θεωρείται τμηματική, αφού δεν αλλάζει τύπο στο πεδίο ορισμού της.



Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α) $|x| \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(β) $|2 - \sqrt{5}| = 2 - \sqrt{5}$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(γ) $|a| = |-a|$, για κάθε τιμή του a . ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(δ) Η συνάρτηση $f(x) = |x| - x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι τμηματική συνάρτηση. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(ε) Οι συναρτήσεις $f(x) = |x + 1|$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{αν } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{αν } x < -1 \end{cases}$ είναι ίσες. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι τμηματικές και να τις παραστήσετε γραφικά.

(α) $f(x) = |x - 4|$, $x \in \mathbb{R}$

(β) $g(x) = |x - 4| + x$, $x \in \mathbb{R}$

(γ) $h(x) = |x^2 + 1|$, $x \in \mathbb{R}$

3. Να δώσετε παραδείγματα τμηματικών συναρτήσεων, οι οποίες να αναπαριστώνται με:

(α) τύπο

(β) γραφική παράσταση

4. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x + 1|$ και να την μελετήσετε ως προς τη συμμετρία και το σύνολο τιμών της.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

Αν $f: A \rightarrow B$ είναι συνάρτηση, τότε:

- (α) Η f έχει πεδίο ορισμού το A . ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
- (β) Η f έχει σύνολο τιμών το B . ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
- (γ) Αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε ισχύει πάντα $x_1 = x_2$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
- (δ) Αν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 = x_2$, τότε ισχύει πάντα $f(x_1) = f(x_2)$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
- (ε) Αν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$, τότε ισχύει πάντα $f(x_1) \neq f(x_2)$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Η ποσότητα στερεών αποβλήτων που συλλέχθηκε για ανακύκλωση κατά τις χρονιές 2004-2007 στην Κύπρο, παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα.

Χρονιά	Ποσότητα που ανακυκλώθηκε (σε τόνους)
2004	58140
2005	64000
2006	71690
2007	74560

- (α) Να κατασκευάσετε βελοειδές διάγραμμα του πιο πάνω πίνακα.
- (β) Να εξετάσετε κατά πόσο το διάγραμμα ορίζει συνάρτηση και να την ονομάσετε με f .
- (γ) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών της f ;
- (δ) Να βρείτε το γράφημα της συνάρτησης f .
- (ε) Να βρείτε τις τιμές $f(2004)$ και $f(2006)$.
3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{x-3}$
- (α) Να βρείτε ποιοι από τους αριθμούς: $-9, 0, 1, 6, 12$ ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f .
- (β) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;
4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με τύπο:
- (α) $f(x) = x^2$ (β) $f(x) = \sqrt{x+4}$ (γ) $f(x) = \frac{x-1}{3}$
- (δ) $f(x) = \frac{4}{x-4}$ (ε) $f(x) = \sqrt{9-2x}$

5. Δίνεται συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ με $f(x) = 3x - 5$ και πεδίο ορισμού $A = \{-1, 2, 3, 6\}$. Να βρείτε το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f .

6. Δίνονται οι συναρτήσεις

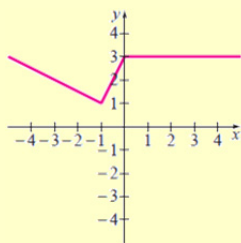
(α) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -3x + 1$,

(β) $g: [3, 7) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = 2x + 1$

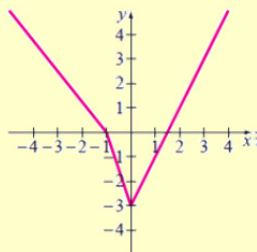
Να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων για τις γραφικές παραστάσεις που δίνονται πιο κάτω:

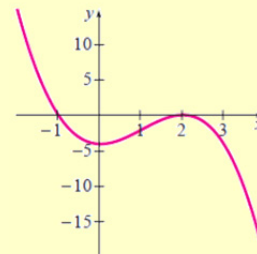
(α)



(β)



(γ)



8. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων που ορίζονται από τα πιο κάτω παραδείγματα.

(α) Μια εταιρεία μεταφέρει δέματα με μέγιστο βάρος 50 kg . Η χρέωση y σε ευρώ για τη μεταφορά δέματος $x \text{ kg}$, δίνεται από τον τύπο $y = 1,5(x - 1) + 9$.

(β) Ο φόρος προστιθέμενης αξίας y σε ευρώ είναι το 18% της αξίας του προϊόντος με αξία x ευρώ, δηλ. $y = 0,18x$.

(γ) Ένα όχημα ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα 80 km/h και είναι εφοδιασμένο με καύσιμα για να διανύσει μέχρι 240 km . Η απόσταση d που καλύπτει το όχημα, είναι συνάρτηση του χρόνου t σε ώρες, δηλ. $d = 80t$.

9. Δίνονται συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \frac{x}{x+3}$ και $g(x) = 2x - 1$. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$ (Να γίνουν όλες τις δυνατές πράξεις).

10. Να εξετάσετε κατά πόσο οι τύποι που δίνονται ορίζουν συναρτήσεις με ανεξάρτητη μεταβλητή το x .

(α) $y = 3x, x \in \mathbb{R}$

(β) $y = x^3, x \in \mathbb{R}$

(γ) $y = \frac{1}{x-1}, x \neq 1$

(δ) $y^2 = 4 - x^2, x \in [-2, 2]$

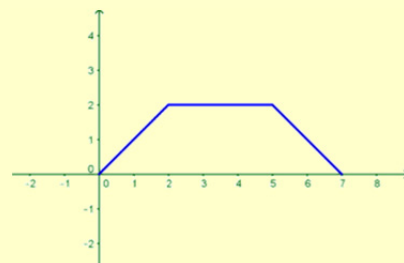
(ε) $y^2 = 2x, x \geq 0$

(στ) $x + y = 3, x \in \mathbb{R}$

11. Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει υποσύνολο του \mathbb{R} , στο οποίο οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}, A, B \subseteq \mathbb{R}$, να είναι ίσες:
- (α) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}, g(x) = x - 2$
 - (β) $f(x) = x^2 + x + 1, g(x) = 2x + 7$
 - (γ) $f(x) = \sqrt{x - 3}, g(x) = \sqrt{3 - x}$
 - (δ) $f(x) = x^3 - 4x + 10, g(x) = 10$
12. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι 1-1, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- (α) $f(x) = 2x - 5, x \in \mathbb{R}$
 - (β) $g(x) = x^2 - 4, x \in \mathbb{R}$
 - (γ) $h(x) = x^3 + 1, x \in \mathbb{R}$
13. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι τμηματικές και τις παραστήσετε γραφικά.
- (α) $f(x) = |x + 2|, x \in \mathbb{R}$
 - (β) $g(x) = |x + 2| - x, x \in \mathbb{R}$
 - (γ) $h(x) = |x^2|, x \in \mathbb{R}$

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

- Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x + 15$ που έχει:
(α) τετμημένη ίση με -2
(β) τεταγμένη ίση με 15
(γ) αντίθετες συντεταγμένες
(δ) ίσες συντεταγμένες
- Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, το σημείο $N(-a, 3a)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x - x^2$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με τύπο:
(α) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ (β) $f(x) = \frac{1}{x^4 - 2x^3 + x^2}$ (γ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
- Δίνεται συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ με $f(x) = 2x + 3$ και σύνολο τιμών $f(A) = \{-1, 2, 3, 6\}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- Δίνονται οι συναρτήσεις
(α) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -3x + 1$,
(β) $g: [3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = 4x + 1$
Να βρείτε το σύνολο τιμών τους, και τις συναρτήσεις $f + g$, $f - g$ και $f \cdot g$.
- Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι τμηματικές και τις παραστήσετε γραφικά.
(α) $f(x) = |x| + |x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$
(β) $g(x) = |x| + |-x|$, $x \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που απεικονίζεται στη διπλανή γραφική παράσταση.



ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΕΚΘΕΤΙΚΗ - ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 3.1 Εισαγωγή
- 3.2 Δυνάμεις με άρρητο εκθέτη
- 3.3 Εκθετική συνάρτηση
- 3.4 Εκθετικές εξισώσεις
- 3.5 Εφαρμογές εκθετικής συνάρτησης
- 3.6 Έννοια του λογάριθμου
- 3.7 Ιδιότητες λογαρίθμων
- 3.8 Λογαριθμική συνάρτηση
- 3.9 Λογαριθμικές εξισώσεις

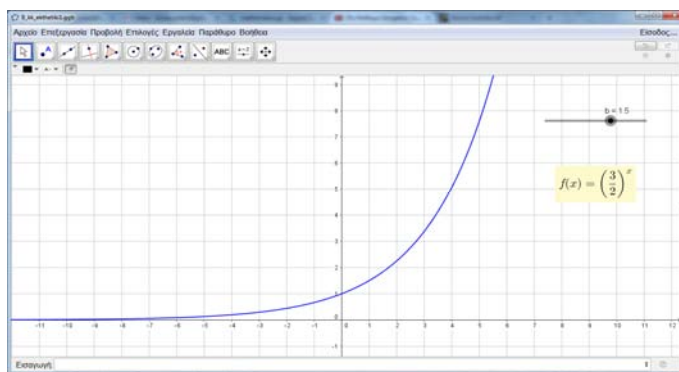
3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Διερεύνηση

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.
(α) Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας. Με τη βοήθεια του πίνακα, να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

x	$f(x) = 2^x$
-3	$f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

- (β) Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , για να δώσετε μια προσέγγιση των τιμών $f(2,5)$ και $f(0,75)$.
- Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «[Blyk_Kor_En03_ekthetiki1.ggb](#)».



Να δώσετε στον δρομέα b τις τιμές $2, 3, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$. Να σχηματίσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = b^x$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$ και να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

- (α) Ποιο είναι το σύνολο τιμών για την καθεμιά συνάρτηση;
- (β) Ποιο σημείο του επιπέδου ανήκει σε όλες τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων;
- (γ) Για ποιες τιμές του b οι συναρτήσεις παίρνουν μεγαλύτερες τιμές καθώς αυξάνεται το x ;

- (δ) Για ποιες τιμές του b οι συναρτήσεις παίρνουν μικρότερες τιμές, όταν αυξάνεται το x ;
- (ε) Ποιες τιμές έχει η συνάρτηση στα άκρα του πεδίου ορισμού της;
- (στ) Είναι η συνάρτηση $1 - 1$;
- (ζ) Τι είδους συνάρτηση προκύπτει, όταν $b = 1$;

Γιατί κατά τη γνώμη σας δεν εμφανίζεται στην οθόνη σας η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^x$, όταν το $a < 0$;

Έχουμε γνωρίσει την έννοια της συνάρτησης καθώς και βασικά είδη συναρτήσεων, όπως πολυωνυμικές, ρητές και συναρτήσεις οι οποίες περιέχουν ρίζα πραγματικών αριθμών. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε συναρτήσεις στις οποίες η μεταβλητή παρουσιάζεται στον εκθέτη μιας δύναμης. Για παράδειγμα, στην πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, η μεταβλητή είναι στη βάση της δύναμης, ενώ στη συνάρτηση $g(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι η μεταβλητή είναι στον εκθέτη.

Συγκρίνοντας τις τιμές που παίρνουν οι δύο συναρτήσεις, παρατηρούμε για παράδειγμα ότι $f(30) = 30^2 = 900$, ενώ $g(30) = 2^{30} = 1\,073\,741\,824$. Παρατηρούμε ότι, παρουσιάζεται μια τεράστια διαφορά στις τιμές των δύο συναρτήσεων με την εκθετική τιμή να ξεπερνά κατά πολύ την τιμή που παρουσιάζει η πολυωνυμική συνάρτηση.

Για τις τιμές της μεταβλητής x , αν το $x_1 = 30$ μεταβληθεί στο $x_2 = 31$ θα παρατηρήσουμε ακόμα μεγαλύτερη αύξηση στην συνάρτηση g παρά στην πολυωνυμική συνάρτηση f .

Από στατιστικά δεδομένα μπορούμε να παρατηρήσουμε μεγάλες αυξήσεις ανθρώπινων πληθυσμών που έχουν συμβεί σε πολλές σύγχρονες μεγαλουπόλεις. Το γεγονός ότι σε κάποιες πόλεις έχει διπλασιασθεί ο πληθυσμός τους τα τελευταία 60 – 100 χρόνια προκαλεί αρκετά μεγάλη εντύπωση.

Εκτός από τις μεταβολές (αύξηση ή μείωση) που έχουν παρατηρηθεί σε πληθυσμούς ανθρώπων, ζώων και βακτηριδίων, παρόμοιες μεταβολές έχουν παρατηρηθεί στην αύξηση ενός κεφαλαίου που ανατοκίζεται σε μια τράπεζα, στη μείωση της μάζας ενός φύλλου ύστερα από το πέσιμο του στη γη, στη μείωση της τιμής ενός καινούριου αυτοκινήτου με την πάροδο του χρόνου και σε πολλά άλλα φαινόμενα στην καθημερινή ζωή.

Σε πολλές περιπτώσεις ο ρυθμός αύξησης ενός πληθυσμού συμπίπτει με τον ρυθμό αύξησης ενός κεφαλαίου που ανατοκίζεται σε τράπεζα με συγκεκριμένο επιτόκιο και σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα κάτι που μας οδηγεί ότι σε κάποιο κοινό μοντέλο υπακούουν οι δύο μεταβολές.

Ποιο να είναι άραγε εκείνο το μοντέλο εξισώσεων που θα περιγράφει μεγάλες μεταβολές, ώστε να είμαστε σε θέση να προβλέψουμε καταστάσεις σε μετέπειτα χρονικά διαστήματα;

3.2 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΑΡΡΗΤΟ ΕΚΘΕΤΗ

Έχουμε μάθει να υπολογίζουμε δυνάμεις με ρητό εκθέτη. Για παράδειγμα:

- $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
- $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$
- $(-4)^{\frac{1}{2}}$ δεν ορίζεται
- $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$
- $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

Γενικά, έχουμε ορίσει την έννοια της δύναμης, όταν ο εκθέτης είναι ρητός αριθμός.

- Αν $a \neq 0$ και $v \in \mathbb{N}$, τότε:
 - $a^v = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{v\text{-φορές}}$
 - $a^{-v} = \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{v\text{-φορές}} = \left(\frac{1}{a}\right)^v = \frac{1}{a^v}$
- Αν $a > 0$ και $\frac{v}{\mu} \in \mathbb{Q}$, $v \in \mathbb{Z}$, $\mu \in \mathbb{N}$, τότε $a^{\frac{v}{\mu}} = \sqrt[\mu]{a^v}$.

Επίσης, γνωρίσαμε βασικές ιδιότητες, όταν ο εκθέτης είναι ρητός αριθμός, όπως:

- $a^v \cdot a^\mu = a^{v+\mu}$
- $\frac{a^v}{a^\mu} = a^{v-\mu}$
- $(a^v)^\mu = a^{(v\mu)}$
- $a^{-v} = \frac{1}{a^v}$
- $a^0 = 1, a \neq 0$
- $a^{\frac{1}{v}} = \sqrt[v]{a}, a \geq 0$
- $a^{\frac{v}{\mu}} = \sqrt[\mu]{a^v} = (\sqrt[\mu]{a})^v$

Χρησιμοποιώντας τις πιο πάνω ιδιότητες, αλλά και την υπολογιστική μηχανή, υπάρχει η δυνατότητα υπολογισμού οποιασδήποτε δύναμης. Για παράδειγμα ο αριθμός $10^{\sqrt{2}}$ υπολογίζεται εύκολα με χρήση της υπολογιστική μηχανής, πατώντας διαδοχικά τα πλήκτρα:



Έτσι, έχουμε: $10^{\sqrt{2}} = 10^{1,414213562\dots} \approx 25,9545 \dots$

Το σημαντικό είναι ότι όλες οι πιο πάνω ιδιότητες δυνάμεων με ρητό εκθέτη ισχύουν και όταν ο εκθέτης είναι άρρητος αριθμός.

3.3 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός

Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 0$, $a \neq 1$ ονομάζεται εκθετική συνάρτηση με βάση a και ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x .

Αν $a = 1$, τότε η συνάρτηση είναι $f(x) = 1^x = 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή και δεν θεωρείται εκθετική συνάρτηση.

Παράδειγμα 1

Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι εκθετικές:

- (α) $f_1(x) = x^2$
- (β) $f_2(x) = 2^x$
- (γ) $f_3(x) = 10^x$
- (δ) $f_4(x) = e^{-x}$

Λύση

- (α) Η συνάρτηση $f_1(x) = x^2$ δεν είναι εκθετική, αλλά πολυωνυμική.
(μεταβλητή βάση, σταθερός εκθέτης)
- (β) Η συνάρτηση $f_2(x) = 2^x$ είναι εκθετική με βάση 2.
(σταθερή βάση, μεταβλητός εκθέτης)
- (γ) Η συνάρτηση $f_3(x) = 10^x$ είναι εκθετική με βάση 10.
(σταθερή βάση, μεταβλητός εκθέτης)
- (δ) Η συνάρτηση $f_4(x) = e^{-x}$ γράφεται $f_4(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ και είναι εκθετική με βάση $\frac{1}{e}$.
(σταθερή βάση, μεταβλητός εκθέτης)

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5^x$, $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε, κάνοντας χρήση της υπολογιστικής μηχανής, τις τιμές:

- (α) $f(3)$
- (β) $f(-2)$
- (γ) $f(0,5)$
- (δ) $f(\sqrt{2})$

Λύση

Τιμή συνάρτησης	Πλήκτρα υπολογιστικής	Αποτέλεσμα
(α) $f(3) = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$	5 ^ 3 =	125
(β) $f(-2) = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$	5 ^ -2 =	$\frac{1}{25}$
(γ) $f(0,5) = 5^{0,5} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \approx 2,23..$	5 ^ 0 . 5 =	2,23 ...
(δ) $f(\sqrt{2}) = 5^{\sqrt{2}} \approx 5^{1,414} \approx 9,74 ...$	5 ^ √ 2 =	9,74 ...

Παράδειγμα 3

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$

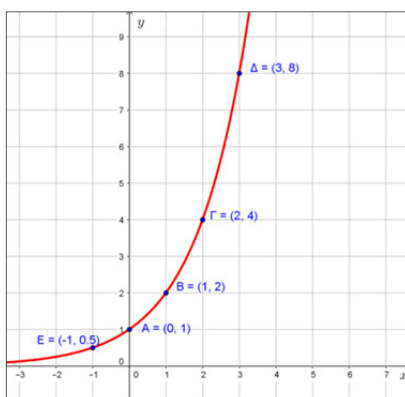
(β) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, x \in \mathbb{R}$

Λύση

(α) Δίνουμε μερικές τιμές στο x , και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$. Συμπληρώνουμε τον πιο κάτω πίνακα τιμών και κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση.

x	-10	-3	-2	-1	0	1	2	3	10
$f(x) = 2^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	2^{10}

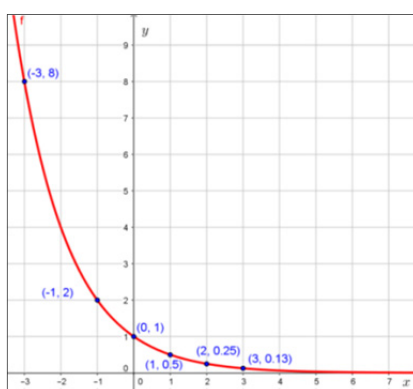
Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



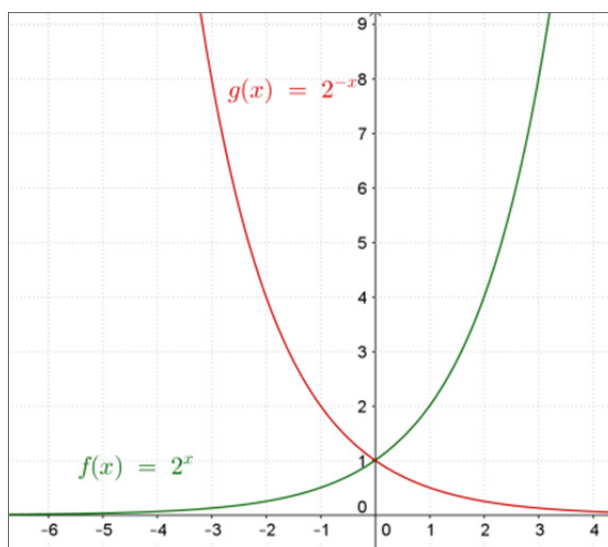
(β) Η συνάρτηση $g(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ έχει αντίστροφες τιμές από αυτές της συνάρτησης $f(x) = 2^x$, όπως αυτές φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

x	-10	-3	-2	-1	0	1	2	3	10
$g(x) = 2^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	2^{10}
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	2^{10}	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

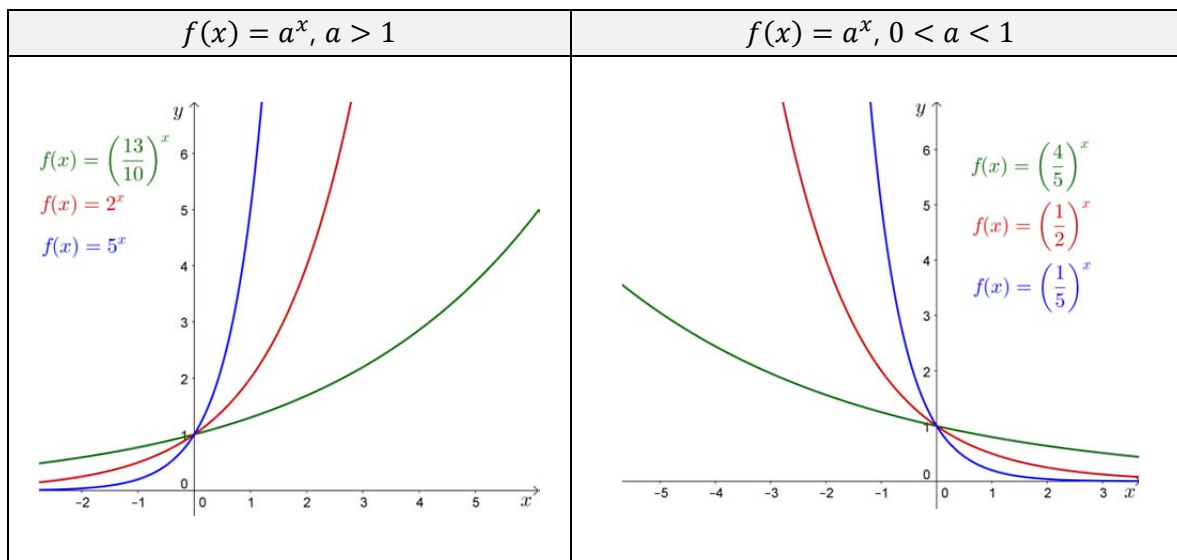


Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, x \in \mathbb{R}$ είναι συμμετρική της $g(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$ ως προς τον άξονα των τεταγμένων.



Γενικά, η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών και σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$.

Πιο κάτω παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$ στις δύο περιπτώσεις ($a > 1$ και $0 < a < 1$).



Παρατηρήσεις

- Όλες οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$, διέρχονται από το σημείο $(0,1)$, αφού $f(0) = a^0 = 1$.
- Στην περίπτωση όπου $a > 1$, όταν οι τιμές του x αυξάνονται, οι αντίστοιχες τιμές του y επίσης αυξάνονται, «πλησιάζοντας» πολύ μεγάλους αριθμούς. Αντίστοιχα, όταν οι τιμές του x μειώνονται, οι αντίστοιχες τιμές του y μειώνονται, «πλησιάζοντας» τον αριθμό 0, με αποτέλεσμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^x$ να πλησιάζει τον άξονα των x .
- Στην περίπτωση όπου $0 < a < 1$, όταν οι τιμές του x αυξάνονται οι αντίστοιχες τιμές του y μειώνονται, «πλησιάζοντας» το 0, με αποτέλεσμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης να πλησιάζει τον άξονα των x . Αντίστοιχα, όταν οι τιμές του x μειώνονται, οι αντίστοιχες τιμές του y αυξάνονται, «πλησιάζοντας» πολύ μεγάλους αριθμούς.
- Από τις πιο πάνω γραφικές παραστάσεις, παρατηρούμε ότι όλες οι τιμές είναι θετικές και συνεπώς το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $(0, +\infty)$. Μπορούμε να γράφουμε συμβολικά για μια εκθετική συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty) \text{ με } f(x) = a^x, \text{ όπου } a > 0, a \neq 1$$

- Για δύο τυχαία σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ της γραφικής παράστασης μιας εκθετικής συνάρτησης, παρατηρούμε ότι ισχύει:

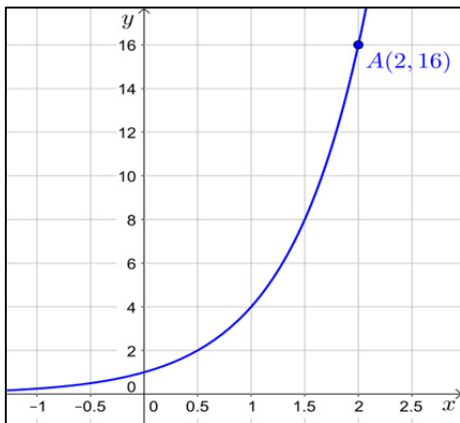
$$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Επομένως, η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.

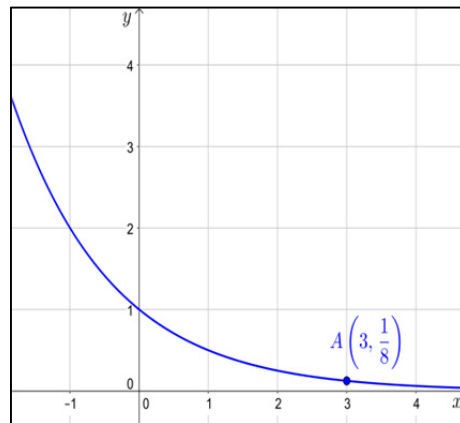
Παράδειγμα 4

Να βρείτε τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$, της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α)



(β)



Λύση

(α) Το σημείο $(2, 16)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^x$.

Επομένως, έχουμε:

$$f(2) = 16 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = \pm 4$$

Το a πρέπει να έχει θετική τιμή για να ορίζεται εκθετική συνάρτηση. Άρα, $a = 4$.

(β) Το σημείο $(3, \frac{1}{8})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^x$.

Επομένως, έχουμε:

$$f(3) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow a^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Σε πολλά προβλήματα χρησιμοποιείται η εκθετική συνάρτηση με βάση τον πραγματικό άρρητο αριθμό e , ο οποίος παίρνει προσεγγιστικά την τιμή $e = 2,71828 \dots$

Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ με $e \approx 2,72$ λέγεται **φυσική εκθετική συνάρτηση**.

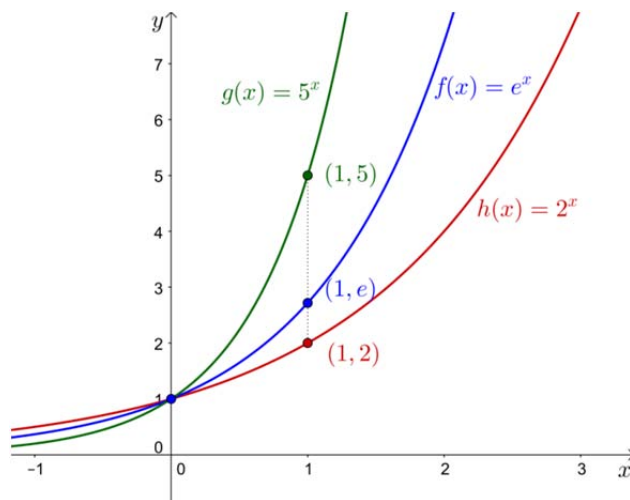
Ο αριθμός e καλείται και Νεπέριος αριθμός από το όνομα του Σκωτσέζου Ευγενή John Napier (1550 - 1617). Ο συμβολισμός του e οφείλεται στον Ελβετό μαθηματικό Leonhard Euler (1707 - 1783).

Παράδειγμα 5

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ και να τη συγκρίνετε με τις συναρτήσεις $g(x) = 5^x, x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x, g(x) = 5^x$ και $h(x) = 2^x$ παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα. Όλες οι γραφικές παραστάσεις διέρχονται από το σημείο $(0,1)$ και οι τιμές τους αυξάνονται με μεγάλο «ρυθμό» καθώς το x αυξάνεται.



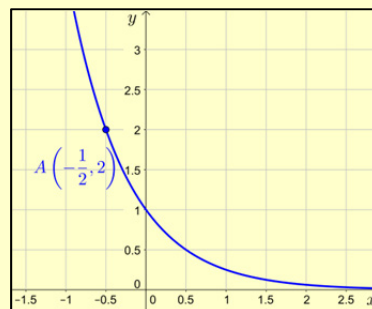
Παρατηρούμε ότι από τη διάταξη $2 < e < 5$ για $x > 0$ έχουμε $2^x < e^x < 5^x$, ενώ για $x < 0$ έχουμε $5^x < e^x < 2^x$.

Δραστηριότητες

- Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι εκθετικές:
(α) $f_1(x) = x^3$
(β) $f_2(x) = 4^x$
(γ) $f_3(x) = (-10)^x$
(δ) $f_4(x) = 1^x$
(ε) $f_5(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
(στ) $f_6(x) = e^{-x}$
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^x$, $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε, κάνοντας και χρήση της υπολογιστικής μηχανής, τις τιμές:
(α) $f(0)$
(β) $f(2)$
(γ) $f(-3)$
(δ) $f(0,25)$
(ε) $f(\sqrt{3})$
- Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 4^x$ και $g(x) = 4^{-x}$. Ποια σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g ;
- Να υπολογίσετε το a , όταν:
(α) η γραφική παράσταση της $f(x) = a^x$ διέρχεται από το σημείο $A(-2,4)$
(β) η γραφική παράσταση της $f(x) = 5 \cdot a^x$ διέρχεται από το σημείο $A(3,135)$
- Δίνεται η εκθετική συνάρτηση f με τύπο $f(x) = a \cdot \beta^x$.
Αν τα σημεία $\left(-1, \frac{2}{3}\right), (0,2), (1,6), (2,18), (3,54)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ,
(α) Να υπολογίσετε τα a, β .
(β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- Να βρείτε τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$, της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στις δύο πιο κάτω περιπτώσεις:
(α)



(β)



7. Να βρείτε τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης, $y = a^x$, που έχει το πιο κάτω γράφημα:
- (α) $G_1 = \{(0,1), (1,2), (2,4), (4,16)\}$
- (β) $G_2 = \{(0,1), (1, e), (2, e^2), (4, e^4)\}$
8. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}$ και να τη συγκρίνετε με τις συναρτήσεις $g(x) = 5^{-x}, x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = 2^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

3.4 ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ορισμός

Κάθε εξίσωση που έχει τον άγνωστο στον εκθέτη μίας δύναμης λέγεται εκθετική εξίσωση.

Για παράδειγμα οι εξισώσεις $3^x = 27$, $2^{-x} = 4$ και $e^{x+2} = e^2$ είναι εκθετικές εξισώσεις.

Η εκθετική συνάρτηση είναι 1 – 1 συνάρτηση.

Το γεγονός αυτό μας διευκολύνει στην επίλυση εκθετικών εξισώσεων.

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y, \text{ όπου } a > 0, a \neq 1$$

Έτσι, για να επιλύσουμε εκθετικές εξισώσεις, χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των δυνάμεων και:

- μετασχηματισμούς της μορφής $a^x = \omega$, όταν εμφανίζονται δυνάμεις της μορφής a^{x+1} , a^{2x} κτλ.
- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Παράδειγμα 1

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $2^x = 2^{10}$

(β) $5^x = 125$

(γ) $3^{x+1} = 27$

(δ) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^4$

(ε) $7^x = -49$

Λύση

(α) $2^x = 2^{10} \Leftrightarrow x = 10$

(β) $5^x = 125 \Leftrightarrow 5^x = 5^3 \Leftrightarrow x = 3$

(γ) $3^{x+1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x+1} = 3^3 \Leftrightarrow x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$

(δ) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \Leftrightarrow x = -4$

(ε) $7^x = -49$

Η εξίσωση αυτή είναι αδύνατη στο \mathbb{R} , γιατί το 7^x είναι θετικό για κάθε πραγματική τιμή του x .

Παράδειγμα 2

Αν $2^x = \omega$, τότε:

- (α) να εκφράσετε συναρτήσει του ω τις ποσότητες 2^{x+1} και 4^x
(β) να λύσετε την εξίσωση: $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$

Λύση

(α) Αν $2^x = \omega$, τότε:

$$2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = \omega \cdot 2 = 2\omega \text{ και } 4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = \omega^2$$

(β) Θέτοντας όπου $2^x = \omega$, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} 4^x - 3 \cdot 2^x = 4 &\Leftrightarrow \omega^2 - 3 \cdot \omega = 4 \Leftrightarrow \omega^2 - 3\omega - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\omega - 4)(\omega + 1) = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = 4, \omega_2 = -1 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$$

ή

$2^x = -1$, η οποία είναι αδύνατη εξίσωση στο \mathbb{R} , γιατί $2^x > 0$ για κάθε πραγματική τιμή του x .

Παράδειγμα 3

Να λύσετε την εξίσωση: $8^x = 4^{x+1}$

Λύση

Οι αριθμοί 8 και 4, γράφονται με κοινή βάση το 2.

Έτσι έχουμε:

$$8^x = 4^{x+1} \Leftrightarrow (2^3)^x = (2^2)^{x+1} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{2x+2} \Leftrightarrow 3x = 2x + 2 \Leftrightarrow x = 2$$

Δραστηριότητες

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $5^x = 25$

(β) $3^x = 3^{12}$

(γ) $2^{x-3} = 8$

(δ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} = \frac{3}{2}$

(ε) $100^{2x+4} = 1000^{x+5}$

(στ) $(3^x - 27)(5^x - 125) = 0$

2. Αν $3^x = \kappa$, να εκφράσετε συναρτήσει του κ τις παρακάτω παραστάσεις:

(α) 3^{x+1}

(β) 3^{x-1}

(γ) 9^{x+1}

(δ) 27^{x-2}

(ε) $(\sqrt{3})^x$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

(β) $4^{x^2} = 2^{x+3}$

(γ) $9^{2x} \cdot 27^{x^2} = 3^{-1}$

(δ) $100 \cdot 10^x = 1000^{\frac{1}{x}}$

(ε) $x^{x^2-5x+6} = 1$

3.5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Διερεύνηση

- (α) Αν κάποιος καταθέσει στην τράπεζα €1000 με ετήσιο επιτόκιο 4%, να εξηγήσετε πώς θα υπολογίσετε το νέο ποσό των λεφτών μαζί με τον τόκο του, ύστερα από ένα χρόνο.
- (β) Να δείξετε ότι αυτό το ποσό ύστερα από ένα χρόνο γράφεται στη μορφή $1000a$, όπου το a είναι συγκεκριμένος αριθμός, τον οποίο να αναφέρετε.
- (γ) Αν τα λεφτά δεν αποσύρονται από την τράπεζα, να υπολογίσετε το ποσό συναρτήσει του a στο τέλος του 2^{ου}, 3^{ου}, 4^{ου} και 5^{ου} χρόνου.
- (δ) Να δώσετε ένα τύπο της μορφής $P = P(t)$ ο οποίος να δίνει το νέο ποσό P στο τέλος του t χρόνου και να σχολιάσετε τη θέση της μεταβλητής t στον τύπο της συνάρτησης της οποίας ορίσατε.

Παράδειγμα 1

Κάποιος καταθέτει 6000 ευρώ με επιτόκιο 4% το χρόνο. Στο τέλος κάθε χρόνου ο τόκος ανακεφαλαιώνεται (δηλαδή ενσωματώνεται στο κεφάλαιο). Ποιο θα είναι το ποσό του τελικού κεφαλαίου στο τέλος του 3^{ου} χρόνου, όταν το αρχικό ποσό ανατοκίζεται ετήσια;

Λύση

Το κεφάλαιο των 6000 ευρώ γίνεται μαζί με τον τόκο στο τέλος του πρώτου χρόνου:

$$K_1 = 6000 + 0,04 \cdot (6000) = 6000 \cdot (1 + 0,04) = 6000 \cdot (1,04)$$

Δηλαδή, το αρχικό κεφάλαιο πολλαπλασιάζεται επί 1,04.

Στην αρχή του δεύτερου χρόνου το αρχικό ποσό είναι $6000 \cdot (1,04)$.

Έτσι, στο τέλος του 2^{ου} χρόνου το ποσό γίνεται:

$$K_2 = [6000 \cdot (1,04)] \cdot (1,04) = 6000 \cdot (1,04)^2$$

Δηλαδή, το αρχικό κεφάλαιο πολλαπλασιάζεται με $(1,04)^2$.

Στην αρχή του τρίτου χρόνου το αρχικό ποσό είναι $6000 \cdot (1,04)^2$.

Έτσι, στο τέλος του 3^{ου} χρόνου το ποσό γίνεται:

$$K_3 = 6000 \cdot (1,04)^2 \cdot (1,04) = 6000 \cdot (1,04)^3 = \text{€}6749,18$$

Δηλαδή, το αρχικό κεφάλαιο πολλαπλασιάζεται με $(1,04)^3$.

Γενικεύοντας τα πιο πάνω, ο τύπος ο οποίος υπολογίζει το τελικό ποσό K_t , ενός αρχικού ποσού K_0 που ανατοκίζεται ετήσια προς $\varepsilon\%$ για t χρόνια είναι:

$$K_t = K_0 \cdot (1 + \varepsilon)^t$$

- K_0 : το αρχικό ποσό (αρχικό κεφάλαιο)
- ε : το ετήσιο επιτόκιο (επί τοις εκατόν %)
- t : ο αριθμός των ετών το οποίο ανατοκίζεται το αρχικό ποσό
- K_t : το τελικό ποσό μετά από t χρόνια.

Παράδειγμα 2

Βιολόγοι έχουν παρατηρήσει ότι κάποιο είδος βακτηρίων διπλασιάζεται σε πληθυσμό σε συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Για παράδειγμα, κάτω από ιδανικές συνθήκες, τα συγκεκριμένα βακτήρια διπλασιάζονται κάθε 3 ώρες. Ο πληθυσμός των βακτηρίων αρχικά είναι 500.

- (α) Να υπολογίσετε τον πληθυσμό των βακτηρίων ύστερα από ένα 24ωρο.
- (β) Να βρείτε έναν τύπο της μορφής $N = N(t)$, όπου N ο πληθυσμός των βακτηρίων και t ο χρόνος σε ώρες.
- (γ) Ποιο μοντέλο της μορφής $N = N(t)$ θα χρησιμοποιούσατε σε άλλη περίπτωση με αρχικό πληθυσμό $N_0 = 1000$, αν γνωρίζατε ότι ο πληθυσμός:
 - i. τριπλασιαζόταν κάθε ώρα
 - ii. υποδιπλασιαζόταν κάθε 4 ώρες

Λύση

- (α) Αν θέσουμε $N = N(t)$ τον πληθυσμό των βακτηρίων ύστερα από t ώρες, τότε:
 $N(0) = 500, N(3) = 500 \cdot 2, N(6) = 500 \cdot 2^2, N(9) = 500 \cdot 2^3, \dots, N(24) = 500 \cdot 2^8$
- (β) Σύμφωνα με το πιο πάνω μοτίβο παρατηρούμε ότι:

$$N(t) = 500 \cdot 2^{\frac{t}{3}}, t \text{ σε ώρες}$$

- (γ) Ο τύπος $N = N(t)$ γίνεται:
 - i. $N(0) = 1000, N(1) = 1000 \cdot 3^1, N(2) = 1000 \cdot 3^2, \dots$
Επομένως, έχουμε:
 $N(t) = 1000 \cdot 3^t.$
 - ii. $N(0) = 1000, N(4) = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1, N(8) = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2, \dots$
Επομένως, έχουμε:
 $N(t) = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}.$

Παράδειγμα 3

Η τιμή ενός μεταχειρισμένου αυτοκινήτου δίνεται από τον τύπο $P = 18000 \cdot 3^{-\frac{t}{10}}$, όπου P είναι η τιμή του αυτοκινήτου σε ευρώ και t είναι η χρονική στιγμή σε χρόνια μετά που αγοράζεται ως καινούργιο. Να υπολογίσετε:

- (α) την τιμή του αυτοκινήτου, όταν αυτό ήταν καινούριο
- (β) την τιμή του αυτοκινήτου, ύστερα από 3 χρόνια
- (γ) την τιμή του αυτοκινήτου, ύστερα από 10 χρόνια

Λύση

(α) Για $t = 0$, έχουμε:

$$P = 18000 \cdot 3^0 = 18000 \cdot 1 = \text{€}18000$$

(β) Για $t = 3$, έχουμε:

$$P = 18000 \cdot 3^{-\frac{3}{10}} \approx 18000 \cdot 0,7192 \approx \text{€}12946$$

(γ) Για $t = 10$, έχουμε:

$$P = 18000 \cdot 3^{-1} = 18000 \cdot \frac{1}{3} = \text{€}6000$$

Δραστηριότητες

1. Κάποιος καταθέτει 1000 ευρώ με επιτόκιο 3% το χρόνο. Στο τέλος κάθε χρόνου ο τόκος ανακεφαλαιώνεται (δηλαδή ενσωματώνεται στο κεφάλαιο). Όταν το αρχικό ποσό ανατοκίζεται ετήσια, να υπολογίσετε ποιο θα είναι το ποσό του τελικού κεφαλαίου στο τέλος του:
(α) 3^{ου} χρόνου
(β) 6^{ου} χρόνου
2. Κάποιος καταθέτει το ποσό των 24000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 9%. Να υπολογίσετε σε 5 χρόνια το τελικό ποσό, όταν το αρχικό ποσό ανατοκίζεται ετήσια.
3. Ο πληθυσμός μιας χώρας αυξάνεται σύμφωνα με τον τύπο $P = 25 + 15 \cdot 2^{\frac{t}{24}}$, όπου P το μέγεθος του πληθυσμού (σε χιλιάδες) και t η χρονική στιγμή (σε χρόνια) μετά το 2015.
(α) Να υπολογίσετε τον πληθυσμό της χώρας το 2015.
(β) Να προβλέψετε τον πληθυσμό της χώρας το 2025.
4. Όταν ένα συγκεκριμένο φάρμακο χορηγείται σε ασθενείς, ο αριθμός σε μίλιγκραμς (mg) που παραμένει στο αίμα του ασθενή μετά από t ώρες δίνεται από τον τύπο $D(t) = 40 \cdot e^{-0,3t}$.
(α) Πόσα mg χορηγήθηκαν αρχικά στον ασθενή;
(β) Πόσα mg από το φάρμακο έχουν απομείνει στο αίμα ενός ασθενή ύστερα από 2 ώρες;

3.6 ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ

Ιστορικό Σημείωμα

Η επινόηση της έννοιας των λογαρίθμων έγινε από τον John Napier (1550 – 1617) που δεν ήταν μαθηματικός. Η προσέγγιση της έννοιας έγινε μέσω αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων (που θα γνωρίσουμε σε επόμενο κεφάλαιο).

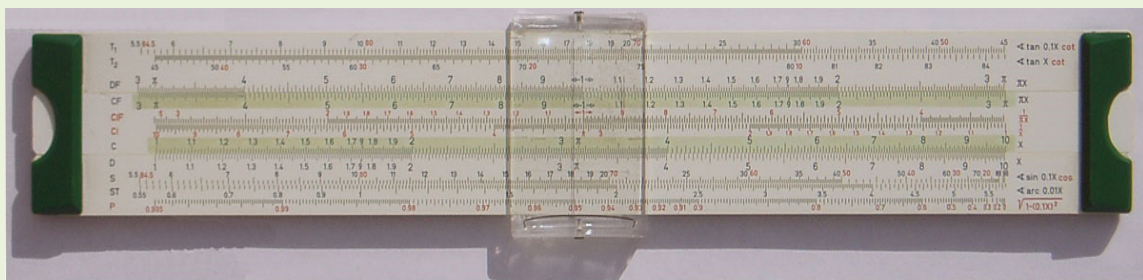
Η ανακάλυψη βοήθησε πάρα πολύ τους επιστήμονες εκείνης της εποχής, κυρίως αστρονόμους, διότι απετέλεσε μια τεχνική πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μεγάλων αριθμών με ευκολότερο τρόπο. Συγκεκριμένα, με τους λογάριθμους οι πράξεις αυτές ανάγονταν σε πρόσθεση και αφαίρεση, αντίστοιχα.

Ο μαθηματικός και καθηγητής του πανεπιστημίου της Οξφόρδης Henry Briggs (1561 – 1631) συνάντησε τον Napier στη Σκωτία και συμφώνησαν να τροποποιήσουν κάποιες έννοιες που έφεραν τους λογάριθμους όπως είναι στη σημερινή μορφή.

Στις αρχές του 17^{ου} αιώνα επινοήθηκε και κατασκευάστηκε ο **λογαριθμικός κανόνας** για την εκτέλεση πράξεων, που στηρίζεται στις ιδιότητες των λογαρίθμων.

Η επινόησή του αποδίδεται στον Άγγλο μαθηματικό E. Gunter, χωρίς να παραβλέπεται και η προσφορά των John Napier, L. Euler, Jobst Burgi και άλλων.

Ο λογαριθμικός κανόνας χρησιμοποιήθηκε στα σχολεία της Κύπρου μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1970, όταν εμφανίστηκαν στην αγορά οι υπολογιστικές μηχανές και τον εκτόπισαν πολύ γρήγορα.



Διερεύνηση

Στους πιο κάτω πίνακες, η πρώτη γραμμή περιλαμβάνει φυσικούς αριθμούς από το 0 μέχρι το 20 και η δεύτερη γραμμή δυνάμεις του 2, με εκθέτη τον αντίστοιχο αριθμό της πρώτης γραμμής. Για παράδειγμα, ο 128 γράφεται ως 2^7 .

Πίνακας 1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Πίνακας 2

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576

- Να γράψετε τους αριθμούς 64 και 4096 ως δυνάμεις του 2.
- Ποιοι είναι οι εκθέτες των δύο δυνάμεων;
- Να πολλαπλασιάσετε τους αριθμούς 64 και 4096 με μορφή δυνάμεων. Τι παρατηρείτε; Ποιος είναι ο εκθέτης του αποτελέσματος;
- Να επιλέξετε δύο άλλους αριθμούς από τους πιο πάνω πίνακες και να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία του πολλαπλασιασμού τους.
- Να πάρετε δύο αριθμούς της δεύτερης σειράς και να υπολογίσετε το πηλίκο τους.
- Ποιοι είναι οι κανόνες πολλαπλασιασμού και διαίρεσης που μπορείτε να εξαγάγετε από την πιο πάνω διαδικασία;

Έχουμε μάθει ότι στην ισότητα $2^6 = 64$, το 2 ονομάζεται βάση και το 6 εκθέτη της δύναμης 2^6 , η οποία μας δίνει αποτέλεσμα $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$. Δηλαδή, «ο αριθμός που έχει βάση το 3 και εκθέτη το 4» γράφεται συμβολικά 3^4 με $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Στην ισότητα $3^4 = 81$, ο αριθμός 4 είναι ο εκθέτης ο οποίος με βάση 3 μας δίνει το 81. Μια πιθανή ερώτηση η οποία προκύπτει από αυτή την ισότητα είναι:

«Πώς θα μπορούσαμε να εκφράσουμε τι παριστάνει το 4 στην ισότητα $3^4 = 81$ και με ποιο συμβολικό τρόπο θα το γράφαμε»;

Έχουμε γνωρίσει στην εκθετική συνάρτηση ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό a , διάφορο της μονάδας, και για κάθε θετικό αριθμό β , υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x (ρητός ή άρρητος) με την ιδιότητα $a^x = \beta$.

Ορισμός

Ο μοναδικός πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει

$$a^x = \beta, \text{ όπου } a > 0, a \neq 1, \beta > 0,$$

ονομάζεται **λογάριθμος του β με βάση a** και συμβολίζεται με $\log_a \beta$.

Δηλαδή όταν $a^x = \beta$, γράφουμε ισοδύναμα $x = \log_a \beta$.

Έτσι, στην ισότητα $3^4 = 81$, το 4 είναι ο εκθέτης που με βάση το 3 μας δίνει τον αριθμό 81. Ισοδύναμα, λέμε ότι: «το 4 είναι ο λογάριθμος του 81 με βάση 3» και συμβολικά γράφουμε:

$$4 = \log_3 81 \text{ (ή } 4 = \log_3 81)$$

Έτσι, από μια εκθετική ισότητα μπορούμε να έχουμε την αντίστοιχη λογαριθμική ισότητα:

$$\underbrace{3^4 = 81}_{\text{εκθετική ισότητα}} \Leftrightarrow \underbrace{4 = \log_3 81}_{\text{λογαριθμική ισότητα}}$$

Ο $\log_2 64$ διαβάζεται «λογάριθμος του 64 με βάση το 2» και ισούται με τον εκθέτη της δύναμης 2^6 , που είναι το 6.

$$2^6 = 64 \Leftrightarrow 6 = \log_2 64$$

Γενικά ο $\log_a \beta$ είναι ο εκθέτης μίας δύναμης, ο οποίος με βάση το a μας δίνει το β . Ισοδύναμα, έχουμε για $a > 0, a \neq 1, \beta > 0$ και $x \in \mathbb{R}$:

$$a^x = \beta \Leftrightarrow x = \log_a \beta \Leftrightarrow a^{\log_a \beta} = \beta$$

Λογαριθμική μορφή	Εκθετική μορφή
<p>$\log_a x = y$</p>	<p>$a^y = x$</p>

Παρατηρήσεις

- Στις δύο ισότητες (εκθετική – λογαριθμική μορφή) η βάση a , ($a \neq 1$) είναι η ίδια.
- Ο λογάριθμος ενός θετικού αριθμού x που έχει βάση το $a = 10$ ονομάζεται **δεκαδικός λογάριθμος του x** και συμβολίζεται πιο απλά με **logx** αντί με $\log_{10} x$.

Γράφουμε ισοδύναμα:

$$10^x = y \Leftrightarrow x = \log y$$

- Ο λογάριθμος ενός θετικού αριθμού x που έχει βάση τον άρρητο αριθμό $a = e$, που έχει προσεγγιστική τιμή $e = 2,71828 \dots$, ονομάζεται **φυσικός λογάριθμος του x** και συμβολίζεται με **lnx** αντί με $\log_e x$.

Γράφουμε ισοδύναμα:

$$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y, y > 0$$

Παράδειγμα 1

Να εξηγήσετε λεκτικά τι εκφράζουν οι πραγματικοί αριθμοί, χωρίς να κάνετε υπολογισμούς:

(α) $\log_2 3$

(β) $\log 7$

(γ) $\ln 20$

Λύση

(α) Ο πραγματικός αριθμός $\log_2 3$, όταν είναι εκθέτης σε δύναμη με βάση 2, το αποτέλεσμα είναι ίσο με 3.

(β) Ο πραγματικός αριθμός $\log 7$, όταν είναι εκθέτης σε δύναμη με βάση 10, το αποτέλεσμα είναι ίσο με 7.

(γ) Ο πραγματικός αριθμός $\ln 20$, όταν είναι εκθέτης σε δύναμη με βάση e , το αποτέλεσμα είναι ίσο με 20.

Παράδειγμα 2

Να εκφράσετε τις πιο κάτω εκθετικές ισότητες με τις αντίστοιχες ισοδύναμες λογαριθμικές ισότητες:

(α) $7^2 = 49$

(β) $10^6 = 1000000$

(γ) $2^{-5} = \frac{1}{32}$

(δ) $6^0 = 1$

(ε) $\sqrt{81} = 9$

(στ) $32^{\frac{2}{5}} = 4$

Λύση

(α) $7^2 = 49 \Leftrightarrow 2 = \log_7 49$

(β) $10^6 = 1000000 \Leftrightarrow 6 = \log_{10} 1000000 = \log 1000000$

(γ) $2^{-5} = \frac{1}{32} \Leftrightarrow -5 = \log_2 \frac{1}{32}$

(δ) $6^0 = 1 \Leftrightarrow 0 = \log_6 1$

(ε) $\sqrt{81} = 9 \Leftrightarrow 81^{\frac{1}{2}} = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \log_{81} 9$

(στ) $32^{\frac{2}{5}} = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \log_{32} 4$

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω λογαρίθμων:

(α) $\log_3 9$

(β) $\log_{10} 10000$

(γ) $\log_5 \left(\frac{1}{5}\right)$

(δ) $\log_e e^3$

(ε) $\log_a \sqrt{a}$

(στ) $\log_k k$

(ζ) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$

(η) $\log_{a^3} a$

Λύση

- (α) $\log_3 9 = x \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$
(β) $\log_{10} 10000 = x \Leftrightarrow 10^x = 10000 \Leftrightarrow 10^x = 10^4 \Leftrightarrow x = 4$
(γ) $\log_5 \left(\frac{1}{5}\right) = x \Leftrightarrow 5^x = \frac{1}{5} = 5^{-1} \Leftrightarrow x = -1$
(δ) $\log_e e^3 = x \Leftrightarrow e^x = e^3 \Leftrightarrow x = 3$
(ε) $\log_a \sqrt{a} = x \Leftrightarrow a^x = \sqrt{a} \Leftrightarrow a^x = a^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
(στ) $\log_k k = x \Leftrightarrow k^x = k \Leftrightarrow k^x = k^1 \Leftrightarrow x = 1$
(ζ) $\ln \left(\frac{1}{e^2}\right) = x \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e^2} \Leftrightarrow e^x = e^{-2} \Leftrightarrow x = -2$
(η) $\log_{a^3} a = x \Leftrightarrow (a^3)^x = a \Leftrightarrow a^{3x} = a \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Παράδειγμα 4

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του λογαρίθμου, για να υπολογίσετε την τιμή του x στις πιο κάτω περιπτώσεις:




- (α) $\log_x 20 = 3$
(β) $\log_5(2x + 3) = 2$
(γ) $3\log x = -9$
(δ) $\ln(x - 7) = 3$
(ε) $\log_9 27 = x + 1$

Λύση

- (α) $\log_x 20 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 20 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{20}$
(β) $\log_5(2x + 3) = 2 \Leftrightarrow 2x + 3 = 5^2 \Leftrightarrow 2x = 25 - 3 \Leftrightarrow 2x = 22 \Leftrightarrow x = 11$
(γ) $3\log x = -9 \Leftrightarrow \log x = \frac{-9}{3} \Leftrightarrow \log x = -3 \Leftrightarrow x = 10^{-3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$
(δ) $\ln(x - 7) = 3 \Leftrightarrow x - 7 = e^3 \Leftrightarrow x = (7 + e^3)$
(ε) $\log_9 27 = x + 1 \Leftrightarrow 9^{x+1} = 27 \Leftrightarrow (3^2)^{x+1} = 3^3 \Leftrightarrow 3^{2x+2} = 3^3$
 $\Leftrightarrow 2x + 2 = 3 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Πολλές φορές δεν είναι δυνατόν να υπολογίσουμε λογάριθμους θετικών αριθμών, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής. Δεν θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε, έστω και με μια μικρή προσέγγιση, αριθμούς όπως τον $\log 7$, τον $\ln 20$ ή τον $\log_2 3$, αν δεν χρησιμοποιήσουμε υπολογιστική μηχανή.

Για παράδειγμα, αναζητώντας τον πραγματικό αριθμό x με $x = \log 7$, βασικά αναζητούμε τον εκθέτη x στην ισότητα $10^x = 7$, ο οποίος δεν υπολογίζεται και τόσο απλά. Επομένως, η χρήση υπολογιστικής μηχανής είναι αναπόφευκτη. Για τον υπολογισμό των λογαρίθμων $\log 7$, $\ln 20$ και $\log_2 3$, εκτελούμε σε υπολογιστική μηχανή τις εντολές, όπως αυτές φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

Λογάριθμος	Πλήκτρα υπολογιστικής	Αποτέλεσμα
$\log 7$		0,845098 ...
$\ln 20$		2,995732 ...
$\log_2 3$		1,584963 ...

Παράδειγμα 5

Να λύσετε τις πιο κάτω εκθετικές εξισώσεις, δίνοντας την απάντησή σας:

- στην ακριβή της μορφή
- με προσέγγιση 3 δεκαδικών ψηφίων

- $10^x = 33$
- $e^{x+2} = 4$
- $3 \cdot 2^{x-1} = 30$

Λύση

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του λογάριθμου, δηλαδή την ισοδυναμία μεταξύ εκθετικής και λογαριθμικής ισότητας, και με τη βοήθεια της υπολογιστικής μηχανής έχουμε:

- $10^x = 33 \Leftrightarrow x = \log 33$
 $\log 33 \approx 1,519$

(ακριβής απάντηση)
(με υπολογιστική μηχανή)
- $e^{x+2} = 4 \Leftrightarrow x + 2 = \ln 4 \Leftrightarrow x = \ln 4 - 2$
 $x = \ln 4 - 2 \approx 1,386 - 2 \approx -0,614$

(ακριβής απάντηση)
(με υπολογιστική μηχανή)
- $3 \cdot 2^{x-1} = 30 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 10$
 $\Leftrightarrow x - 1 = \log_2 10 \Leftrightarrow x = 1 + \log_2 10$
 $x = 1 + \log_2 10 \approx 1 + 3,322 \approx 4,322$

(ακριβής απάντηση)
(με υπολογιστική μηχανή)

Παράδειγμα 6

Καταθέσαμε στην τράπεζα το ποσό των $K_0 = \text{€}5000$ το οποίο ανατοκίστηκε προς 4% ετήσια. Αν ύστερα από n χρόνια το αρχικό ποσό γίνει ίσο με $K_n = 5000 \cdot (1,04)^n$, να υπολογίσετε σε πόσα χρόνια το αρχικό ποσό:

- γίνεται $\text{€}8000$
- διπλασιάζεται

Λύση

(α) Αφού έχουμε ότι $K_v = 8000$ και $K_0 = 5000$, τότε προκύπτει η εκθετική εξίσωση

$$8000 = 5000 \cdot (1,04)^v,$$

η οποία έχει άγνωστο τον εκθέτη v .

$$8000 = 5000 \cdot (1,04)^v \Leftrightarrow (1,04)^v = \frac{8}{5} = 1,6 \Leftrightarrow v = \log_{1,04}(1,6) \approx 11,98 \dots$$

Δηλαδή χρειάζονται περίπου 12 χρόνια για να μετατραπούν €5000 σε €8000, όταν αυτά ανατοκίζονται ετήσια προς 4%.

(β) Για να διπλασιαστεί το αρχικό ποσό των €5000 πρέπει να υπολογίσουμε το v , ώστε το $K_v = 10000$. Έχουμε:

$$10000 = 5000 \cdot (1,04)^v \Leftrightarrow (1,04)^v = 2 \Leftrightarrow v = \log_{1,04}(2) \approx 17,67 \dots$$

Δηλαδή, χρειάζονται περίπου 17,7 χρόνια, για να διπλασιαστεί το αρχικό ποσό, όταν αυτό ανατοκίζεται ετήσια προς 4%.

Δραστηριότητες

- Να εξηγήσετε λεκτικά τι εκφράζουν οι λογάριθμοι, χωρίς να κάνετε υπολογισμούς:
(δ) $\log_3 5$ (ε) $\log 17$ (στ) $\ln 10$
- Να εκφράσετε τις πιο κάτω εκθετικές ισότητες με τις αντίστοιχες ισοδύναμες λογαριθμικές ισότητες:
(α) $5^3 = 125$ (β) $3^{-3} = \frac{1}{27}$ (γ) $4^0 = 1$
(δ) $10^{-4} = \frac{1}{10000}$ (ε) $\sqrt[3]{8} = 2$ (στ) $4^{\frac{3}{2}} = 8$
- Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω λογαρίθμων:
(α) $\log_2 32$ (β) $\log_8 64$ (γ) $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$ (δ) $\ln e^7$
(ε) $\log_a \sqrt[3]{a^2}$ (στ) $\log_k k^{10}$ (ζ) $\log_4 4$ (η) $\ln \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$
- Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του λογάριθμου, για να υπολογίσετε το x στις πιο κάτω περιπτώσεις:
(α) $\log_x 10 = 2$ (β) $\log_3(4x - 1) = 4$ (γ) $\log x = -9$ (δ) $\ln x = 1$
(ε) $\log_9 x = 0$ (στ) $\log(x + 1) = 3$ (ζ) $\log_2 2\sqrt{2} = x$ (η) $\log_x 8 = \frac{3}{2}$
- Να χρησιμοποιήσετε, την ισοδυναμία μεταξύ εκθετικής και λογαριθμική ισότητας για να υπολογίσετε το x στις πιο κάτω περιπτώσεις δίνοντας την απάντησή σας σε 2 δεκαδικά ψηφία:
(α) $10^x = 5$ (β) $2^x = 10$ (γ) $(1,05)^x = 2$
(δ) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = 4$ (ε) $e^x = 20$ (στ) $2^x = -8$
- Ένα αρχικό κεφάλαιο $K_0 = \text{€}20000$ επενδύεται με σταθερό επιτόκιο $\varepsilon = 3\%$ το οποίο, ύστερα από ένα χρονικό διάστημα t ετών, γίνεται $K_t = \text{€}23185,48$.
Να υπολογίσετε το t και να το ερμηνεύσετε, αν γνωρίζετε ότι $K_t = K_0(1 + \varepsilon)^t$.
- Η τιμή T (σε ευρώ) ενός καινούριου αυτοκινήτου μειώνεται από τη στιγμή που θα αγοραστεί σε σχέση με το χρόνο t (σε χρόνια), σύμφωνα με την εξίσωση $T = 10000 \cdot e^{-\frac{t}{12}}$. Να υπολογίσετε:
(α) την αρχική αξία του αυτοκινήτου
(β) την αξία του αυτοκινήτου ύστερα από 3 χρόνια
(γ) σε πόσα χρόνια η τιμή του αυτοκινήτου θα είναι η μισή της αρχικής τιμής;

3.7 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

Τόσο από τον ορισμό του λογάριθμου, όσο και από την ισοδυναμία εκθετικής - λογαριθμικής ισότητας, αποδεικνύονται οι πρώτες ιδιότητες των λογαρίθμων. Πιο κάτω αναφέρονται ορισμένες ιδιότητες των λογαρίθμων, οι οποίες πηγάζουν άμεσα από το ορισμό του ίδιου του λογάριθμου $\log_a x$, όταν το $x > 0$ και $a > 0, a \neq 1$, για συγκεκριμένες τιμές του x .

Ιδιότητες λογάριθμου	Αιτιολόγηση	Παραδείγματα
1. $\log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$	✓ $\log_5 1 = 0$ ✓ $\log 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$	$a^1 = a$	➤ $\log_7 7 = 1$ ➤ $\log 10 = 1$
3. $\log_a a^x = x$	$a^x = a^x$	✓ $\ln e^4 = 4$ ✓ $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$
4. $a^{\log_a x} = x$	$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$ $\Leftrightarrow a^{\log_a x} = x$	➤ $3^{\log_3 15} = 15$ ➤ $e^{\ln \kappa} = \kappa$ ➤ $10^{\log 8} = 8$

Παράδειγμα 1

Χρησιμοποιώντας τις πιο πάνω ιδιότητες, να υπολογίσετε τις τιμές των λογαρίθμων:

- | | | |
|-------------------------|--------------------|--------------------|
| (α) $\log_2 16$ | (β) $\log 1000$ | (γ) $\log_8 1$ |
| (δ) $\log_2(\log_3 81)$ | (ε) $10^{\log 16}$ | (στ) $e^{\ln(2x)}$ |

Λύση

(α) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ (ιδιότητα $\log_a a^y = y$)

(β) $\log 1000 = \log 10^3 = 3$ (ιδιότητα $\log_a a^y = y$)

(γ) $\log_8 1 = 0$ (ιδιότητα $\log_a 1 = 0$)

(δ) $\log_2(\log_3 81) = \log_2(\log_3 3^4) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$ (ιδιότητα $\log_a a^y = y$)

(ε) $10^{\log 16} = 16$ (ιδιότητα: $a^{\log_a x} = x$, με $a = 10$)

(στ) $e^{\ln(2x)} = 2x$ (ιδιότητα: $a^{\log_a x} = x$, με $a = e$)

Οι λογάριθμοι θετικών αριθμών αντιπροσωπεύονται από τους εκθέτες σε μια εκθετική ισότητα. Γνωρίζουμε επίσης αρκετές ιδιότητες δυνάμεων, οι οποίες δίνουν αντίστοιχες ιδιότητες λογαρίθμων. Αν έχουμε τους πραγματικούς θετικούς αριθμούς a, x, y ($a \neq 1$) και $\kappa \in \mathbb{R}$, τότε ισχύουν και οι πιο κάτω ιδιότητες:

Ιδιότητα	Λεκτική περιγραφή
1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$	Ο λογάριθμος του γινομένου δύο αριθμών είναι ίσος με το άθροισμα των λογαρίθμων των αριθμών.
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	Ο λογάριθμος του πηλίκου δύο αριθμών είναι ίσος με τη διαφορά των λογαρίθμων των αριθμών.
3. $\log_a A^\kappa = \kappa \cdot \log_a A$	Ο λογάριθμος της δύναμης ενός αριθμού είναι ίσος με το γινόμενο του εκθέτη της δύναμης επί τον λογάριθμο του αριθμού.

Απόδειξη

Θέτουμε: $\log_a x = A$, $\log_a y = B$

Τότε από τον ορισμό έχουμε: $a^A = x$, $a^B = y$

Με χρήση της ιδιότητας $\log_a a^y = y$, έχουμε:

- $\log_a(xy) = \log_a(a^A \cdot a^B) = \log_a(a^{A+B}) = A + B = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(\frac{a^A}{a^B}\right) = \log_a(a^{A-B}) = A - B = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^\kappa) = \log_a(a^A)^\kappa = \log_a(a^{\kappa A}) = \kappa \cdot A = \kappa \cdot \log_a x$

Παράδειγμα 2

Να δείξετε ότι ΔΕΝ ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες, δίνοντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα:

(α) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log_a x}{\log_a y}$

(β) $\log_a(xy) = \log_a x \cdot \log_a y$

(γ) $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$

(δ) $(\log_a x)^n = n \cdot \log_a x$

Λύση

(α) Έχουμε: $\log\left(\frac{100}{10}\right) = \log 10 = 1$, $\frac{\log 100}{\log 10} = 2$. Άρα, $\log\left(\frac{100}{10}\right) \neq \frac{\log 100}{\log 10}$.

(β) Έχουμε: $\ln(2e) = \ln 2 + \ln e = \ln 2 + 1$, $\ln 2 \cdot \ln e = \ln 2$. Άρα, $\ln(2e) \neq \ln 2 \cdot \ln e$.

(γ) Έχουμε: $\log_2(4 + 8) = \log_2 12 = \log_2(4 \cdot 3) = \log_2 4 + \log_2 3 = 2 + \log_2 3$,
 $\log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$

Άρα, $\log_2(4 + 8) \neq \log_2 4 + \log_2 8$

(δ) Έχουμε: $(\log_3 9)^3 = 2^3 = 8$, $3 \cdot \log_3 9 = 3 \cdot 2 = 6$. Άρα, $(\log_3 9)^3 \neq 3 \cdot \log_3 9$.

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων, χρησιμοποιώντας ιδιότητες των λογαρίθμων:

$$(\alpha) \log_8 16 + \log_8 4$$

$$(\beta) \log_5 50 - \log_5 2$$

$$(\gamma) \log_{13} \sqrt[3]{169}$$

$$(\delta) \frac{\log_2 8}{\log_2 16}$$

Λύση

$$(\alpha) \log_8 16 + \log_8 4 = \log_8 (16 \cdot 4)$$

$$\text{(ιδιότητα } \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y)$$

$$= \log_8 64$$

$$= \log_8 8^2 = 2$$

$$\text{(ιδιότητα } \log_a a^y = y)$$

$$(\beta) \log_5 50 - \log_5 2 = \log_5 \left(\frac{50}{2}\right)$$

$$\text{(ιδιότητα } \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y)$$

$$= \log_5 (25)$$

$$= \log_5 (5^2) = 2$$

$$\text{(ιδιότητα } \log_a a^y = y)$$

$$(\gamma) \log_{13} \sqrt[3]{169} = \log_{13} (13^2)^{\frac{1}{3}} = \log_{13} (13^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}$$

$$\text{(ιδιότητα } \log_a a^y = y)$$

$$(\delta) \frac{\log_2 8}{\log_2 16} = \frac{\log_2 (2^3)}{\log_2 (2^4)} = \frac{3 \cdot \log_2 2}{4 \cdot \log_2 2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{(ιδιότητες } \log_a x^k = k \cdot \log_a x \text{ και } \log_a a = 1)$$

Παράδειγμα 4

Να εκφράσετε την παράσταση $\log_a x + \log_a y - 3 \log_a z$ ως παράσταση ενός λογαρίθμου.

Λύση

Επειδή $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$ και $3 \log_a z = \log_a z^3$, η παράσταση γράφεται:

$$\log_a x + \log_a y - 3 \log_a z = \log_a(xy) - \log_a z^3 = \log_a \left(\frac{xy}{z^3}\right)$$

Παράδειγμα 5

$$(\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι: } \log 16 + \log 25 - \log 4 = 2$$

$$(\beta) \text{ Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: } \frac{\ln 50 - \ln 2}{\ln 5 + \ln \sqrt{5}}$$

Λύση

$$(\alpha) \log 16 + \log 25 - \log 4 = \log(16 \cdot 25) - \log 4 = \log \left(\frac{16 \cdot 25}{4}\right) = \log 100 = \log 10^2 = 2$$

$$(\beta) \frac{\ln 50 - \ln 2}{\ln 5 + \ln \sqrt{5}} = \frac{\ln \left(\frac{50}{2}\right)}{\ln 5 + \ln 5^{\frac{1}{2}}} = \frac{\ln 25}{\ln 5^{\frac{3}{2}}} = \frac{\ln 5^2}{\ln 5^{\frac{3}{2}}} = \frac{2 \cdot \ln 5}{\frac{3}{2} \ln 5} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

Παράδειγμα 6

Αν $\log 2 = a$ και $\log 3 = \beta$, να εκφράσετε συναρτήσει των a, β τους πιο κάτω λογαρίθμους:

- (α) $\log 5$ (β) $\log 6$ (γ) $\log 8$ (δ) $\log 50$ (ε) $\log(6^{10})$

Λύση

- (α) $\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - a$
(β) $\log 6 = \log(3 \cdot 2) = \log 3 + \log 2 = \beta + a$
(γ) $\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2 = 3a$
(δ) $\log 50 = \log\left(\frac{100}{2}\right) = \log 100 - \log 2 = 2 - a$
(ε) $\log(6^{10}) = 10 \cdot \log 6 = 10(a + \beta)$

Ένας λογάριθμος, που έχει βάση a , μπορεί να γραφεί ισοδύναμα, με οποιαδήποτε άλλη βάση, αρκεί αυτή να είναι θετική. Έτσι ισχύει ότι:

$$\log_a M = \frac{\log_\beta M}{\log_\beta a}, \text{ όπου } a, \beta, M > 0, a \neq 1, \beta \neq 1$$

Για παράδειγμα, $\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3}$ ή $\log_3 x = \frac{\log 4}{\log 3}$ ή $\log_3 x = \frac{\ln 4}{\ln 3}$ κτλ.

Απόδειξη

Έστω $a, \beta, M > 0, a \neq 1, \beta \neq 1$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \log_a M = y &\Leftrightarrow a^y = M && \text{(ορισμός του λογάριθμου)} \\ &\Leftrightarrow \log_\beta(a^y) = \log_\beta M && \text{(Αφού } f(x) = \log_\beta x, x > 0, 1 - 1 \text{ συνάρτηση,} \\ &&& \text{τότε ισχύει } x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)) \\ &\Leftrightarrow y \cdot \log_\beta a = \log_\beta M && \Leftrightarrow y = \frac{\log_\beta M}{\log_\beta a} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7

Να αποδείξετε ότι:

- (α) $\log_a \beta = \frac{1}{\log_\beta a}$
(β) $\log_{a^\rho} \beta = \frac{1}{\rho} \cdot \log_a \beta$

Απόδειξη

- (α) $\log_a \beta = \frac{\log_\beta \beta}{\log_\beta a} = \frac{1}{\log_\beta a}$
(β) $\log_{a^\rho} \beta = \frac{\log_\beta \beta}{\log_\beta a^\rho} = \frac{1}{\rho \cdot \log_\beta a} = \frac{1}{\rho} \cdot \log_a \beta$

Παράδειγμα 8

Να υπολογίσετε την ακριβή τιμή των παραστάσεων:

$$(α) \log_8 4 \quad (β) \log_{16} 2 \cdot \log_2 16 \quad (γ) \log_5 32 \cdot \log_2 125 \quad (δ) \frac{\log 8}{\log 2}$$

Λύση

$$(α) \log_8 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 2^3} = \frac{2}{3} \quad \left(\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}\right)$$

$$(β) \log_{16} 2 \cdot \log_2 16 = \frac{\log_2 2}{\log_2 16} \cdot \log_2 16 = \log_2 2 = 1 \quad \left(\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}\right)$$

$$(γ) \log_5 32 \cdot \log_2 125 = \log_5 2^5 \cdot \log_2 5^3 = (5 \log_5 2) \cdot (3 \log_2 5) = 15 \cdot \log_5 2 \cdot \frac{\log_5 5}{\log_5 2} = 15$$

$$(δ) \frac{\log 8}{\log 2} = \log_2 8 = 3 \quad \left(\frac{\log_b M}{\log_b a} = \log_a M\right)$$

Παράδειγμα 9

Να αποδείξετε ότι: $\log_x y \cdot \log_y x = 1$, όπου $x, y > 0, x \neq 1, y \neq 1$

Λύση

Έστω $x, y > 0, x \neq 1, y \neq 1$. Έχουμε:

$$\log_x y \cdot \log_y x = \log_x y \cdot \frac{1}{\log_x y} = 1$$

Δραστηριότητες

1. Να εφαρμόσετε ιδιότητες λογάριθμων στις πιο κάτω παραστάσεις:

$$\begin{array}{lll} (\alpha) \log_3(3x) & (\beta) \log(x^2 \cdot y) & (\gamma) \log\left(\frac{x^3}{\sqrt{y}}\right) \\ (\delta) \log_5\left(\frac{25}{\sqrt[3]{a}}\right) & (\epsilon) \log\left(\frac{1}{1000xy}\right) & (\sigma\tau) \log\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{\beta}}\right) \end{array}$$

2. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) \log 45 - \log 3 = \log 5 + \log 3 & (\beta) 2\log 3 + 3\log 2 = \log 360 - \log 5 \\ (\gamma) \frac{\log 36}{\log 6} = 2 & (\delta) \frac{\log 4 + \log 8}{\log \sqrt[3]{2}} = 15 \end{array}$$

3. Αν $\log_2 x = a$, να εκφράσετε συναρτήσει του a τις ακόλουθες παραστάσεις:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) \log_2 x^2 & (\beta) \log_2\left(\frac{x^6}{64}\right) \\ (\gamma) \log_2\left(\frac{\sqrt{x}}{4}\right) & (\delta) \log_2 x^3 - \log_2 \sqrt[3]{x} \end{array}$$

4. Αν $\log 2 = a$ και $\log 5 = \beta$, να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων συναρτήσει των a, β :

$$\begin{array}{ll} (\alpha) \log 10 & (\beta) \log 40 \\ (\gamma) \log(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{25}) & (\delta) \log\left(\frac{4}{125}\right) \end{array}$$

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

$$\begin{array}{l} (\alpha) (\log_7 3) \cdot (\log_3 49) \\ (\beta) \frac{\log_2 9}{\log_8 81} \end{array}$$

6. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{array}{l} (\alpha) \log_a \beta \cdot \log_\beta \gamma \cdot \log_\gamma a = 1, \text{ όπου } a, \beta, \gamma > 0, a \neq 1, \beta \neq 1, \gamma \neq 1 \\ (\beta) \log_x y^2 \cdot \log_y x^5 = 10, \text{ όπου } x, y > 0, x \neq 1, y \neq 1 \end{array}$$

3.8 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Διερεύνηση

(α) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας τα σημεία της που παρουσιάζονται στο γράφημα G_1 με:

$$G_1 = \{ \dots (-3, 2^{-3}), (-2, 2^{-2}), (-1, 2^{-1}), (0, 2^0), (1, 2^1), (2, 2^2), (3, 2^3), \dots \}$$

(β) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να παραστήσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , η οποία έχει γράφημα G_2 με:

$$G_2 = \{ \dots (2^{-3}, -3), (2^{-2}, -2), (2^{-1}, -1), (2^0, 0), (2^1, 1), (2^2, 2), (2^3, 3), \dots \}$$

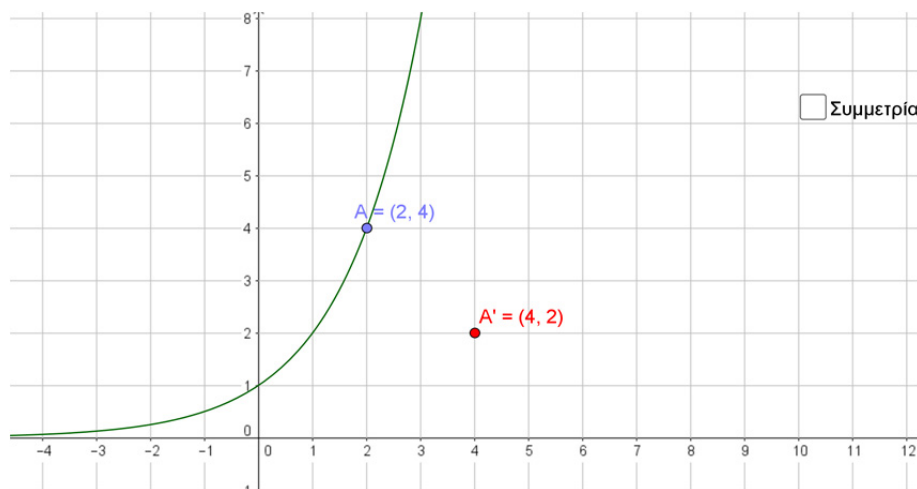
(γ) Να βρείτε το είδος της συμμετρίας που παρουσιάζουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

(δ) Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση g είναι $1 - 1$.

(ε) Να υπολογίσετε το $g(2^{2016})$.

(στ) Να αναφέρετε μεταξύ ποιων ακέραιων αριθμών βρίσκεται η τιμή $g(10)$ και από τη γραφική παράστασή της, να δώσετε προσέγγιση 1 δεκαδικού ψηφίου.

(ζ) Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «[Blyk_Kor_En03_logarithmiki.ggb](#)» και να μετακινήσετε το σημείο A , το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$. Να εξηγήσετε ποια είναι η γραφική παράσταση που σχηματίζεται από το σημείο A' .



Ορισμός

Η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \log_a x$, με $a > 0, a \neq 1$, ονομάζεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση a** .

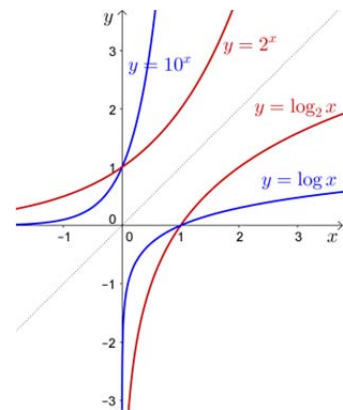
Παρατηρήσεις

- Αν (κ, λ) είναι ένα σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \log_a x$, τότε το σημείο (λ, κ) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^x$, γιατί ισχύει η ισοδυναμία $\lambda = \log_a \kappa \Leftrightarrow a^\lambda = \kappa$.
- Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ και η αντίστοιχη λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

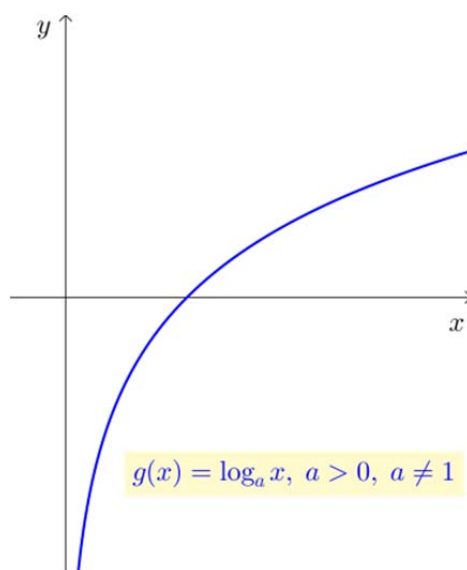
Στο πιο κάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο εκθετικών συναρτήσεων και οι αντίστοιχες λογαριθμικές τους.

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με τύπο $f(x) = 10^x$ και η αντίστοιχη λογαριθμική συνάρτηση $f_1: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f_1(x) = \log_{10} x$.

Η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με τύπο $g(x) = 2^x$ και η αντίστοιχη λογαριθμική συνάρτηση $g_1: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g_1(x) = \log_2 x$.



- Η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$ είναι 1 – 1.



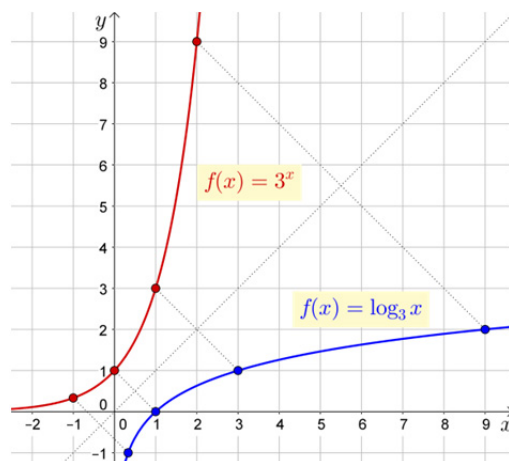
Παράδειγμα 1

Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log_3 x$, επεξηγώντας τον τρόπο με τον οποίο θα εργαστείτε.

Λύση

1^{ος} τρόπος

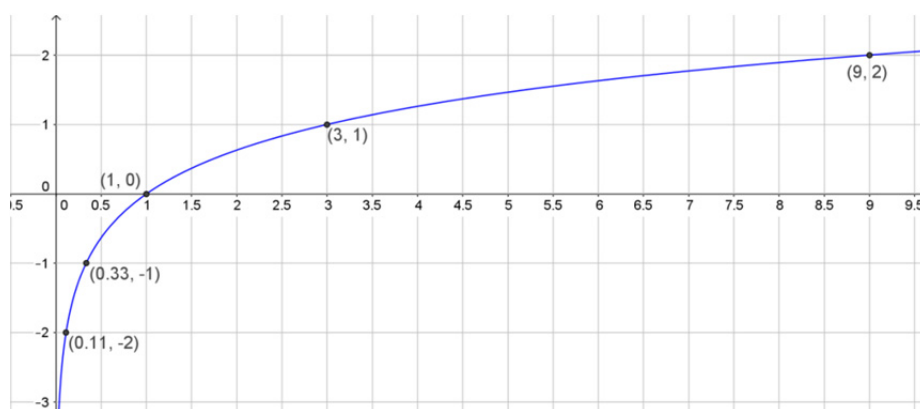
Αφού οι συναρτήσεις $f(x) = \log_3 x$ και $g(x) = 3^x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, παριστάνουμε τη γραφική παράσταση της g με τη βοήθεια των σημείων $(-1, \frac{1}{3}), (0, 1), (1, 3), (2, 9)$. Στη συνέχεια, βρίσκουμε τα αντίστοιχα συμμετρικά σημεία ως προς την $y = x$, που είναι τα $(\frac{1}{3}, -1), (1, 0), (3, 1), (9, 2)$, και τα οποία είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f .



2^{ος} τρόπος

Υπολογίζουμε σημεία που ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log_3 x$, χρησιμοποιώντας κατάλληλο πίνακα τιμών. Στη θέση του x επιλέγουμε (όχι τυχαία) τιμές της μορφής $x = 3^k$ και έχουμε ως αντίστοιχη τιμή την $y = \log_3 x = \log_3 3^k = k$. Έτσι, δημιουργείται ο πιο κάτω πίνακας, ο οποίος μας δίνει σημεία με ακέραιες συντεταγμένες.

$x = 3^k$	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^0	3^1	3^2	3^3
$y = \log_3 x = k$	-3	-2	-1	0	1	2	3



Παράδειγμα 2

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f_1(x) = \log(4 - x)$

(β) $f_2(x) = \ln(x^2)$

(γ) $f_3(x) = \log_2\left(\frac{x-1}{2-x}\right)$

(δ) $f_4(x) = \log_x(2x - 1)$

Λύση

(α) Για τη συνάρτηση f_1 , πρέπει να ισχύει: $4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4$

Επομένως, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A_1 = (4, +\infty)$.

(β) Για τη συνάρτηση f_2 , πρέπει να ισχύει: $x^2 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

Επομένως, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A_2 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(γ) Για τη συνάρτηση f_3 , πρέπει να ισχύει: $\frac{x-1}{2-x} > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

Επομένως, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A_3 = (1, 2)$.

(δ) Για τη συνάρτηση f_4 , πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x > 0 \text{ και } x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \text{ και } x \neq 1$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A_4 = (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$.

Δραστηριότητες

1. Να κατασκευάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \log_4 x$ και $g(x) = \log_6 x$.
2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:
(α) $f(x) = \log_2(x - 3)$ (β) $g(x) = \log(1 - x^2)$ (γ) $h(x) = \ln(2x - 4)$
3. Να βρείτε τις συναρτήσεις που είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:
(α) $f(x) = 7^x, x \in \mathbb{R}$ (β) $g(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x, x \in \mathbb{R}$ (γ) $h(x) = \log_5 x, x > 0$
4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:
(α) $f(x) = \log(x - 1)$ (β) $g(x) = \ln(x + 2)$ (γ) $h(x) = 1 + \log_2 x$

3.9 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ορισμός

Κάθε εξίσωση της μορφής $\log_a f(x) = \beta$, ή $\log_a f(x) = \log_\beta g(x)$, ονομάζεται **λογαριθμική εξίσωση**, με άγνωστο το x .

Για παράδειγμα, οι εξισώσεις $\log_2 x = 9$ και $\log(x - 1) = 2 \log x$ είναι λογαριθμικές, γιατί ο άγνωστος x , περιέχεται στο λογάριθμο.

Παρατηρήσεις

- Σε μια λογαριθμική εξίσωση ελέγχουμε κατά πόσο οι λύσεις είναι δεκτές. Μία λύση της εξίσωσης είναι δεκτή, όταν έχει έννοια ο λογάριθμος ως πραγματικός αριθμός.
- Σε μια λογαριθμική εξίσωση της μορφής $\log_a f(x) = \log_\beta g(x)$, υπάρχουν οι περιορισμοί $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$, οι οποίοι μας δίνουν τον σύνολο λύσεων της εξίσωσης.
- Αφού η λογαριθμική συνάρτηση, είναι 1-1 αυτό μας βοηθά στην επίλυση λογαριθμικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα,
 $\forall x_1, x_2 > 0, a > 0, a \neq 1$ ισχύει: $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Παράδειγμα 1

Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\log(3x - 2) = 2$

(β) $\log_2(x - 2) + \log_2 4 = \log_2 24 - \log_2 2$

Λύση

(α) Από την αρχική εξίσωση, έχουμε τον περιορισμό: $3x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$

$$\log(3x - 2) = 2 \Leftrightarrow 3x - 2 = 10^2 \Leftrightarrow 3x = 100 + 2 \Leftrightarrow 3x = 102 \Leftrightarrow x = 34$$

Η λύση είναι δεκτή, γιατί ισχύει $34 > \frac{2}{3}$.

(β) Από την αρχική εξίσωση, έχουμε τον περιορισμό: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

$$\begin{aligned} \log_2(x - 2) + \log_2 4 = \log_2 24 - \log_2 2 &\Leftrightarrow \log_2[4 \cdot (x - 2)] = \log_2\left(\frac{24}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow 4x - 8 = 12 \Leftrightarrow 4x = 20 \Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Η λύση είναι δεκτή γιατί ισχύει $5 > 2$.

Παράδειγμα 2

Να λύσετε την εξίσωση: $\log(x + 4) + \log(2x + 3) = \log(1 - 2x)$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\log(x + 4) + \log(2x + 3) = \log(1 - 2x) &\Rightarrow \log[(x + 4) \cdot (2x + 3)] = \log(1 - 2x) \\ &\Rightarrow (x + 4) \cdot (2x + 3) = 1 - 2x \\ &\Rightarrow 2x^2 + 13x + 11 = 0\end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση, βρίσκουμε $x = -1$ ή $x = -\frac{11}{2}$.

Ελέγχουμε κατά πόσο οι δύο λύσεις είναι δεκτές.

Αν $x = -\frac{11}{2}$ ο λογάριθμος $\log(x + 4)$ δεν ορίζεται γιατί $x + 4 = -\frac{11}{2} + 4 = -\frac{3}{2} < 0$.

Επομένως η λύση $x = -\frac{11}{2}$ απορρίπτεται.

Η λύση $x = -1$ είναι δεκτή, γιατί για $x = -1$ ισχύει $\begin{cases} x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \\ 1 - 2x > 0 \end{cases}$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να εργαστούμε και ως εξής:

Από την αρχική εξίσωση, έχουμε τους περιορισμούς:

$$\begin{cases} x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \\ 1 - 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2} \text{ ή } x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Επειδή $-\frac{11}{2} \notin \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $-1 \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, η μόνη δεκτή λύση είναι η $x = -1$.

Παράδειγμα 3

Να λύσετε τις πιο κάτω λογαριθμικές εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) \log x + \log(x - 1) = \log 2 & (\beta) \log(3x - 1) - \log(x + 2) = 1 \\ (\gamma) 2 \log(x - 2) = \log(x + 1) + \log(x - 4) & (\delta) \log_4(\log 10^{x+7} + 1) = 2 \end{array}$$

Λύση

(α) Από την αρχική εξίσωση, έχουμε τους περιορισμούς: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\log x + \log(x - 1) = \log 2 &\Rightarrow \log[x(x - 1)] = \log 2 \\ &\Rightarrow \log[x(x - 1)] = \log 2 \Rightarrow x(x - 1) = 2 \\ &\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0\end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $x = 2$ ή $x = -1$, από τις οποίες μόνο η $x = 2$ είναι δεκτή λύση, γιατί $2 \in (1, +\infty)$.

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned}\log(3x - 1) - \log(x + 2) = 1 &\Rightarrow \log\left(\frac{3x - 1}{x + 2}\right) = \log 10 \\ &\Rightarrow \frac{3x - 1}{x + 2} = 10 \Rightarrow 3x - 1 = 10x + 20 \\ &\Rightarrow 7x = -21 \Rightarrow x = -3\end{aligned}$$

Η λύση $x = -3$ απορρίπτεται, αφού δεν ορίζεται ο λογάριθμος $\log(3x - 1)$ γιατί αν θέσουμε $x = -3$ το $3x - 1 < 0$.

Άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη στο \mathbb{R} .

(γ) Από την αρχική εξίσωση, έχουμε τους περιορισμούς:
$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > 4 \\ x - 4 > 0 \end{cases}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}2 \log(x - 2) = \log(x + 1) + \log(x - 4) &\Rightarrow \log(x - 2)^2 = \log[(x + 1)(x - 4)] \\ &\Rightarrow (x - 2)^2 = (x + 1)(x - 4) \\ &\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 - 3x - 4 \Rightarrow x = 8\end{aligned}$$

Η λύση $x = 8$ είναι δεκτή, αφού ανήκει στο $(4, +\infty)$.

(δ) Από την αρχική εξίσωση, έχουμε τους περιορισμούς:

$$\log 10^{x+7} + 1 > 0 \Rightarrow (x + 7) \cdot \log 10 + 1 > 0 \Rightarrow x > -8$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\log_4(\log 10^{x+7} + 1) = 2 &\Rightarrow \log 10^{x+7} + 1 = 4^2 \\ &\Rightarrow \log 10^{x+7} = 15 \Rightarrow x + 7 = 15 \Rightarrow x = 8\end{aligned}$$

Η λύση $x = 8$ είναι δεκτή, αφού ανήκει στο $(-8, +\infty)$.

Παράδειγμα 4

Να λύσετε την εξίσωση: $3^x = 4$

Λύση

1^{ος} τρόπος

Χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία μεταξύ μιας εκθετικής και της αντίστοιχης λογαριθμικής ισότητας, έχουμε:

$$3^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_3 4 \approx 1,26 \dots \quad (\text{σε 2 δεκαδικά ψηφία})$$

Τον αριθμό $\log_3 4$ τον υπολογίσαμε με υπολογιστική μηχανή.

2^{ος} τρόπος

Το δεύτερο μέρος της εκθετικής εξίσωσης δεν εκφράζεται ως δύναμη του 3.

$$3^x = 4 \Rightarrow \ln(3^x) = \ln 4$$

$$(x_1 = x_2 \Rightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2,$$

(επιλέγουμε οποιαδήποτε θετική βάση $a \neq 1$)

$$\Rightarrow x \ln 3 = \ln 4 \Rightarrow x = \frac{\ln 4}{\ln 3} = \log_3 4$$

$$\left(\frac{\log_\beta M}{\log_\beta a} = \log_a M\right)$$

Παράδειγμα 5

Να λύσετε την εξίσωση: $(\log_2 x)^2 - 2 \cdot (\log_2 x) - 3 = 0$

Λύση

Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $\log_2 x = y, x > 0$ και η εξίσωση μετασχηματίζεται στην εξίσωση $y^2 - 2y - 3 = 0$. Έχουμε:

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y - 3)(y + 1) = 0 \Leftrightarrow y_1 = 3, y_2 = -1$$

Έτσι, έχουμε:

$$\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 \Leftrightarrow x = 8 \quad (\text{δεκτή λύση γιατί πρέπει } x > 0)$$

$$\log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = 2^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad (\text{δεκτή λύση γιατί πρέπει } x > 0)$$

Παράδειγμα 6

Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3 x - \log_{27} x = -2$

Λύση

Παρατηρούμε ότι έχουμε λογάριθμους με διαφορετική βάση. Μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε θετικό αριθμό για να έχουμε ως κοινή βάση.

1^{ος} τρόπος

Επιλέγουμε μία από τις δύο βάσεις σταθερή και μετατρέπουμε τον λογάριθμο με διαφορετική βάση σε ισοδύναμο λογάριθμο με τη σταθερή βάση.

$$\text{Θέτοντας } \log_3 x = y, \text{ έχουμε: } \log_{27} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 27} = \frac{y}{\log_3 3^3} = \frac{y}{3}$$

Έτσι, η αρχική μας εξίσωση μετατρέπεται στην εξίσωση:

$$y - \frac{y}{3} = -2 \Leftrightarrow \frac{2y}{3} = -2 \Leftrightarrow y = -3$$

$$\text{Επομένως, } \log_3 x = -3 \Leftrightarrow x = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \quad (\text{δεκτή λύση γιατί πρέπει } x > 0).$$

2^{ος} τρόπος

Επιλέγουμε ως βάση το 10. Η εξίσωση γίνεται:

$$\log_3 x - \log_{27} x = -2 \Leftrightarrow \frac{\log x}{\log 3} - \frac{\log x}{\log 27} = -2 \Leftrightarrow \log x \log 27 - \log x \log 3 = -2 \log 3 \log 27$$

$$\Leftrightarrow \log x (\log 27 - \log 3) = -2 \log 3 \log 27 \Leftrightarrow \log x \cdot \log \left(\frac{27}{3}\right) = -2 \log 3 \log 27$$

$$\Leftrightarrow \log x \cdot \log 9 = -2 \log 3 \log 27 \Leftrightarrow \log x = \frac{-2 \log 3 \log 27}{\log 9} \Leftrightarrow \log x = \frac{-2 \log 3 \log 3^3}{\log 3^2}$$

$$\Leftrightarrow \log x = \frac{-2 \log 3 \cdot 3 \log 3}{2 \cdot \log 3} \Leftrightarrow \log x = -3 \log 3 \Leftrightarrow \log x = \log 3^{-3} \Leftrightarrow x = 3^{-3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{27}$$

Δραστηριότητες

1. Να λύσετε τις λογαριθμικές εξισώσεις:

(α) $\log 3 + \log(x + 1) = \log 21$

(β) $\log(2x + 1) - \log(x + 2) = 1$

(γ) $2 \log x = \log(x + 12)$

(δ) $\log_3(\log x + 3) = 2$

2. Να λύσετε τις λογαριθμικές εξισώσεις:

(α) $\log x + \log(x + 1) = \log 12 - \log 2$

(β) $\log^2(2x - 4) = \log(2x - 4)$

(γ) $2^{\log x} = 4^{\log x} - 12$

(δ) $\log_3(\log_2 x + 5) = 2$

3. Να λύσετε τις λογαριθμικές εξισώσεις:

(α) $\log_2 x + \log_4 x = 3$

(β) $\log x + \log_x 10 = 2$

(γ) $\log_5 x = \log_{25} 16$

(δ) $\log_x(\log_8 64 + x) = 2$

4. Να λύσετε τις λογαριθμικές εξισώσεις:

(α) $\log_5 x + \log_x 5 = 2.$

(β) $\log_2 x - \log_x 8 = 2$

5. Να υπολογίσετε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$x^{1+\log x} = 1000000, \quad x > 0$$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4^x, x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω τιμές, κάνοντας χρήση της υπολογιστικής μηχανής:

(α) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

(β) $f(\sqrt{2})$

(γ) $f(\pi)$

(δ) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

2. Να κατασκευάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x, g(x) = 2^{-x}$ και $h(x) = -2^x$.

(α) Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f, g και h .

(β) Ποια σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις των:

i. f και g

ii. f και h

3. Να υπολογίσετε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$, όταν η γραφική παράσταση της $f(x) = a \cdot \beta^x, x \in \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία:

(α) $A(0, 3)$ και $B(2, 12)$

(β) $\Gamma(0, 5)$ και $\Delta(-1, 15)$

4. Αν $4^x = a$, να εκφράσετε συναρτήσει του a τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) 4^{x+1}

(β) 4^{-x}

(γ) 16^{x-1}

(δ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x-2}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $3^x = 9$

(β) $5^x = 1$

(γ) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3x} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-x+4}$

(δ) $4^{x-3} = 16^{x-7}$

(ε) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

(στ) $7^{x+1} - 7^x = 42$

(ζ) $e^x + e^{-x} = 2$

(η) $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$

(θ) $36^x = 6^{x^2}$

6. Κάποιος καταθέτει το ποσό των $K_0 = 12000$ ευρώ με ετήσιο επιτόκιο $\varepsilon = 2,5\%$. Αν είναι γνωστό ότι, ύστερα από n χρόνια το αρχικό ποσό γίνεται ίσο με $K_n = K_0(1 + \varepsilon)^n$. Να υπολογίσετε το τελικό ποσό, όταν το αρχικό ποσό ανατοκίζεται:

(α) Για 3 χρόνια

(β) Για 5 χρόνια

(γ) Για 10 χρόνια

7. Ο πληθυσμός των ψαριών σε μια τεχνητή λίμνη δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = \frac{1200}{1 + 11 \cdot e^{-0,2 \cdot t}}$$

όπου t η χρονική στιγμή σε χρόνια.

(α) Πόσα ψάρια είχαν τοποθετηθεί αρχικά στη λίμνη;

(β) Ποιος θα είναι ο πληθυσμός των ψαριών, ύστερα από:

i. 10 χρόνια

ii. 30 χρόνια

iii. 40 χρόνια

iv. 100 χρόνια

(γ) Τι παρατηρείτε για τον πληθυσμό των ψαριών, καθώς το t «μεγαλώνει»;

8. Να εκφράσετε τις πιο κάτω εκθετικές ισότητες με τις αντίστοιχες ισοδύναμες λογαριθμικές ισότητες:

(α) $4^2 = 16$

(β) $10^3 = 1000$

(γ) $2^{-3} = \frac{1}{8}$

(δ) $\sqrt{81} = 9$

(ε) $125^{\frac{1}{3}} = 5$

(στ) $17^0 = 1$

9. Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω λογάριθμων:

(α) $\log_7 7$

(β) $\log_2 1$

(γ) $\ln e^3$

(δ) $\log 10000$

(ε) $\ln \sqrt{e}$

(στ) $\log_3 81$

10. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις, δίνοντας την απάντησή σας στην ακριβή της μορφή:

(α) $\log_2 x = 3$

(β) $\log_x 4 = 1$

(γ) $\log_{\frac{1}{2}} x = 0$

(δ) $\ln(x - 1) = 4$

(ε) $\log_x 6 = \frac{1}{2}$

(στ) $\log_x 16 = 4$

11. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις, δίνοντας την απάντησή σας σε 3 δεκαδικά ψηφία:

(α) $3^x = 5$

(β) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-x} = 7$

(γ) $e^x = 2$

12. Ο πληθυσμός των κουνελιών σε ένα ακατοίκητο νησί σήμερα, εκτιμάται να είναι 4100. Τα κουνέλια τοποθετήθηκαν στο νησί αυτό πριν από 8 χρόνια. Αν ο πληθυσμός n των κουνελιών δίνεται από τον τύπο

$$n(t) = n_0 \cdot e^{0,55t},$$

όπου n_0 ο αρχικός πληθυσμός των κουνελιών και t η χρονική στιγμή σε χρόνια, να εκτιμήσετε:

- (α) τον αρχικό πληθυσμό των κουνελιών
(β) τον πληθυσμό των κουνελιών σε 12 χρόνια από σήμερα

13. Να εφαρμόσετε ιδιότητες των λογάριθμων στις πιο κάτω παραστάσεις:

- (α) $\log_2(2a)$ (β) $\log_5\left(\frac{y}{2}\right)$
(γ) $\ln \sqrt{z}$ (δ) $\log_a\left(\frac{x^2}{yz^3}\right)$
(ε) $\log_5 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ (στ) $\log \sqrt{x\sqrt{y}}$

14. Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

- (α) $\log 4 + \log 25$ (β) $\log_2 160 - \log_2 5$
(γ) $\log_2 8^{17}$ (δ) $\frac{2 \ln 25 - 2 \ln 5}{\ln 125 - \ln 5}$
(ε) $\frac{\log_2 49}{\log_4 7}$ (στ) $(\log_5 11) \cdot (\log_{121} 125)$

15. Αν $\log_x y = \log_y z \cdot \log_z x$, όπου $x, y, z > 0, x \neq 1, y \neq 1, z \neq 1$, να δείξετε ότι $x = y$ ή $x = \frac{1}{y}$.

16. Αν $x > 0, x \neq 1$ και $\log_4 x = a, \log_{12} x = \beta$, να δείξετε ότι: $\frac{a+\beta}{a-\beta} = \log_3 48$

17. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

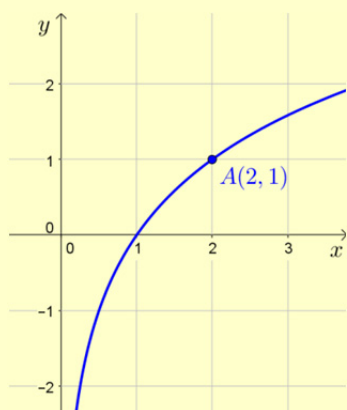
- (α) $f_1(x) = \log(x+1)$ (β) $f_2(x) = \log_5(4x-9)$ (γ) $f_3(x) = \ln(x^2+1)$
(δ) $f_4(x) = \log_2(x^2-4)$ (ε) $f_5(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (στ) $f_6(x) = \log_4\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$

18. Να λύσετε τις εξισώσεις:

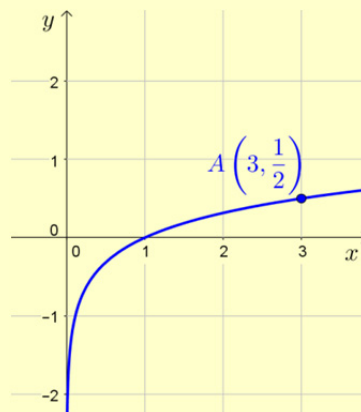
- (α) $\log_6 x + \log_6 2 = \log_6 16$ (β) $\log_5(x+1) - \log_5(x-1) = 2$
(γ) $2 \log x = \log 2 + \log(3x-4)$ (δ) $\log[\log(x+8)] = 0$
(ε) $\log_2 x = \log_4 9$ (στ) $\log_2 x + \log_x 2 = 2$

19. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = \log_a x$ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α)



(β)



Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\log(21^{\log x + 1} - 42) + \log 4 = \log 21 \cdot \log x + \log 76$
2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \log_2 \sqrt{32 \cdot \sqrt{16 \cdot \sqrt[5]{2}}}$
3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$
 - (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 - (β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 2$
4. Να κατασκευάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις $f(x) = 2^x$ και $g(x) = 3$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο καμπύλων.
5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Να αποδείξετε ότι:
$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = f\left(\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}$$
6. Αν $f(x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, να αποδείξετε ότι:
$$f(a) + f(\beta) = f\left(\frac{a + \beta}{1 + a\beta}\right)$$
7. Να λύσετε το σύστημα των εξισώσεων:
$$\begin{cases} \log_9(xy) = 3 \\ \log_3 x \cdot \log_3 y = 8 \end{cases}$$
8. Σε μια αρχαιολογική ανασκαφή βρέθηκαν ίχνη καμένου δέντρου μαζί με οστά. Τα ίχνη ξύλου περιείχαν κατά προσέγγιση 1,67% της αρχικής ποσότητας άνθρακα 14 (C14). Αν ο χρόνος της μισής ζωής του C14 είναι 5600 χρόνια, να υπολογίσετε τότε το δέντρο κόπηκε και κάηκε, δεδομένου ότι η ζωή t του άνθρακα 14 ακολουθεί τον νόμο της εκθετικής μεταβολής με τύπο $A(t) = A_0 \cdot e^{kt}$, όπου A_0 είναι η αρχική του ποσότητα.
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a(\log x)^4 + 8(\log x)^2 \cdot \log(100x)$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$.
 - (α) Αν $f(10) = 25$, να δείξετε ότι $a = 1$.
 - (β) Για την τιμή $a = 1$, να αποδείξετε ότι: $f(x) = ((\log x)^2 + 4\log x)^2$
 - (γ) Να λύσετε την εξίσωση: $((\log x)^2 + 4\log x)^2 = 0$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

ΟΡΙΟ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 4.1 Εισαγωγή στο όριο
- 4.2 Η έννοια του ορίου – Πλευρικά όρια συνάρτησης
- 4.3 Όριο πολυωνυμικής – ρητής συνάρτησης στο $a \in \mathbb{R}$
- 4.4 Όριο συνάρτησης στο άπειρο
- 4.5 Εισαγωγή της παραγώγου
- 4.6 Παράγωγος αριθμός
- 4.7 Παράγωγος συνάρτηση
- 4.8 Παράγωγος βασικών συναρτήσεων – Κανόνες παραγώγισης
- 4.9 Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΟΡΙΟ

Η έννοια του ορίου κατέχει καίρια θέση στη Μαθηματική Ανάλυση και είναι μια από τις πιο θεμελιώδεις έννοιες στα σύγχρονα Μαθηματικά με εφαρμογές σε όλες τις θετικές επιστήμες. Το όριο γεννήθηκε στην προσπάθεια των μαθηματικών να απαντήσουν ερωτήματα όπως:

- ✓ Πώς υπολογίζουμε το μήκος ενός καμπυλόγραμμου τμήματος;
- ✓ Πώς υπολογίζουμε, το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ μίας παραβολής και μίας ευθείας;
- ✓ Πώς υπολογίζουμε την κλίση της εφαπτομένης μίας καμπύλης σε ένα σημείο της;
- ✓ Πώς υπολογίζουμε την στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού;

Ιστορικό Σημείωμα

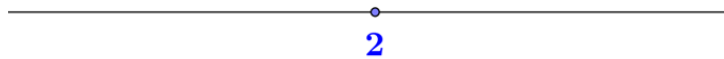
Στην αρχαία Ελλάδα η έννοια του ορίου ήταν άγνωστη. Οι Έλληνες μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν άπειρες διαδικασίες, οι οποίες βασίζονταν στην έννοια του ορίου. Ο Εύδοξος, ο Κνίδιος, ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τη μέθοδο την εξάντλησης για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων μέσα από διαδοχικές προσεγγίσεις. Ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης, για να υπολογίσει εμβαδά που περικλείονται μεταξύ διάφορων καμπυλών.

Μέχρι τα χρόνια της αναγέννησης οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν τις μεθόδους των αρχαίων Ελλήνων. Τον 17^ο αιώνα οι Isaac Newton και Gottfried Wilhelm Leibniz, αν και εργάζονταν ανεξάρτητα, έβαλαν τα θεμέλια του απειροστικού λογισμού. Τον 18^ο αιώνα ο Augustin Louis Cauchy συνέβαλε σημαντικά στη διατύπωση του ορισμού του ορίου μιας συνάρτησης. Ο αυστηρός ορισμός του ορίου συνάρτησης, που χρησιμοποιούμε σήμερα, δόθηκε από τον Karl Weierstrass (19^ος αιώνας).

4.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ – ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Εξερεύνηση

Δίνεται ο αριθμός 2 πάνω στην αριθμητική γραμμή.



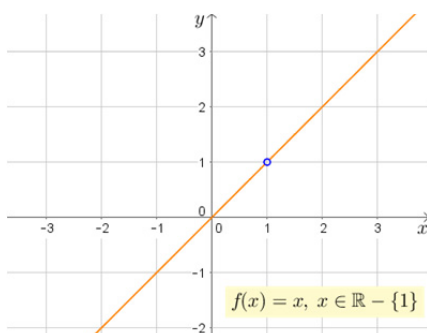
- Να γράψετε τρεις πραγματικούς αριθμούς μικρότερους από το 2, οι οποίοι να βρίσκονται «κοντά» στο 2.
- Να γράψετε τρεις πραγματικούς αριθμούς μεγαλύτερους από το 2, οι οποίοι να βρίσκονται «κοντά» στο 2.
- Μπορείτε να βρείτε και άλλους αριθμούς οι οποίοι να βρίσκονται ακόμη πιο «κοντά» στο 2 από τους αριθμούς που έχετε γράψει προηγουμένως;

Διερεύνηση

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x, \quad x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

- (α) Να εκφράσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων.
- (β) Να μελετήσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τους αντίστοιχους πίνακες τιμών για τιμές του x , οι οποίες βρίσκονται κοντά στο 1.



x	$f(x) = x,$ $x \neq 1$
0,9	0,9
0,99	0,99
0,999	0,999
0,99999	0,99999

x	$f(x) = x,$ $x \neq 1$
1,1	1,01
1,01	1,01
1,001	1,001
1,00001	1,00001

Πώς «συμπεριφέρονται» οι τιμές της συνάρτησης f , όταν:

- το x προσεγγίζει το 1 από «αριστερά», δηλαδή από μικρότερες τιμές, οσοδήποτε κοντά θέλουμε
- το x προσεγγίζει το 1 από «δεξιά», δηλαδή από μεγαλύτερες τιμές, οσοδήποτε κοντά θέλουμε

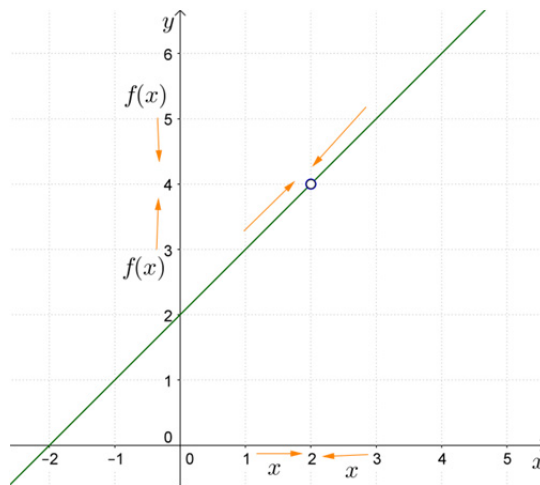
4.2.1 Η έννοια του ορίου συνάρτησης

Η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x + 2, x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς, εκτός από το $x = 2$. Δεν ορίζεται, δηλαδή, η τιμή $f(2)$. Εξετάζουμε τις τιμές της συνάρτησης f , όταν το x παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 2.

Η γραφική παράσταση της f είναι τα σημεία της ευθείας $y = x + 2$ εκτός από το σημείο $(2, 4)$, όπως φαίνεται και στη γραφική παράστασή της πιο κάτω.



Παρατηρούμε ότι καθώς το x προσεγγίζει τον αριθμό 2 (είτε από δεξιά είτε από αριστερά), οι τιμές της f προσεγγίζουν τον αριθμό 4.

Για να περιγραφεί η συμπεριφορά των τιμών της συνάρτησης f , όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x κινείται προς συγκεκριμένη τιμή 2, χρησιμοποιούμε την έκφραση:

«Όριο της συνάρτησης f στο 2»

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση λέμε ότι:

«Το όριο της f , όταν το x τείνει στο 2, ισούται με 4.»

Το πιο πάνω όριο συμβολίζεται με:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

Ενδεικτικά, την πιο πάνω προσέγγιση των τιμών της συνάρτησης f προς τον πραγματικό αριθμό 4, μπορούμε να την παρατηρήσουμε και στους αντίστοιχους πίνακες τιμών, όταν οι τιμές του x βρίσκονται «κοντά» στο 2.

x	$f(x) = x + 2,$ $x \neq 2$
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
1,99999	3,99999

x	$f(x) = x + 2,$ $x \neq 2$
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001
2,00001	4,00001

Για τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x + 2, x \in \mathbb{R} - \{2\},$$

κάνουμε τις εξής δύο βασικές παρατηρήσεις:

- **Δεν ορίζεται** το $f(2)$.
- **Ορίζεται** το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και είναι ίσο με 4.

Για τη συνάρτηση g με τύπο

$$g(x) = x + 2, x \in \mathbb{R},$$

κάνουμε τις εξής δύο βασικές παρατηρήσεις:

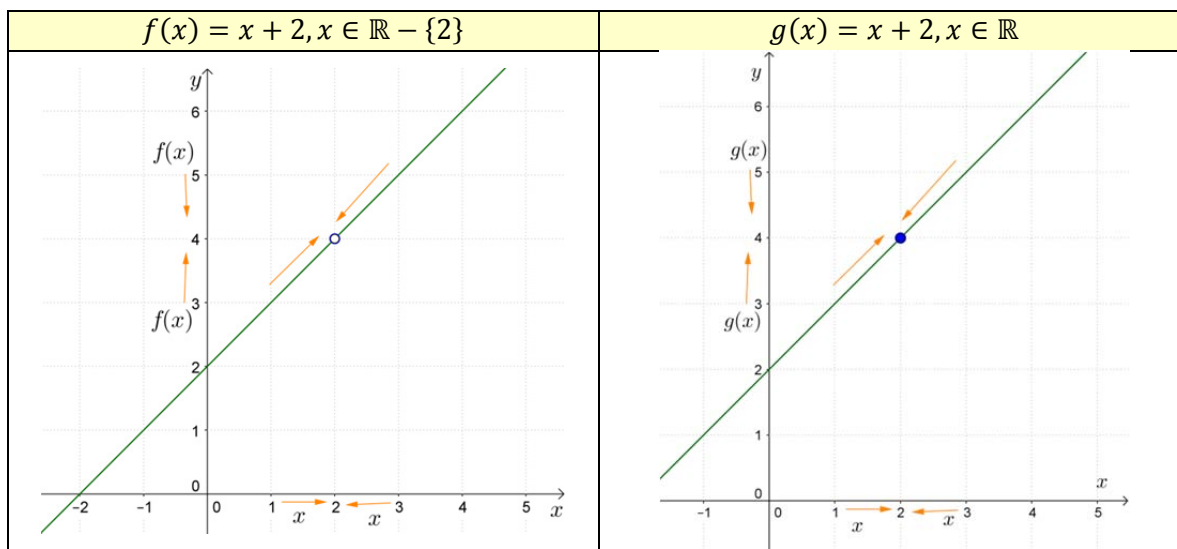
- **Ορίζεται** το $g(2)$ και είναι ίσο με 4.
- **Ορίζεται** το $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ και είναι ίσο με 4.

Για τις συναρτήσεις f και g έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$$

Οι πιο πάνω ισότητες δηλώνουν **κοινό όριο στο 2** για τις δύο συναρτήσεις, με διαφορετική συμπεριφορά της αριθμητικής τιμής στο 2 σε κάθε περίπτωση.

Αυτό δείχνει ακριβώς ότι η μελέτη του ορίου μιας συνάρτησης σε ένα συγκεκριμένο x_0 έχει να κάνει με τη συμπεριφορά της συνάρτησης, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει στο x_0 . **Το όριο καθορίζεται από τις τιμές της συνάρτησης πολύ κοντά στο x_0 , αλλά όχι από τη συμπεριφορά της συνάρτησης στο x_0** , όπως φαίνεται πιο κάτω και από τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων.



Γενικά

Αν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό λ , καθώς το x προσεγγίζει τον αριθμό x_0 (είτε από δεξιά, είτε από αριστερά) τότε γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$$

και διαβάζουμε

«Το όριο της f , όταν το x τείνει στο x_0 , είναι ίσο με λ .»

Από τα πιο πάνω παρατηρούμε ότι:

- ✓ Η αναζήτηση του ορίου μιας συνάρτησης f στο x_0 είναι εφικτή μόνο στην περίπτωση κατά την οποία η f ορίζεται για τιμές του x όσο θέλουμε κοντά στο x_0 .
- ✓ Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη τουλάχιστον σε ένα σύνολο της μορφής (a, x_0) , ή (x_0, β) ή $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε έχει νόημα η μελέτη του ορίου στο x_0 .
- ✓ Το x_0 μπορεί να ανήκει ή και να μην ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- ✓ Η τιμή της f στο x_0 (όταν υπάρχει) δεν είναι κατ' ανάγκην ίση με το αντίστοιχο όριο της f στο x_0 .

Παράδειγμα 1

Να ελέγξετε αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ των πιο κάτω συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας πίνακες τιμών και τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις, και να αναφέρετε την τιμή του σε κάθε περίπτωση:

(α) $f(x) = 3x + 1, x \in \mathbb{R}$

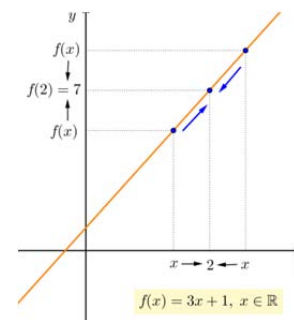
(β) $g(x) = \log_2 x, x \in (0, +\infty)$

Λύση

(α) Έστω $f(x) = 3x + 1, x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι όταν το x είναι κατάλληλα κοντά στο 2, οι τιμές της συνάρτησης f είναι οσοδήποτε κοντά θέλουμε στον αριθμό 7.

x	$f(x) = 3x + 1$
1,9	6,7
1,99	6,97
1,999	6,997
1,99999	6,99997

x	$f(x) = 3x + 1$
2,1	7,3
2,01	7,03
2,001	7,003
2,00001	7,00003



Έτσι, το ζητούμενο όριο υπάρχει και είναι ίσο με 7. Γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$$

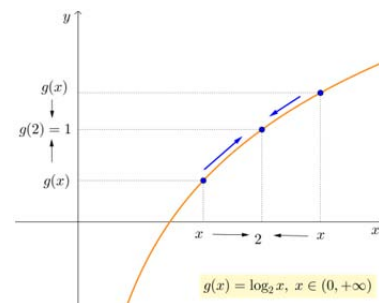
Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το 2 ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

(β) Έστω $g(x) = \log_2 x, x \in (0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι όταν το x είναι κατάλληλα κοντά στο 2, οι τιμές της συνάρτησης g είναι οσοδήποτε κοντά θέλουμε στον αριθμό 1.

x	$g(x) = \log_2 x$
1,9	0.925999
1,99	0.992768
1,999	0.999278
1,99999	0.999992

x	$g(x) = \log_2 x$
2,1	1.070389
2,01	1.007195
2,001	1.000721
2,00001	1.000007



Έτσι, το ζητούμενο όριο υπάρχει και είναι ίσο με 1. Γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$$

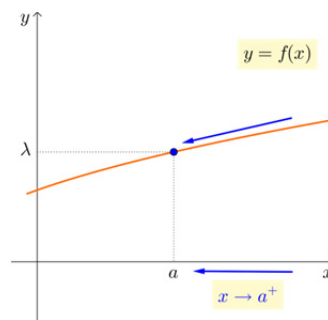
Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το 2 ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) = \log_2 2 = 1$$

4.2.2 Πλευρικά όρια συνάρτησης

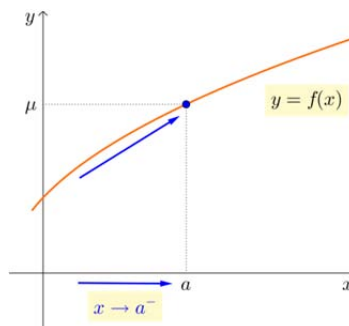
Στο πιο κάτω σχήμα οι τιμές της συνάρτησης f προσεγγίζουν τον πραγματικό αριθμό λ , καθώς το x προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό a από μεγαλύτερες τιμές του a ($x \rightarrow a^+$), δηλαδή από δεξιά. Στην περίπτωση αυτή λέμε η f έχει **δεξιό όριο** στο a τον αριθμό λ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lambda$$

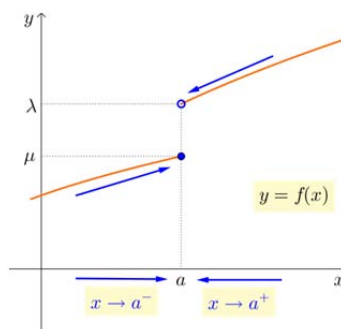


Στο πιο κάτω σχήμα οι τιμές της συνάρτησης f προσεγγίζουν τον πραγματικό αριθμό μ , καθώς το x προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό a από μικρότερες τιμές του a ($x \rightarrow a^-$), δηλαδή από αριστερά. Στην περίπτωση αυτή λέμε η f έχει **αριστερό όριο** στο a τον αριθμό μ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \mu$$



Αν για τα δύο πιο πάνω όρια έχουμε ότι $\mu \neq \lambda$, τότε το όριο της συνάρτησης f στο a δεν υπάρχει.

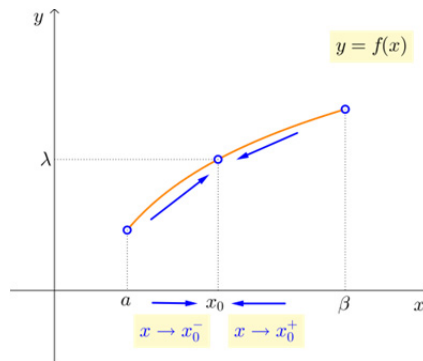


Το δεξιό όριο και το αριστερό όριο μιας συνάρτησης λέγονται **πλευρικά όρια** της συνάρτησης.

Ορισμός

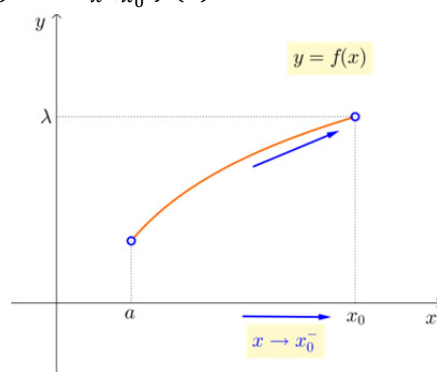
Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 , που είναι ορισμένη σε ένωση δύο διαστημάτων της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, υπάρχει αν και μόνον αν υπάρχουν και τα δύο πλευρικά όρια στο x_0 και είναι ίσα. Δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$$



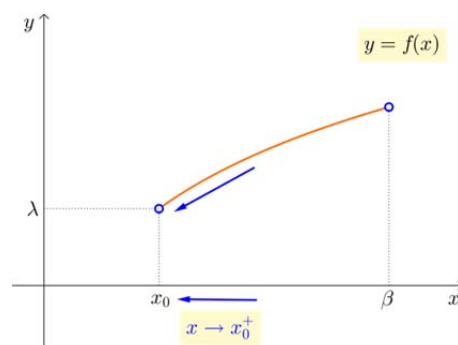
Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 , που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (a, x_0) ή $(a, x_0]$ και δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β) , ισούται με το αριστερά πλευρικό όριο στο x_0 αν αυτό υπάρχει.

Δηλαδή, ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.



Το όριο μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) ή $[x_0, \beta)$ και δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (a, x_0) , ισούται με το δεξιά πλευρικό όριο στο x_0 αν αυτό υπάρχει.

Δηλαδή, ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.



Παράδειγμα 2

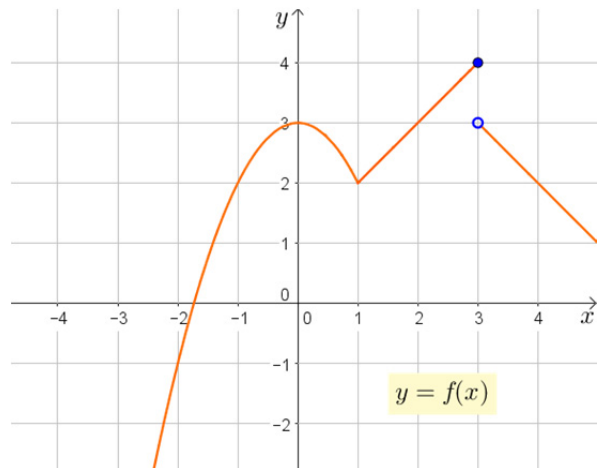
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$



Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

(β) Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$$

(γ) Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$$

(δ) Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4$$

Επομένως, το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 3

Τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο $a \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = k^2 - 8, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 4k + 4$$

Να υπολογίσετε τις τιμές του k , για τις οποίες υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Λύση

Το όριο $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ υπάρχει αν και μόνον αν υπάρχουν και τα δύο πλευρικά όρια της συνάρτησης f στο a και είναι ίσα. Δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \Rightarrow k^2 - 8 = 4k + 4 \Rightarrow k^2 - 4k - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (k - 6)(k + 2) = 0 \Rightarrow k = 6 \text{ ή } k = -2$$

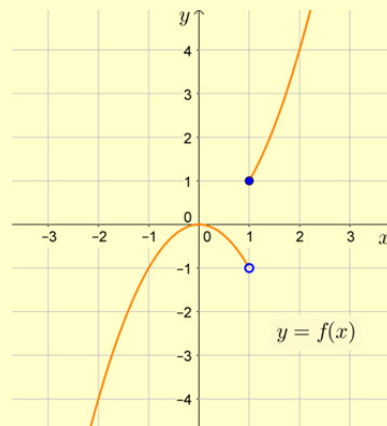
Δραστηριότητες

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ (β) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (δ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(ε) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 3$$

Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(β) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

3. Τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο $a \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 4 - k^2$$

Να υπολογίσετε τις τιμές του k , για τις οποίες υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

4.3 ΟΡΙΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ – ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $a \in \mathbb{R}$

Διερεύνηση

- Να ανοίξετε το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας *GeoGebra* και να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και h με τύπους:

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x - 1, \quad h(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

- Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} h(x)$$

- Τι παρατηρείτε;

Πρόταση

1. Αν $y = P(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

2. Αν $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα με $Q(a) \neq 0$ και $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι ρητή συνάρτηση, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$(\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^7 - 2x^3 + 1)$$

$$(\beta) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x - 1}{x + 3} \right)$$

$$(\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3} \right)$$

$$(\delta) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3}{x^3 + x} \right)$$

Λύση

- (α) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^7 - 2x^3 + 1$ είναι πολυώνυμο. Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^7 - 2x^3 + 1) = 1^7 - 2 \cdot 1^3 + 1 = 0$$

- (β) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-3\}$$

είναι ρητή και δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής στο 2. Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x - 1}{x + 3} \right) = \frac{2 - 1}{2 + 3} = \frac{1}{5}$$

(γ) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}, x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

είναι ρητή και μηδενίζεται ο παρανομαστής στο 3. Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πιο πάνω πρόταση. Επομένως, απλοποιούμε τη συνάρτηση ως ακολούθως:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)} = x + 3, \quad x \neq 3$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

(δ) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3 + x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

είναι ρητή και μηδενίζεται ο παρανομαστής στο 0. Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη πιο πάνω πρόταση. Επομένως, απλοποιούμε τη συνάρτηση ως ακολούθως:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3 + x} = \frac{x^3}{x(x^2 + 1)} = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x \neq 0$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right) = \frac{0}{0 + 1} = 0$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 1} [x(x - 1)(x + 1)]$

(β) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 3x^2 + 9x)$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 2x}{x + 1} \right)$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6x - 9}{x^3 - 12x + 3} \right)$

(ε) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 1} \right)$

(στ) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3 + 8}{x + 2} \right)$

4.4 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

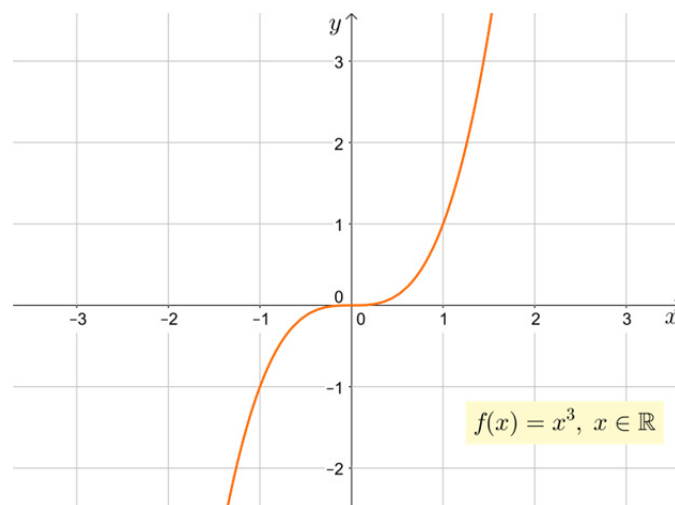
Διερεύνηση

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$.

- Να συμπληρώσετε τους πιο κάτω πίνακες τιμών χρησιμοποιώντας αριθμομηχανή.

x	$f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$	x	$f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$
-10		10	
-100		100	
-10000		10000	
-1000000		1000000	
⋮		⋮	
⋮		⋮	
⋮		⋮	

- Να αναφέρετε τι συμβαίνει με τις τιμές της συνάρτησης f :
(α) όταν το x αυξάνεται απεριόριστα
(β) όταν το x μειώνεται απεριόριστα
- Να κάνετε ανάλογες παρατηρήσεις, χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



4.4.1 Επέκταση του \mathbb{R}

Είναι χρήσιμο να επεκτείνουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} με δύο ακόμα στοιχεία, το $+\infty$ και το $-\infty$, τα οποία δεν είναι πραγματικοί αριθμοί. Έτσι, δημιουργείται το σύνολο $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Στο σύνολο $\bar{\mathbb{R}}$ μπορούμε να ορίσουμε τόσο τη διάταξη όσο και απλές πράξεις, σύμφωνα με τον πιο κάτω πίνακα:

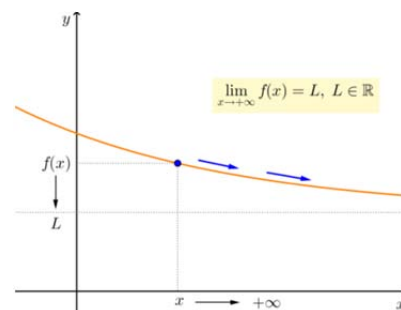
Πράξεις στο $\bar{\mathbb{R}}$	
✓ $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	✓ $a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, \text{αν } a > 0 \\ -\infty, \text{αν } a < 0 \end{cases}$
✓ $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	✓ $a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, \text{αν } a > 0 \\ +\infty, \text{αν } a < 0 \end{cases}$
✓ $(+\infty) + a = +\infty, \forall a \in \mathbb{R}$	✓ $(+\infty)^a = +\infty, \forall a \in \mathbb{R}^+$
✓ $(-\infty) + a = -\infty, \forall a \in \mathbb{R}$	
Απροσδιόριστες Μορφές	
Ορισμένες από τις αλγεβρικές πράξεις του \mathbb{R} δεν μπορούν να επεκταθούν στο $\bar{\mathbb{R}}$, γιατί δεν έχουν μονοσήμαντα ορισμένη τιμή . Οι μορφές αυτές των πράξεων λέγονται απροσδιόριστες .	
Μερικές απροσδιόριστες μορφές , που προκύπτουν ως άμεση συνέπεια ορίων, είναι:	
$(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty)$	

4.4.2 Όριο συνάρτησης στο $+\infty$

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a, +\infty)$.

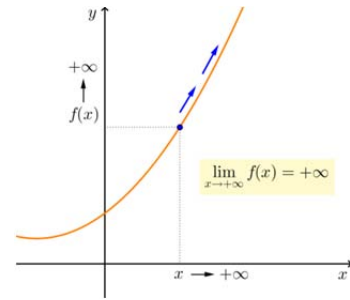
- ✓ Όταν οι τιμές της συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό L ($L \in \mathbb{R}$), καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα ($x \rightarrow +\infty$), τότε η συνάρτηση f έχει όριο τον πραγματικό αριθμό L και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$



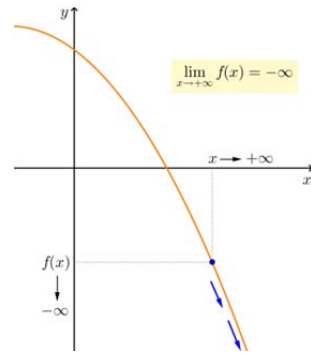
- ✓ Όταν οι τιμές της συνάρτησης f αυξάνονται απεριόριστα, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα ($x \rightarrow +\infty$), τότε η συνάρτηση f έχει όριο το $+\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



- Όταν οι τιμές της συνάρτησης f μειώνονται απεριόριστα, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα ($x \rightarrow +\infty$), τότε η συνάρτηση f έχει όριο το $-\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

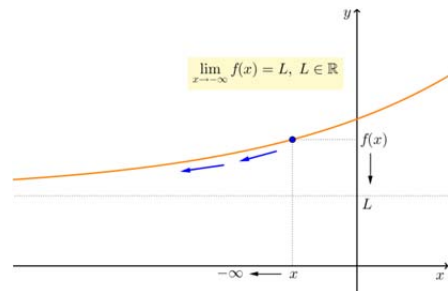


4.4.3 Όριο συνάρτησης στο $-\infty$

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(-\infty, a)$.

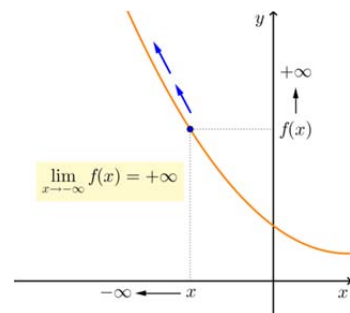
- ✓ Όταν οι τιμές της συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό L ($L \in \mathbb{R}$), καθώς το x μειώνεται απεριόριστα ($x \rightarrow -\infty$), τότε η συνάρτηση f έχει όριο τον πραγματικό αριθμό L και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$



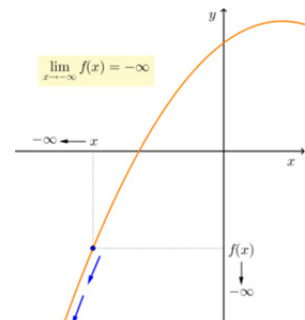
- ✓ Όταν οι τιμές της συνάρτησης f αυξάνονται απεριόριστα, καθώς το x μειώνεται απεριόριστα ($x \rightarrow -\infty$), τότε η συνάρτηση f έχει όριο το $+\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



- ✓ Όταν οι τιμές της συνάρτησης f μειώνονται απεριόριστα, καθώς το x μειώνεται απεριόριστα ($x \rightarrow -\infty$), τότε η συνάρτηση f έχει όριο το $-\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



3.4.4 Όρια βασικών συναρτήσεων

$\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c, \quad c \in \mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} c = c, \quad c \in \mathbb{R}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Πρόταση

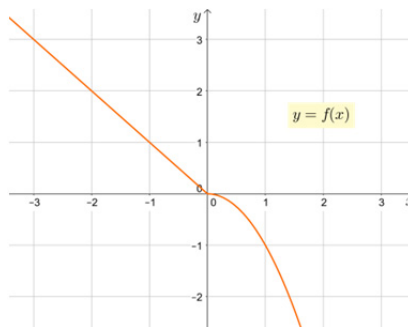
Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ με $a_n \neq 0$.

Τότε, ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$$

Παράδειγμα 1

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.



Λύση

Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα, οι τιμές της συνάρτησης f μειώνονται απεριόριστα. Συνεπώς, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Παρατηρούμε ότι καθώς το x μειώνεται απεριόριστα, οι τιμές της συνάρτησης f αυξάνονται απεριόριστα. Συνεπώς, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 4x)$.

Λύση

Εφαρμόζουμε την αντίστοιχη πρόταση για όριο στο άπειρο πολυωνυμικής συνάρτησης και όρια βασικών συναρτήσεων: Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$$

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 4x + 1)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^3 + 5x^2 + 2x - 4)$.

Λύση

Εφαρμόζουμε την αντίστοιχη πρόταση για όριο στο άπειρο πολυωνυμικής συνάρτησης και όρια βασικών συναρτήσεων: Έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 4x + 1) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = 3 \cdot (+\infty) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^3 + 5x^2 + 2x - 4) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^3) = -7 \cdot (-\infty) = +\infty\end{aligned}$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

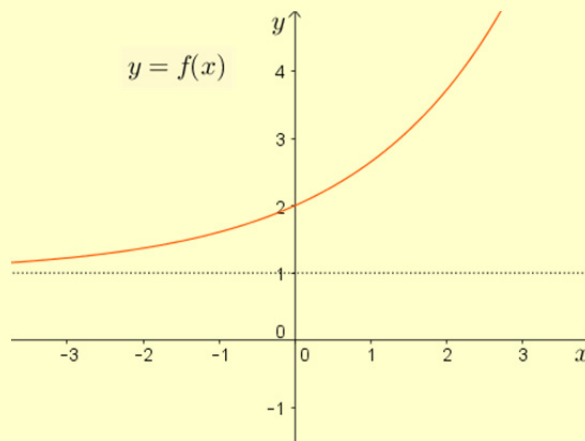
(α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4$

(β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5$

(γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^4 + 3x^2 - 4x - 3)$

(δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3x^4)$

2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.



4.5 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

Ιστορικό Σημείωμα

Ο Διαφορικός Λογισμός – ο λογισμός των παραγώγων – είναι θεωρία λογισμού που ασχολείται με ποσότητες, οι οποίες μεταβάλλονται στην αύξηση τους κατά απείρως μικρές διαφορές σε μερικά μεταβλητά μεγέθη. Κατέχει δεσπόζουσα θέση στα Μαθηματικά, αφού «για να διαβάσει κανείς το βιβλίο της φύσης, που είναι γραμμένο στη γλώσσα των Μαθηματικών, θα πρέπει να σκέφτεται σε όρους συνεχών ποσοτήτων και μετρήσεων και για το πώς αυτές μεταβάλλονται με το χρόνο» (Galileo Galilei (1564 – 1642) και Johannes Kepler (1571 – 1630)).

Ιστορικά θεωρείται ότι θεμελιώθηκε μαθηματικά τον 17^ο αιώνα από τους Gottfried Leibniz (1646 – 1716) και Isaac Newton (1642 – 1727). Ωστόσο, δεν αποτελεί έργο μόνο των Newton και Leibniz αλλά είναι το προϊόν μιας μακρόχρονης προσπάθειας με ρίζες στην Αρχαία Ελλάδα. Η θεμελιώδης έννοια του Διαφορικού Λογισμού, η παράγωγος, συνδέει την ταχύτητα με την οποία κινείται ένα σημείο μιας καμπύλης με την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό. Επομένως, αποτελεί μια φυσικομαθηματική έννοια με τα πρώτα στοιχεία της να εμφανίζονται στα έργα του Αρχιμήδη και συγκεκριμένα στο έργο του «Περί ελίκων».



Gottfried Leibniz
(1646 – 1716)



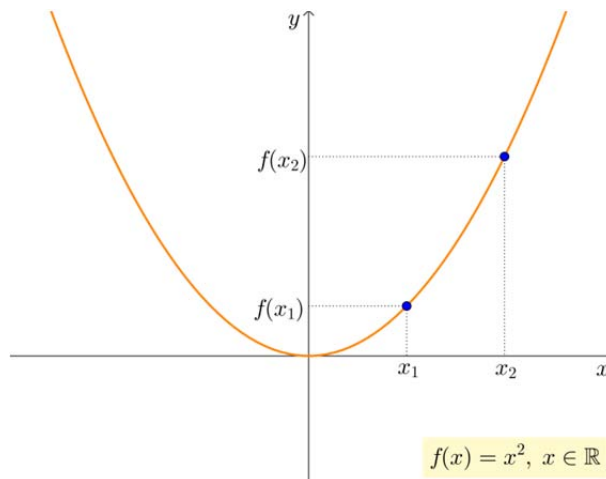
Isaac Newton
(1642 – 1727)

Η ανάπτυξη του Διαφορικού Λογισμού δεν σταμάτησε τον 17^ο αιώνα, αλλά συνεχίστηκε τον 18^ο αιώνα, με τη σημαντική συμβολή των αδερφών Jacob Bernoulli (1654 – 1705) και Johann Bernoulli (1667 – 1748), του Leonhard Euler (1707 – 1783), του Joseph – Louis Lagrange (1736 – 1813) και πολλών άλλων. Τέλος, η αυστηρή θεμελίωση του Διαφορικού Λογισμού έγινε από τους μαθηματικούς του 19^{ου} αιώνα, όπως ο Bernard Bolzano (1781 – 1848), ο Augustin - Louis Cauchy (1789 – 1857) και ο Karl Weierstrass (1815 – 1897).

4.6 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

Διερεύνηση

- Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.



- Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, καθώς η μεταβλητή x παίρνει τιμές στο διάστημα $[x_1, x_2]$:

$x \in [x_1, x_2]$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
$[3, 5]$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{5^2 - 3^2}{2} = \frac{25 - 9}{2} = \frac{16}{2} = 8$
$[3, 4]$	
$[3, 3,5]$	
$[3, 3,1]$	
$[3, 3,01]$	
$[3, 3,001]$	

Τι παρατηρείτε για τις τιμές του Δx και τις αντίστοιχες τιμές του πηλίκου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

Ορισμός

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό λέγεται **παράγωγος της f στο x_0** (ή **παράγωγος αριθμός της f στο x_0**) και συμβολίζεται με $f'(x_0)$, δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Παρατηρήσεις

- Η διαδικασία εύρεσης της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της ονομάζεται **παραγωγή**.

- Γνωρίζουμε ότι $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ και $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$. Έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ή

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Θέτουμε $\Delta x = h$

- Εκτός από το συμβολισμό $f'(x_0)$, υπάρχουν και άλλοι τρόποι να συμβολίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0 . Μερικοί από αυτούς είναι:

➤ $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$, $\left. \frac{df(x_0)}{dx} \right|_{x=x_0}$, $y'|_{x=x_0}$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$ στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον ορισμό της παραγώγου της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$. Είναι:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ στο σημείο $x_0 = 2$.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον ορισμό της παραγώγου της συνάρτησης f στο $x_0 = 2$. Είναι:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

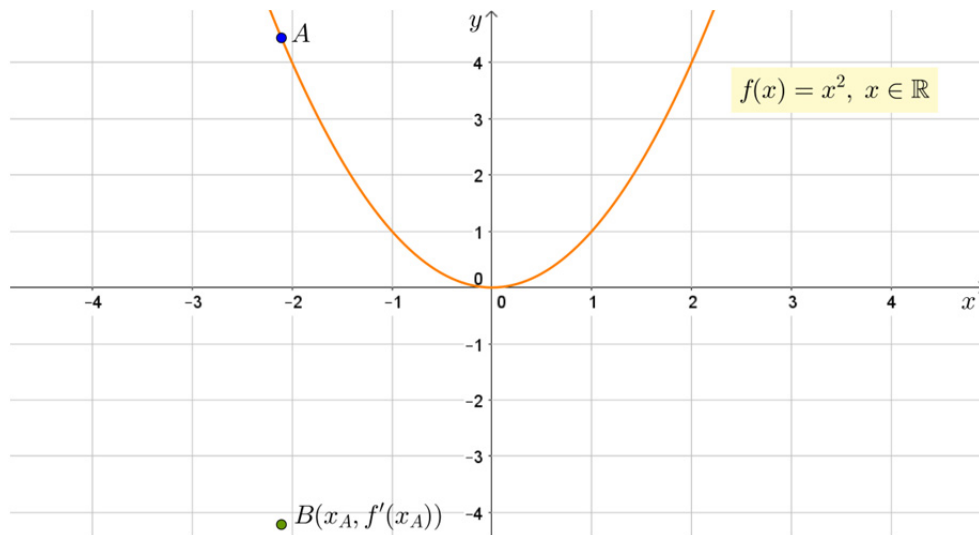
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο:
 - (α) $f(x) = -2$ στο σημείο $x_0 = 4$
 - (β) $f(x) = -3x + 1$ στο σημείο $x_0 = -1$
 - (γ) $f(x) = x^2 - x + 5$ στο σημείο $x_0 = 0$
 - (δ) $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο $x_0 = 1$

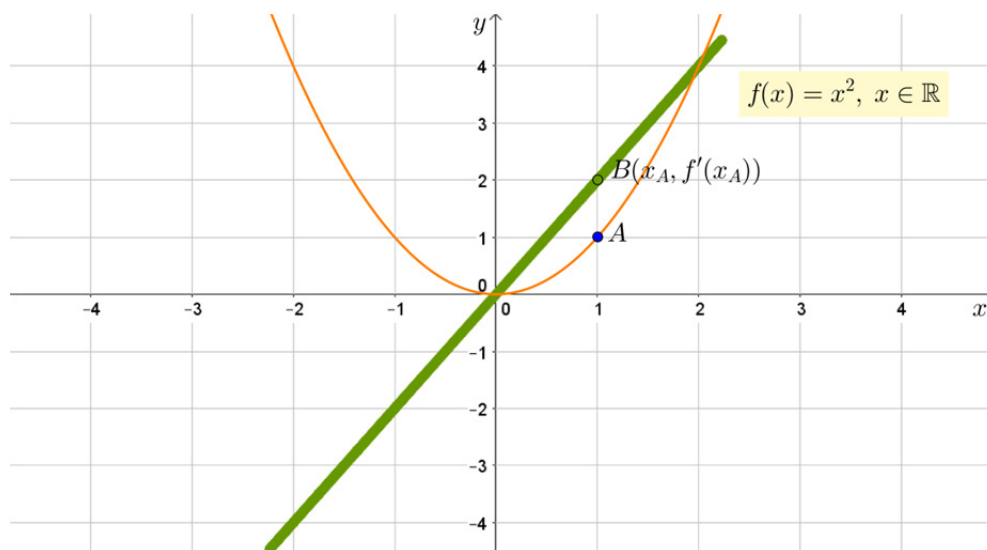
4.7 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «*Blyk_Kor_En04_ParagogosSinartisi.ggb*». Στο εφαρμογίδιο δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.



- Να μετακινείτε το σημείο A της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .



Τι παρουσιάζει η «νέα» γραμμή που σχηματίζεται;

Στην προηγούμενη υποενότητα ορίσαμε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ως την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 και το συμβολίσαμε με $f'(x_0)$.

Αν έχουμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, μπορούμε να σκεφτούμε το σύμβολο f' ως μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού όλα εκείνα τα $x \in \Delta$, για τα οποία ισχύει $f'(x) \in \mathbb{R}$.

Ορισμός

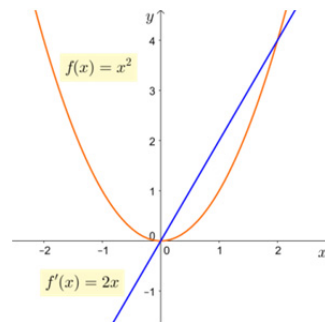
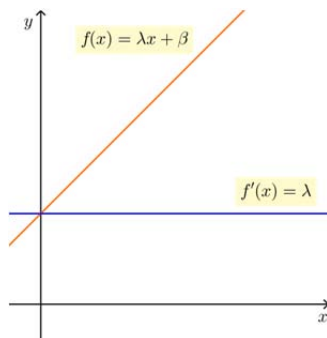
Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη στο Δ** , όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in \Delta$.

Παρατηρήσεις

- Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και έστω A το σύνολο των σημείων του Δ , στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται με μοναδικό τρόπο στο $f'(x)$. Έτσι, ορίζεται η συνάρτηση

$$f': A \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x),$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** (ή απλά **παράγωγος της f**).



- Η παράγωγος της συνάρτησης f ορίζεται ως:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ή

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Θέτουμε $\Delta x = h$

- Αν το A είναι διάστημα ή σύνολο διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f' (με την προϋπόθεση ότι αυτή ορίζεται) λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** . Μερικοί συμβολισμοί που χρησιμοποιούμε για τη δεύτερη παράγωγο της f είναι:

$$f''(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f^{(2)}(x)$$

- Μπορούμε να ορίσουμε επαγωγικά τη **νιοστή παράγωγο** μιας συνάρτησης f ως:

$$f^{(v)}(x) = [f^{(v-1)}(x)]', \quad v \in \mathbb{N}, v \geq 2$$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Από τον ορισμό της παραγώγου της συνάρτησης f , έπεται ότι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h) - 1 - (2x - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + 2h - 1 - 2x + 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 = 2 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Από τον ορισμό της παραγώγου της συνάρτησης f , έπεται ότι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο:

(α) $f(x) = 2, x \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = -4x + 3, x \in \mathbb{R}$

(γ) $f(x) = x^2 + x - 2, x \in \mathbb{R}$

(δ) $f(x) = x^3 - 2, x \in \mathbb{R}$

4.8 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ - ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Διερεύνηση

- Με βάση τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης, μπορούν να αποδειχθούν οι παράγωγοι των πιο κάτω συναρτήσεων, όπως φαίνονται στον πίνακα:

Συνάρτηση	Παράγωγος
$f(x) = x, x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^3 - x, x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2 - 1$
$f(x) = 4x^2, x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 8x$

- Να παρατηρήσετε τον πιο πάνω πίνακα και να προβλέψετε τον τύπο της παραγώγου για καθεμιά από τις πιο κάτω συναρτήσεις:

Συνάρτηση	Παράγωγος
$f(x) = x^4, x \in \mathbb{R}$	
$f(x) = x^{2016}, x \in \mathbb{R}$	
$f(x) = x^{\frac{1}{2}}, x \in \mathbb{R}$	
$f(x) = x^{\nu}, x \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{N}$	
$f(x) = x^4 + x^3$	
$f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 3$	

Στην προηγούμενη υποενότητα ορίσαμε την παράγωγο μιας συνάρτησης f με τη βοήθεια της έννοιας του ορίου και χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό αυτό, για την εύρεση των παραγώγων μερικών «απλών» συναρτήσεων. Η εύρεση της παραγώγου μιας συνάρτησης με βάση τον ορισμό δεν είναι πάντα εύκολη. Ως εκ τούτου, σε αυτή την παράγραφο θα αποδείξουμε μερικά σημαντικά θεωρήματα, τα οποία θα μας επιτρέψουν να βρίσκουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης πιο εύκολα.

Παράγωγος σταθερής συνάρτησης

Έστω η σταθερή συνάρτηση f με τύπο $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει:

$$f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη

Είναι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Επομένως,

$$f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(α) f(x) = 3, x \in \mathbb{R} \quad (β) g(x) = \pi, x \in \mathbb{R} \quad (γ) h(x) = -\sqrt{2}, x \in \mathbb{R}$$

Λύση

$$(α) f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$(β) g(x) = \pi \Rightarrow g'(x) = 0$$

$$(γ) h(x) = -\sqrt{2} \Rightarrow h'(x) = 0$$

Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει:

$$f'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη

Είναι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

Επομένως,

$$f'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Παράγωγος συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N}$

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει:

$$f'(x) = v \cdot x^{v-1}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Σχόλιο

Αποδεικνύεται ότι το πιο πάνω θεώρημα ισχύει για όλους τους πραγματικούς εκθέτες. Με άλλα λόγια, η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^r, r \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει:

$$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^4, x \in \mathbb{R}$

(β) $g(x) = x^e, x \in \mathbb{R}$

(γ) $h(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Λύση

(α) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

(β) $g(x) = x^e \Rightarrow g'(x) = ex^{e-1}$

(γ) $h(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow h'(x) = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Παράγωγος αθροίσματος δύο συναρτήσεων

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Απόδειξη

Είναι:

$$\begin{aligned}(f + g)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0)\end{aligned}$$

Σχόλια

- Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x), \forall x \in \Delta$$

- Το πιο πάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Με άλλα λόγια, αν οι συναρτήσεις f_1, f_2, \dots, f_n είναι παραγωγίσιμες στο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x), \forall x \in \Delta$$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^2 - x, x \in \mathbb{R}$

(β) $g(x) = x^5 + x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$

(γ) $h(x) = x^3 - \frac{1}{x} + \pi, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(δ) $p(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Λύση

(α) $f(x) = x^2 - x \Rightarrow f'(x) = 2x - 1$

(β) $g(x) = x^5 + x^2 - 1 \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 2x$

(γ) $h(x) = x^3 - \frac{1}{x} + \pi = x^3 - x^{-1} + \pi \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + x^{-2} = 3x^2 + \frac{1}{x^2}$

(δ) $p(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = x^{-1} - x^{-2} \Rightarrow p'(x) = -x^{-2} - (-2)x^{-3} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

Παράγωγος γινομένου δύο συναρτήσεων

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Σχόλια

- Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \forall x \in \Delta$$

- Το πιο πάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.

- Έστω f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα σύνολο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$.

Τότε, από το πιο πάνω θεώρημα ισχύει:

$$(c \cdot f)'(x) = \frac{d}{dx}[c] \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x), \quad \forall x \in \Delta$$

Παράδειγμα 4

Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = 3x, x \in \mathbb{R}$$

$$(\beta) g(x) = 7x^5, x \in \mathbb{R}$$

$$(\gamma) h(x) = (x-2)(x-3), x \in \mathbb{R}$$

Λύση

$$(\alpha) f(x) = 3x \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot \frac{d}{dx}[x] = 3 \cdot 1 = 3$$

$$(\beta) g(x) = 7x^5 \Rightarrow g'(x) = 7 \cdot \frac{d}{dx}[x^5] = 7 \cdot 5x^4 = 35x^4$$

$$(\gamma) h(x) = (x-2)(x-3)$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}[x-2] \cdot (x-3) + (x-2) \cdot \frac{d}{dx}[x-3] \\ &= x-3 + x-2 = 2x-5 \end{aligned}$$

Παράγωγος πηλίκου δύο συναρτήσεων

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Σχόλιο

- Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και $g(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \forall x \in \Delta$$

Παράδειγμα 5

Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = \frac{x}{x-2}, x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

$$(\beta) g(x) = \frac{x-3}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$$

Λύση

$$(\alpha) f(x) = \frac{x}{x-2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}[x] \cdot (x-2) - x \cdot \frac{d}{dx}[x-2]}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = -\frac{2}{(x-2)^2}$$

$$(\beta) g(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\frac{d}{dx}[x-3] \cdot (x^2+1) - (x-3) \cdot \frac{d}{dx}[x^2+1]}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1 - (x-3)2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1-2x^2+6x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+6x+1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Παράγωγος Βασικών Συναρτήσεων – Κανόνες Παραγωγίσισης	
Συνάρτηση	Παράγωγος
$f(x) = c, c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^v, v \in \mathbb{R}$	$f'(x) = v \cdot x^{v-1}$
$f + g$	$[f + g]' = f' + g'$
$c \cdot f, c \in \mathbb{R}$	$(c \cdot f)' = c \cdot f'$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο:

(α) $f(x) = \frac{1}{3}$

(β) $f(x) = -\sqrt{7}$

(γ) $f(x) = x^2$

(δ) $f(x) = x^\pi$

(ε) $f(x) = x^{-6}$

(στ) $f(x) = x^3 + x - 4$

(ζ) $f(x) = -5x + 2$

(η) $f(x) = 3x^2 + x - 7$

(θ) $f(x) = 4x^7(x^2 + 2x - 3)$

(ι) $f(x) = (x - 4)(x + 5)$

(ια) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

(ιβ) $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-4}$

2. Να δώσετε τον χαρακτηρισμό ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ σε καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

(α) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 2$, τότε:

$$\frac{d}{dx}[f(x) - 3g(x)]\Big|_{x_0=2} = f'(2) - 3g'(2)$$

(β) Αν το $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο τέταρτου βαθμού, τότε και το $f'(x)$ είναι ένα πολυώνυμο τέταρτου βαθμού.

(γ) Αν $f(x) = x^3(x^4 - 2x)$, τότε $f'(x) = 3x^2(4x^3 - 2)$.

(δ) Αν $f'(1) = 4$, τότε:

$$\frac{d}{dx}[4f(x) - 1]\Big|_{x=1} = 16$$

3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

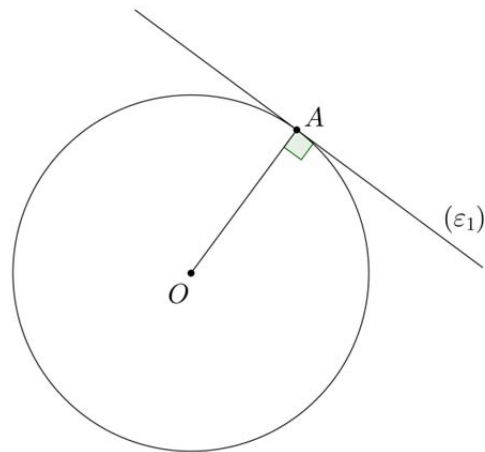
ικανοποιεί την εξίσωση:

$$x^2 \cdot f(x) + x^3 \cdot f'(x) = 0$$

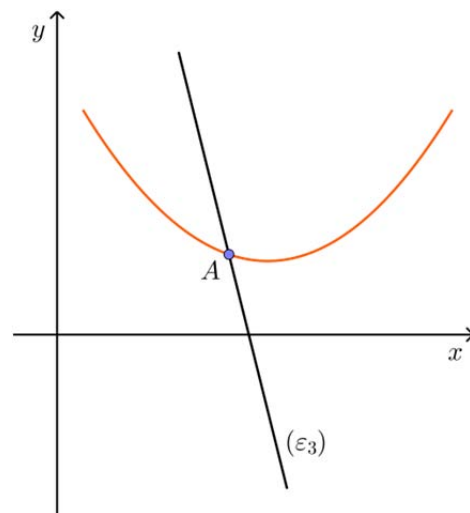
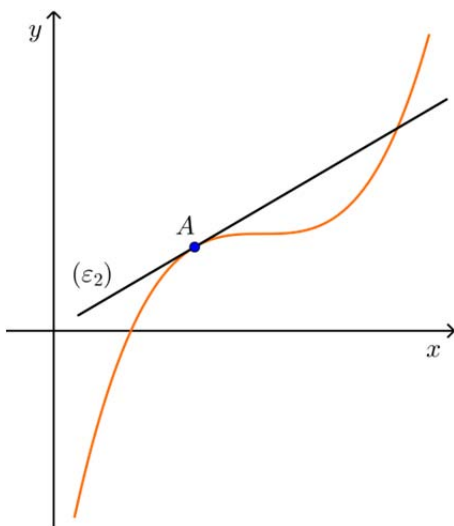
4.9 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Διερεύνηση 1

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ο κύκλος (O, R) και η εφαπτομένη ευθεία του κύκλου (ε_1) στο σημείο του A .



- Να δώσετε έναν ορισμό για την εφαπτομένη ευθεία κύκλου σε ένα σημείο του.
- Να εξετάσετε αν ο ορισμός που δώσατε είναι συμβατός για τις ευθείες ε_2 και ε_3 στα πιο κάτω σχήματα.

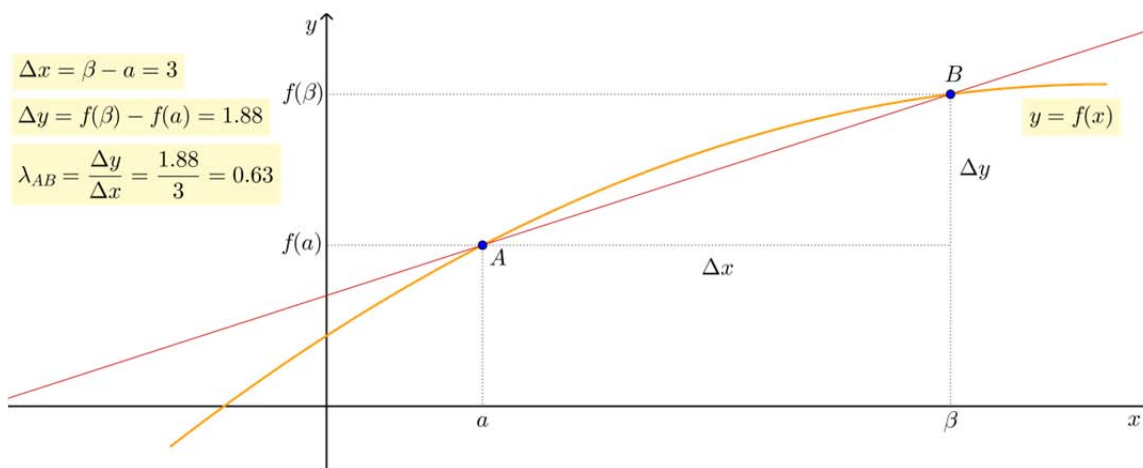


Μία ευθεία (ε_1) είναι εφαπτομένη του κύκλου (O, R) στο σημείο του A , όταν η ευθεία (ε_1) περνά από το σημείο A και είναι κάθετη στην ακτίνα OA του κύκλου. Δηλαδή, η ευθεία (ε_1) και ο κύκλος (O, R) έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο (στην περίπτωση μας το A) ή με άλλα λόγια η ευθεία (ε_1) «αγγίζει» τον κύκλο (O, R) στο A (δείτε το σχήμα της εφαπτομένης του κύκλου στην προηγούμενη σελίδα).

Είναι ξεκάθαρο ότι καμιά από τις πιο πάνω προτάσεις δεν λειτουργεί επαρκώς στην περίπτωση που θέλουμε να ορίσουμε την εφαπτομένη ευθεία μιας οποιασδήποτε καμπύλης σε ένα σημείο αυτής.

Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «[Blyk_Kor_En04_Efaptomeni.ggb](#)».

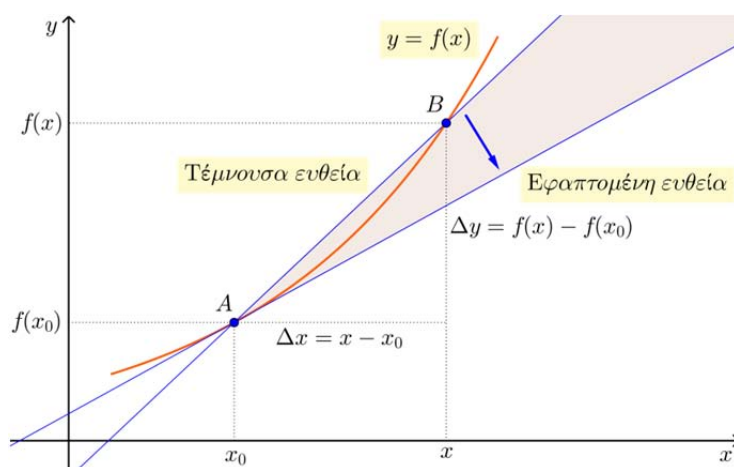


- Να μετακινείτε το σημείο B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f προς το μέρος του σταθερού σημείου A της γραφικής παράστασης της f . Τι παρατηρείτε για τις τιμές του συντελεστή διεύθυνσης (λ_{AB}) της ευθείας που διέρχεται από τα A και B , καθώς το β «πλησιάζει» το a είτε από δεξιά είτε από αριστερά;
- Τι παρατηρείτε για τη θέση της πιο πάνω ευθείας, όταν το σημείο B συμπίπτει με το σημείο A ;
- Ποια είναι η τιμή του συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας στη θέση αυτή;
- Με ποια έννοια των Μαθηματικών συνδέεται το πρόβλημα εύρεσης του συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας στη θέση αυτή;

Το πρόβλημα της εύρεσης ενός επαρκούς ορισμού της εφαπτομένης μιας καμπύλης ανάγεται τελικά στην εύρεση της κλίσης της. Μπορούμε να προσεγγίσουμε την κλίση της εφαπτομένης, χρησιμοποιώντας μια τέμνουσα ευθεία AB της καμπύλης (όπου A είναι το σημείο της καμπύλης στο οποίο θέλουμε να ορίσουμε την εφαπτομένη ευθεία και B ένα τυχαίο σημείο της καμπύλης).

Στο πιο κάτω σχήμα, παίρνουμε στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα σημείο $B(x, f(x))$, διαφορετικό από το $A(x_0, f(x_0))$. Η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Καθώς το x «πλησιάζει» το x_0 , το σημείο B κινείται πάνω στην καμπύλη, προσεγγίζοντας όλο και περισσότερο το σημείο A . Αν η ευθεία AB τείνει να πάρει μια «οριακή θέση» καθώς το x «πλησιάζει» το x_0 , τότε η ευθεία αυτή είναι η εφαπτομένη ευθεία της καμπύλης στο σημείο A . Με άλλα λόγια, αν η κλίση της ευθείας AB τείνει προς κάποιο όριο καθώς $x \rightarrow x_0$, τότε το όριο αυτό ισούται με την κλίση της εφαπτομένης ευθείας της καμπύλης στο σημείο A .

Ορισμός

Αν η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, το οποίο περιέχει το x_0 , και αν το όριο

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ και έχει κλίση λ είναι η **εφαπτομένη ευθεία** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο A .

Παρατηρήσεις

- Η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **κλίση της γραφικής παράστασης** της συνάρτησης f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$.
- Ο πιο πάνω ορισμός αναφέρεται στις περιπτώσεις που το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Στην περίπτωση αυτή, παρατηρούμε ότι η κλίση λ της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ ισούται με την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0 . Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lambda$$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ για καθεμιά από τις πιο κάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = x^2$ στο $A(1, 1)$

(β) $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $A(1, 1)$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$$

Συνεπώς, ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, 1)$, η οποία έχει κλίση $\lambda = f'(1) = 2$.

Επομένως, η εξίσωσή της είναι η:

$$y - 1 = 2(x - 1) \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$$

Η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0) και έχει συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) λ είναι η:
 $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

(β) Έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(1) = -1$$

Συνεπώς, ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, 1)$ και έχει κλίση $\lambda = f'(1) = -1$.

Επομένως, η εξίσωσή της είναι η:

$$y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$$

Παράδειγμα 2

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $A(4, 5)$ διέρχεται από το σημείο $B(7, 0)$. Να υπολογίσετε την τιμή $f'(4)$.

Λύση

Υπολογίζουμε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(4, 5)$, αφού γνωρίζουμε ότι διέρχεται και από το σημείο $B(7, 0)$.

Είναι:

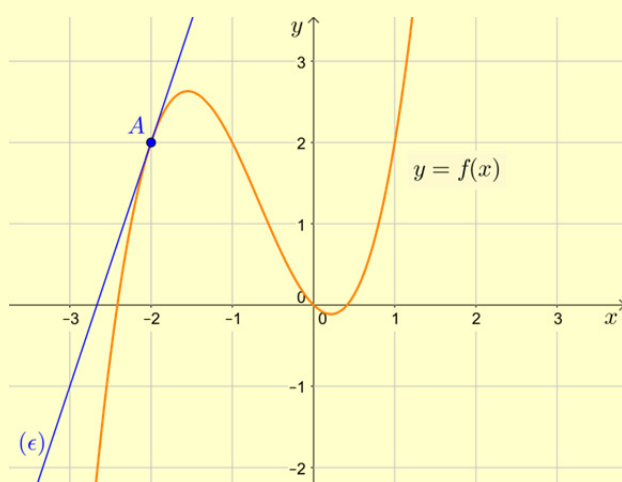
$$\lambda_{AB} = \frac{0 - 5}{7 - 4} = -\frac{5}{3}$$

Από τον ορισμό της παραγώγου της f στο $x_0 = 4$, έχουμε ότι:

$$f'(4) = \lambda_{AB} = -\frac{5}{3}$$

Δραστηριότητες

- Να υπολογίσετε την κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο:
(α) $f(x) = -7$ στο σημείο της $A(2, -7)$
(β) $f(x) = 3x$ στο σημείο της $A(-1, -3)$
(γ) $f(x) = x^2 + 4$ στο σημείο της $A(2, 8)$
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f (αν αυτή ορίζεται) στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ για καθεμιά από τις πιο κάτω συναρτήσεις:
(α) $f(x) = 2x$ στο σημείο της $A(1, f(1))$
(β) $f(x) = x^3 - 1$ στο $A(0, f(0))$
(γ) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ στο $A(-1, f(-1))$
- Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - x, x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της f να ισούται με 3.
- Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $A(-2, 1)$ διέρχεται από το σημείο $B(-3, -1)$. Να υπολογίσετε την τιμή $f'(-2)$.
- Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f και η εφαπτομένη της (ϵ) στο σημείο $A(-2, 2)$. Να υπολογίσετε την τιμή $f'(-2)$.



Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ των πιο κάτω συναρτήσεων και να αναφέρετε την τιμή του σε κάθε περίπτωση, χρησιμοποιώντας και τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις:

(α) $f(x) = -2x + 1, x \in \mathbb{R}$

(β) $g(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$

2. Τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο $x = 1$ και $x = 2$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \beta + 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a + 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} 3\beta - 4$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των a και β , έτσι ώστε να υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

3. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x + 2)$

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{x^2+4} \right)$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2-4}{x-2} \right)$

(δ) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2} \right)$

(ε) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + x - 7)$

(στ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + x^2 - 5x + 2)$

4. Να υπολογίσετε την κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο:

(α) $f(x) = 1$ στο σημείο της $A(-5, 1)$

(β) $f(x) = \frac{1}{2}x$ στο σημείο της $A(-4, -2)$

(γ) $f(x) = -x^2 + 1$ στο σημείο της $A(3, -8)$

5. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $A(3, -5)$ διέρχεται από το σημείο $B(-2, -4)$. Να υπολογίσετε την τιμή $f'(3)$.

6. Με τη χρήση του ορισμού, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο:

(α) $f(x) = -\frac{1}{3}, x \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = -2x + 7, x \in \mathbb{R}$

(γ) $f(x) = x^2 - 3x, x \in \mathbb{R}$

7. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο:

(α) $f(x) = -\sqrt{3}$

(β) $f(x) = -\pi^2$

(γ) $f(x) = x^{2016}$

(δ) $f(x) = x^{\sqrt{2}}$

(ε) $f(x) = x^{-6}$

(στ) $f(x) = x^4 + x^3 - 2$

(ζ) $f(x) = 3x + 1$

(η) $f(x) = -2x^2 + 3x$

(θ) $f(x) = -x^5(2x^2 + x - 4)$

(ι) $f(x) = (x - 2)(x + 8)$

(ια) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

(ιβ) $f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x - 3}$

8. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο:

(α) $f(x) = 2x^3$ στο σημείο $x_0 = -2$

(β) $f(x) = 2x^3 - 1$ στο σημείο $x_0 = 1$

(γ) $f(x) = (x - 7)(x - 3)$ στο σημείο $x_0 = 5$

(δ) $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$ στο σημείο $x_0 = 4$

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$$

- (α) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
(β) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

2. Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x < 2 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} + 4\sqrt{x}, & x > 2 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

3. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lambda^3 + \lambda - 1, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x),$$

να υπολογίσετε:

- (α) την τιμή του λ
(β) το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$
(γ) το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} f(4 + h)$
4. Η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$ και εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο $M(3, f(3))$. Αν ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 1,$$

να υπολογίσετε την τιμή $f(3)$.

5. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$. Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(3, f(3))$ έχει εξίσωση (ε): $y = 2x + 1$. Να υπολογίσετε:

(α) την τιμή $f(3)$

(β) την παράγωγο της συνάρτησης f στο $x_0 = 3$

(γ) το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + 4h) - 7}{h}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

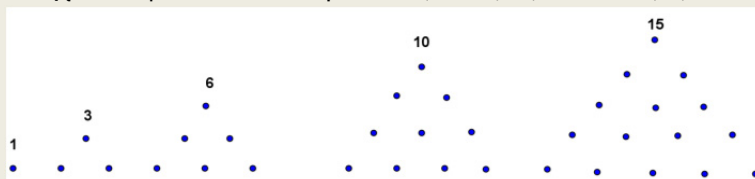
- 5.1 Εισαγωγή
- 5.2 Η έννοια της ακολουθίας
- 5.3 Ειδικές ακολουθίες
 - 5.3.1 Αριθμητική πρόοδος
 - 5.3.2 Γεωμετρική πρόοδος

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ιστορικό Σημείωμα

Οι ακολουθίες αριθμών αποτέλεσαν ιστορικά ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα για την εξέλιξη των Μαθηματικών. Το όνομα αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος πιθανόν να είχε δοθεί από τη σχέση που έχει ο κάθε όρος με τον προηγούμενο και τον επόμενο του και συνδέονταν με γεωμετρικά προβλήματα. Για παράδειγμα, σε κάθε τριάδα θετικών διαδοχικών αριθμών α, β, γ γεωμετρικής προόδου ο δεύτερος αριθμός β αποτελεί το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου, που έχει το ίδιο εμβαδόν με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις α, γ , δηλαδή $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$. Με ανάλογο τρόπο, στην αριθμητική πρόοδο ο αριθμός β αποτελεί την πλευρά ενός τετραγώνου που έχει την ίδια περίμετρο με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων α, γ , δηλαδή $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$.

Οι Πυθαγόρειοι, είχαν δημιουργήσει τους πολύγωνους αριθμούς. Βασικά ήταν ακολουθίες αριθμών που η γεωμετρική αναπαράστασή τους έδινε κανονικά πολύγωνα. Στο πιο κάτω σχήμα, παρουσιάζονται οι τρίγωνοι αριθμοί 1, 3, 6, 10, 15, ... που είναι οι πιο απλοί πολύγωνοι αριθμοί και προκύπτουν από τα μερικά αθροίσματα διαδοχικών φυσικών αριθμών 1, (1 + 2), (1 + 2 + 3), (1 + 2 + 3 + 4), .



Με ανάλογο τρόπο όριζαν και άλλους πολύγωνους αριθμούς όπως ήταν οι τετράγωνοι, οι πεντάγωνοι κτλ

Ο Ζήνων ο Ελεάτης (490-425 π.Χ.) είχε διατυπώσει τα γνωστά «Παράδοξα του Ζήνωννα» τα οποία ήταν συγκεκριμένες προτάσεις, που εκ πρώτης όψεως φαίνονταν παράλογες, αλλά στην πραγματικότητα είναι προτάσεις θεμελιωμένες πάνω σε σοβαρά επιχειρήματα. Το παράδοξο του Αχιλλέα και της Χελώνας αναφέρει: « Ο Αχιλλέας κυνηγά μια χελώνα η οποία προηγείται κατά μια απόσταση έστω δ . Όταν ο Αχιλλέας θα έχει καλύψει την απόσταση δ , η χελώνα θα έχει διανύσει μια νέα απόσταση δ_1 . Τη στιγμή που ο Αχιλλέας θα έχει καλύψει και την απόσταση δ_1 , η χελώνα θα προηγείται κατά μια απόσταση δ_2 κ.ο.κ «επ άπειρον». Επομένως, ο Αχιλλέας δεν θα φτάσει ποτέ τη χελώνα.

Το πιο πάνω παράδοξο, όπως και τα άλλα που είχε διατυπώσει ο Ζήνων, για να εξηγηθεί είναι απαραίτητες βασικές έννοιες, όπως η ακολουθία, το όριο ακολουθίας και το άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου.

Αργότερα, Ινδοί μαθηματικοί είχαν διατυπώσει τύπους υπολογισμού του αθροίσματος των n πρώτων όρων των τετραγώνων και των κύβων των φυσικών αριθμών.

Ιστορικά μια από τις πρώτες αναδρομικές ακολουθίες το 1220 στην εργασία του Liber Abaci, ήταν η γνωστή ακολουθία Fibonacci: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55, ... που περιγραφόταν από τις σχέσεις: $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$.

5.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Εξερεύνηση

Να προβλέψετε τους επόμενους τρεις αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, ...

Διερεύνηση

Δίνονται οι αριθμοί:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{100}, \frac{1}{101}, \dots$$

- (α) Να βρείτε ποιος αριθμός βρίσκεται στην $8^{\text{η}}$ θέση και ποιος στην $105^{\text{η}}$ θέση.
(β) Να βρείτε έναν τύπο που να συνδέει τον κάθε αριθμό με τη θέση του.
(γ) Να αποδείξετε ότι ο πιο πάνω τύπος αποτελεί συνάρτηση και να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

5.2.1 Ορισμός-Αναπαράσταση ακολουθίας

Στις πιο κάτω περιπτώσεις παρουσιάζονται αριθμοί γραμμένοι με διαδοχική σειρά. Στόχος είναι η αναζήτηση των επόμενων αριθμών.

- ✓ 6, 10, 14, 18, 22, 26, ...
- ✓ 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
- ✓ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$
- ✓ 2, 7, 22, 67, 202, 607, ...

Οι τελείες στο τέλος δηλώνουν ότι ακολουθούν και άλλοι άπειροι αριθμοί. Με την αναγραφή ορισμένων αρχικών αριθμών, ίσως να μην είναι και τόσο εύκολο να υπολογίζουμε κάθε φορά τον επόμενο αριθμό. Έτσι, προσπαθούμε να βρούμε πιο σύντομους και ακριβείς τρόπους ή συμβολισμούς, που να απλουστεύουν το συγκεκριμένο πρόβλημα, ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε σε κάθε θέση οποιοδήποτε αριθμό.

Ορισμός

Κάθε συνάρτηση a , με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ και τιμές σε ένα υποσύνολο B του \mathbb{R} , λέγεται **ακολουθία πραγματικών αριθμών**.

Συμβολικά έχουμε

$$a: \mathbb{N} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$

Παρατηρήσεις

Η τιμή μιας ακολουθίας στη n -θέση, δηλαδή ο πραγματικός αριθμός $a(n)$, $n \in \mathbb{N}$ λέγεται **νιοστός όρος**, (συμβολίζεται με (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ και διαβάζεται «α με δείκτη n»).

Ισχύει δηλαδή:

$$a(1) = a_1, a(2) = a_2, \dots, a(n) = a_n, \dots$$

Τα στοιχεία του πεδίου ορισμού μιας ακολουθίας, δηλαδή τα πρότυπα της συνάρτησης, τα λέμε **δείκτες** και τις εικόνες των δεικτών **όρους** της ακολουθίας.

Έτσι,

- ✓ ο a_1 ονομάζεται πρώτος όρος της ακολουθίας
- ✓ ο a_2 ονομάζεται δεύτερος όρος της ακολουθίας
- ✓
- ✓ ο a_n ονομάζεται **νιοστός ή γενικός όρος** της ακολουθίας.

Ο γενικός όρος a_n μιας ακολουθίας βρίσκεται στη n -θέση και περιγράφει για κάθε τιμή του φυσικού αριθμού n τον συγκεκριμένο όρο, χωρίς να σημαίνει ότι είναι ο τελευταίος όρος.

Για παράδειγμα, η ακολουθία $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots, n \in \mathbb{N}$. έχει:

Πρώτο όρο τον $a_1 = 1$, δεύτερο όρο τον $a_2 = \frac{1}{2}$ τρίτο όρο τον $a_3 = \frac{1}{3}$ κτλ. Ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι ο $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ και μας δίνει οποιοδήποτε όρο. Δηλαδή όρος με δείκτη 10 είναι ο a_{10} και είναι ίσος με $\frac{1}{10}$.

Μια ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$, είναι **τελείως ορισμένη**, όταν υπάρχει η δυνατότητα να υπολογίζουμε οποιοδήποτε όρο της ακολουθίας.

Έτσι, μια ακολουθία **ορίζεται πλήρως** όταν:

➤ **Ο γενικός όρος a_n δίνεται με τύπο.**

Για παράδειγμα, οι ακολουθίες:

- $a_n = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$,
ή
- $\beta_n = \begin{cases} 5, & n \text{ περιττός} \\ 10, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$

ορίζονται πλήρως $\forall n \in \mathbb{N}$.

➤ **Δίνεται ικανοποιητικό πλήθος αρχικών όρων και ένας αναγωγικός τύπος.**

Για παράδειγμα, οι ακολουθίες,

- $a_{n+1} = a_n + 7, a_1 = 2$
ή
- $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$

ορίζονται πλήρως.

Όταν υπάρχει μια σχέση, που συνδέει δύο ή περισσότερους γενικούς όρους μιας ακολουθίας, η σχέση αυτή ονομάζεται **αναγωγικός ή αναδρομικός τύπος** της ακολουθίας.

Για παράδειγμα, οι σχέσεις $a_{n+1} = a_n + 7$ και $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ είναι αναγωγικοί τύποι γιατί συνδέουν διαδοχικούς γενικούς όρους.

Παρατηρήσεις

- ✓ Όταν δίνονται μερικοί αρχικοί όροι της ακολουθίας, θεωρούμε ότι η ακολουθία δεν ορίζεται πλήρως.

Για παράδειγμα, η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$, στην οποία δίνονται οι πρώτοι όροι της με $a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 6, \dots$ είναι δυνατών:

(α) να έχει γενικό τύπο $a_n = 2n$ ή

(β) να έχει γενικό τύπο $\beta_n = 2n + n(n-1)(n-2)(n-3)$

Παρατηρούμε ότι και οι δύο ακολουθίες έχουν μόνο τους ίδιους τέσσερις πρώτους όρους. Επομένως, η ακολουθία δεν είναι τελείως ορισμένη, όταν δίνονται μόνο κάποιοι αρχικοί όροι.

- ✓ Όταν δίνεται μόνο ο αναγωγικός τύπος μιας ακολουθίας, τότε αυτή δεν ορίζεται πλήρως. Δηλαδή, ο τύπος $a_{n+1} = 3a_n + 4$, δεν μπορεί από μόνος του να δώσει κανένα όρο κάποιας ακολουθίας. Πρέπει να δοθεί και ικανοποιητικό πλήθος όρων. Ο ίδιος αναγωγικός τύπος με διαφορετικό αρχικό όρο μας δίνει διαφορετική ακολουθία.

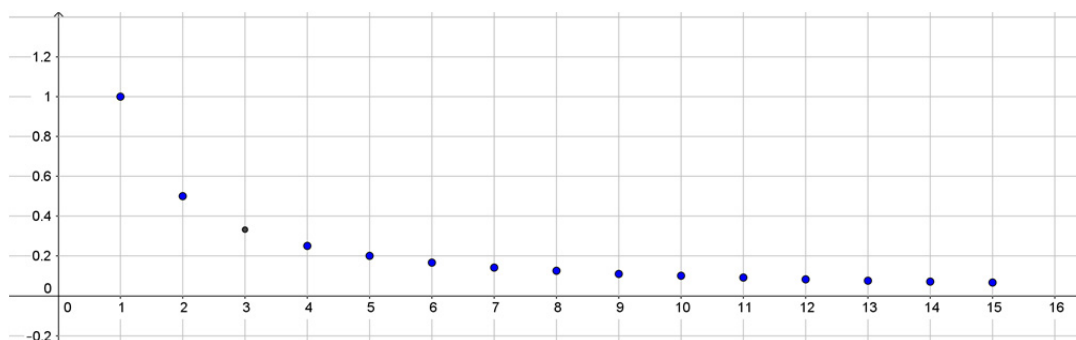
Για παράδειγμα,

- η ακολουθία $a_{n+1} = 3a_n + 4$, με $a_1 = 0$, δίνει τους όρους $4, 16, 52, 160, \dots$, ενώ
- η ακολουθία $a_{n+1} = 3a_n + 4$, με $a_1 = 1$, δίνει τους όρους $7, 25, 79, 241, \dots$

- ✓ Σε μια ακολουθία το πλήθος των όρων της δεν είναι πεπερασμένο ενώ το σύνολο των τιμών της είναι δυνατόν να είναι πεπερασμένο.

Για παράδειγμα, η ακολουθία $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$, έχει άπειρο το πλήθος όρων το $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$, ενώ το σύνολο των τιμών της είναι μόνο το $\{-1, 1\}$.

- ✓ Αφού η ακολουθία είναι συνάρτηση, έτσι και για κάθε ακολουθία, το γράφημα της είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $G = \{(1, a_1), \dots, (n, a_n), \dots, n \in \mathbb{N}\}$, στο οποίο αντιστοιχεί ένα σύνολο σημείων σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ έχει την πιο κάτω γραφική παράσταση.



Παράδειγμα 1

Να γράψετε τους 4 πρώτους όρους των ακολουθιών με γενικούς όρους

$$\begin{array}{ll} (\alpha) & \alpha_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \\ (\beta) & \alpha_n = n(-1)^n, n \in \mathbb{N} \\ (\gamma) & \alpha_n = \begin{cases} 1, & n \text{ περιττός} \\ 0, & n \text{ άρτιος} \end{cases} \\ (\delta) & \alpha_n = 2, n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Λύση

$$\begin{array}{ll} (\alpha) & \alpha_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}, \quad \alpha_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5} \\ (\beta) & \alpha_1 = 1(-1)^1 = -1, \quad \alpha_2 = 2(-1)^2 = 2, \quad \alpha_3 = 3(-1)^3 = -3, \quad \alpha_4 = 4(-1)^4 = 4 \\ (\gamma) & \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 0 \\ (\delta) & \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = 2 \end{array}$$

Παράδειγμα 2

Δίνεται η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο $a_n = n^2 + 2n$.

- (α) Να υπολογίσετε τον 10^ο όρο της
(β) Να υπολογίσετε σε ποια θέση βρίσκεται ο όρος 80.

Λύση

(α) Για $n = 10$ έχουμε τον 10^ο όρο $a_{10} = 10^2 + 2 \cdot 10 = 120$.

(β) Ζητάμε την τιμή του n , όταν $a_n = 80$. Έτσι:

$$n^2 + 2n = 80 \Leftrightarrow n^2 + 2n - 80 = 0 \Leftrightarrow (n + 10)(n - 8) = 0 \Leftrightarrow n = 8$$

Το $n = -10$ απορρίπτεται, γιατί το n είναι φυσικός αριθμός. Επομένως, ο όρος 80 βρίσκεται στην 8^η θέση, είναι δηλαδή, $a_8 = 80$.

Παράδειγμα 3

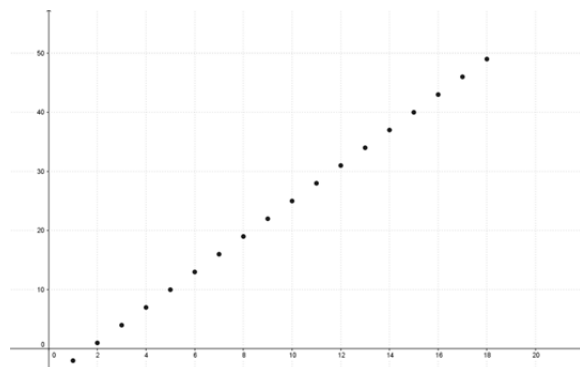
Να γράψετε τους 5 πρώτους όρους της ακολουθίας που εκφράζεται με τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = a_n + 3$, $a_1 = -1$ και να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση

Δίνοντας διαδοχικά τιμές στο $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ στον αναγωγικό τύπο έχουμε:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = a_1 + 3 = 2, \quad a_3 = a_2 + 3 = 5, \\ a_4 = a_3 + 3 = 8, \quad a_5 = a_4 + 3 = 11$$

Μέρος της γραφικής παράστασης φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Παράδειγμα 4

Δίνεται η ακολουθία 3, 6, 12, 24, 48, 96, Να βρείτε μια σχέση που να συνδέει κάθε όρο με τον προηγούμενο του (με εξαίρεση τον πρώτο όρο).

Λύση

Ο κάθε όρος (εκτός από τον πρώτο) προκύπτει όταν διπλασιάσουμε τον προηγούμενό του.

$$\text{Άρα, } a_{n+1} = 2a_n, a_1 = 3.$$

Παράδειγμα 5

Να βρείτε τον νιοστό όρο της ακολουθίας:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$$

Λύση

Αναζητούμε μια σχέση που να συνδέει τον κάθε όρο με τη θέση του. Παρατηρούμε ότι κάθε όρος είναι κλάσμα γραμμένο στη μορφή $\frac{a_n}{b_n}$.

Σε κάθε κλάσμα οι αριθμητές είναι όροι της ακολουθίας a_n : 1,2,3,4,5, ...

Επομένως, ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι $a_n = n$.

Σε κάθε κλάσμα οι παρονομαστές είναι όροι της ακολουθίας b_n : 2,3,4,5,6, ...

Επομένως, ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι $b_n = n + 1$.

Άρα, ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι: $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

Δραστηριότητες

- Να γράψετε τους 6 πρώτους όρους των πιο κάτω ακολουθιών:
 - $a_n = n + 2, n \in \mathbb{N}$
 - $a_n = n^2 - 3, n \in \mathbb{N}$
 - $a_n = 3^n, n \in \mathbb{N}$
 - $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$
 - $a_{n+1} = a_n + 1, a_1 = 10, n \in \mathbb{N}$
- Να παραστήσετε γραφικά τις ακολουθίες με γενικό όρο:
 - $a_n = 3n - 2$
 - $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
 - $a_n = \eta\mu \frac{n\pi}{4}$
- Δίνεται η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ με αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = 3a_n - 4, a_1 = 2$. Να γράψετε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας και να την παραστήσετε γραφικά.
- Δίνεται η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ με τύπο $a_n = n^2 + n + 1$. Να βρείτε την τιμή του n , ώστε να ισχύει $a_n = 57$.
- Να βρείτε τον νιοστό όρο των πιο κάτω ακολουθιών:
 - 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...
 - $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$
- Να γράψετε έναν αναγωγικό τύπο που να δίνει τους όρους της κάθε ακολουθίας στις πιο κάτω περιπτώσεις:
 - 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...
 - 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...
 - 2, 5, 11, 23, 47, 95,

5.3. ΕΙΔΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

5.3.1 Αριθμητική Πρόοδος

Διερεύνηση

Σε ένα αμφιθέατρο η πρώτη σειρά έχει 20 καθίσματα και κάθε επόμενη σειρά έχει 4 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.

- (α) Να υπολογίσετε πόσα καθίσματα θα έχει η 5^η σειρά.
- (β) Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο της ακολουθίας που εκφράζει το πλήθος των καθισμάτων σε κάθε σειρά.



Ορισμός

Αριθμητική Πρόοδος λέγεται η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ της οποίας ο κάθε όρος εκτός από τον πρώτο, προκύπτει από τον προηγούμενό του, αν σε αυτόν προσθέσουμε τον ίδιο σταθερό αριθμό, δηλαδή $a_{n+1} = a_n + \delta, n = 1, 2, 3, \dots$

Ο σταθερός αριθμός ονομάζεται **διαφορά** της Αριθμητικής Προόδου και συμβολίζεται με δ .

Μία Αριθμητική Πρόοδος ορίζεται πλήρως όταν είναι γνωστός ο πρώτος όρος της και η διαφορά της.

Για παράδειγμα, η Αριθμητική Πρόοδος με $a_1 = -1$ και $\delta = 5$, ορίζεται πλήρως και έχει τους πέντε πρώτους όρους της $-1, 4, 9, 14, 19, \dots$

Συνεπώς, η ακολουθία a_n είναι Αριθμητική Πρόοδος, όταν ισχύει:

$$a_{n+1} = a_n + \delta \quad \text{ή} \quad a_{n+1} - a_n = \delta, \forall n \in \mathbb{N}, \delta \in \mathbb{R}.$$

Σημείωση

- Στην Αριθμητική Πρόοδο $1, 4, 7, 10, 13, \dots$ έχουμε $\delta = 3 > 0$. Παρατηρούμε ότι κάθε όρος της είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του.

Ισχύει δηλαδή $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Μια τέτοια Αριθμητική Πρόοδος λέγεται **γνήσια αύξουσα**.

- Στην αριθμητική πρόοδο $10, 8, 6, 4, 2, \dots$ έχουμε $\delta = -2 < 0$. Παρατηρούμε ότι κάθε όρος της είναι μικρότερος από τον προηγούμενό του.

Ισχύει δηλαδή $a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Μια τέτοια Αριθμητική Πρόοδος λέγεται **γνήσια φθίνουσα**.

Παράδειγμα 1

Αφού γράψετε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας με γενικό όρο $a_n = 4n - 2$ να δείξετε ότι είναι Αριθμητική Πρόοδος.

Λύση

$$a_1 = 4 \cdot 1 - 2 = 2$$

$$a_2 = 4 \cdot 2 - 2 = 6,$$

$$a_3 = 4 \cdot 3 - 2 = 10,$$

$$a_4 = 4 \cdot 4 - 2 = 14,$$

$$a_5 = 4 \cdot 5 - 2 = 18$$

Δηλαδή, οι πέντε πρώτοι όροι είναι: 2,6,10,14,18, ...

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η διαφορά $a_{n+1} - a_n$ είναι σταθερή (ανεξάρτητη του n).

Έχουμε, $a_{n+1} - a_n = 4(n+1) - 2 - (4n - 2) = 4n + 4 - 2 + 4n + 2 = 4, \forall n \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς, η ακολουθία είναι Αριθμητική Πρόοδος με $a_1 = 2$ και $\delta = 4$.

Πρόταση

Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου, τότε ισχύει $2\beta = \alpha + \gamma$.

Αντίστροφα, αν σε κάθε τριάδα α, β, γ διαδοχικών όρων της ακολουθίας $a_n, n \in \mathbb{N}$, ισχύει $2\beta = \alpha + \gamma$, τότε η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ είναι Αριθμητική Πρόοδος.

Ο αριθμός β λέγεται **αριθμητικός μέσος** των αριθμών α και γ και είναι ίσος με $\frac{\alpha + \gamma}{2}$.

Απόδειξη

Αφού η ακολουθία είναι Αριθμητική Πρόοδος, ισχύει ότι $a_{n+1} - a_n = \delta$.

Συνεπώς, $\beta - \alpha = \delta$ και $\gamma - \beta = \delta$.

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta \Rightarrow 2\beta = \alpha + \gamma$$

Αντίστροφα, αν $2\beta = \alpha + \gamma$, τότε $\beta - \alpha = \gamma - \beta$ και επομένως οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

Παράδειγμα 2

(α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί 7, 25, 43 είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου.

(β) Να υπολογίσετε τον αριθμητικό μέσο των $-1, 13$.

Λύση

(α) Αρκεί να δείξουμε ότι $2\beta = \alpha + \gamma$.

Η τελευταία σχέση ισχύει γιατί $2 \cdot 25 = 7 + 43$ και επομένως είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου.

(β) Έστω ότι ο αριθμητικός μέσος των $-1, 13$ είναι ο β . Τότε ισχύει:

$$2\beta = -1 + 13 \Leftrightarrow 2\beta = 12 \Leftrightarrow \beta = 6$$

Πρόταση

Ο γενικός όρος a_n μιας Αριθμητικής Προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά δ είναι:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot \delta, \forall n \in \mathbb{N}$$

Παράδειγμα 3

Σε Αριθμητική Πρόοδο $a_1 = 3$ και $\delta = -2$. Να υπολογίσετε τον a_{20} όρο της προόδου.

Λύση

$$a_{20} = a_1 + 19\delta \Rightarrow a_{20} = 3 + 19 \cdot (-2) = 3 - 38 = -35$$

Παράδειγμα 4

Σε Αριθμητική Πρόοδο ο τρίτος όρος είναι 8 και το άθροισμα του πρώτου και έκτου όρου είναι 19. Να σχηματίσετε την Αριθμητική Πρόοδο.

Λύση

Έστω a_1, a_2, a_3, \dots οι όροι της αριθμητικής προόδου. Ισχύει:

$$\begin{cases} a_3 = 8 \\ a_1 + a_6 = 19 \end{cases}$$

Ισοδύναμα έχουμε:

$$\begin{cases} a_1 + 2\delta = 8 \\ a_1 + a_1 + 5\delta = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2\delta = 8 \\ 2a_1 + 5\delta = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 4\delta = 16 \\ 2a_1 + 5\delta = 19 \end{cases}$$

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα, έχουμε $\delta = 3, a_1 = 2$.

Επομένως οι αρχικοί όροι της Αριθμητικής Προόδου είναι: 2,5,8,11,14, ...

Παράδειγμα 5

Μεταξύ των αριθμών 9 και 41 να παρεμβάλετε 7 αριθμούς, ώστε όλοι μαζί να σχηματίζουν Αριθμητική Πρόοδο.

Λύση

Έχουμε. $a_1 = 9$ και $a_9 = 41$.

Επιλύουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων: $\begin{cases} a_1 = 9 \\ a_1 + 8\delta = 41 \end{cases}$

Με αντικατάσταση έχουμε $9 + 8\delta = 41 \Leftrightarrow 8\delta = 32 \Leftrightarrow \delta = 4$.

Έτσι έχουμε:

$$9,13,17,21,25,29,33,37,41$$

Παράδειγμα 6

Ένας υπάλληλος παίρνει σταθερή αύξηση 5 ευρώ κάθε μήνα. Αν τον Μάρτιο του 2016 ο μισθός του είναι 500 ευρώ, να υπολογίσετε:

- (α) τον μισθό του το Δεκέμβριο του ίδιου χρόνου
- (β) ποιο μήνα θα πάρει μισθό 675 ευρώ

Λύση

(α) Ο μισθός κάθε μήνα αποτελεί αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 500$ και $\delta = 5$.

Ο μισθός το Δεκέμβριο είναι ο δέκατος όρος:

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\delta \Rightarrow \alpha_{10} = \alpha_1 + 9\delta = 545.$$

(β) Γνωρίζουμε ότι $\alpha_1 = 500$, $\delta = 5$ και $\alpha_n = 675$.

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1) \cdot \delta \Rightarrow 675 = 500 + (n - 1)5 \Rightarrow n = 36$$

Συνεπώς, σε 36 μήνες ο μισθός του θα γίνει 675 ευρώ.

Άρα, το 2019 το Μάρτιο ο μισθός του θα γίνει 675 ευρώ.

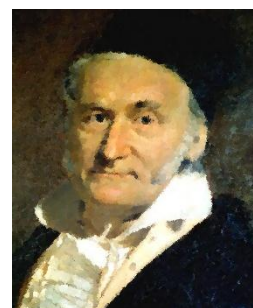
Το άθροισμα των n πρώτων όρων Αριθμητικής Προόδου

Διερεύνηση

Ο Gauss, ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς, όταν ήταν μαθητής στο σχολείο ο δάσκαλος του ζήτησε να υπολογίσει το άθροισμα όλων των φυσικών αριθμών μέχρι το 100.

Ο Gauss απάντησε αμέσως με μια μέθοδο που αγνοούσε ο δάσκαλός του.

Να ερευνήσετε ποια μέθοδο χρησιμοποίησε ο Gauss και να την σχολιάσετε.



Απόδειξη

Το άθροισμα των n πρώτων όρων της Αριθμητικής Προόδου είναι

$$\Sigma_n = \alpha_1 + (\alpha_1 + \delta) + (\alpha_1 + 2\delta) + \dots + (\alpha_n - 2\delta) + (\alpha_n - \delta) + \alpha_n$$

$$\Sigma_n = \alpha_n + (\alpha_n - \delta) + (\alpha_n - 2\delta) + \dots + (\alpha_1 + 2\delta) + (\alpha_1 + \delta) + \alpha_1$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$2\Sigma_n = (\alpha_1 + \alpha_n) + (\alpha_1 + \alpha_n) + \dots + (\alpha_1 + \alpha_n) = n(\alpha_1 + \alpha_n) \Rightarrow \Sigma_n = \frac{n(\alpha_1 + \alpha_n)}{2}.$$

$$\text{Χρησιμοποιώντας τη σχέση } \alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\delta, \text{ έχουμε } \Sigma_n = \frac{n(2\alpha_1 + (n-1)\delta)}{2}.$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της Αριθμητικής Προόδου $-2, 1, 4, 7, 10, \dots$

Λύση

Η Αριθμητική Πρόοδος έχει $\alpha_1 = -2$ και $\delta = 3$.

Το άθροισμα Σ_{30} των 30 πρώτων όρων της είναι:

$$\Sigma_{30} = \frac{30}{2} [2 \cdot (-2) + (30 - 1) \cdot 3] = 15(-4 + 29 \cdot 3) = 15(-4 + 87) = 15 \cdot 83 = 1245.$$

Παράδειγμα 2

Δίνεται μια Αριθμητική Πρόοδος με $a_4 = 3$ και $a_5 + a_7 = 14$.

Να υπολογίσετε το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της προόδου.

Λύση

Θα βρούμε τις τιμές των a_1 και δ .

$$a_4 = 3 \Rightarrow a_1 + 3\delta = 3$$

$$a_5 + a_7 = 14 \Rightarrow a_1 + 4\delta + a_1 + 6\delta = 14 \Rightarrow 2a_1 + 10\delta = 14 \Rightarrow a_1 + 5\delta = 7$$

Επιλύουμε το πιο πάνω σύστημα και έχουμε $a_1 = -3$ και $\delta = 2$.

Συνεπώς:

$$\Sigma_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)\delta)}{2} \Rightarrow \Sigma_{100} = \frac{100(2(-3) + 99 \cdot 2)}{2} = 9600$$

Το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της προόδου είναι 9600.

Παράδειγμα 3

Ένας εργολάβος συμφώνησε με τον ιδιοκτήτη ότι, αν το σπίτι δεν είναι έτοιμο τη μέρα που καθόρισαν, θα του έδινε 100 ευρώ την επόμενη μέρα και για κάθε επιπλέον μέρα καθυστέρησης θα του έδινε 50 ευρώ περισσότερα από την προηγούμενη μέρα. Αν τελικά ο εργολάβος έδωσε 2700 ευρώ για καθυστέρηση, να υπολογίσετε πόσες μέρες καθυστέρηση να παραδώσει το σπίτι.

Λύση

Τα χρήματα που δίνει κάθε μέρα αποτελούν Αριθμητική Πρόοδος με $a_1 = 100$ και $\delta = 50$.

Το άθροισμα των n πρώτων όρων της προόδου είναι $\Sigma_n = 2700$.

$$\begin{aligned} \Sigma_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)\delta)}{2} \Rightarrow 2700 &= \frac{n(200 + (n-1)50)}{2} \\ \Rightarrow 54 &= \frac{n(4 + n-1)}{2} \Rightarrow n^2 + 3n - 108 = 0 \\ \Rightarrow (n+12)(n-9) &= 0 \Rightarrow n = 9 \end{aligned}$$

Επομένως, καθυστέρησε 9 μέρες, να παραδώσει το σπίτι.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:
 - (α) Μια ακολουθία είναι Αριθμητική πρόοδος όταν ο δεύτερος όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο του αν σε αυτό προσθέσουμε τον ίδιο σταθερό αριθμό. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - (β) Αν ισχύει ότι $2\beta = \alpha + \gamma$, τότε οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - (γ) Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου, τότε $\beta - \alpha = \beta - \gamma$. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - (δ) Αν σε Αριθμητική Πρόοδο ισχύει ότι $\delta = 1$, τότε $a_n - a_1 = n - 1$. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - (ε) Αν η ακολουθία $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ είναι Αριθμητική Πρόοδος, τότε και η ακολουθία που αποτελείται από τους όρους a_1, a_3, a_5, \dots είναι επίσης Αριθμητική Πρόοδος. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
2. Σε Αριθμητική Πρόοδο δίνονται $a_1 = -2$ και $\delta = 3$. Να υπολογίσετε:
 - (α) το δέκατο όρο της
 - (β) τον a_{101} όρο της
3. Να υπολογίσετε τους πέντε πρώτους όρους Αριθμητικής Προόδου που έχει τρίτο όρο το 13 και όγδοο όρο το 43.
4. Να βρείτε τον δέκατο όγδοο όρο της Αριθμητικής προόδου $3, -2, -7, -12, \dots$
5. Να βρείτε τη διαφορά δ , Αριθμητικής Προόδου στην οποία δίνονται ότι $a_1 = 7$ και $a_6 = 52$.
6. Να παρεμβάλετε μεταξύ των αριθμών 10 και 108, δεκατρείς αριθμούς, ώστε να αποτελούν όλοι μαζί Αριθμητική Πρόοδο.
7. Να βρείτε την Αριθμητική Πρόοδο που έχει πέμπτο όρο το 19 και δωδέκατο όρο το 40.
8. Σε Αριθμητική Πρόοδο δίνονται $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ και $a_6 - a_5 - a_4 = 2$. Να σχηματίσετε την πρόοδο.
9. Να υπολογίσετε τον αριθμητικό μέσο των -3 και 26 .

10. Να υπολογίσετε την τιμή του x , ώστε οι αριθμοί $x - 4, 2x - 3, 4x + 5$, να αποτελούν διαδοχικούς όρους Αριθμητικής Προόδου.
11. Να υπολογίσετε το άθροισμα των δώδεκα πρώτων όρων Αριθμητικής Προόδου, στην οποία δίνονται ότι $a_1 = 5$ και $d = 6$.
12. Να υπολογίσετε το άθροισμα των είκοσι πρώτων όρων Αριθμητικής Προόδου, στην οποία δίνονται ότι $a_1 = -2$ και $a_8 = 19$.
13. Να υπολογίσετε το Σ_{30} της Αριθμητικής Προόδου: $5, 3, 1, -1, -3, \dots$
14. Μια ομάδα μαθητών παρατάσσεται σε τριγωνικό σχήμα έτσι ώστε στην πρώτη σειρά να στέκεται ένας μαθητής και σε κάθε επόμενη σειρά να στέκονται δύο περισσότεροι μαθητές από τη προηγούμενη. Αν στην τελευταία σειρά στέκονται 99 μαθητές, να υπολογίσετε:
 - (α) πόσες σειρές σχηματίστηκαν
 - (β) πόσοι είναι όλοι οι μαθητές
15. Να υπολογίσετε το άθροισμα $8 + 11 + 14 + \dots + 158$.

5.3.2 Γεωμετρική Πρόοδος

Διερεύνηση

Ένα νούφαρο διπλασιάζει την επιφάνεια του κάθε μέρα.

- (α) Αν σε 100 μέρες καλύπτει όλη τη λίμνη, σε πόσες μέρες κάλυψε τη μισή λίμνη.
(β) Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο της ακολουθίας που εκφράζει το μέγεθος του νούφαρου κάθε μέρα.



Ορισμός

Γεωμετρική πρόοδος λέγεται η ακολουθία μη μηδενικών όρων της οποίας ο κάθε όρος εκτός από τον πρώτο, προκύπτει από τον προηγούμενό του, αν τον πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο σταθερό αριθμό. Ο σταθερός αριθμός συμβολίζεται με λ και ονομάζεται **λόγος της γεωμετρικής προόδου**.

Συνεπώς, η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ με $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος όταν ισχύει

$$a_{n+1} = \lambda \cdot a_n \quad \text{ή} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.

Σημείωση

- Μια Γεωμετρική Πρόοδος είναι ορισμένη, όταν γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της a_1 και τον λόγο της λ , οπότε από τον αναδρομικό της τύπο $a_{n+1} = \lambda \cdot a_n$ προκύπτουν όλοι οι υπόλοιποι όροι της.
- Αν σε μια Γεωμετρική Πρόοδος ισχύει $\lambda > 1$ και $a_1 > 0$, τότε οι όροι της «μεγαλώνουν», δηλαδή κάθε όρος είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του και η πρόοδος είναι **γνήσια αύξουσα**.

Για παράδειγμα, η Γεωμετρική Πρόοδος $3, 6, 12, 24, 48, \dots$ ($a_1 = 3 > 0$ και $\lambda = 2 > 1$) είναι μια γνήσια αύξουσα Γεωμετρική Πρόοδος.

- Αν σε μια Γεωμετρική Πρόοδος ισχύει $\lambda > 1$ και $a_1 < 0$, τότε οι όροι της «μικραίνουν», δηλαδή κάθε όρος είναι μικρότερος από τον προηγούμενό του και η πρόοδος είναι **γνήσια φθίνουσα**.

Για παράδειγμα, η Γεωμετρική Πρόοδος $-3, -6, -12, -24, -48, \dots$ ($a_1 = -3 < 0$ και $\lambda = 2 > 1$) είναι μια γνήσια φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδος.

- Αν $0 < \lambda < 1$ και $a_1 > 0$ τότε οι όροι της «μικραίνουν» και η πρόοδος είναι γνήσια φθίνουσα.

Για παράδειγμα, η Γεωμετρική Πρόοδος $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ ($a_1 = 2 > 0$ και $\lambda = \frac{1}{2}$) είναι μια γνήσια φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδος.

- Αν $0 < \lambda < 1$ και $\alpha_1 < 0$ τότε οι όροι της «μεγαλώνουν» και η πρόοδος είναι γνήσια αύξουσα.
Για παράδειγμα, η Γεωμετρική Πρόοδος $-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$ ($\alpha_1 = -2 > 0$ και $\lambda = \frac{1}{2}$) είναι μια γνήσια αύξουσα Γεωμετρική Πρόοδος.
- Αν $\lambda = 1$, η Γεωμετρική Πρόοδος είναι **σταθερή**.
Για παράδειγμα, η ακολουθία $4, 4, 4, 4, \dots$, δηλαδή $a_n = 4, \forall n \in \mathbb{N}$, είναι Γεωμετρική Πρόοδος με $\alpha_1 = 4$ και λόγο $\lambda = 1$.
- Αν $\lambda < 0$, τότε οι όροι της Γεωμετρικής Πρόοδου εναλλάσσονται πρόσημο και δεν μπορούμε να συμπεράνουμε αν μεγαλώνουν ή αν μικραίνουν.
Για παράδειγμα, στη Γεωμετρική πρόοδο $5, -10, 20, -40, 80, \dots$ ($\alpha_1 = 5$ και $\lambda = -2$) οι όροι εναλλάσσονται πρόσημο.
- Μια Γεωμετρική Πρόοδος που έχει την απόλυτη τιμή του λόγου της μεγαλύτερη της μονάδας ($|\lambda| > 1$), λέγεται **απόλυτα γνήσια αύξουσα**.
Για παράδειγμα, στην γεωμετρική πρόοδο $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ έχουμε $|\lambda| = 2 > 1$ και στη Γεωμετρική Πρόοδο $2, -6, 18, -54, \dots$ $|\lambda| = 3 > 1$.
Επομένως, οι δύο αυτές Γεωμετρικές Πρόοδοι είναι απόλυτα γνήσια αύξουσες.
- Μια Γεωμετρική Πρόοδος που έχει την απόλυτη τιμή του λόγου της μικρότερη της μονάδας ($|\lambda| < 1$), λέγεται **απόλυτα γνήσια φθίνουσα**.
Για παράδειγμα, στην Γεωμετρική Πρόοδο $27, 9, 3, 1, \dots$ έχουμε $|\lambda| = \frac{1}{3} < 1$ και στη γεωμετρική πρόοδο $8, -4, 2, -1, \dots$ $|\lambda| = \frac{1}{2} < 1$.
Επομένως, οι δύο αυτές Γεωμετρικές Πρόοδοι είναι απόλυτα γνήσια φθίνουσες.

Παράδειγμα 1

Δίνεται ακολουθία με $a_n = 3 \cdot 2^n, n \in \mathbb{N}$. Να υπολογίσετε τους πέντε πρώτους όρους της και να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ είναι Γεωμετρική Πρόοδος.

Λύση

$$a_1 = 3 \cdot 2^1 = 6,$$

$$a_2 = 3 \cdot 2^2 = 12,$$

$$a_3 = 3 \cdot 2^3 = 24,$$

$$a_4 = 3 \cdot 2^4 = 48,$$

$$a_5 = 3 \cdot 2^5 = 96$$

Οι πέντε πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι $6, 12, 24, 48, 96, \dots$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο λόγος $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ είναι σταθερός, ανεξάρτητος του n .

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3 \cdot 2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{2^n} = 2$$

Συνεπώς, η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 6$ και $\lambda = 2$.

Πρόταση

Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου, τότε ισχύει: $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.
Αντίστροφα, αν για κάθε τριάδα α, β, γ διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας a_n με $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$, τότε η ακολουθία a_n είναι Γεωμετρική Πρόοδος.

Απόδειξη

Η ακολουθία είναι Γεωμετρική Πρόοδος. Άρα, ισχύει ότι $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για $\lambda \neq 0$.

Έχουμε, $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ και $\frac{\gamma}{\beta} = \lambda$.

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow \beta^2 = \alpha \cdot \gamma$$

Αντίστροφα, αν $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$, τότε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$ και επομένως οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου.

Σε μια γεωμετρική πρόοδο με **θετικούς όρους**, αν α, β, γ είναι τρεις διαδοχικοί όροι της τότε ο αριθμός β λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των αριθμών α και γ και ισούται με την θετική τετραγωνική ρίζα των α, γ ($\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$).

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε την τιμή του κ αν οι αριθμοί $\kappa, \kappa + 5, 20$ είναι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου.

Λύση

Για να είναι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου οι συγκεκριμένοι αριθμοί, πρέπει να ισχύει: $(\kappa + 5)^2 = \kappa \cdot 20$.

Ισοδύναμα έχουμε

$$\kappa^2 + 10\kappa + 25 - 20\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 10\kappa + 25 = 0 \Leftrightarrow (\kappa - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 5.$$

Πρόταση

Ο γενικός όρος a_n μιας Γεωμετρικής Προόδου με πρώτο όρο a_1 και λόγο λ είναι

$$a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}$$

Απόδειξη

Έστω a_n ο γενικός όρος γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και λόγο λ .

Από την αναδρομική σχέση $a_{n+1} = \lambda \cdot a_n$, έχουμε:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = \lambda \cdot a_1,$$

$$a_3 = \lambda \cdot a_2$$

$$a_4 = \lambda \cdot a_3$$

.....

$$a_n = \lambda \cdot a_{n-1}$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και έχουμε.

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \dots \cdot \alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda \alpha_1 \cdot \lambda \alpha_2 \cdot \lambda \alpha_3 \cdot \dots \cdot \lambda \alpha_n.$$

Απλοποιούμε τους κοινούς παράγοντες (μη μηδενικούς) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ που εμφανίζονται στα δύο μέλη.

Έτσι, προκύπτει $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}$.

Παράδειγμα 3

Σε Γεωμετρική Πρόοδο με πρώτον όρο τον $\alpha_1 = 2$ και λόγο το $\lambda = 3$, να υπολογίσετε τον πέμπτο όρο της προόδου.

Λύση

Αφού $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = 3$, τότε ο πέμπτος όρος είναι $\alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$.

Παράδειγμα 4

Σε Γεωμετρική Πρόοδο ο δεύτερος όρος της είναι 5 και ο πέμπτος όρος της είναι 40. Να βρείτε τη Γεωμετρική Πρόοδο.

Λύση

Μια Γεωμετρική Πρόοδος είναι πλήρως ορισμένη όταν βρούμε τον πρώτο όρο της α_1 και το σταθερό της λόγο λ .

Από τα δεδομένα έχουμε $\alpha_2 = 5$ και $\alpha_5 = 40$.

Έτσι δημιουργείται το σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τα α_1 και λ .

$$\begin{cases} \alpha_2 = 5 \\ \alpha_5 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cdot \lambda = 5 \\ \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 40 \end{cases}$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\alpha_1 \lambda}{\alpha_1 \cdot \lambda^4} = \frac{5}{40} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda^3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \lambda^3 = 8 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση $\alpha_1 \cdot 2 = 5 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{5}{2}$

Γράφουμε τους πέντε πρώτους όρους της Γεωμετρικής Προόδου: $\frac{5}{2}, 5, 10, 20, 40, \dots$

Παράδειγμα 5

Ο πληθυσμός μιας πόλης αυξάνεται σταθερά 10% κάθε χρόνο. Αν ο πληθυσμός της πόλης ήταν 10000 στο τέλος του 2016, να υπολογίσετε το πληθυσμό της πόλης στο τέλος του 2021.

Λύση

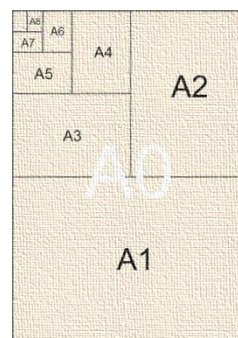
Ο πληθυσμός της πόλης κάθε χρόνο δημιουργεί ακολουθία με όρους γεωμετρικής προόδου όπου $\alpha_1 = 10000$ και $\lambda = \frac{110}{100} = 1,1$.

Ο πληθυσμός το 2021 είναι ο έκτος όρος: $\alpha_n = \alpha_1 \lambda^{n-1} \Rightarrow \alpha_6 = 10000 \cdot 1,1^5 = 16105$

Το άθροισμα των n πρώτων όρων Γεωμετρικής Προόδου

Διερεύνηση

Ένα κομμάτι χαρτί πάχους 1mm μοιράζεται σε δύο κομμάτια. Μετά τα δύο κομμάτια μοιράζονται στα δυο και στη συνέχεια τα τέσσερα κομμάτια που προκύπτουν μοιράζονται στα δύο. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται για 20 φορές. Αν όλα τα κομμάτια χαρτί τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο, να βρείτε το ύψος της στήλης χαρτιού που θα κατασκευαστεί.



Απόδειξη

Το άθροισμα των n πρώτων όρων της Γεωμετρικής Προόδου ($\lambda \neq 1$) είναι

$$\Sigma_n = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \dots + \alpha_1\lambda^{n-2} + \alpha_1\lambda^{n-1}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της πιο πάνω ισότητας επί $-\lambda$ και προσθέτουμε κατά μέλη.

$$\Sigma_n = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \dots + \alpha_1\lambda^{n-2} + \alpha_1\lambda^{n-1}$$

$$-\lambda\Sigma_n = -\alpha_1\lambda - \alpha_1\lambda^2 - \dots - \alpha_1\lambda^{n-2} - \alpha_1\lambda^{n-1} - \alpha_1\lambda^n \quad (+)$$

$$\Sigma_n - \lambda\Sigma_n = \alpha_1 - \alpha_1\lambda^n \Rightarrow (1 - \lambda)\Sigma_n = \alpha_1(1 - \lambda^n) \Rightarrow \Sigma_n = \frac{\alpha_1(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda}$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το άθροισμα των οκτώ πρώτων όρων της Γεωμετρικής Προόδου 2, 6, 18, 54, 162, ...

Λύση

Η Γεωμετρική Πρόοδος 2, 6, 18, 54, 162, ... έχει $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = 3$.

Για το άθροισμα των 8 πρώτων όρων χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\Sigma_n = \frac{\alpha_1(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda}, \text{ για } n = 8, \alpha_1 = 2 \text{ και } \lambda = 3.$$

Έτσι έχουμε,

$$\Sigma_8 = \frac{2 \cdot (1 - 3^8)}{1 - 3} = \frac{2 \cdot (1 - 6561)}{-2} = 6561 - 1 = 6560.$$

Παράδειγμα 2

Σε μια Γεωμετρική Πρόοδο το άθροισμα του πρώτου και του τρίτου όρου είναι 10 και άθροισμα του τέταρτου και του έκτου όρου είναι 270.

Να υπολογίσετε το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της προόδου.

Λύση

Θα βρούμε τις τιμές των α_1 και λ .

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 10 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_1 \lambda^2 = 10 \Rightarrow \alpha_1(1 + \lambda^2) = 10 \quad (1)$$

$$\alpha_4 + \alpha_6 = 270 \Rightarrow \alpha_1 \lambda^3 + \alpha_1 \lambda^5 = 30 \Rightarrow \alpha_1 \lambda^3(1 + \lambda^2) = 270 \text{ με } \alpha_1 \neq 0, \lambda \neq \pm 1, \lambda \neq 0 \quad (2)$$

Συνεπώς, από τις (1) και (2), διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\alpha_1(1 + \lambda^2)}{\alpha_1 \lambda^3(1 + \lambda^2)} = \frac{10}{270} \Rightarrow \frac{1}{\lambda^3} = \frac{1}{27} \Rightarrow \lambda^3 = 27 \Rightarrow \lambda = 3$$

Αν $\lambda = 3$, τότε $\alpha_1 = \frac{10}{1 + 3^2} = 1$ και επομένως,

$$\Sigma_n = \frac{\alpha_1(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda} \Rightarrow \Sigma_5 = \frac{1(1 - 3^5)}{1 - 3} = \frac{1 - 243}{1 - 3} = -\frac{242}{-2} = 121$$

Αν $\lambda = -2$, τότε $\alpha_1 = \frac{15}{16 - 1} = 1$ και επομένως,

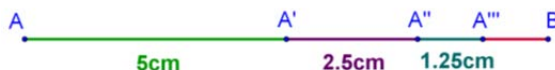
$$\Sigma_n = \frac{\alpha_1(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda} \Rightarrow \Sigma_5 = \frac{1(1 - (-2)^5)}{1 - (-2)} = 11.$$

Το άθροισμα των άπειρων όρων Γεωμετρικής Προόδου

Διερεύνηση

Το σημείο A απέχει από το σημείο B απόσταση 10 cm. Ένα μυρμήγκι ξεκινά από το σημείο A και κινείται προς το σημείο B με τον εξής τρόπο: Το πρώτο λεπτό καλύπτει 5 cm, το δεύτερο 2,5 cm, το τρίτο 1,25 cm κτλ.

Πόσα λεπτά θα χρειαστεί το μυρμήγκι για να φτάσει στο σημείο B ;



Σημείωση

- ✓ Το πιο πάνω πρόβλημα αποτελεί παραλλαγή του «Παράδοξου» του Ζήνωνα γνωστού από την αρχαιότητα.
- ✓ Σε μια γεωμετρική πρόοδο και γενικά σε μια ακολουθία $n \in \mathbb{N}$ το άθροισμα των n πρώτων όρων της το συμβολίσαμε με Σ_n . Αν το $\lim(\Sigma_n)$ είναι πραγματικός αριθμός, τότε η ακολουθία a_n λέγεται ότι έχει άθροισμα άπειρων όρων και το όριο $\lim(\Sigma_n)$ συμβολίζεται με Σ_∞ .

Πρόταση

Το **άθροισμα των άπειρων όρων** (Σ_∞) μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το α_1 και λόγο λ με $|\lambda| < 1$ είναι:

$$\Sigma_\infty = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda}, \quad |\lambda| < 1$$

Απόδειξη

Σε μια γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο το α_1 και λόγο λ ισχύει:

$$\Sigma_n = \frac{\alpha_1(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda}$$

Αν $|\lambda| < 1$, από τις ιδιότητες ορίων ακολουθίας έχουμε: $\lim \lambda^n = 0$.

Επομένως, θα ισχύει:

$$\Sigma_\infty = \lim \Sigma_n = \lim \frac{\alpha_1(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda} = \lim \left(\frac{\alpha_1}{1 - \lambda} - \frac{\alpha_1 \cdot \lambda^n}{1 - \lambda} \right) = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda} - 0 = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda}$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το άθροισμα απείρων όρων Γεωμετρικής Προόδου (Σ_∞) με πρώτο όρο $\alpha_1 = 2$ και λόγο:

(α) $\lambda = \frac{1}{2}$

(β) $\lambda = -\frac{1}{2}$

Λύση

(α) Ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = \frac{1}{2}$ και έτσι ισχύει $|\lambda| < 1$. Άρα, μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα απείρων όρων Σ_∞ , χρησιμοποιώντας τον τύπο $\Sigma_\infty = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda}$. Έχουμε:

$$\Sigma_\infty = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

(β) Ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = -\frac{1}{2}$ και έτσι ισχύει $|\lambda| < 1$. Άρα, μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα απείρων όρων. Έχουμε:

$$\Sigma_\infty = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots$$

Επομένως:

$$\Sigma_\infty = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda} \Rightarrow \Sigma_\infty = \frac{2}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε τον λόγο Γεωμετρικής Προόδου που έχει άθροισμα απείρων όρων τριπλάσιο από τον πρώτο της όρο.

Λύση

$$\Sigma_\infty = 3\alpha_1 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{1 - \lambda} = 3\alpha_1 \Leftrightarrow 1 = 3 - 3\lambda \Leftrightarrow 3\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Δραστηριότητες

- Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 - Η ακολουθία με γενικό όρο $a_{n+1} = 5a_n$ και $a_1 = 3$ είναι Γεωμετρική Πρόοδος. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - Αν για οποιουσδήποτε 3 διαδοχικούς όρους μιας ακολουθίας ισχύει ότι $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$, τότε οι μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Πρόοδου. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - Κάθε σταθερή ακολουθία $a_n = 2$ είναι Γεωμετρική Πρόοδος. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - Αν Γεωμετρική Πρόοδος έχει $a_1 \neq 0$ και $\lambda = 1$, τότε $\Sigma_n = n \cdot a_1$. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - Αν η ακολουθία $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ είναι Γεωμετρική πρόοδος, τότε και η ακολουθία που αποτελείται από τους όρους a_2, a_4, a_6, \dots είναι Γεωμετρική Πρόοδος. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- Σε Γεωμετρική Πρόοδο δίνονται $a_1 = -1$ και $\lambda = 3$. Να βρείτε:
 - τον πέμπτο όρο της (a_5)
 - τον δέκατο όρο της (a_{10})
- Να βρείτε τη Γεωμετρική Πρόοδο που έχει $a_2 = 1$ και $a_4 = 16$.
- Να υπολογίσετε την τιμή του k , ώστε οι όροι $k, k + 4, 18$ να αποτελούν τρεις διαδοχικούς όρους Γεωμετρικής Πρόοδου.
- Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε ένα από τους αριθμούς $-1, 1, 7$, ώστε να αποτελούν διαδοχικούς όρους Γεωμετρικής Πρόοδου;
- Να υπολογίσετε τον πρώτο όρο Γεωμετρικής Πρόοδου που έχει σταθερό λόγο $\lambda = 5$ και $\Sigma_4 = 468$.
- Να υπολογίσετε το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της Γεωμετρικής Πρόοδου $2, 6, 18, 54, \dots$
- Σε Γεωμετρική Πρόοδο δίνονται $a_1 + a_2 = 3$ και $a_3 + a_4 = 6$. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της προόδου.
- Να υπολογίσετε το άθροισμα $3 + 6 + 12 + 24 + \dots + 192$.

10. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα των άπειρων όρων των πιο κάτω Γεωμετρικών Προόδων:

(α) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \dots$

(β) $2 + \frac{6}{5} + \frac{18}{5} + \frac{54}{5} + \dots$

11. Να υπολογίσετε τον λόγο Γεωμετρικής Προόδου που έχει το άθροισμα άπειρων όρων της διπλάσιο από τον πρώτο της όρο.

12. Τοποθετούμε κόκκους ρυζιού στα 64 τετράγωνα της σκακιέρας με τον τρόπο που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, δηλαδή ένας κόκκος στο κάτω αριστερά τετραγωνάκι, δύο στο τετράγωνο που βρίσκεται στα δεξιά του, τέσσερις στο επόμενο κτλ. Να υπολογίσετε πόσους κόκκους ρυζιού πρέπει να βάλουμε στο 64^ο τετράγωνο της σκακιέρας.



13. Δίνεται ότι το άθροισμα Σ_n των n –πρώτων όρων μιας ακολουθίας $a_n, n \in \mathbb{N}$ είναι:

$$\Sigma_n = 2 - \frac{2}{5^n}$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι Γεωμετρική Πρόοδος και να υπολογίσετε το άθροισμα των άπειρων όρων της ακολουθίας.

14. Να σχηματίσετε τη Γεωμετρική Πρόοδο με 7 όρους, έτσι ώστε το άθροισμα των δύο τελευταίων όρων της να ισούται με 32 φορές το άθροισμα των δύο πρώτων όρων της και ο τρίτος όρος της να είναι ίσος με 12.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- | | |
|---|-------------|
| (α) Κάθε ακολουθία έχει πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (β) Υπάρχει ένας όρος της ακολουθίας με γενικό όρο $a_n = n^2$ ο οποίος είναι ίσος με 1000. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (γ) Όλοι οι όροι κάθε σταθερής ακολουθίας είναι ίσοι. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (δ) Σε Γεωμετρική Πρόοδο με $\lambda > 1$, το άθροισμα των απείρων όρων της είναι πραγματικός αριθμός. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (ε) Σε κάθε Αριθμητική Πρόοδο με πρώτο όρο a_1 και διαφορά δ ισχύει $\delta = \frac{a_8 - a_1}{7}$. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (στ) Κάθε σταθερή ακολουθία με $a_1 = 10$ είναι Γεωμετρική Πρόοδος. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (ζ) Σε μια Γεωμετρική Πρόοδο με πρώτο όρο a_1 και λόγο λ ισχύει $a_5 = \lambda^2 \cdot a_3$. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (η) Ο νιοστός όρος αριθμητικής Προόδου με $a_1 = 5$ και διαφορά $\delta = 4$ είναι ο $4n + 1$. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (θ) Αν οι αριθμοί $2\beta, \alpha, 4\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι σε Αριθμητική Πρόοδο, τότε $\beta = \alpha - 2\gamma$. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (ι) Μια ακολουθία είναι Αριθμητική Πρόοδος, όταν $a_{n+1} - a_n = \delta, \forall n \in \mathbb{N}$. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (ια) Κάθε σταθερή ακολουθία $5,5,5,5, \dots$ είναι Αριθμητική Πρόοδος. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (ιβ) Το άθροισμα των απείρων όρων Γεωμετρικής Προόδου είναι πάντα πραγματικός αριθμός. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
2. Έστω μια ακολουθία που ορίζεται από τον αναγωγικό τύπο:
- $$a_{n+1} = a_n^2 - a_n, \quad a_1 = 3$$
- Να βρείτε τους 5 πρώτους όρους της.
3. Να γράψετε τους 4 πρώτους όρους των πιο κάτω ακολουθιών $a_n, n \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο:
- (α) $a_n = n^2 + 2n$
(β) $a_n = -4^n + 3$
(γ) $a_n = (-n + 1)(-1)^n$
4. Να βρείτε τον χιλιοστό όρο της Αριθμητικής Προόδου $-3, 5, 13, \dots$

5. Να βρείτε το x , ώστε οι αριθμοί $x - 2$, x , $2x + 1$ να είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου.
6. Μεταξύ των αριθμών 4 και 39 να παρεμβάλετε 6 αριθμούς, ώστε να σχηματίζουν όλοι μαζί Αριθμητική Πρόοδο.
7. Να σχηματίσετε Αριθμητική Πρόοδο της οποίας ο 3^{ος} και ο 7^{ος} όρος έχουν άθροισμα 32, ενώ ο 4^{ος} και ο 5^{ος} όρος έχουν άθροισμα 29.
8. Δίνεται η Αριθμητική Πρόοδος 6, 10, 14, Να βρείτε την τιμή του n , ώστε να ισχύει $S_n = 160$.
9. Σε ένα θέατρο ο αριθμός των καθισμάτων σε κάθε σειρά αποτελεί Αριθμητική Πρόοδο. Η πρώτη σειρά έχει 16 καθίσματα και η τελευταία 200 καθίσματα. Αν η δέκατη σειρά έχει 32 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά, να βρείτε πόσες σειρές και πόσα καθίσματα έχει το θέατρο.
10. Να υπολογίσετε τον ένατο όρο της Γεωμετρικής Προόδου 2,8,32,128, ...
11. Να υπολογίσετε τον λόγο Γεωμετρικής Προόδου με πρώτο όρο το 8 και ο δεύτερος όρος να είναι μεγαλύτερος από τον τρίτο όρο κατά 2.
12. Να παρεμβάλετε τρεις αριθμούς μεταξύ των αριθμών 5 και 80, ώστε όλοι μαζί να σχηματίζουν Γεωμετρική Πρόοδο.
13. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$2 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{18} + \dots$$
14. Να λύσετε την εξίσωση:

$$(x + 3) + (x + 7) + (x + 11) + \dots + (x + 79) = 800$$
15. Δίνεται Γεωμετρική Πρόοδος με τρίτο όρο $a_3 = 5$ και όγδοο όρο $a_8 = \frac{5}{32}$. Να υπολογίσετε:
 - (α) τον ενδέκατο όρο της
 - (β) το άθροισμα των άπειρων όρων.
16. Αν οι μη μηδενικοί αριθμοί $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου, να αποδείξετε ότι $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να ορίσετε πλήρως την ακολουθία Fibonacci και να γράψετε τους 10 πρώτους όρους της.
2. Να αποδείξετε ότι:
$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$$
3. Αριθμητική πρόοδος και απόλυτα φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και η διαφορά της Αριθμητικής Προόδου είναι τριπλάσια του λόγου της Γεωμετρικής Προόδου. Το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της Αριθμητικής Προόδου είναι ίσο με τον όγδοο όρο της, ενώ ο πέμπτος όρος της είναι διπλάσιος του αθροίσματος των άπειρων όρων της Γεωμετρικής Προόδου. Να σχηματίσετε τις δύο προόδους.
4. Δίνεται η ακολουθία με αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = 2a_n + 1, n \in \mathbb{N}$. Αν ο τρίτος όρος της είναι ο 23, να βρείτε τον πρώτο όρο της.
5. Σε Αριθμητική Πρόοδο ισχύει $S_{10} = 20$ και $S_{20} = 10$. Να υπολογίσετε το S_{40} .
6. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο G_n των n πρώτων όρων Γεωμετρικής Προόδου είναι: $G_n = a_1^n \cdot \lambda^{\frac{n^2-n}{2}}$.
7. Μια ελαστική μπάλα πέφτει από ύψος 2 m και κάθε φορά που κτυπά στο έδαφος χάνει 20% της αρχικής της ενέργειας. Αν δεν υπάρχουν άλλες απώλειες να υπολογίσετε:
 - (α) το ύψος της μπάλας μετά την 6^η αναπήδηση
 - (β) το συνολικό διάστημα που θα διανύσει η μπάλα μέχρι να ακινητοποιηθεί
8. Δίνεται η Γεωμετρική Πρόοδος $a_n, n \in \mathbb{N}$ με $a_1 \neq 0$ και $\lambda \neq 0$.
 - (α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\beta_n = \frac{1}{a_n}$ είναι Γεωμετρική Πρόοδος.
 - (β) Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n} = \alpha_1 \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}$$
9. Σε ακολουθία ισχύει ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι ίσο με $S_n = 3^n - 1$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι Γεωμετρική Πρόοδος.

10. Ένας καπνιστής καπνίζει ένα πακέτο τσιγάρα την ημέρα αξίας 5 ευρώ. Αν τα χρήματα που ξοδεύει κάθε χρόνο (365 μέρες) τα κατάθετε στην τράπεζα (στην αρχή κάθε χρόνου) με επιτόκιο 10%, να υπολογίσετε το ποσό που θα πάρει στο τέλος του δέκατου χρόνου.
11. Σε Γεωμετρική Πρόοδο με λόγο λ , ($|\lambda| < 1$), ο πρώτος όρος, το άθροισμα των δύο πρώτων όρων και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε το λόγο της Γεωμετρικής Προόδου.

ΕΝΟΤΗΤΑ 6

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 6.1 Εγγεγραμμένα – Εγγράψιμα τετράπλευρα σε κύκλο**
 - 6.1.1 Εγγεγραμμένα τετράπλευρα**
 - 6.1.2 Εγγράψιμα τετράπλευρα**
- 6.2 Κανονικά πολύγωνα**
 - 6.2.1 Εισαγωγή**
 - 6.2.2 Ορισμός κανονικού πολυγώνου**
 - 6.2.3 Ιδιότητες και κατασκευή κανονικού πολυγώνου**
 - 6.2.4 Εγγραφή κανονικών πολυγώνων σε κύκλο**
- 6.3 Μέτρηση κύκλου**
 - 6.3.1 Εισαγωγή**
 - 6.3.2 Μήκος κύκλου – Μήκος τόξου**
 - 6.3.3 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου – κυκλικού τομέα – κυκλικού τμήματος**
 - 6.3.4 Καμπυλόγραμμα και μικτόγραμμα επίπεδα σχήματα**

6.1 ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ – ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Εξερεύνηση

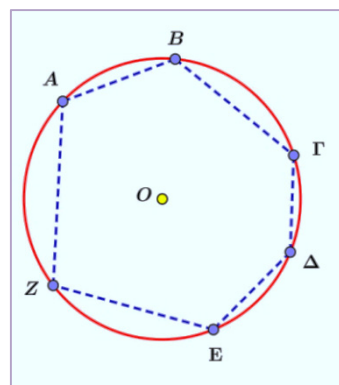
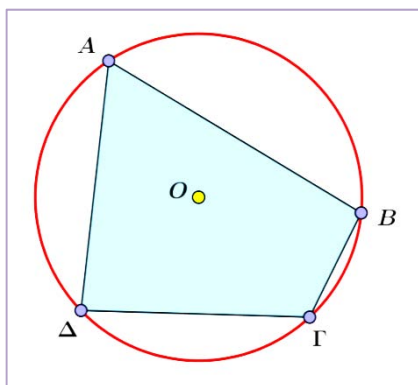
Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τέσσερα νομίσματα του €1 τα οποία εφάπτονται σε τέσσερα σημεία επαφής. Να διαπιστώσετε πρακτικά αν ένα νόμισμα του €1 μπορεί να τοποθετηθεί πάνω από τα τέσσερα νομίσματα και να διέρχεται και από τα τέσσερα σημεία επαφής των νομισμάτων. Αν είναι δυνατόν να γίνει μια τέτοια τοποθέτηση, να εξηγήσετε γιατί μπορεί να συμβεί.



6.1.1 ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Ορισμός

Ένα πολύγωνο του οποίου οι κορυφές είναι σημεία ενός κύκλου λέγεται εγγεγραμμένο πολύγωνο στον κύκλο αυτό. Ο κύκλος λέμε ότι είναι περιγεγραμμένος κύκλος στο πολύγωνο. (Σχήμα 1, 2).



Ομοκυκλικά ονομάζονται τα σημεία που βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο.

Τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ στο σχήμα 1 λέμε ότι είναι ομοκυκλικά. Ομοίως, οι κορυφές του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ στο σχήμα 2 είναι επίσης ομοκυκλικά σημεία.

Παρατηρήσεις

- Οποιαδήποτε τρία μη συνευθειακά σημεία είναι πάντοτε ομοκυκλικά, αφού από τρία σημεία διέρχεται πάντοτε ένας μοναδικός κύκλος.
- Τέσσερα μη συνευθειακά σημεία δεν είναι πάντοτε ομοκυκλικά, γιατί θα υπάρχει ένας μοναδικός κύκλος που θα διέρχεται από τα τρία σημεία και τα υπόλοιπα μπορεί να ανήκουν ή να μην ανήκουν στον κύκλο αυτό.

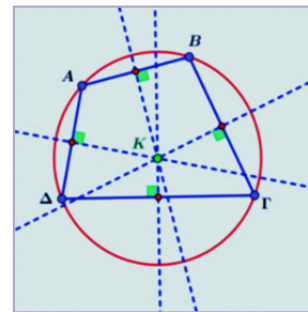
ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Ιδιότητες εγγεγραμμένων τετραπλεύρων

Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, ρ) έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του διέρχονται από το ίδιο σημείο που είναι το κέντρο του κύκλου (K, ρ) .
2. Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
3. Κάθε εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.
4. Κάθε πλευρά του τετραπλεύρου φαίνεται από τις δυο απέναντι κορυφές του υπό ίσες γωνίες.

Απόδειξη

1. Γνωρίζουμε ότι η μεσοκάθετη χορδής κύκλου διέρχεται από το κέντρο του κύκλου. Επομένως, οι μεσοκάθετοι των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ διέρχονται από το κέντρο K του κύκλου (K, ρ) (Σχήμα 3).



Σχήμα 3

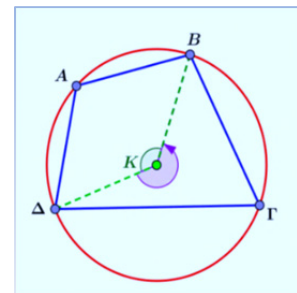
2. Γνωρίζουμε ότι κάθε εγγεγραμμένη γωνία ενός κύκλου είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας της.

Άρα, στο Σχήμα 4 έχουμε:

$$\angle A = \frac{\angle \Delta KB}{2} \quad \text{και} \quad \angle \Gamma = \frac{\angle B K \Delta}{2}$$

Επομένως, προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$\angle A + \angle \Gamma = \frac{\angle \Delta KB}{2} + \frac{\angle B K \Delta}{2} = \frac{\angle \Delta KB + \angle B K \Delta}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$



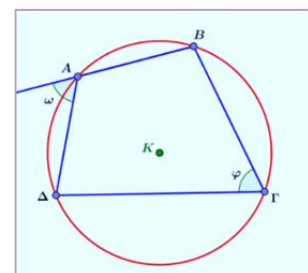
Σχήμα 4

3. Έστω ω μια εξωτερική γωνία του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, και $\varphi = \angle \Delta \Gamma B$ (Σχήμα 5). Τότε, θα έχουμε:

$$\omega + \angle \Delta AB = 180^\circ$$

Όμως, από την προηγούμενη ιδιότητα (2) θα πάρουμε:

$$\angle \Delta AB + \angle \Delta \Gamma B = \angle \Delta AB + \varphi = 180^\circ$$



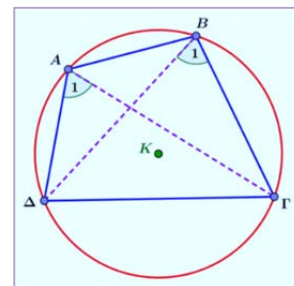
Σχήμα 5

Επομένως, $\omega = \varphi$.

4. Αφού το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (K, ρ) (Σχήμα 6), θα έχουμε ότι:

$$\angle A_1 = \angle B_1$$

ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο $\Delta\Gamma$.



Σχήμα 6

6.1.2 ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο σε κύκλο όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να περνά από τις κορυφές του.

Είδαμε στα προηγούμενα ότι αν έχουμε τέσσερα ή περισσότερα μη συνευθειακά σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, \dots$ στο επίπεδο μπορεί να μην είναι ομοκυκλικά.

Άρα δεν υπάρχει **πάντοτε** κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$. Αυτό σημαίνει ότι ένα δεδομένο τετράπλευρο δεν είναι απαραίτητα **εγγράψιμο σε κύκλο**. Για παράδειγμα ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο μόνο όταν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Συνθήκες για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο σε κύκλο

Στο θεώρημα αυτό εξετάζουμε ποιες συνθήκες (**κριτήρια**) πρέπει να πληροί ένα τετράπλευρο για να είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν **μια** από τις παρακάτω προτάσεις είναι **αληθής**:

- (α) Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- (β) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- (γ) Μια εξωτερική γωνία του ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.
- (δ) Μια πλευρά του φαίνεται από τις δυο απέναντι από αυτήν κορυφές υπό ίσες γωνίες.

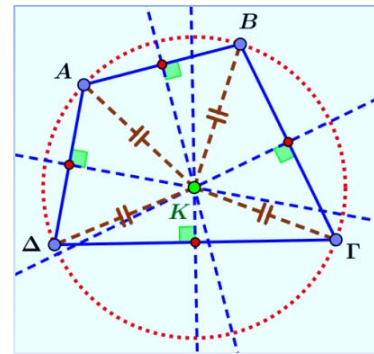
Απόδειξη

- (α) Έστω ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο K (Σχήμα 8), τότε θα έχουμε:

$$KA = KB = K\Gamma = K\Delta$$

Επομένως, τα σημεία A, B, Γ, Δ ισαπέχουν από το σημείο K και άρα θα βρίσκονται πάνω στον κύκλο (K, KA) .

Συνεπώς το $AB\Gamma\Delta$ είναι **εγγράψιμο**.



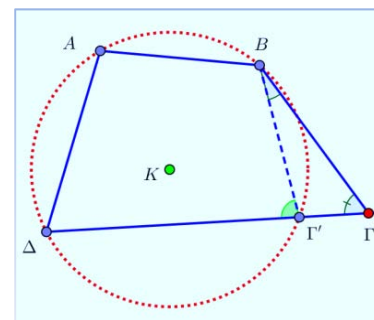
Σχήμα 8

- (β) Έστω ότι σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ οι απέναντι γωνίες του, $\angle A$ και $\angle \Gamma$ είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$$\angle A + \angle \Gamma = 180^\circ \quad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ, Δ , χρησιμοποιώντας την **μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής**.

Υποθέτουμε ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία A, B, Δ δεν περνά από το σημείο Γ . Τότε, ο κύκλος αυτός θα τέμνει την ημιευθεία $\Delta\Gamma$ σε ένα σημείο της, έστω Γ' (Σχήμα 9).



Σχήμα 9

Το τετράπλευρο $AB\Gamma'\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και από το **Θεώρημα 1**, παίρνουμε ότι:

$$\angle A + \angle \Gamma' = 180^\circ \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) $\Rightarrow \angle \Gamma = \angle \Gamma'$, **ΑΤΟΠΟ**, γιατί στο τρίγωνο $\Delta\Gamma'\Gamma$, η εξωτερική γωνία $\angle \Gamma'$ ισούται με την απέναντι εσωτερική. Στο άτοπο καταλήξαμε με την παραδοχή ότι ο κύκλος που περνά από τα σημεία A, B, Δ δεν περνά από το σημείο Γ . Άρα, ο κύκλος αυτός περνά και από το σημείο Γ και συνεπώς το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι **εγγράψιμο**.

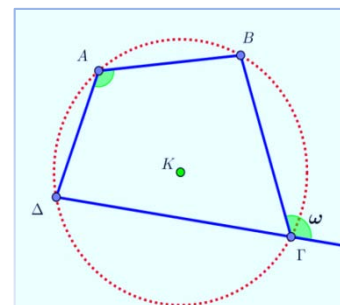
- (γ) Υποθέτουμε, ότι στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ μια εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική του γωνία. Έστω:

$$\angle \omega = \angle A \quad (\text{Σχήμα 10})$$

Επειδή όμως $\angle \omega + \angle \Delta\Gamma B = 180^\circ$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\angle A + \angle \Delta\Gamma B = 180^\circ$$

Επομένως, ισχύει το προηγούμενο κριτήριο και συνεπώς το $AB\Gamma\Delta$ είναι **εγγράψιμο**.



Σχήμα 10

(δ) Υποθέτουμε, ότι στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ (Σχήμα 11) μια πλευρά του, έστω η $\Gamma\Delta$, φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του A και B με ίσες γωνίες, δηλαδή:

$$\angle\omega = \angle\varphi \quad (1)$$

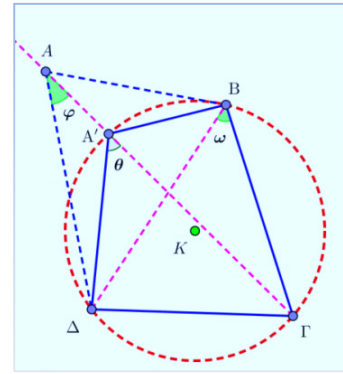
Θα αποδείξουμε ότι από τις κορυφές του $AB\Gamma\Delta$ διέρχεται ένας κύκλος. Χρησιμοποιούμε την *μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής*.

Υποθέτουμε ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία B, Γ, Δ δεν περνά από το σημείο A . Τότε ο κύκλος αυτός θα τέμνει την ημιευθεία ΓA σε ένα σημείο της, έστω A' . Τότε το τετράπλευρο $A'B\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και από το **Θεώρημα 1**, παίρνουμε ότι:

$$\angle\omega = \angle\theta \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) $\Rightarrow \angle\varphi = \angle\theta$, **ΑΤΟΠΟ**, γιατί στο τρίγωνο $\Delta\Delta A'A$, η εξωτερική γωνία $\angle\theta$ ισούται με μια απέναντι εσωτερική του γωνία.

Επομένως, ο κύκλος που περνά από τα σημεία B, Γ, Δ περνά και από το σημείο A δηλαδή, **το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο**.



Σχήμα 11

Παραδείγματα και Εφαρμογές

1. Να αποδείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένο σε κύκλο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

Απόδειξη

Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο θα έχουμε

$$\angle A = \angle \Gamma = \angle\varphi, \quad (1)$$

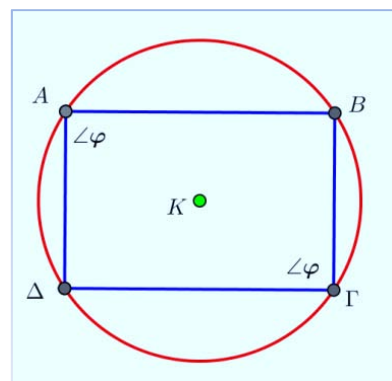
και επειδή είναι εγγεγραμμένο θα έχουμε:

$$\angle A + \angle \Gamma = 180^\circ \quad (2)$$

Από, τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\angle\varphi + \angle\varphi = 180^\circ \text{ ή } 2(\angle\varphi) = 180^\circ \text{ ή } \angle\varphi = 90^\circ$$

Επομένως, το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.



Σχήμα 12

2. Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν και μόνο αν είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Απόδειξη

Ευθύ

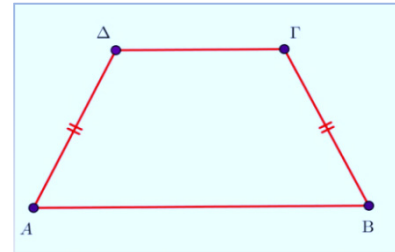
Έστω ότι το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

Τότε θα έχουμε:

$$\angle B + \angle \Gamma = 180^\circ \quad (1)$$

Οι παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες, δηλαδή:

$$\angle B = \angle A \quad (2)$$



Σχήμα 13

Από (1) και (2) παίρνουμε ότι $\angle A + \angle \Gamma = 180^\circ$ και από το κριτήριο 2 συμπεραίνουμε ότι **το $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο** σε κύκλο.

Αντίστροφο

Έστω ότι το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Τότε $\angle A + \angle \Gamma = 180^\circ$ (1)

(ιδιότητα 2)

Όμως $AB \parallel \Gamma\Delta \Rightarrow \angle B + \angle \Gamma = 180^\circ$ (2)

(εντός και επί τα αυτά γωνίες)

Από (1) και (2) $\Rightarrow \angle A + \angle \Gamma = \angle B + \angle \Gamma \Rightarrow \angle A = \angle B$

Άρα το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

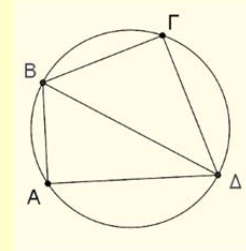
Δραστηριότητες

1. Σε εγγράψιμο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ δίνεται $\angle A = 120^\circ$ και $\angle B_{\varepsilon\xi} = 80^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου.

2. Στο διπλανό σχήμα είναι $\angle B\Delta\Delta = \frac{2}{3}x^\circ$ και $\angle B\Gamma\Delta = x^\circ - 45^\circ$.

(α) Να υπολογίσετε το x .

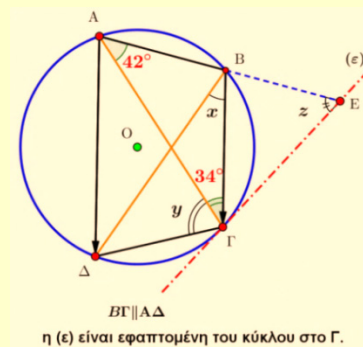
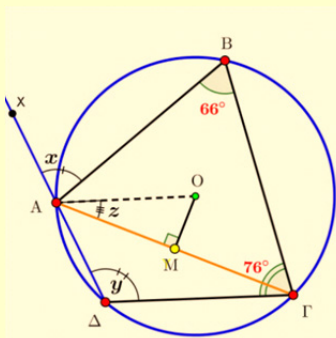
(β) Αν η ακτίνα του κύκλου έχει μήκος 2 cm , να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου $B\Delta$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.



3. Να υπολογίσετε τα μέτρα των άγνωστων γωνιών x, y, z , στα παρακάτω σχήματα.

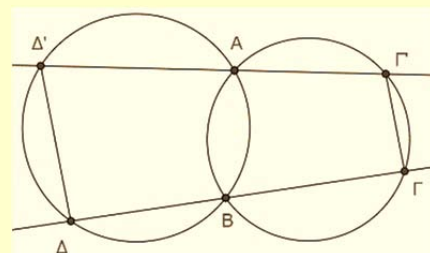
(α)

(β)



4. Να αποδείξετε ότι κάθε ρόμβος εγγεγραμμένος σε κύκλο είναι τετράγωνο.

5. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B . Από τα A και B φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία Γ και Γ' και τον άλλο στα σημεία Δ και Δ' , αντίστοιχα (διπλανό σχήμα). Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$.



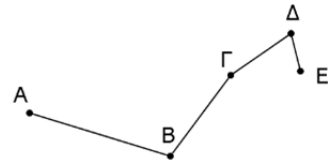
6. Δίνεται τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ) . Η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο P . Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Γ, O, P είναι ομοκυκλικά.

7. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα δύο καθέτων χορδών ενός κύκλου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

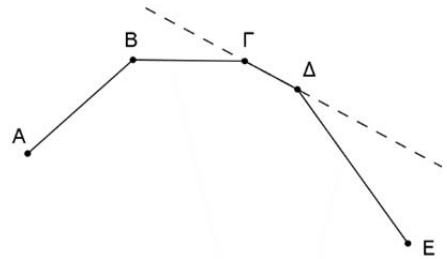
6.2 ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

6.2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια τεθλασμένη γραμμή $ABΓΔΕ \dots$, που αποτελείται από τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, \dots$ λέγεται πολυγωνική γραμμή με κορυφές $A, B, Γ, Δ, Ε, \dots$ και πλευρές $AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, \dots$

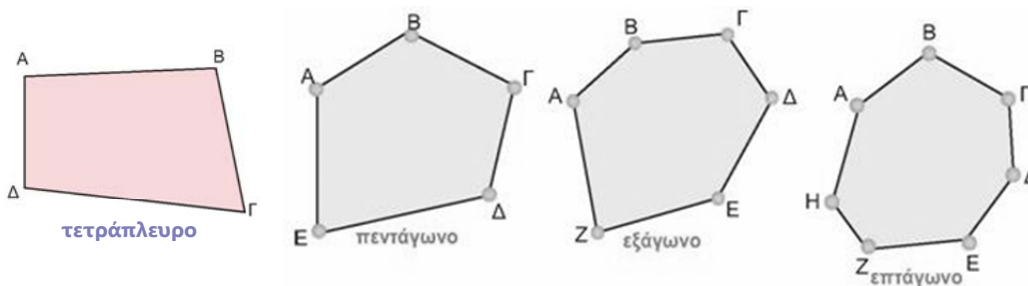


Μια πολυγωνική γραμμή χαρακτηρίζεται ως κυρτή, όταν όλες οι κορυφές της βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο από τα δύο που ορίζει κάθε πλευρά της. Μια κυρτή πολυγωνική γραμμή, με τουλάχιστον τρεις πλευρές, στην οποία η πρώτη και η τελευταία κορυφές ταυτίζονται, χαρακτηρίζεται ως κλειστή .



Το πολύγωνο που περικκλείεται από μια κυρτή κλειστή πολυγωνική γραμμή ονομάζεται **κυρτό πολύγωνο**.

- Όλες οι γωνίες ενός κυρτού πολυγώνου είναι κυρτές, δηλαδή έχουν μέτρο μικρότερο από $2L$ (2 ορθές).
- Σε κάθε κυρτό πολύγωνο το πλήθος των πλευρών είναι το ίδιο με το πλήθος των κορυφών του και με το πλήθος των γωνιών του.
- Το όνομα ενός κυρτού πολυγώνου προκύπτει από το πλήθος των γωνιών του ή των πλευρών του . Ένα πολύγωνο με n κορυφές θα το λέμε n -γωνο (π.χ. τρίγωνο, πεντάγωνο, εξάγωνο κ.ο.κ). Εξάριση αποτελεί το πολύγωνο με 4 κορυφές που λέγεται τετράπλευρο ή πιο σύντομα 4/πλευρο.

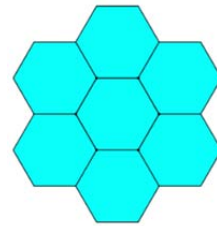


Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν στη Γεωμετρία τα κυρτά πολύγωνα που έχουν όλες τις πλευρές τους και όλες τις γωνίες τους ίσες, δηλαδή είναι ισογώνια και ισόπλευρα.

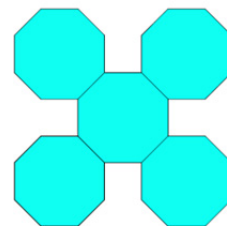
6.2.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

Διερεύνηση

(α) Πρόκειται να στρώσουμε με πλακάκια, σχήματος εξαγώνου το δάπεδο ενός δωματίου, όπως φαίνεται στο μοτίβο του διπλανού σχήματος. Να διερευνήσετε τις προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν, ώστε αυτό να μπορεί να πραγματοποιηθεί.



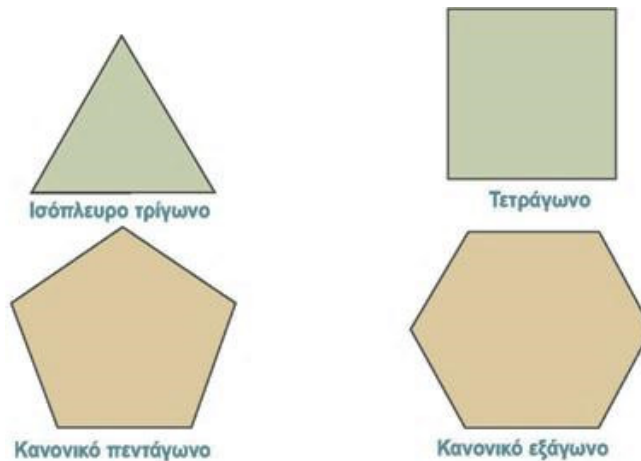
(β) Να εξηγήσετε, γιατί δεν μπορούμε να στρώσουμε το δάπεδο του δωματίου με πλακάκια, σχήματος κανονικού οκταγώνου.



(γ) Να διερευνήσετε ακόμη, αν αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με πλακάκια, σχήματος τετραγώνου ή ισοπλεύρου τριγώνου.

Ορισμός

Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό, όταν έχει όλες τις πλευρές του και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους.

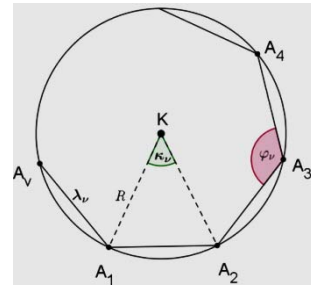


- Κανονικό τρίγωνο είναι το ισόπλευρο.
- Κανονικό τετράπλευρο είναι το τετράγωνο.

6.2.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

Θεώρημα 1

Αν χωρίσουμε τον κύκλο σε n ίσα τόξα με $n \geq 3$, τότε τα άκρα αυτών των τόξων είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου.



Απόδειξη

Στον κύκλο (K, R) παίρνουμε τα ίσα τόξα:

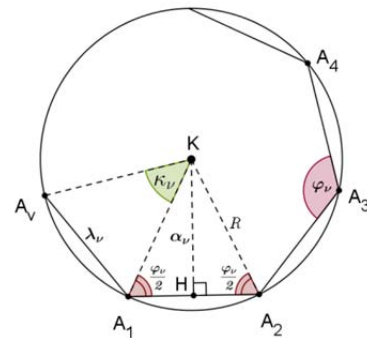
$$A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_nA_1$$

Το $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ είναι κανονικό πολύγωνο, αφού οι πλευρές του είναι ίσες, ως χορδές ίσων τόξων και οι γωνίες του είναι επίσης ίσες, επειδή κάθε μια από αυτές είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει σε τόξο που είναι το άθροισμα $n - 2$ ίσων τόξων.

Συμβολίζουμε:

- λ_n : την πλευρά του n - γώνου
- φ_n : την γωνία του n - γώνου, δηλαδή την γωνία που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές πλευρές του
- κ_n : την κεντρική γωνία, δηλαδή την επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί σε τόξο χορδής ίσης με λ_n
- α_n : το απόστημα, δηλαδή την απόσταση του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου από κάθε πλευρά του
- Π_n : την περίμετρο του n -γώνου
- E_n : το εμβαδόν του n -γώνου

Ονομάζουμε επίσης ακτίνα και κέντρο του πολυγώνου την ακτίνα ακτίνα R και το κέντρο K του περιγεγραμμένου κύκλου.



Αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2

Κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο και περιγράψιμο σε άλλο κύκλο. Οι δυο αυτοί κύκλοι είναι ομόκεντροι.

Σημείωση

Ένα πολύγωνο λέγεται περιγράψιμο σε κύκλο όταν όλες οι πλευρές του είναι εφαπτόμενες του κύκλου. Ο κύκλος τότε ονομάζεται εγγεγραμμένος στο πολύγωνο.

Βασικές σχέσεις των στοιχείων κανονικών πολυγώνων

Σε κάθε κανονικό n - γωνο ακτίνας R , ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

1. $\kappa_n = \frac{360^\circ}{n}$

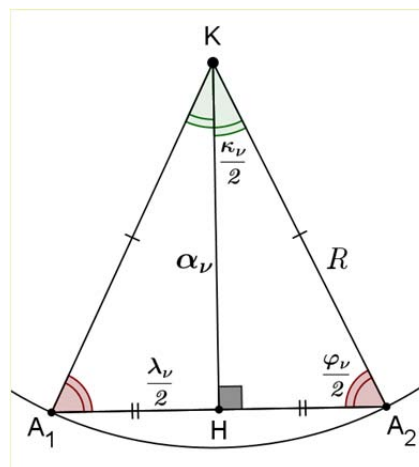
2. $\varphi_n + \kappa_n = 180^\circ$

3. $\alpha_n^2 + \frac{\lambda_n^2}{4} = R^2$

4. $\Pi_n = n\lambda_n$

5. $E_n = n \cdot E_{KA_1A_2} = \begin{cases} n \cdot \frac{1}{2} \lambda_n \alpha_n \\ \text{ή} \\ n \cdot \frac{1}{2} R^2 \eta\mu\kappa_n \end{cases}$

6. $E_n = \frac{1}{2} \Pi_n \alpha_n$



Απόδειξη

1. Η γωνία είναι επίκεντρη και βαίνει σε ένα από τα n ίσα τόξα, στα οποία έχουμε χωρίσει τον κύκλο. Άρα, είναι προφανές ότι:

$$\kappa_n = \frac{360^\circ}{n}$$

2. Στο ορθογώνιο τρίγωνο KHA_2 οι δύο οξείες γωνίες του έχουν άθροισμα 90° , δηλαδή:

$$\frac{\varphi_n}{2} + \frac{\kappa_n}{2} = 90^\circ \Rightarrow \varphi_n + \kappa_n = 180^\circ$$

Ισοδύναμα μπορούμε να πάρουμε και τους τύπους:

$$\varphi_n = 180^\circ - \kappa_n \quad \text{και} \quad \varphi_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

3. Στο ορθογώνιο τρίγωνο KHA_2 από Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$KH^2 + HA_2^2 = KA_2^2 \Rightarrow \alpha_n^2 + \left(\frac{\lambda_n}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow \alpha_n^2 + \frac{\lambda_n^2}{4} = R^2$$

4. Η περίμετρος του πολυγώνου είναι ισούται με το άθροισμα του μήκους n ίσων πλευρών ίσων με λ_n . Άρα, $\Pi_n = n\lambda_n$.

5. Το εμβαδόν του n -γώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των n ίσων κεντρικών τριγώνων. Το εμβαδόν κάθε κεντρικού τριγώνου είναι:

$$E_{KA_1A_2} = \frac{1}{2} \lambda_n \alpha_n \quad \text{ή} \quad E_{KA_1A_2} = \frac{1}{2} (KA_1) \cdot (KA_2) \eta \mu \kappa_n = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \eta \mu \kappa_n = \frac{1}{2} R^2 \eta \mu \kappa_n$$

Συνεπώς:

$$E_n = n \cdot E_{KA_1A_2} = \begin{cases} n \cdot \frac{1}{2} \lambda_n \alpha_n \\ \text{ή} \\ n \cdot \frac{1}{2} R^2 \eta \mu \kappa_n \end{cases}$$

6. $E_n = n \cdot \frac{1}{2} \lambda_n \alpha_n = \frac{1}{2} (n \cdot \lambda_n) \alpha_n = \frac{1}{2} \cdot \Pi_n \alpha_n$

Θεώρημα 3

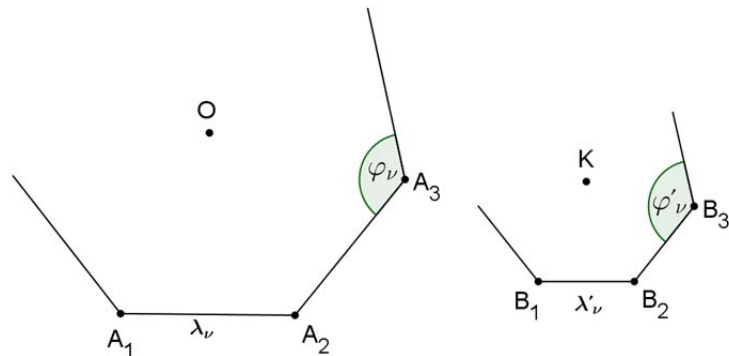
Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

Απόδειξη

Έστω ότι τα δύο κανονικά πολύγωνα έχουν n πλευρές.

Αν λ_n, λ'_n οι πλευρές τους και φ_n, φ'_n οι αντίστοιχες γωνίες τους, τότε θα έχουμε:

- $\varphi_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \varphi'_n$
- Ο λόγος των πλευρών τους είναι ίσος με τον σταθερό λόγο $\frac{\lambda_n}{\lambda'_n}$.



Δηλαδή, τα δύο πολύγωνα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Επομένως, είναι όμοια.

Παραδείγματα και Εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε την κεντρική γωνία και τη γωνία κανονικού οκταγώνου.

Λύση

Από τη σχέση $\kappa_n = \frac{360^\circ}{n}$, για $n = 8$, παίρνουμε:

$$\kappa_8 = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

Από τη σχέση $\varphi_n + \kappa_n = 180^\circ$, για $n = 8$, παίρνουμε:

$$\varphi_8 + \kappa_8 = 180^\circ \Rightarrow \varphi_8 = 180^\circ - \kappa_8 \Rightarrow \varphi_8 = 180^\circ - 45^\circ \Rightarrow \varphi_8 = 135^\circ$$

2. Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο, του οποίου η γωνία είναι:

(α) 140°

(β) 100°

Λύση

(α) Έστω $\varphi_n = 140^\circ$. Έχουμε:

$$\varphi_n + \kappa_n = 180^\circ \Rightarrow 140^\circ + \kappa_n = 180^\circ \Rightarrow \kappa_n = 40^\circ \Rightarrow \frac{360^\circ}{n} = 40^\circ \Rightarrow n = 9$$

Άρα υπάρχει κανονικό πολύγωνο με γωνία 140° και αυτό είναι το **κανονικό 9-γωνο**.

(β) Έστω $\varphi_n = 100^\circ$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \varphi_n + \kappa_n = 180^\circ &\Rightarrow \kappa_n = 180^\circ - \varphi_n = 180^\circ - 100^\circ \Rightarrow \kappa_n = 80^\circ \\ &\Rightarrow \frac{360^\circ}{n} = 80^\circ \Rightarrow n = 4,5, \end{aligned}$$

που δεν είναι ακέραιος.

Άρα, δεν υπάρχει κανονικό πολύγωνο που έχει γωνία 100° .

3. Κανονικό εξάγωνο έχει ακτίνα $R = 6 \text{ cm}$ και απόστημα $\alpha_6 = 3\sqrt{3} \text{ cm}$. Να υπολογίσετε την πλευρά του λ_6 .

Λύση

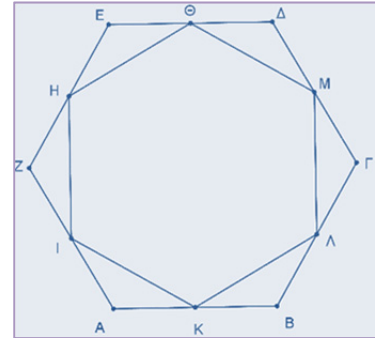
Από τη σχέση $\alpha_n^2 + \frac{\lambda_n^2}{4} = R^2$, για $n = 6$ έχουμε:

$$\alpha_6^2 + \frac{\lambda_6^2}{4} = R^2 \Rightarrow (3\sqrt{3})^2 + \frac{\lambda_6^2}{4} = 6^2 \Rightarrow 27 + \frac{\lambda_6^2}{4} = 36 \Rightarrow \frac{\lambda_6^2}{4} = 9 \Rightarrow \lambda_6^2 = 36 \Rightarrow \lambda_6 = 6 \text{ cm}$$

4. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών κανονικού εξαγώνου, είναι επίσης κορυφές κανονικού εξαγώνου.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι τα $ΑΒΓΔΕΖ$ είναι κανονικό εξαγώνο πλευράς a και $Κ, Λ, Μ, Θ, Η, Ι$ τα μέσα των πλευρών του, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Τα τρίγωνα $ΑΚΙ, ΒΛΚ, ΓΜΛ, ΔΘΜ, ΕΗΘ, ΖΙΗ$ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή με ίσες πλευρές, μήκους $\frac{a}{2}$ και γωνίες κορυφής 120° (είναι οι γωνίες του κανονικού εξαγώνου $ΑΒΓΔΕΖ$). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και συνεπώς θα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, δηλαδή:



$$IK = K\Lambda = \Lambda M = M\Theta = \Theta H = HI \quad (1)$$

Επίσης, οι γωνίες στις βάσεις των έξι τριγώνων είναι ίσες αφού κάθε μια ισούται με 30° . Έτσι, οι γωνίες του εξαγώνου $ΚΛΜΘΗΙ$ έχουν μέτρο $180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ η κάθε μια και συνεπώς είναι ίσες (2).

Από (1) και (2) προκύπτει ότι το εξαγώνο $ΚΛΜΘΗΙ$ είναι κανονικό.

5. Δυο τετράγωνα έχουν πλευρές 4 cm και 2 cm. Αν το μικρότερο έχει ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$ cm, να υπολογίσετε την ακτίνα R του μεγαλύτερου τετραγώνου.

Λύση

Τα δυο τετράγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{4}{2} = 2$. Τότε:

$$\frac{R}{\rho} = \lambda \Rightarrow \frac{R}{\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow R = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε την κεντρική γωνία και τη γωνία ενός κανονικού πενταγώνου, δεκαγώνου και δωδεκαγώνου.
2. Να εξετάσετε αν υπάρχουν κανονικά πολύγωνα που έχουν την κεντρική τους γωνία αμβλεία.
3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν κανονικά πολύγωνα με γωνίες:
(α) 108°
(β) 110°
(γ) 150°
4. Ο λόγος των εμβαδών δυο κανονικών εξαγώνων είναι 4. Να βρείτε το λόγο των ακτίνων τους, των πλευρών τους, των αποστημάτων τους και των περιμέτρων τους.
5. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, που αναφέρεται σε κανονικά πολύγωνα:

Πλήθος πλευρών	Κεντρική γωνία	Γωνία πολυγώνου
	30°	
10		
		108°
	$\frac{1}{2} L$	

6. Δίνεται κανονικό εξαγώνο $ABΓΔΕΖ$. Φέρουμε τις διαγωνίους, που δεν περνούν από το κέντρο του, οι οποίες τέμνονται στα σημεία $H, \theta, I, K, \Lambda, M$. Να αποδείξετε ότι το εξαγώνο $H\theta IK\Lambda M$ είναι κανονικό.

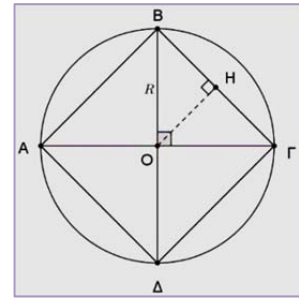
6.2.4 ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

Σε αυτή την ενότητα, θα ασχοληθούμε με την κατασκευή και εγγραφή σε κύκλο, **με χρήση κανόνα και διαβήτη**, μερικών βασικών κανονικών πολυγώνων, καθώς και με τον υπολογισμό των πλευρών και των αποστημάτων τους, συναρτήσει της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου τους.

1. Σε κύκλο ακτίνας R να εγγραφεί τετράγωνο.

Αν υποθέσουμε ότι κατασκευάστηκε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, εγγεγραμμένο στον κύκλο (O, R) , τότε οι διαγώνιοι $A\Gamma, B\Delta$ είναι διάμετροι του κύκλου.

Επομένως, για την κατασκευή τετραγώνου αρκεί να φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους που χωρίζουν τον κύκλο σε 4 ίσα τόξα και έτσι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι το ζητούμενο τετράγωνο.



Πλευρά και απόστημα τετραγώνου

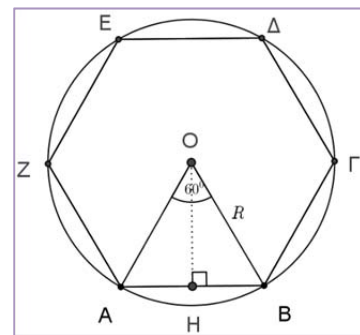
Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle BO\Gamma$, όπου $B\Gamma = \lambda_4$ και $OH = \alpha_4$, έχουμε:

- $\lambda_4^2 = R^2 + R^2 \Rightarrow \lambda_4 = R\sqrt{2}$
- $\alpha_4 = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\lambda_4}{2} \Rightarrow \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

2. Σε κύκλο ακτίνας R να εγγραφεί κανονικό εξάγωνο.

Αν υποθέσουμε ότι κατασκευάστηκε κανονικό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta E\text{Z}$, εγγεγραμμένο στον κύκλο (O, R) , τότε το τρίγωνο $\triangle AOB$ είναι ισόπλευρο, αφού $AO = OB = R$ και $\angle AOB = \kappa_6 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Άρα $AB = R$.

Έτσι, αν πάρουμε στον κύκλο έξι διαδοχικά τόξα, χορδής R το κάθε ένα το εξάγωνο που έχει κορυφές τα άκρα των χορδών αυτών είναι το ζητούμενο κανονικό 6-γώνο.



Πλευρά και απόστημα κανονικού εξάγωνου

Από το ισόπλευρο τρίγωνο $\triangle AOB$, όπου $AB = \lambda_6$ και $OH = \alpha_6$, έχουμε:

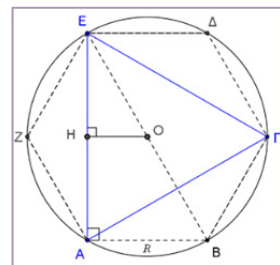
- $\lambda_6 = R$
- $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, ως ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου $\triangle AOB$.

3. Σε κύκλο ακτίνας R να εγγραφεί ισόπλευρο τρίγωνο.



Κατασκευάζουμε το κανονικό εξάγωνο $ABΓΔEZ$, εγγεγραμμένο στον κύκλο (O, R) .

Τότε το τρίγωνο $ΔΓE$ είναι ισόπλευρο, αφού οι πλευρές του $ΑΓ, ΓE, EA$ είναι ίσες, ως χορδές ίσων τόξων και είναι το ζητούμενο, αφού είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο.



Πλευρά και απόστημα ισοπλεύρου τριγώνου

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΔABE$, όπου $AE = \lambda_3$, $AB = R$, $EB = 2R$ και $OH = \alpha_3$, έχουμε:

- $\lambda_3^2 = 4R^2 - R^2$ απ' όπου $\lambda_3 = R\sqrt{3}$
- $\alpha_3 = \frac{R}{2}$, αφού O μέσο της διαμέτρου EB και $OH \parallel BA$.

Συνοπτικός Πίνακας

Κανονικό πολύγωνο	Τρίγωνο	Τετράγωνο	Εξάγωνο
Πλευρά	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\lambda_6 = R$
Απόστημα	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Παραδείγματα και Εφαρμογές

1. Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένα ισόπλευρο τρίγωνο, τετράγωνο και κανονικό εξάγωνο. Να αποδείξετε ότι:

- (α) $\lambda_6^2 = \lambda_4 \cdot \alpha_4$
 (β) $\lambda_6 \cdot \alpha_4 = \lambda_4 \cdot \alpha_3$
 (γ) $\lambda_6^2 + \lambda_4^2 = \lambda_3^2$

Λύση

Είναι $\lambda_3 = R\sqrt{3}$, $\lambda_4 = R\sqrt{2}$, $\lambda_6 = R$, $\alpha_3 = \frac{R}{2}$ και $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

- (α) $\lambda_4 \cdot \alpha_4 = R\sqrt{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} = R^2 = \lambda_6^2$
 (β) $\lambda_6 \cdot \alpha_4 = R \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2} \cdot \frac{R}{2} = \lambda_4 \cdot \alpha_3$
 (γ) $\lambda_6^2 + \lambda_4^2 = R^2 + (R\sqrt{2})^2 = R^2 + 2R^2 = 3R^2 = (R\sqrt{3})^2 = \lambda_3^2$

2. Σε κύκλο (K, R) παίρνουμε τα διαδοχικά τόξα $AB = 60^\circ, B\Gamma = 90^\circ, \Gamma\Delta = 60^\circ, \Delta E = 90^\circ$. Να βρείτε, συναρτήσει του R , την περίμετρο και το εμβαδόν του πενταγώνου $AB\Gamma\Delta E$.

Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι το μέτρο του τόξου EA είναι:

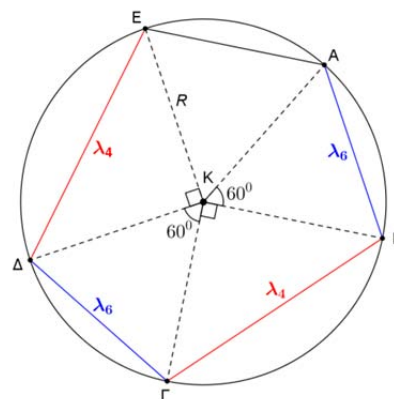
$$360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 60^\circ$$

Λόγω των επικέντρων γωνιών, προκύπτει ότι:

$$AB = \Gamma\Delta = EA = \lambda_6 = R \text{ και } B\Gamma = \Delta E = \lambda_4 = R\sqrt{2}$$

Η περίμετρος Π του πενταγώνου είναι:

$$\begin{aligned} \Pi &= AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EA \\ &= R + R\sqrt{2} + R + R\sqrt{2} + R \\ &= 3R + 2R\sqrt{2} \\ &= R(3 + 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$



Το εμβαδόν E του πενταγώνου είναι:

$$\begin{aligned} E &= (KAB) + (KB\Gamma) + (K\Gamma\Delta) + (K\Delta E) + (KEA) \\ &= 3 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4} (3\sqrt{3} + 4) \end{aligned}$$

αφού

$$\begin{aligned} (KAB) = (K\Gamma\Delta) = (KEA) &= \frac{1}{2} \lambda_6 \cdot \alpha_6 = \frac{1}{2} R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \\ (KB\Gamma) = (K\Delta E) &= \frac{1}{2} \lambda_4 \cdot \alpha_4 = \frac{1}{2} R\sqrt{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R^2}{2} \end{aligned}$$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε, συναρτήσει του R , τις περιμέτρους Π_3, Π_4, Π_6 και τα εμβαδά E_3, E_4, E_6 ισοπλεύρου τριγώνου, τετραγώνου, κανονικού εξαγώνου, που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο (O, R) .
2. Σε κύκλο (O, R) παίρνουμε τα διαδοχικά τόξα $AB = 60^\circ, BG = 90^\circ, \Gamma\Delta = 120^\circ$. Να βρείτε, συναρτήσει του R , την περίμετρο και το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.
3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν τετραγώνου, που η πλευρά του και το απόστημά του έχουν διαφορά $4\sqrt{2}$ cm.
4. Σε κύκλο (O, R) παίρνουμε παράλληλες χορδές $AB = R$ και $\Gamma\Delta = R\sqrt{3}$, ώστε το κέντρο O να βρίσκεται εντός της ζώνης των παραλλήλων χορδών. Να βρείτε, συναρτήσει του R , τις μη παράλληλες πλευρές, το ύψος και το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τραπεζίου .
5. Σε κύκλο ακτίνας $R = 2$ cm παίρνουμε τα διαδοχικά τόξα $AB = 90^\circ, BG = 90^\circ, \Gamma\Delta = 120^\circ$ και στην προέκταση της χορδής $A\Delta$, προς το Δ , παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta E = A\Delta$.
 - (α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισόπλευρο.
 - (β) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma E$.

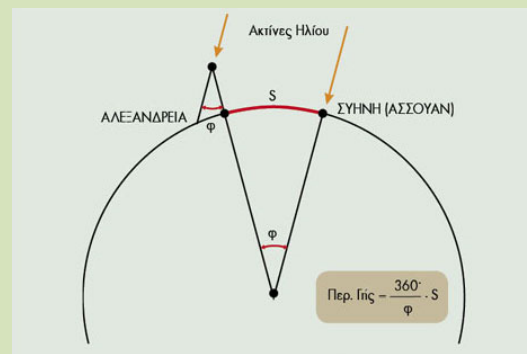
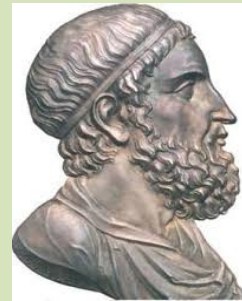
6.3 ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

Ιστορικό Σημείωμα

Πολλοί αρχαίοι λαοί ασχολήθηκαν με τη μέτρηση του κύκλου από τον 17^ο π.Χ. αιώνα! Στην αρχαία Ελλάδα το πρόβλημα απέκτησε και θεωρητικό ενδιαφέρον, αφού συνδέθηκε με την αυστηρή απόδειξη γεωμετρικών προτάσεων. Ο Ευκλείδης (350 – 270 π.Χ.) με μαθηματική αυστηρότητα και χωρίς καμιά αναφορά σε αριθμητικούς υπολογισμούς, αποδεικνύει την πρόταση: «Ο λόγος των εμβαδών δυο κυκλικών δίσκων ισούται με το τετράγωνο του λόγου των διαμέτρων τους».



Ο Αρχιμήδης (287 – 212 π.Χ.) στο έργο του «Κύκλου μέτρησις» αποδεικνύει, χρησιμοποιώντας εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα (6γωνο, 12γωνο, 24γωνο, 48γωνο και 96γωνο), ότι το μήκος του κύκλου είναι μεγαλύτερο από τα $3\frac{10}{71}$ της διαμέτρου του και μικρότερο από τα $3\frac{1}{70}$ αυτής. Μια ενδιαφέρουσα μέθοδος για τον υπολογισμό της περιμέτρου της γης (όπου η γη θεωρείται σφαίρα και ζητείται η περίμετρος μέγιστου κύκλου της) παρουσιάστηκε από τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο (276 – 194 π.Χ.), περί το 240 π.Χ.



www.youtube.com/watch?v=1MFZfXKaLLw

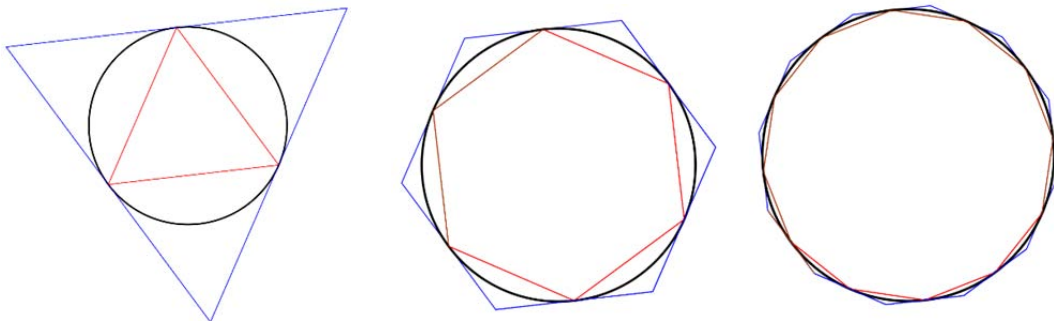
6.3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μέτρηση κύκλου, δηλαδή ο υπολογισμός του μήκους του και του εμβαδού του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου συναρτήσει της ακτίνας του, αποτελεί ένα από τα αρχαιότερα γεωμετρικά προβλήματα. Το πρόβλημα συνδέεται άμεσα με τον αριθμό π , ο οποίος δεν είναι αλγεβρικός, δηλαδή δεν αποτελεί ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Αυτό σημαίνει ότι είναι αδύνατη η κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος μήκους π με κανόνα και διαβήτη. Μια προσέγγιση του π είναι $\frac{22}{7}$, που δόθηκε από τον Αρχιμήδη.

6.3.2 ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ – ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ

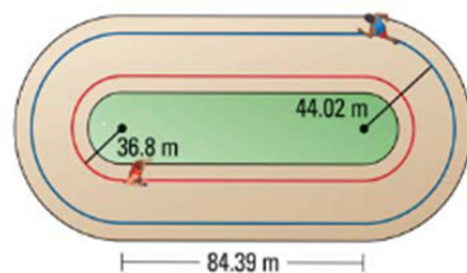
Εξερεύνηση

Με τη βοήθεια του αρχείου «[BLyk_Kor_En06_MikosKyklou.ggb](#)», να προσεγγίσετε το μήκος κύκλου, που είναι εγγεγραμμένος και περιγεγραμμένος σε κανονικά πολύγωνα με το ίδιο πλήθος πλευρών, που συνεχώς αυξάνεται (μέθοδος Αρχιμήδη), χρησιμοποιώντας το δρομέα (στα πιο κάτω σχήματα φαίνονται οι περιπτώσεις ισοπλεύρου τριγώνου, κανονικού 6 – γώνου και κανονικού 12 – γώνου).



Διερεύνηση

Όπως είναι γνωστό, ο στίβος του κλασσικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δυο ημικύκλια (σχήμα). Να υπολογίσετε την απόσταση που θα διανύσει ο αθλητής στον κόκκινο (εσωτερικό) διάδρομο, αν τον διατρέξει μια φορά.



2. Οι τροχοί ενός ποδηλάτου έχουν διάμετρο 56 cm και για να διανύσουν απόσταση S έκαναν 500 πλήρεις στροφές. Να υπολογίσετε σε m την απόσταση S , αν πάρετε $\pi = \frac{22}{7}$

Λύση

Το μήκος των τροχών είναι $\Gamma = 2\pi R = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 28 \text{ cm} = 176 \text{ cm}$, αφού $R = \frac{56}{2} = 28 \text{ cm}$.

Άρα:

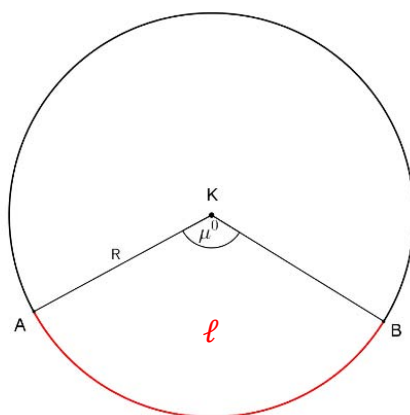
$$S = 500 \cdot \Gamma = 500 \cdot 176 = 88000 \text{ cm} = 880 \text{ m}$$

II. ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ

Επειδή ο κύκλος έχει μέτρο 360° και μήκος $\Gamma = 2\pi R$, το τόξο μέτρου 1° θα έχει μήκος $\frac{\Gamma}{360}$, συνεπώς το τόξο μέτρου μ° έχει μήκος:

$$\gamma = \frac{\Gamma \cdot \mu^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi R \cdot \mu^\circ}{360^\circ}$$

$$\gamma = \frac{2\pi R \mu^\circ}{360^\circ} \quad (1)$$



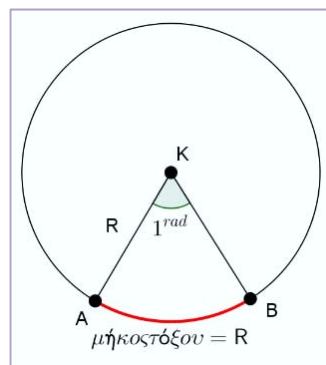
Το ακτίσιο (rad)

Έχουμε μάθει ότι εκτός από τη μοίρα (1°), ως μονάδα μέτρου γωνίας (και τόξου), υπάρχει και το ακτίσιο (1^{rad}), που ορίζεται ως το μέτρο τόξου, το οποίο έχει μήκος ίσο με το μήκος της ακτίνας του κύκλου.

Έτσι ένα τόξο μέτρου α^{rad} έχει μήκος $\gamma = \alpha R$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει η σχέση μεταξύ ακτινίων και μοιρών, που είναι:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ}$$



Συνεπώς, το τόξο (ή η γωνία) μέτρου 1^{rad} είναι ίσο με το τόξο (ή τη γωνία) μέτρου:

$$\frac{180^\circ}{\pi} \cong 57,32^\circ.$$

Παραδείγματα και Εφαρμογές

1. Τρεις ίσοι κύκλοι, ακτίνας R εφάπτονται ανά δυο εξωτερικά στα σημεία A, B, Γ . Να βρείτε, συναρτήσει του R , την περίμετρο του καμπυλόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

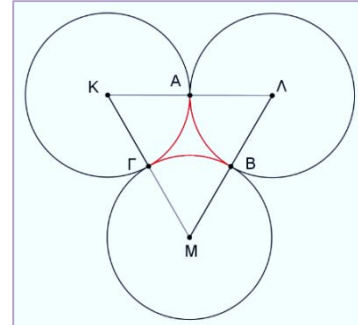
Λύση

Τα κέντρα K, Λ, M είναι κορυφές ισοπλευρού τριγώνου, πλευράς $2R$. Τα τόξα $AB, B\Gamma, \Gamma A$ είναι ίσα, έχουν μέτρο 60° το καθένα και επομένως το μήκος τους είναι:

$$\gamma = \frac{2\pi R \mu^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi R \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R}{3}$$

Άρα, η περίμετρος του καμπυλόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:

$$3\gamma = 3 \cdot \frac{\pi R}{3} = \pi R$$



2. Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε διάμετρο AB και τις χορδές $A\Gamma$ και $B\Gamma$, ώστε $A\Gamma = 2$ cm και $B\Gamma = 2\sqrt{3}$ cm. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου και τα μήκη των τόξων $A\Gamma$ και $B\Gamma$, που είναι μικρότερα του ημικυκλίου.

Λύση

Επειδή το AB είναι διάμετρος, το τρίγωνο $\Delta A\Gamma B$ είναι ορθογώνιο με $\angle \Gamma = 90^\circ$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} AB^2 &= A\Gamma^2 + B\Gamma^2 \Rightarrow (2R)^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 \\ &\Rightarrow 4R^2 = 16 \Rightarrow R = 2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Το μήκος του κύκλου είναι $\Gamma = 2\pi R = 4\pi$ cm.

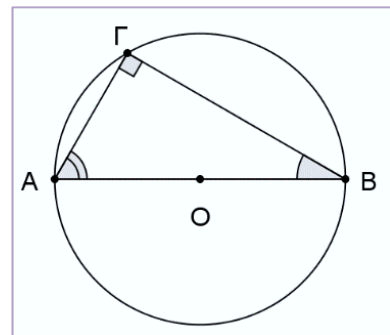
Επειδή $A\Gamma = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \angle B = 30^\circ \Rightarrow A\hat{O}\Gamma = 60^\circ$

και το μήκος του τόξου $A\Gamma$ είναι:

$$\gamma_1 = \frac{2\pi \cdot R \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi}{3} \text{ cm}$$

Τέλος, $\angle A = 60^\circ \Rightarrow B\hat{O}\Gamma = 120^\circ$ και το μήκος του τόξου $B\Gamma$ είναι:

$$\gamma_2 = \frac{2\pi \cdot R \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}$$



Δραστηριότητες

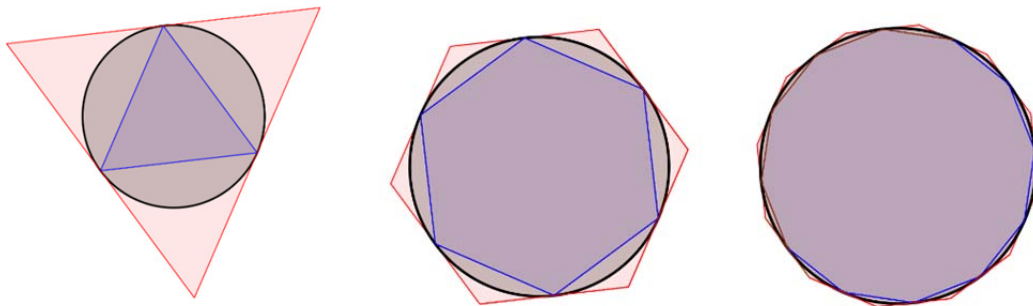
1. Να υπολογίσετε το μέτρο ενός τόξου (σε μοίρες), το οποίο ανήκει σε κύκλο, ακτίνας $R = 12 \text{ cm}$ και έχει μήκος $\gamma = 3\pi \text{ cm}$.
2. Να υπολογίσετε το μήκος τόξου, που αντιστοιχεί σε πλευρά κανονικού οκταγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $R = 8 \text{ cm}$.
3. Σε ευθεία παίρνουμε 4 διαδοχικά σημεία A, B, Γ, Δ . Συμβολίζουμε με $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma$ τα μήκη των κύκλων διαμέτρων $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, A\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
$$\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = \Gamma$$
4. Ο ένας τροχός ποδηλάτου έχει ακτίνα R και ο άλλος έχει ακτίνα $\rho < R$. Για μια απόσταση S που διανύει το ποδήλατο, ο μεγάλος τροχός κάνει ν στροφές και ο μικρός 2ν στροφές. Να δείξετε ότι $R = 2\rho$.
5. Σε κύκλο (O, R) παίρνουμε τις διαδοχικές χορδές $AB = R\sqrt{2}$ και $B\Gamma = R\sqrt{3}$. Να βρείτε, συναρτήσει του R , τα μήκη των τόξων $AB, B\Gamma, \Gamma A$.
6. Με διάμετρο την ακτίνα OA κύκλου (O, R) γράφουμε κύκλο (K) και από το O φέρουμε ημιευθεία, που τέμνει τον κύκλο (O) στο Γ και τον κύκλο (K) στο Δ . Να αποδείξετε ότι τα τόξα $A\Gamma$ και $A\Delta$ έχουν ίσα μήκη.

6.3.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΔΙΣΚΟΥ – ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ - ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Διερεύνηση

Με τη βοήθεια του αρχείου «[Blyk_Kor_En06_EmbadonKyklikouDiskou.ggb](#)», να προσεγγίσετε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου, που ο αντίστοιχος κύκλος του είναι εγγεγραμμένος και περιγεγραμμένος σε κανονικά πολύγωνα με το ίδιο πλήθος πλευρών, που συνεχώς αυξάνεται, χρησιμοποιώντας το δρομέα (στα πιο κάτω σχήματα φαίνονται οι περιπτώσεις ισοπλευρού τριγώνου, κανονικού 6 – γώνου και κανονικού 12 – γώνου).

Το σύνολο των σημείων ενός κύκλου και των εσωτερικών του σημείων λέγεται κυκλικός δίσκος.



I. ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΔΙΣΚΟΥ

Ας θεωρήσουμε κύκλο (K, R) στον οποίο εγγράφουμε κανονικά πολύγωνα με $3, 4, 5, 6, \dots, n, \dots$ πλευρές. Τα εμβαδά $E_3, E_4, E_5, E_6, \dots, E_n, \dots$ των πιο πάνω πολυγώνων αυξάνονται, καθώς n το αυξάνεται απεριόριστα ($n \rightarrow +\infty$) και πλησιάζουν προς το θετικό αριθμό E , που ονομάζουμε «εμβαδόν του κυκλικού δίσκου».

Έτσι, έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός

Το όριο E της ακολουθίας των εμβαδών $E_3, E_4, E_5, E_6, \dots, E_n, \dots$, καθώς η τιμή του n αυξάνεται απεριόριστα, ονομάζεται εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (K, R) .

Δηλαδή συμβολικά,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = E$$

Επειδή το εμβαδόν E_n κανονικού n - γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (K, R) είναι $E_n = \frac{1}{2} \Pi_n \alpha_n$, όπου Π_n η περίμετρος και α_n το απόστημά του, έχουμε:

$$E = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pi_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2} \cdot \Gamma \cdot R = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$$

αφού το απόστημα α_n τείνει στην ακτίνα R , καθώς το n αυξάνεται απεριόριστα.

Άρα το εμβαδόν E του κυκλικού δίσκου (K, R) είναι:

$$E = \pi R^2$$

Παραδείγματα και Εφαρμογές

1. Το μήκος τόξου μέτρου 120° , που ανήκει σε κύκλο (K, R) είναι 2π cm. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (K, R) .

Λύση

Είναι:

$$\gamma = \frac{2\pi R\mu^\circ}{360^\circ} \Rightarrow 2\pi = \frac{2\pi R \cdot 120^\circ}{360^\circ} \Rightarrow R = 3 \text{ cm}$$

Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι:

$$E = \pi R^2 = 9\pi \text{ cm}^2$$

2. Κυκλικός δίσκος έχει εμβαδόν $50,24 \text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε το μήκος του αντίστοιχου κύκλου ($\pi \cong 3,14$).

Λύση

$$E = \pi R^2 \Rightarrow 50,24 = 3,14R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{5024}{314} = 16 \Rightarrow R = 4 \text{ cm}$$

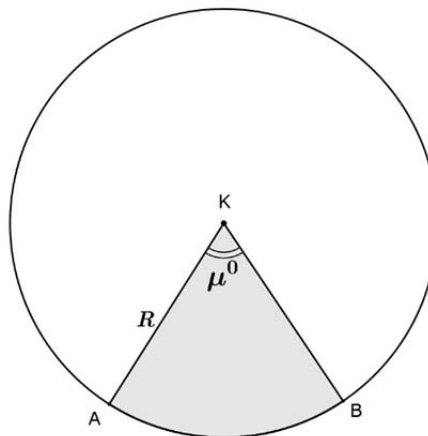
Τότε:

$$\Gamma = 2\pi R = 2 \cdot 3,14 \cdot 4 \Rightarrow \Gamma = 25,12 \text{ cm}$$

II. ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ

Σε κύκλο (K, R) θεωρούμε επίκεντρη γωνία $\angle AKB$ που έχει μέτρο μ° . Το σύνολο των κοινών σημείων της επίκεντρης γωνίας $\angle AKB$ και του κυκλικού δίσκου (K, R) λέγεται κυκλικός τομέας κέντρου O και ακτίνας R . Ο κυκλικός τομέας KAB και λέμε ότι είναι κυκλικός τομέας μ° . Επειδή ο κυκλικός δίσκος είναι κυκλικός τομέας 360° , με εμβαδόν πR^2 , ο κυκλικός τομέας 1° έχει εμβαδόν $\frac{\pi R^2}{360^\circ}$, οπότε το εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° έχει εμβαδόν $\frac{\pi R^2 \mu^\circ}{360^\circ}$. Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα KAB συμβολίζουμε $E_{\text{τομ}}$ και έτσι έχουμε:

$$E_{\text{τομ}} = \frac{\pi R^2 \mu^\circ}{360^\circ}$$

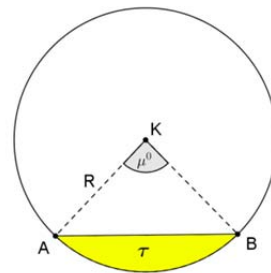


Το εμβαδόν ενός επίπεδου κλειστού σχήματος $AB\Gamma\Delta\text{E}\dots$ συμβολίζουμε, πολλές φορές, με $(AB\Gamma\Delta\text{E}\dots)$

III. ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Το καθένα από τα δυο μέρη στα οποία χορδή AB χωρίζει ένα κυκλικό δίσκο (K, R) λέγεται κυκλικό τμήμα που περιέχεται στην επίκεντρη γωνία $\angle AKB$. Το εμβαδόν $E_{κ.τμ}$ του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία $\angle AKB$ είναι:

$$E_{κ.τμ} = E_{τομ(KAB)} - E_{\Delta KAB}$$



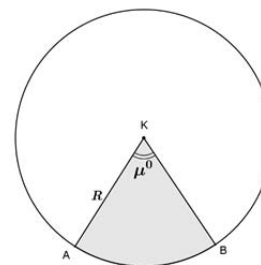
Παραδείγματα και Εφαρμογές

3. Σε κύκλο ακτίνας $R = 4 \text{ cm}$ το εμβαδόν κυκλικού τομέα είναι $\frac{28\pi}{9} \text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε την επίκεντρη γωνία, που αντιστοιχεί στον κυκλικό τομέα.

Λύση

Έχουμε (διπλανό σχήμα):

$$\begin{aligned} E_{τομ(KAB)} &= \frac{\pi R^2 \mu^0}{360^0} \Rightarrow \frac{28\pi}{9} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot \mu^0}{360^0} \Rightarrow \frac{28}{1} = \frac{16 \cdot \mu^0}{40^0} \\ &\Rightarrow \frac{28}{1} = \frac{4 \cdot \mu^0}{10^0} \Rightarrow \boxed{\mu = 70^0} \end{aligned}$$



4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ($E_{κ.τμ}$) κυκλικού τμήματος, που αντιστοιχεί σε τόξο 30^0 κύκλου ακτίνας 2 cm.

Λύση

Αν K το κέντρο του κύκλου και τόξο $AB = 30^0$, έχουμε:

$$E_{κ.τμ} = E_{τομ(KAB)} - E_{\Delta KAB} = \frac{\pi 2^2 \cdot 30^0}{360^0} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \eta\mu 30^0 = \frac{\pi}{3} - 1 = \left(\frac{\pi - 3}{3}\right) \text{ cm}^2$$

5. Κυκλικός δίσκος ακτίνας R χωρίζεται σε δυο κυκλικά τμήματα από χορδή $AB = \lambda_4$. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των δυο αυτών κυκλικών τμημάτων.

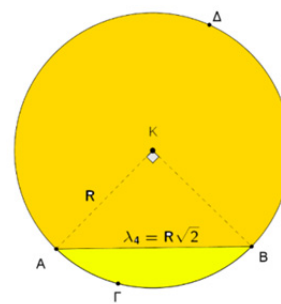
Λύση

Επειδή $AB = \lambda_4 = R\sqrt{2}$, είναι $\angle AKB = 90^0$.

Έστω τ_1 το εμβαδόν του μικρού κυκλικού τμήματος $AGBA$ και τ_2 το εμβαδόν του μεγάλου κυκλικού τμήματος $A\Delta BA$.

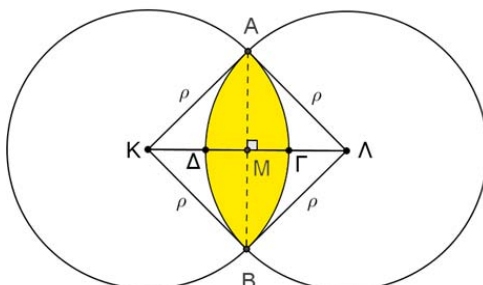
$$\begin{aligned} \tau_1 &= E_{τομ(KAGB)} - E_{\Delta KAB} = \frac{\pi R^2 \cdot 90^0}{360^0} - \frac{R^2}{2} = \frac{(\pi - 2)R^2}{4} \\ \tau_2 &= \pi R^2 - \tau_1 = \pi R^2 - \frac{(\pi - 2)R^2}{4} = \frac{(3\pi + 2)R^2}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\pi - 2}{3\pi + 2}.$$



6. Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (K, ρ) και (Λ, ρ) με διάκεντρο $K\Lambda = \rho\sqrt{2}$. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι τέμνονται και στη συνέχεια να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από αυτούς, συναρτήσει του ρ .

Λύση



Έχουμε $K\Lambda = \rho\sqrt{2} \Rightarrow 0 < K\Lambda < 2\rho$, άρα οι κύκλοι τέμνονται. Αν A, B τα κοινά τους σημεία, τότε το τετράπλευρο $AK\Lambda B$ είναι τετράγωνο, αφού έχει:

Δυο κύκλοι $(K, R), (\Lambda, \rho)$ τέμνονται αν και μόνον αν $|R - \rho| < K\Lambda < R + \rho$

- $KA = AL = LB = BK = \rho$
- $\angle K\Lambda\Lambda = 90^\circ$, επειδή στο τρίγωνο $K\Lambda\Lambda$ ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα:
 $(K\Lambda)^2 = (\rho\sqrt{2})^2 = 2\rho^2 = \rho^2 + \rho^2 = KA^2 + \Lambda A^2$

Τα τόξα $A\Delta B, A\Gamma B$ των δυο ίσων κύκλων είναι ίσα, διότι έχουν κοινή χορδή την AB . Έστω γ το μήκος των παραπάνω τόξων. Τότε, η περίμετρος Π του κοινού μέρους των κύκλων είναι:

$$\Pi = 2\gamma = 2 \cdot \frac{2\pi\rho \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \pi\rho$$

Τα κυκλικά τμήματα $A\Delta B A, A\Gamma B A$ είναι ισοδύναμα και έστω $E_{κ.τμ}$ το εμβαδόν του καθενός. Τότε, το εμβαδόν \mathcal{E} του κοινού μέρους των δυο κύκλων είναι:

Ισοδύναμα λέγονται δυο επίπεδα σχήματα που έχουν ίσα εμβαδά.

$$\mathcal{E} = 2[E_{\text{τομ}(K\Lambda\Gamma B)} - E_{\Delta K\Lambda B}] = 2\left(\frac{\pi\rho^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} - \frac{\rho^2}{2}\right) = \frac{(\pi - 2)\rho^2}{2}$$

Δραστηριότητες

1. Σε κύκλο (K, R) παίρνουμε τόξο $AB = 60^\circ$, το οποίο έχει μήκος $\gamma = 4\pi$ cm. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (K, R) .
2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του κυκλικού δίσκου ενός κύκλου (O, ρ) που έχει μήκος Γ και διάμετρο δ , δίνεται από τους τύπους:

$$(\alpha) \quad E = \frac{\pi\delta^2}{4}$$

$$(\beta) \quad E = \frac{\Gamma^2}{4\pi}$$

3. Το χωρίο που περικλείεται μεταξύ δυο ομόκεντρων κύκλων (O, R) και (O, ρ) με $R > \rho$ ονομάζεται **κυκλικός δακτύλιος**. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν \mathcal{E} του κυκλικού δακτυλίου είναι:

$$\mathcal{E} = \pi(R + \rho)(R - \rho)$$

4. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών των δυο κυκλικών τμημάτων, στα οποία χωρίζεται κυκλικός δίσκος από χορδή του κύκλου, που είναι μεσοκάθετη μιας ακτίνας.

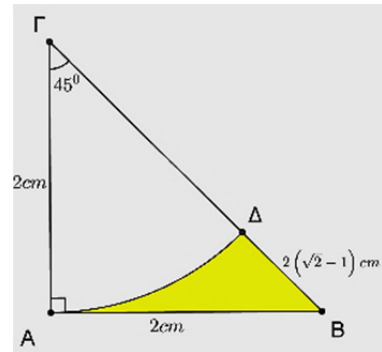
6.3.4 ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ ΜΙΚΤΟΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Κάθε επίπεδο σχήμα που περικλείεται από καμπύλες γραμμές ονομάζεται **καμπυλόγραμμο** (στην παρούσα παράγραφο οι καμπύλες γραμμές είναι τόξα κύκλων).

Κάθε επίπεδο σχήμα που περικλείεται από καμπύλες γραμμές και ευθυγράμματα τμήματα ονομάζεται **μικτόγραμμο**.

Παραδείγματα και Εφαρμογές

1. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα $B\Gamma = 2\sqrt{2}cm$ και το τόξο $\widehat{A\Delta}$ ανήκει στον κύκλο $(\Gamma, \Gamma A)$. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $A\Delta B$.



Λύση

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές ($AB = A\Gamma$), η γωνία $\angle \Gamma = 45^\circ$ και, με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος, έχουμε:

$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = (B\Gamma)^2 \Rightarrow 2(A\Gamma)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow (A\Gamma)^2 = 4 \Rightarrow A\Gamma = AB = 2 \text{ cm}$$

Επίσης, είναι:

$$B\Delta = B\Gamma - \Gamma\Delta = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}$$

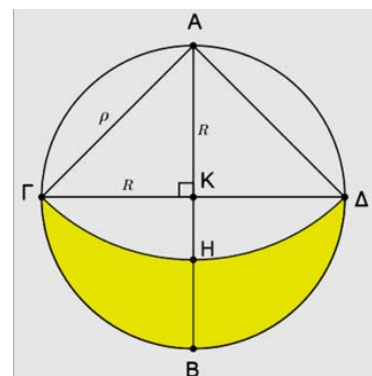
- Για την περίμετρο Π του μικτόγραμμου τριγώνου $A\Delta B$, έχουμε:

$$\Pi = AB + B\Delta + \gamma_{\widehat{A\Delta}} = 2 + 2(\sqrt{2} - 1) + \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 45}{360} = \left(2\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$$

- Για το εμβαδόν E του μικτόγραμμου τριγώνου $A\Delta B$, έχουμε:

$$E = E_{\Delta AB\Gamma} - E_{\text{τομ}(ΓA\Delta)} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 45^\circ}{360^\circ} = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}^2$$

2. Σε κύκλο (K, R) θεωρούμε δυο κάθετες διαμέτρους $AB, \Gamma\Delta$. Με κέντρο το A και ακτίνα $A\Gamma = \rho$, γράφουμε το τόξο $\widehat{GH\Delta}$, που τέμνει την AB στο H . Να βρείτε, συναρτήσει του R , το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου χωρίου $\widehat{GH\Delta B\Gamma}$ που σχηματίζεται (**μηνίσκος**).



Λύση

Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου χωρίου $\Gamma Η Δ Β Γ$ είναι διαφορά του εμβαδού του κυκλικού τμήματος $\Gamma Η Δ Γ$ από το εμβαδόν του ημικυκλίου διαμέτρου $\Gamma Δ$, δηλαδή:

$$E_{\mu\eta\nu} = E_{\kappa.\tau\mu 1} - E_{\kappa.\tau\mu 2} \quad (1)$$

Η ακτίνα του κύκλου (A, ρ) είναι $\rho = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$ και η γωνία $\angle \Gamma Α Δ = 90^\circ$:

$$E_{\kappa.\tau\mu 2} = E_{\tau\omicron\mu(\Delta\Gamma Η Δ)} - E_{\Delta\Gamma Α Δ} = \frac{\pi\rho^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} - \frac{2R \cdot R}{2} = \frac{\pi R^2}{2} - R^2$$

Έτσι, από την (1) παίρνουμε:

$$E_{\mu\eta\nu} = E_{\kappa.\tau\mu 1} - E_{\kappa.\tau\mu 2} = \frac{\pi R^2}{2} - \left(\frac{\pi R^2}{2} - R^2 \right) = R^2$$

3. Σε κύκλο (O, R) παίρνουμε χορδές $AB = R\sqrt{2}$ και $AG = R\sqrt{3}$, έτσι ώστε το O να μη βρίσκεται εντός της γωνίας $\angle \Gamma Α Β$. Να βρείτε, συναρτήσει της ακτίνας R , την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $ΑΒΓ$.

Λύση

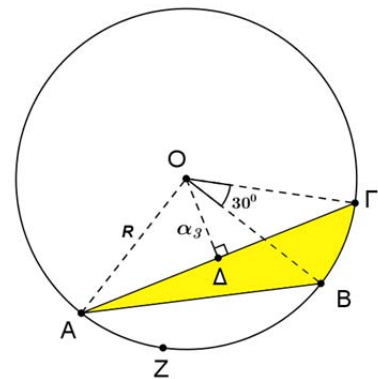
Επειδή $AB = R\sqrt{2} = \lambda_4$ και $AG = R\sqrt{3} = \lambda_3$, είναι $\angle ΑΟΒ = 90^\circ$ και $\angle ΑΟΓ = 120^\circ$, άρα $\angle ΒΟΓ = 30^\circ$.

Οπότε, το μήκος γ του τόξου $ΒΓ$ είναι:

$$\gamma = \frac{2\pi R \cdot 30^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R}{6}$$

Η περίμετρος Π του μικτόγραμμου τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι:

$$\Pi = R\sqrt{2} + R\sqrt{3} + \frac{\pi R}{6} = R \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \right)$$



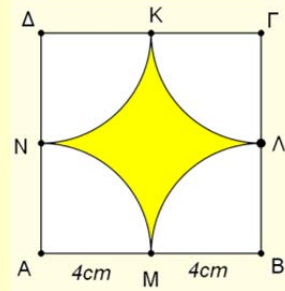
Το εμβαδόν \mathcal{E} του μικτόγραμμου τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= E_{\tau\omicron\mu(OΑΓ)} - E_{\Delta O Α Γ} - E_{\kappa.\tau\mu(ΑΒΖΑ)} \\ &= \frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} - \frac{1}{2} \lambda_3 \alpha_3 - [E_{\tau\omicron\mu(OΑΒ)} - E_{\Delta O Α Β}] \\ &= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} - \left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} \right) \\ &= \frac{R^2}{12} (\pi + 6 - 3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

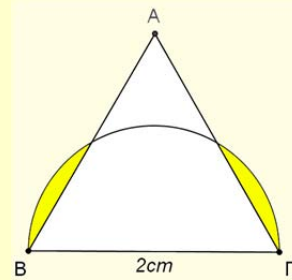
Δραστηριότητες

1. Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας ρ εφάπτονται εξωτερικά ανά δυο στα σημεία A, B, Γ . Να βρείτε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$, συναρτήσει του ρ .

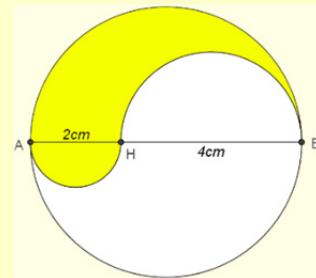
2. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, πλευράς 8 cm . Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα 4 cm γράφουμε τέσσερα τεταρτοκύκλια μέσα στο τετράγωνο και σχηματίζεται το καμπυλόγραμμο τετράγωνο $KLMN$. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του.



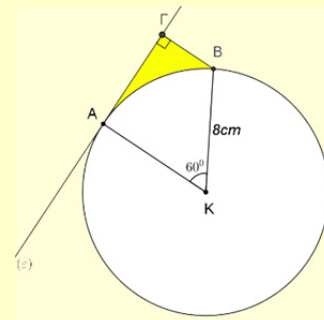
3. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, πλευράς 2 cm . Γράφουμε το ημικύκλιο διαμέτρου $B\Gamma$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της χρωματισμένης περιοχής, που αποτελείται από τα δύο κυκλικά τμήματα.



4. Στη διάμετρο AB του κύκλου παίρνουμε σημείο H , ώστε $AH = 2\text{ cm}$ και $HB = 4\text{ cm}$. Γράφουμε τα ημικύκλια διαμέτρων AH και HB , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου.



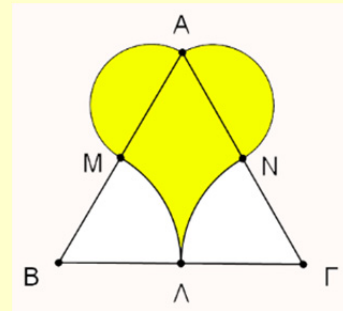
5. Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος κέντρου K έχει ακτίνα 8 cm και $\angle AKB = 60^\circ$. Η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A και $B\Gamma \perp (\varepsilon)$. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του χρωματισμένου μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.



6. Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε την ακτίνα OA και στην προέκτασή της προς το μέρος του A , παίρνουμε σημείο B , ώστε $OA = AB$. Αν $B\Gamma$ το εφαπτόμενο τμήμα από το B προς τον κύκλο, να βρείτε, συναρτήσει του R την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

7. Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Αν $B\Gamma$ είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη τους, να βρείτε, συναρτήσει του ρ , την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

8. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$, πλευράς 4 cm και έστω M, N, Λ είναι τα μέσα των πλευρών του $AB, A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα. Γράφουμε ημικύκλια εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$ με διαμέτρους AM, AN και τόξα $M\Lambda, N\Lambda$ εντός του τριγώνου $AB\Gamma$ που ανήκουν στους κύκλους $(B, BM), (\Gamma, \Gamma N)$ αντίστοιχα (σχήμα). Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο της «καρδιάς» που σχηματίζεται.

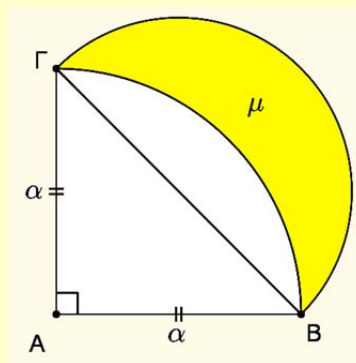


9. Δυο ίσοι κύκλοι, ακτίνας R έχουν διάκεντρο $R\sqrt{3}$. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι τέμνονται και να βρείτε, συναρτήσει του R , το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Δίνεται κύκλος (O, R) και μια χορδή του AB ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου. Στην προέκταση της AB παίρνουμε σημείο Γ , τέτοιο ώστε $A\Gamma = 2R$. Να αποδείξετε ότι το εφαπτόμενο τμήμα από το Γ προς τον κύκλο είναι ίσο με την πλευρά τετραγώνου, εγγεγραμμένου στον (O, R) .
2. Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο $(O, R = 1 \text{ cm})$. Οι πλευρές του AB και $B\Gamma$ είναι αντίστοιχα πλευρές κανονικού εξαγώνου και ισοπλεύρου τριγώνου, εγγεγραμμένων στο κύκλο (O, R) .
 - (α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $A\Gamma$.
 - (β) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών του τριγώνου και του κυκλικού δίσκου (O, R) .
 - (γ) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριών κυκλικών τμημάτων, που ορίζονται από τις πλευρές του τριγώνου και περιέχονται στις γωνίες του.
3. Σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι $\angle A = 105^\circ$ και $\angle B = 45^\circ$. Με κέντρα τις κορυφές B, Γ και ακτίνες $BA, \Gamma A$ αντίστοιχα, γράφουμε τα τόξα AM, AN εντός του τριγώνου (M, N σημεία της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου). Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου AMN , αν γνωρίζετε ότι το μήκος του ύψους AD του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ είναι 10 cm .

4. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $AB = A\Gamma = \alpha$. Με διάμετρο την $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο εκτός του τριγώνου και με κέντρο το A και ακτίνα α γράφουμε το τόξο $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του μηνίσκου μ είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

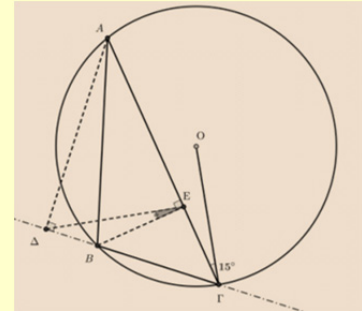


5. Να αποδείξετε ότι τα ύψη $AD, BE, \Gamma Z$ τριγώνου $AB\Gamma$ είναι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου $\triangle EZ$.

6. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και μια τυχαία ευθεία που τέμνει τις πλευρές AB , $\Gamma\Delta$ στα σημεία K, Λ , αντίστοιχα. Έστω M τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος $K\Lambda$. Φέρουμε τους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων $\triangle AMK$, $\triangle \Lambda M\Gamma$ και ονομάζουμε N το δεύτερο σημείο τομής των δύο κύκλων. Να αποδείξετε ότι το σημείο N βρίσκεται πάνω στην διαγώνιο $A\Gamma$ του τετραγώνου.
7. Δυο παράλληλες χορδές κύκλου ακτίνας R έχουν μήκη R και $R\sqrt{3}$. Αν το κέντρο του κύκλου βρίσκεται εκτός της ζώνης των παραλλήλων χορδών, να βρείτε το λόγο του εμβαδού του μέρους του κυκλικού δίσκου μεταξύ των χορδών προς το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O . Η γωνία $\angle O\Gamma A = 15^\circ$ και τα AD, BE είναι ύψη του τριγώνου.



- (α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\angle AB\Gamma$.
 (β) Να αποδείξετε ότι $\angle DEB = 15^\circ$.
 (γ) Να αποδείξετε ότι $DE \perp O\Gamma$.

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Ο κύκλος διαμέτρου AB τέμνει το ύψος $\Gamma\Gamma'$ και την προέκτασή του στα σημεία M και N , και ο κύκλος διαμέτρου $A\Gamma$ τέμνει το ύψος BB' και την προέκτασή του στα σημεία P και K . Αν A' το ίχνος του ύψους από την κορυφή A του τριγώνου πάνω στην $B\Gamma$ και H το ορθόκентρο του τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

- (α) τα τρίγωνα $\triangle ANH, \triangle HMA'$ είναι όμοια και ισχύει $HM \cdot HN = HA \cdot HA'$
 (β) τα σημεία M, N, P, K είναι ομοκυκλικά.

3. Σε τεταρτοκύκλιο KAB κέντρου K , είναι $KA = KB = (\sqrt{2} + 1)$ cm. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου του κύκλου που είναι εγγεγραμμένος στο τεταρτοκύκλιο είναι π cm².

4. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και P τυχαίο εσωτερικό σημείο του ύψους AD του τριγώνου ($D \in B\Gamma$). Από το σημείο P φέρουμε $PE \perp AB$ και $PZ \perp A\Gamma$ (E, Z τα ίχνη των καθέτων πάνω στις πλευρές $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα).

- (α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AEPZ$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
 (β) Αν (ε) είναι η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του $AEPZ$ στο σημείο A , να αποδείξετε ότι $(\varepsilon) \parallel B\Gamma$.
 (γ) Αν BI το ύψος του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ ($I \in A\Gamma$), να αποδείξετε ότι $\angle ABI = \angle ADI$.
 (δ) Αν H το μέσο του AB , να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\triangle EHZ$ διέρχεται και από το μέσο θ του $A\Gamma$.

5. Δίνεται ημικύκλιο, διαμέτρου AB και έστω Γ τυχαίο σημείο της διαμέτρου. Στο εσωτερικό του ημικυκλίου γράφουμε τα ημικύκλια διαμέτρων $A\Gamma$ και ΓB . Η κάθετος της διαμέτρου στο Γ τέμνει το αρχικό ημικύκλιο στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων (**άρβηλος του Αρχιμήδη**) είναι ισοδύναμο με τον κυκλικό δίσκο, διαμέτρου $\Gamma\Delta$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 7

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

7.1 Σύγκριση δύο πληθυσμών

7.1.1 Σύγκριση δύο πληθυσμών - μέτρα θέσης και διασποράς

7.1.2 Σύγκριση δύο πληθυσμών-διαγράμματα

7.2 Παρουσίαση και ανάλυση δεδομένων με γραφήματα

7.2.1 Φυλλογράφημα

7.2.2 Θηκόγραμμα

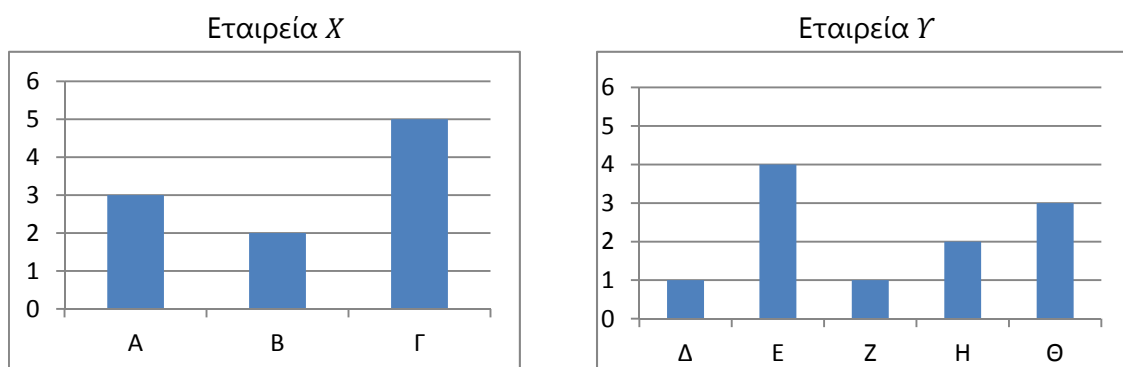
7.1 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΥΟ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ

7.1.1 Σύγκριση δύο πληθυσμών με βάση τα μέτρα θέσης και διασποράς

Διερεύνηση

Στα πιο κάτω διαγράμματα δίνονται οι πωλήσεις που έκαναν οι εργαζόμενοι στις εταιρείες X και Y .

- (α) Ποια εταιρεία έκανε τον μεγαλύτερο αριθμό πωλήσεων;
- (β) Ποιο μέτρο θέσης θα επιλέγατε, για να βρείτε τον καλύτερο πωλητή σε κάθε εταιρεία;
- (γ) Ποιο μέτρο θέσης θα επιλέγατε για να βρείτε ποια είναι η εταιρεία με την καλύτερη απόδοση;
- (δ) Ποιο μέτρο διασποράς θα επιλέγατε, για να συγκρίνετε τη μεταβλητότητα σε κάθε εταιρεία;



Τα μέτρα θέσης και διασποράς είναι χρήσιμα, όταν να συγκρίνουμε δύο διαφορετικούς πληθυσμούς. Ανάλογα με το ερώτημα που πρέπει να απαντήσουμε, υπολογίζουμε και συγκρίνουμε τα κατάλληλα μέτρα θέσης και διασποράς στους δύο πληθυσμούς.

Παράδειγμα 1

Η εταιρεία λεωφορείων της πόλης μας καταγράφει κάθε μέρα τον αριθμό των καθυστερημένων δρομολογίων. Ο πίνακας παρουσιάζει τα καθυστερημένα δρομολόγια ανά μέρα τους μήνες Φεβρουάριο και Μάιο του ίδιου έτους.

Φεβρουάριος									
6	7	5	4	3	0	0	1	2	5
9	10	5	4	3	6	7	1	0	0
0	0	1	2	1	0	4	1		

Μάιος									
3	0	1	0	3	1	2	3	4	9
2	0	4	1	1	2	3	4	1	5
7	2	1	2	3	0	4	1	0	2
1									

- (α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο, την επικρατούσα τιμή και το εύρος του αριθμού των καθυστερημένων δρομολογίων για κάθε μήνα.
- (β) Πιστεύετε ότι η εταιρεία έχει βελτιώσει το επίπεδο των υπηρεσιών της μεταξύ Φεβρουαρίου – Μαΐου; Να εξηγήσετε γιατί.

Λύση

- (α) Για να υπολογίσουμε τη διάμεσο για το μήνα Φεβρουάριο κατατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

$$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 9$$

Η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Δηλαδή:

$$x_{\delta} = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

Για τον μήνα Φεβρουάριο η επικρατούσα τιμή είναι $x_{\varepsilon} = 0$, γιατί παρουσιάζεται 7 φορές, περισσότερες από κάθε άλλη παρατήρηση.

Το εύρος είναι $R = 9 - 0 = 9$.

Για να υπολογίσουμε τη διάμεσο για το μήνα Μάρτιο κατατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

$$0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 7, 9$$

Η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση. Δηλαδή, $x_{\delta} = 2$.

Για τον μήνα Μάρτιο η επικρατούσα τιμή είναι $x_{\varepsilon} = 1$, γιατί παρουσιάζεται 8 φορές περισσότερες από κάθε άλλη παρατήρηση.

Το εύρος είναι $R = 9 - 0 = 9$.

- (β) Παρατηρούμε ότι έχουμε την ίδια διάμεσο, το ίδιο εύρος και μικρή διαφορά στην επικρατούσα τιμή. Η εταιρεία δεν έχει βελτιώσει σημαντικά το επίπεδο υπηρεσιών.

Παράδειγμα 2

Το δημαρχείο της πόλης μας εξετάζει δυο είδη λαμπτήρων για τη φωταγώγηση της πόλης. Παίρνει τυχαία 9 λαμπτήρες από το κάθε είδος και καταγράφει τις ώρες λειτουργίας τους πριν καταστραφούν. Οι ώρες φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

Είδος A (ώρες)	140	150	160	130	150	170	150	140	160
Είδος B (ώρες)	170	180	190	110	200	100	80	120	200

- (α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των ωρών λειτουργίας του κάθε είδους.
(β) Ποιο είδος θα πρέπει να προτιμήσει το δημαρχείο;

Λύση

- (α) Η μέση τιμή για το είδος A είναι

$$\bar{x}_A = \frac{140 + 150 + 160 + 130 + 150 + 170 + 150 + 140 + 160}{9} = 150$$

και για το είδος B είναι

$$\bar{x}_B = \frac{170 + 180 + 190 + 110 + 200 + 100 + 80 + 120 + 200}{9} = 150$$

Η τυπική απόκλιση για το είδος A είναι

$$s_A = \frac{1}{3} \sqrt{(130 - 150)^2 + 2(140 - 150)^2 + 2(160 - 150)^2 + (170 - 150)^2} = 11,547$$

και για το είδος B είναι

$$s_B = \frac{1}{3} \sqrt{(80 - 150)^2 + (100 - 150)^2 + (110 - 150)^2 + \dots + 2(200 - 150)^2} = 44,472$$

- (β) Η μέση τιμή του χρόνου λειτουργίας των λαμπτήρων και των δύο ειδών είναι 150 ώρες. Το δημαρχείο πρέπει να επιλέξει το είδος A, γιατί ο χρόνος λειτουργίας έχει σημαντικά μικρότερη τυπική απόκλιση από το είδος B. Αυτό σημαίνει ότι οι χρόνοι λειτουργίας των λαμπτήρων A θα είναι πολύ πιο κοντά στη Μέση Τιμή του χρόνου λειτουργίας τους και έτσι θα μπορεί πολύ πιο εύκολα το δημαρχείο να προγραμματίσει την αντικατάστασή τους.

Παράδειγμα 3

Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τους χρόνους που χρειάστηκαν δύο αθλητές, για να τρέξουν στο δρόμο των 100 μέτρων.

Αθλητής A	10,5	10,4	10,5	10,5	10,5	10,6	10,5	10,5	10,4	10,5
Αθλητής B	10,1	10,6	10,3	10,4	9,9	10,3	10,2	10,1	10,1	10

- (α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των χρόνων των δύο αθλητών.
(β) Ποιος είναι ο καλύτερος αθλητής;

Λύση

(α) Η μέση τιμή για το χρόνο του αθλητή A είναι

$$\bar{x}_A = \frac{10,5 + 10,4 + 10,5 + 10,5 + 10,5 + 10,6 + 10,5 + 10,5 + 10,4 + 10,5}{10} = 10,5$$

και η μέση τιμή για το χρόνο του αθλητή B είναι

$$\bar{x}_B = \frac{10,1 + 10,6 + 10,3 + 10,4 + 9,9 + 10,3 + 10,2 + 10,3 + 10,1 + 10,2}{10} = 10,2$$

Η τυπική απόκλιση για το χρόνο του αθλητή A είναι

$$s_A = \sqrt{\frac{1}{10}(3 \cdot 0,1^2)} = 0,055$$

και για το χρόνο του αθλητή B είναι

$$s_B = \sqrt{\frac{1}{10}(5 \cdot 0,1^2 + 2 \cdot 0,2^2 + 0,3 + 0,4)} = 0,083$$

(β) Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή του χρόνου του αθλητή B είναι σημαντικά μικρότερη από τη μέση τιμή του χρόνου του αθλητή A . Συνεπώς, ο καλύτερος αθλητής είναι ο B , παρά το γεγονός ότι η τυπική απόκλιση του χρόνου του είναι μεγαλύτερη από του A .

7.1.2 Σύγκριση δύο πληθυσμών - Συντελεστής Μεταβλητότητας

Το μέτρο διασποράς που μας βοηθάει στη σύγκριση ομάδων παρατηρήσεων (με ίδιες ή διαφορετικές μονάδες μέτρησης) που ενδεχομένως να έχουν σημαντικά διαφορετικές τιμές, λέγεται συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας (CV) και ισχύει ότι:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$$

όπου s η τυπική απόκλιση και \bar{x} η μέση τιμή.

Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των παρατηρήσεων και εκφράζεται συνήθως ως ποσοστό. Δεν ορίζεται ο συντελεστής μεταβλητότητας όταν η μέση τιμή είναι 0 και δεν έχει αξιόπιστα αποτελέσματα όταν η μέση τιμή είναι κοντά στο 0.

Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι μικρότερος από 10% λέγεται ότι τα δεδομένα παρουσιάζουν ομοιογένεια. Ένα δείγμα A έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια από ένα δείγμα B , αν $CV_A < CV_B$.

Παράδειγμα 4

Ένας δειγματοληπτικός έλεγχος στην κεντρική αγορά στις τιμές του κρέατος και των ψαριών είχε τα αποτελέσματα που φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

Ψάρι €/kg	7,3	7,3	7,1	8,3	8,9	7,9	9,2	8,7	7,3	8,7
Κρέας €/kg	4	3,1	4,2	2,4	3,1	5	3,9	3,2	3,4	3,8

Να υπολογίσετε (α) τη μέση τιμή, (β) την τυπική απόκλιση και (γ) τον συντελεστή μεταβολής για το κάθε είδος.

Λύση

(α) Ψάρι:

$$\bar{x} = \frac{7,3 + 7,3 + 7,1 + 8,3 + 8,9 + 7,9 + 9,2 + 8,7 + 7,3 + 8,7}{10} = 8,1$$

Κρέας:

$$\bar{x} = \frac{4 + 3,1 + 4,2 + 2,4 + 3,1 + 5 + 3,9 + 3,2 + 3,4 + 3,8}{10} = 3,6$$

(β) Ψάρι:

$$s = \sqrt{\frac{1}{10}(0,1^2 + 2 \cdot 0,2^2 + 2 \cdot 0,6^2 + 4 \cdot 0,8^2 + 1,1^2)} = 0,677$$

Κρέας:

$$s = \sqrt{\frac{1}{10}(2 \cdot 0,2^2 + 0,3^2 + 2 \cdot 0,4^2 + 2 \cdot 0,5^2 + 0,6^2 + 1,2^2 + 1,4^2)} = 0,689$$

(γ) Ψάρι:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{0,677}{8,1} = 0,0836 = 8,36\%$$

Κρέας:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{0,689}{3,6} = 0,1914 = 19,14\%$$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές των ψαριών παρουσιάζουν ομοιογένεια, γιατί ο συντελεστής μεταβολής είναι μικρότερος από 10%, ενώ οι τιμές του κρέατος δεν παρουσιάζουν ομοιογένεια.

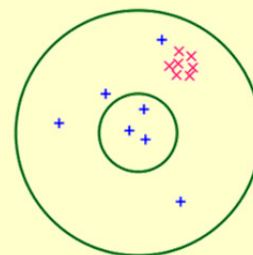
Δραστηριότητες

1. Μια εταιρεία αποτελείται από τέσσερις τομείς. Σε κάθε τομέα ρωτήθηκαν οι υπάλληλοι αν θέλουν να μετακινηθεί το ωράριο εργασίας κατά μισή ώρα. Οι απαντήσεις των υπαλλήλων παρουσιάζονται στον πιο κάτω πίνακα.

Τομέας Α	Ναι	Όχι	Ναι	Ναι	Ναι	Όχι	Ναι	Ναι	Ναι	Όχι	Ναι	Όχι
Τομέας Β	Όχι	Όχι	Ναι	Όχι	Ναι							
Τομέας Γ	Ναι	Ναι	Όχι	Όχι	Όχι	Ναι	Ναι	Όχι				
Τομέας Δ	Όχι	Ναι	Όχι	Ναι	Ναι	Όχι	Όχι	Ναι	Ναι	Όχι	Όχι	

- (α) Να υπολογίσετε την επικρατούσα τιμή των απαντήσεων σε κάθε τομέα.
 (β) Να αναφέρετε κατά πόσο η εταιρεία πρέπει να αλλάξει το ωράριο εργασίας.

2. Δύο τοξότες ρίχνουν βέλη στο διπλανό στόχο. Με κόκκινο σημειώνουμε τις βολές του τοξότη Α και με μπλε σημειώνουμε τις βολές του τοξότη Β.



- (α) Να βρείτε ποιου τοξότη οι βολές έχουν τη μικρότερη διασπορά.
 (β) Ποιος είναι ο καλύτερος τοξότης;

3. Σε δύο δείγματα Α και Β δίνονται $\bar{x}_A = 50$, $s_A = 4$, $\bar{x}_B = 70$, $s_B = 6$.

- (α) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής για το καθένα από τα πιο πάνω δείγματα.
 (β) Να βρείτε ποιο από τα δείγματα Α και Β παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

4. Δίνονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των βαθμολογιών στην τελική εξέταση στο μάθημα των Μαθηματικών 4 τμημάτων της πρώτης λυκείου.

Τμήμα	Μέση Τιμή	Τυπική απόκλιση
B_1	14,1	1,5
B_2	14,2	2,3
B_3	12,9	1,2
B_4	13,7	2,7

- (α) Ποιο τμήμα έχει τη μεγαλύτερη μέση τιμή και ποιο τμήμα έχει τη μικρότερη τυπική απόκλιση;
 (β) Ποιο είναι, κατά τη γνώμη σας, το καλύτερο από τα τέσσερα τμήματα;
 (γ) Ποιο από τα πιο πάνω τμήματα παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια;

7.2 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΥΟ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ - ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

7.2.1 Φυλλογράφημα

Εξερεύνηση

Ο Αντρέας σπουδάζει στην Αγγλία και βρίσκεται σε ένα σταθμό τραμ. Το πρόγραμμα αναχώρησης των τραμ παρουσιάζεται στο πιο κάτω διάγραμμα.

- (α) Αν σήμερα είναι Τρίτη και η ώρα είναι 13:05, σε πόσα λεπτά θα αναχωρήσει το επόμενο τραμ;
- (β) Πότε υπάρχουν οι περισσότερες αναχωρήσεις, το πρωί ή το βράδυ, το Σάββατο ή την Κυριακή;

Monday to Friday	Saturday	Sunday & Bank Holiday
05:	05:	05:
06: 04 24 44	06: 04 24 44	06:
07: 04 17 27 37 47 57	07: 04 24 44	07: 58
08: 07 17 27 37 47 57	08: 00 15 27 39 51	08: 24 54
09: 07 17 27 39 51	09: 03 15 27 39 51	09: 24 44
10: 03 15 27 39 51	10: 03 15 27 39 51	10: 04 24 44
11: 03 15 27 39 51	11: 03 15 27 39 51	11: 04 24 44
12: 03 15 27 39 51	12: 03 15 27 39 51	12: 04 24 44
13: 03 15 27 39 51	13: 03 15 27 39 51	13: 04 24 44
14: 03 15 27 39 51	14: 03 15 27 39 51	14: 04 24 44
15: 03 15 25 37 47 57	15: 03 15 27 39 51	15: 04 24 44
16: 07 17 27 37 47 57	16: 03 15 27 39 51	16: 04 24 55
17: 07 17 27 37 47 57	17: 03 15 27 44	17: 24 54
18: 07 27 47	18: 04 24 44	18: 24 54
19: 07 24 44	19: 04 24 44	19: 24 54
20: 04 24 44	20: 04 24 44	20: 24 54
21: 04 24 44	21: 04 24 44	21: 24 54
22: 04 24 44	22: 04 24 44	22: 24 38
23: 04 24 37	23: 04 24 38	23:
00:	00:	00:
First Tram – 06:04 Last Tram – 23:37	First Tram – 06:04 Last Tram – 23:37	First Tram – 07:58 Last Tram – 22:38

Διερεύνηση

Δίνεται το δείγμα A:

3, 7, 11, 16, 20, 21, 21, 21, 29, 31, 32, 32, 45, 48, 53

Αφού ανακαλύψετε τον τρόπο παρουσίασης του δείγματος A στο πιο κάτω διάγραμμα, να συμπληρώσετε το διάγραμμα με το δείγμα B:

8, 12, 18, 18, 25, 26, 26, 17, 18, 20, 20, 21, 21, 22, 24, 24, 25, 30, 31

A		B
3	5	
85	4	
221	3	
91110	2	
61	1	
73	0	

Τα πιο πάνω διαγράμματα λέγονται **φυλλογραφήματα**. Το φυλλογράφημα χρησιμοποιείται, όταν πρέπει να παρουσιάσουμε πολλές παρατηρήσεις με ένα πιο απλό και σύντομο τρόπο.

Για να κατασκευάσουμε ένα φυλλογράφημα πρέπει να καθορίσουμε ποια ψηφία θα αποτελούν το «**κορμό**» και ποια ψηφία θα αποτελούν τα «**φύλλα**». Στο φυλλογράφημα διπλής όψης, όπως στην πιο πάνω διερεύνηση, ο «κορμός» είναι το ψηφίο των δεκάδων και τα «φύλλα» το ψηφίο των μονάδων. Στο πρόγραμμα των τραμ, στην πιο πάνω εξερεύνηση, ο «κορμός» είναι η ώρα και τα «φύλλα» είναι τα λεπτά. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε τον «κορμό», κατατάσσοντας τους αριθμούς που τον αποτελούν σε αύξουσα σειρά, ξεκινώντας από κάτω προς τα πάνω και βάζουμε τους αριθμούς που αποτελούν τα «φύλλα» σε αύξουσα σειρά με το μικρότερο να είναι πιο κοντά στον κορμό.

Μπορούμε εύκολα, με τη βοήθεια του φυλλογραφήματος, να υπολογίσουμε τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, γιατί οι παρατηρήσεις κατατάσσονται σε αύξουσα σειρά.

Το φυλλογράφημα διπλής όψης είναι ένα χρήσιμο εργαλείο, για να συγκρίνουμε τα χαρακτηριστικά δύο διαφορετικών πληθυσμών.

Παράδειγμα 1

Το επόμενο φυλλογράφημα διπλής όψης δείχνει τα παραπτώματα που χρεώθηκε κάθε ομάδα του Ευρωπαϊκού πρωταθλήματος για τα έτη 2008 και 2009. Ποιες ομοιότητες και ποιες διαφορές εντοπίζετε ανάμεσα στις δυο χρονιές;

2008		2009
11	4	
	3	7
332	3	233
8865	2	889
44331110	2	001112223
987776665	1	56888899
321	1	22444
7	0	69

Λύση

Παρατηρούμε, από το φυλλογράφημα διπλής όψης, ότι το 2009 τα παραπτώματα είχαν μικρή μείωση. Η διάμεσος για το 2008 είναι 21 και για το 2009 είναι 20. Το εύρος των παρατηρήσεων για το 2008 είναι $41 - 7 = 36$ ενώ για το 2009 είναι $37 - 6 = 31$. Οι επικρατούσες τιμές των παραπτωμάτων για το 2008 είναι 16 και 17 ενώ η επικρατούσα τιμή για το 2009 είναι 18.

Παράδειγμα 2

Σε ένα τμήμα Α' λυκείου καταγράφουμε την περίμετρο του καρπού των παιδιών.

Αγόρια	14,6	14,3	18,3	17,3	14,3	17,6	18	15,5	16,2	16,3	16,5	16,9
Κορίτσια	16,2	16,6	13,9	14,1	14,9	17,7	17,3	14,1	15,6			

- (α) Να κατασκευάσετε ένα φυλλογράφημα διπλής όψης.
(β) Υπάρχει διαφορά στην περίμετρο του καρπού των αγοριών από την περίμετρο του καρπού των κοριτσιών;

Λύση

- (α) Για να κατασκευάσουμε το φυλλογράφημα πρέπει να κατατάξουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.

Αγόρια	14,3	14,3	14,6	15,5	16,2	16,3	16,5	16,9	17,3	17,6	18	18,3
Κορίτσια	13,9	14,1	14,1	14,9	15,6	16,2	16,6	17,3	17,7			

Επιλέγουμε τα πρώτα δύο ψηφία στον «κορμό» και το δεκαδικό ψηφίο «στα φύλλα».

Αγόρια		Κορίτσια
30	18	
63	17	37
9532	16	26
5	15	6
633	14	119
	13	9

- (β) Παρατηρούμε την κατανομή των παρατηρήσεων στο φυλλογράφημα και συμπεραίνουμε ότι τα αγόρια έχουν μεγαλύτερη περίμετρο καρπού σε σχέση με τα κορίτσια.

Δραστηριότητες

1. Δίνονται οι ώρες χρήσης του διαδικτύου από μια ομάδα 25 μαθητών:

12, 12, 3, 1, 8, 6, 7, 17, 23, 8, 19, 13, 20, 5, 3, 2, 27, 2, 1, 13, 10, 10, 9, 8, 4

Να κατασκευάσετε το φυλλογράφημα.

2. Δίνεται το φυλλογράφημα για τις πωλήσεις ηλεκτρονικών παιχνιδιών σε ένα κατάστημα για το μήνα Μάρτιο.

2	5
2	12
1	668
1	01112233334
0	55577889
0	011122

(α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο, το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.

(β) Να υπολογίσετε πόσα ηλεκτρονικά παιχνίδια πωλήθηκαν το Μάρτιο.

3. Δίνεται ο χρόνος που χρειάζονται μαθητές από δύο διαφορετικά λύκεια της Κύπρου, για να πάνε στο σχολείο το πρωί.

Λύκειο A	15	10	12	16	17	20	8	5	6	10	12	5	8	11	9	9
Λύκειο B	23	23	17	5	31	31	31	17	17	17	31	31	23	23	23	7

(α) Να κατασκευάσετε ένα φυλλογράφημα διπλής όψης.

(β) Τι παρατηρείτε;

4. Δίνεται το φυλλογράφημα διπλής όψης για τις δέκα καλύτερες επιδόσεις όλων των εποχών στο άλμα εις μήκος. Τη δέκατη καλύτερη επίδοση όλων των εποχών έχει ο Λούης Τσάτουμας με 8,66 m.

Ανοικτός Στίβος	Κλειστός στίβος
50	89
76	88
44431	87
6	86
	85
	8
	84
	245
	83
	001148

(α) Να υπολογίσετε την καλύτερη επίδοση όλων των εποχών στον κλειστό στίβο.

(β) Να υπολογίσετε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των επιδόσεων στον ανοικτό και στον κλειστό στίβο.

(γ) Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα στα ερωτήματα (α) και (β).

7.2.3 Θηκόγραμμα

- Τεταρτημόρια

Διερεύνηση

Οι βαθμοί των μαθητών σε μια εξέταση είναι:

8, 9, 12, 15, 11, 13, 13, 17, 19, 14, 15, 17, 18, 15, 17, 8, 16, 9

Ο καθηγητής θέλει να δώσει βραβείο στους μαθητές που πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο από το 75% των μαθητών της τάξης και να δώσει επιπλέον εργασία για το σπίτι στους μαθητές που πήραν βαθμό μικρότερο ή ίσο από το 25%. Να βρείτε τους βαθμούς των μαθητών που θα βραβευτούν και τους βαθμούς των μαθητών που θα πάρουν επιπλέον εργασία.

Η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα δείγμα έτσι ώστε το πολύ το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες από αυτή και το πολύ το 50% να είναι μεγαλύτερες από αυτή. Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο ως την τιμή που χωρίζει το δείγμα έτσι ώστε το πολύ το 25% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες από αυτή και το πολύ το 75% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες από αυτό και το πολύ το 25% μεγαλύτερες από αυτό. Το πρώτο τεταρτημόριο συμβολίζεται με Q_1 και το τρίτο τεταρτημόριο με Q_3 . Η διάμεσος είναι το δεύτερο τεταρτημόριο και συμβολίζεται με Q_2 .

Για να υπολογίσουμε το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο βρίσκουμε τη διάμεσο του πρώτου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων και τη διάμεσο του δεύτερου μισού των παρατηρήσεων, αντίστοιχα. Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός, είναι εύκολο να διακρίνουμε το πρώτο και δεύτερο μισό των διατεταγμένων παρατηρήσεων, για να υπολογίσουμε το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο. Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, αφαιρούμε, τη διάμεσο από το δείγμα και διακρίνουμε το πρώτο και το δεύτερο μισό των υπολοίπων διατεταγμένων παρατηρήσεων.

Παράδειγμα 1

Το ύψος των παικτών μιας ομάδας καλαθόσφαιρας σε cm είναι:

181, 210, 193, 197, 196, 205, 189, 204, 193, 199, 205, 187

- (α) Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1 , Q_2 και Q_3 .
- (β) Αν στην ομάδα ενταχθούν ακόμα 3 παίκτες με ύψη 182, 195 και 209, να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1 , Q_2 και Q_3 της νέας σύνθεσης της ομάδας.

Λύση

- (α) Για να υπολογίσουμε τα τεταρτημόρια πρέπει πρώτα να κατατάξουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.

181, 187, 189, 193, 193, 196, 197, 199, 204, 205, 205, 210

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός. Επομένως, η διάμεσος είναι:

$$Q_2 = \frac{196 + 197}{2} = 196,5$$

Για να υπολογίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο, βρίσκουμε τη διάμεσο του πρώτου μισού των παρατηρήσεων:

181, 187, 189, 193, 193, 196

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός. Επομένως, το πρώτο τεταρτημόριο είναι:

$$Q_1 = \frac{189 + 193}{2} = 191$$

Για να υπολογίσουμε το τρίτο τεταρτημόριο βρίσκουμε την διάμεσο του δεύτερου μισού των παρατηρήσεων:

197, 199, 204, 205, 205, 210

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός. Επομένως, το τρίτο τεταρτημόριο είναι:

$$Q_3 = \frac{204 + 205}{2} = 204,5$$

- (β) Οι παρατηρήσεις της νέας σύνθεσης της ομάδας σε αύξουσα σειρά είναι:

181, 182, 187, 189, 193, 193, 195, 196, 197, 199, 204, 205, 205, 209, 210

Η διάμεσος είναι μεσαία παρατήρηση των διατεταγμένων παρατηρήσεων:

$$Q_2 = 196$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός. Επομένως, αφαιρούμε την διάμεσο Q_2 από τις διατεταγμένες παρατηρήσεις, για να διακρίνουμε το πρώτο και το δεύτερο μισό των υπολοίπων διατεταγμένων παρατηρήσεων:

181, 182, 187, 189, 193, 193, 195, 197, 199, 204, 205, 205, 209, 210

Για να υπολογίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο, βρίσκουμε τη διάμεσο των παρατηρήσεων:

181, 182, 187, 189, 193, 193, 195

Άρα, $Q_1 = 189$.

Για να υπολογίσουμε το τρίτο τεταρτημόριο, βρίσκουμε τη διάμεσο των παρατηρήσεων:

197, 199, 204, 205, 205, 209, 210

Άρα, $Q_3 = 205$.

- **Ενδοτεταρτημοριακό εύρος**

Το εύρος, η διασπορά και η τυπική απόκλιση επηρεάζονται από ακραίες παρατηρήσεις. Ένα μέτρο διασποράς το οποίο δεν επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις είναι το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου από το τρίτο τεταρτημόριο και συμβολίζεται με IQR . Δηλαδή:

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος περιλαμβάνει το «ενδιάμεσο» 50% των παρατηρήσεων.

Παράδειγμα 2

Το ύψος των παικτών μιας ομάδας καλαθόσφαιρας σε cm είναι:

181, 210, 193, 197, 196, 205, 189, 204, 193, 199, 205, 187

Να υπολογίσετε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων.

Λύση

Έχουμε υπολογίσει το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο, $Q_1 = 191$ και $Q_3 = 204,5$.

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι:

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 204,5 - 191 = 13,5$$

- **Θηκόγραμμα**

Διερεύνηση

Δίνονται ο αριθμός των τροχαίων παραβάσεων σε μια βδομάδα.

Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο	Κυριακή
30	16	18	17	16	19	13

(α) Ποιες παρατηρήσεις στο πιο πάνω δείγμα είναι ακραίες παρατηρήσεις;

(β) Ποιο είναι το κριτήριο ώστε να χαρακτηρίσουμε μια παρατήρηση ακραία;

Οι ακραίες παρατηρήσεις είναι οι παρατηρήσεις που είναι απομακρυσμένες από τις υπόλοιπες παρατηρήσεις. Συγκεκριμένα, ακραίες παρατηρήσεις θα θεωρούμε τις παρατηρήσεις που δεν ανήκουν στο διάστημα $[Q_1 - 1,5 (IQR), Q_3 + 1,5 (IQR)]$, όπου Q_1 το πρώτο τεταρτημόριο, Q_3 το τρίτο τεταρτημόριο και IQR το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

Αν υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις σε ένα δείγμα, ελέγχουμε κατά πόσο προέκυψαν από κάποιο λάθος στη συλλογή και καταγραφή των παρατηρήσεων. Στην περίπτωση που δεν προέκυψαν από κάποιο λάθος, τις μελετούμε, γιατί μπορεί να κρύβουν χρήσιμες πληροφορίες.

Παράδειγμα 3

Δίνεται ο αριθμός των πωλήσεων που έκαναν 7 πωλητές μιας εταιρείας σε μια βδομάδα:

30, 16, 18, 17, 16, 19, 2

- (α) Να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις.
(β) Να εξετάσετε κατά πόσο είναι χρήσιμες οι ακραίες παρατηρήσεις για την εταιρεία.

Λύση

- (α) Για να βρούμε τα τεταρτημόρια κατατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά: 2, 16, 16, 17, 18, 19, 30

Το πρώτο τεταρτημόριο είναι η διάμεσος των παρατηρήσεων 2, 16, 16. Συνεπώς, $Q_1 = 16$.

Το τρίτο τεταρτημόριο είναι η διάμεσος των παρατηρήσεων 18, 19, 30. Επομένως, $Q_3 = 19$. Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $IQR = 19 - 16 = 3$.

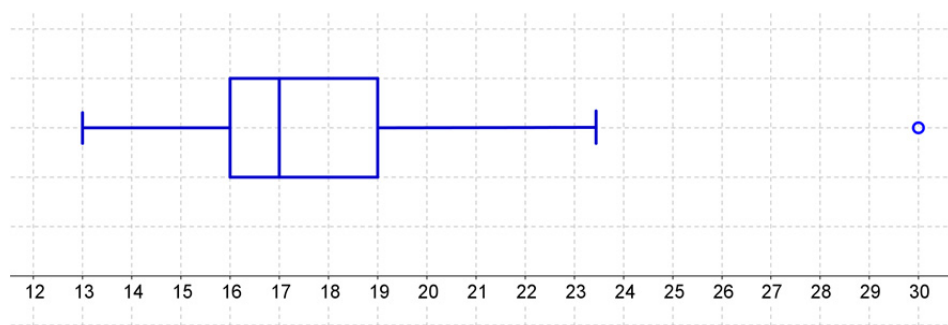
Ακραίες είναι οι παρατηρήσεις που είναι είτε μικρότερες από $16 - 1,5 \cdot 3 = 11,5$, είτε μεγαλύτερες από $19 + 1,5 \cdot 3 = 23,5$.

Συνεπώς, ακραίες παρατηρήσεις είναι το 2 και το 30.

- (β) Παρατηρούμε ότι οι ακραίες παρατηρήσεις είναι χρήσιμες, γιατί ο πωλητής με τις 30 πωλήσεις μπορεί να πάρει έπαινο ή αύξηση ενώ για τον πωλητή με τις 2 πωλήσεις μπορούν να εξεταστούν οι λόγοι της μικρής απόδοσης.

Διερεύνηση 1

Τα τεταρτημόρια και η ακραία παρατήρηση στο δείγμα του τελευταίου παραδείγματος παρουσιάζονται στο πιο κάτω διάγραμμα.



Να κατασκευάσετε ένα αντίστοιχο διάγραμμα για το δείγμα:

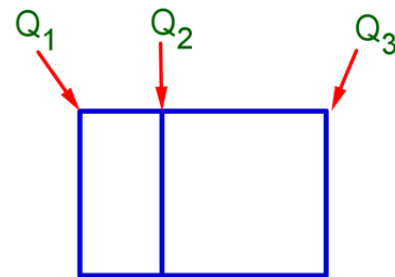
12, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 17, 8, 9, 10

Διερεύνηση 2

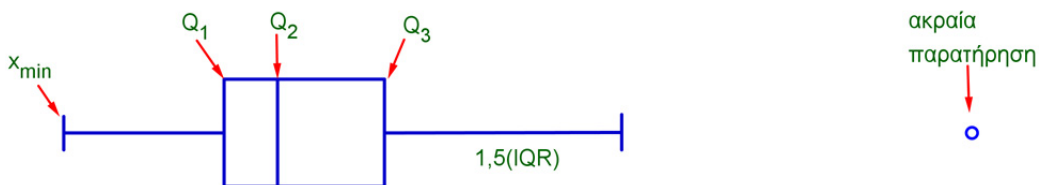
- (α) Να ανοίξετε το αρχείο «[κατανόηση στατιστικών παραμέτρων.html](#)» και να επιλέξετε το σύνδεσμο «[εξερευνώντας το θηκόγραμμα](#)».
- (β) Να μετακινήσετε ένα πράσινο σημείο, ώστε να αλλάξει η διάμεσος στο δείγμα.
- (γ) Να μετακινήσετε ένα πράσινο σημείο, ώστε να μην αλλάξει η διάμεσος στο δείγμα.
- (δ) Να επαναλάβετε τα ερωτήματα (β) και (γ) για την ελάχιστη παρατήρηση, τη μέγιστη παρατήρηση, το πρώτο τεταρτημόριο και το τρίτο τεταρτημόριο.
- (ε) Μπορείτε να μετακινήσετε ένα πράσινο σημείο χωρίς να αλλάξει η μέση τιμή;
- (στ) Να επαναλάβετε τα παραπάνω ερωτήματα για διάφορα μεγέθη δείγματος.

Ένας άλλος τρόπος παρουσίασης δεδομένων, που παρουσιάζει και τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν, είναι το **θηκόγραμμα**. Για να σχεδιάσουμε το θηκόγραμμα πρέπει να υπολογίσουμε όλα τα τεταρτημόρια, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, τη μέγιστη και την ελάχιστη παρατήρηση.

Αρχικά κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τη μια του πλευρά στο πρώτο τεταρτημόριο και την απέναντι σε αυτή πλευρά στο τρίτο τεταρτημόριο. Το μήκος των πλευρών είναι αυθαίρετο και η απόσταση μεταξύ τους είναι ίση με το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. Η διάμεσος παριστάνεται με ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο με τις πιο πάνω πλευρές μέσα στο ορθογώνιο.



Στη συνέχεια, από τα μέσα των πλευρών που παριστάνουν το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα με μήκος το πολύ 1,5 (IQR). Αν η ελάχιστη τιμή είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος που φέρουμε από το Q_1 , τότε το άκρο του τμήματος είναι η ελάχιστη τιμή. Παρομοίως, αν η μέγιστη τιμή είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος που φέρουμε από το Q_3 , τότε το άκρο του τμήματος είναι η μέγιστη τιμή. Στο τέλος σημειώνουμε τις ακραίες παρατηρήσεις.



Παράδειγμα 4

Δίνεται ο αριθμός των εργαζομένων σε 20 βιοτεχνίες.

10	25	31	12	10	9	5	24	26	68
14	7	8	19	24	13	28	19	51	14

Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα.

Λύση

Κατατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

5, 7, 8, 9, 10, 10, 12, 13, 14, 14, 19, 19, 24, 24, 25, 26, 28, 31, 51, 68

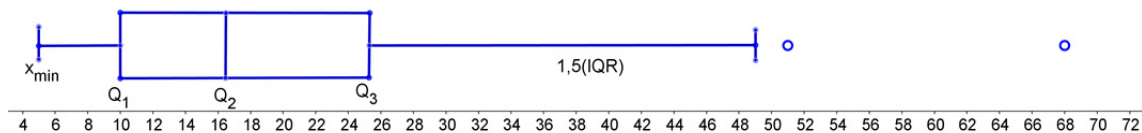
Υπολογίζουμε τα τεταρτημόρια:

$$Q_2 = \frac{14 + 19}{2} = 16,5 \quad Q_1 = \frac{10 + 10}{2} = 10 \quad Q_3 = \frac{25 + 26}{2} = 25,5$$

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $IQR = 25,5 - 10 = 15,5$ και $1,5(IQR) = 23,25$

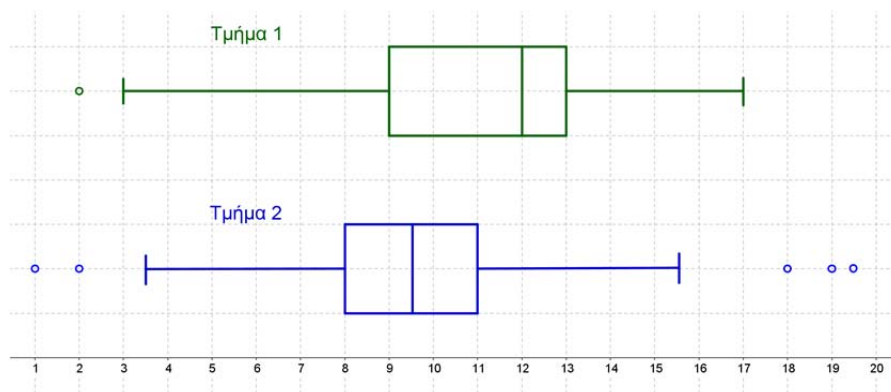
Παρατηρούμε ότι οι ακραίες παρατηρήσεις είναι το 51 και το 68.

Κατασκευάζουμε το θηκόγραμμα:



Παράδειγμα 5

Τα πιο κάτω θηκογράμματα παρουσιάζουν τους βαθμούς των μαθητών των τμημάτων σε μαθηματικό διαγωνισμό.



- Να βρείτε ποιο τμήμα έχει το μεγαλύτερο εύρος βαθμών.
- Να βρείτε ποιο τμήμα έχει το μεγαλύτερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος βαθμών.
- Σε ποιο τμήμα παρουσιάζουν συμμετρία οι βαθμοί;
- Να βρείτε ποιο είναι το καλύτερο τμήμα.
- Να βρείτε το τμήμα και τη βαθμολογία των δύο μαθητών με το καλύτερο βαθμό.

Λύση

- (α) Στο τμήμα 1 το εύρος είναι $17 - 2 = 15$ ενώ στο τμήμα 2 είναι $19,5 - 1 = 18,5$. Συνεπώς, το τμήμα 2 έχει μεγαλύτερο εύρος.
- (β) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι το μήκος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε ένα θηκόγραμμα. Συνεπώς, το τμήμα 1 έχει μεγαλύτερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος.
- (γ) Το θηκόγραμμα στο τμήμα 2 είναι συμμετρικό ενώ στο τμήμα 1 δεν είναι. Άρα, στο τμήμα 2 παρουσιάζουν συμμετρία οι βαθμοί.
- (δ) Στο τμήμα 1 η διάμεσος των βαθμών είναι 12, ενώ στο τμήμα 2 είναι 9,5. Επομένως, γενικά το τμήμα 1 είναι καλύτερο από το τμήμα 2, παρά το γεγονός ότι οι τρεις καλύτεροι βαθμοί είναι στο τμήμα 2.
- (ε) Παρατηρούμε ότι οι δύο καλύτεροι βαθμοί, 19 και 19,5, είναι δυο ακραίες παρατηρήσεις στο τμήμα 2.
-

Διερεύνηση

- (α) Να ανοίξετε το αρχείο *«κατανόηση στατιστικών παραμέτρων.html»* και να επιλέξετε το σύνδεσμο *«που είναι η μέση τιμή;»*.
- (β) Να προβλέψετε τη θέση της μέσης τιμής στο θηκόγραμμα.
- (γ) Να επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για άλλο δείγμα.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α) Ένα δείγμα έχει πάντα ακραίες παρατηρήσεις. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(β) Οι ακραίες παρατηρήσεις είναι ασήμαντες και δεν πρέπει να τις χρησιμοποιούμε, όταν κάνουμε στατιστική ανάλυση. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(γ) Από ένα θηκόγραμμα μπορούμε να βρούμε τη μέγιστη και την ελάχιστη παρατήρηση στο δείγμα. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(δ) Το μήκος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε ένα θηκόγραμμα είναι ίσο με το ενδοτεταρτημοριακό εύρος. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(ε) Σε ένα θηκόγραμμα, όταν το μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων που είναι έξω από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι $1,5(IQR)$, τότε υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις στο δείγμα. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

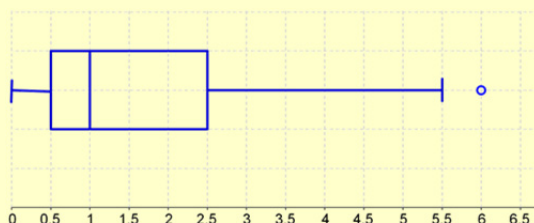
2. Δίνονται οι μηνιαίες πωλήσεις αυτοκινήτων μιας εταιρείας:

Γεν	Φεβ	Μαρ	Απρ	Μάης	Ιουν	Ιουλ	Αυγ	Σεπ	Οκτ	Νοε	Δεκ
15	13	12	3	19	29	30	12	13	17	19	12

(α) Να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν.

(β) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα.

3. Στο πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζεται ο αριθμός των παιδιών που έχουν οι οικογένειες που ζουν σε μια πολυκατοικία:



(α) Να βρείτε, αν υπάρχουν, ακραίες παρατηρήσεις.

(β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη παρατήρηση και το εύρος των παρατηρήσεων

(γ) Να βρείτε τη διάμεσο, το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος

(δ) Να εξετάσετε κατά πόσο η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερη από τη διάμεσο και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(ε) Να εξετάσετε κατά πόσο είναι συμμετρικό το δείγμα.

4. Τα τέρματα που έχει πετύχει ο κάθε παίκτης των ομάδων Ρεάλ και Μπαρτσελόνα στο ισπανικό πρωτάθλημα δίνονται στο πιο κάτω φυλλογράφημα διπλής όψεως.

Ρεάλ		Μπαρτσελόνα
	4	0
5	3	
4	2	46
9	1	
75433222110000	0	000000011122237

Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα για την καθεμιά από τις δύο ομάδες και να τις συγκρίνετε.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
 - (α) Ο συντελεστής μεταβλητότητας εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης που εκφράζονται οι παρατηρήσεις. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - (β) Η διάμεσος είναι ίση με το δεύτερο τεταρτημόριο. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - (γ) Ένα δείγμα έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια από ένα άλλο, αν έχει μεγαλύτερο συντελεστή μεταβλητότητας. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - (δ) Αν σε ένα δείγμα όλες οι παρατηρήσεις είναι ίσες μεταξύ τους, τότε η διάμεσος είναι ίση με το πρώτο τεταρτημόριο. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - (ε) Η διάμεσος είναι μέτρο διασποράς. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Ο χρόνος αναμονής 20 πελατών μιας τράπεζας μέχρι να εξυπηρετηθούν είναι:
3, 2, 12, 2, 3, 6, 14, 15, 16, 5, 7, 12, 11, 10, 25, 3, 27, 5, 7, 13
Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα και να ελέγξετε κατά πόσο υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις.

3. Μια εταιρεία εξετάζει τη διάρκεια ζωής δύο ειδών μπαταριών A και B . Παίρνει τυχαία 7 μπαταρίες από το κάθε είδος και καταγράφει τις ώρες λειτουργίας τους. Οι ώρες (σε χιλιάδες) φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

Είδος A	22	20	22	26	24	22	18
Είδος B	24	26	32	24	19	23	20

- (α) Να κατασκευάσετε ένα φυλλογράφημα διπλής όψης για τα δύο είδη μπαταριών
 - (β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο, τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση για τη διάρκεια ζωής των μπαταριών.
 - (γ) Να βρείτε ποιο από τα δύο είδη παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του
4. Σε ένα τμήμα A Λυκείου στο μάθημα των Μαθηματικών έγιναν πέντε διαγωνίσματα. Ο καθηγητής αποφάσισε να αφήσει τους μαθητές να επιλέξουν τον τρόπο υπολογισμού της συνολικής γραπτής βαθμολογίας τους. Ο πρώτος τρόπος είναι να μην ληφθεί υπόψη ο μικρότερος από τους βαθμούς στα πέντε διαγωνίσματα και να υπολογιστεί ο μέσος όρος των υπολοίπων τεσσάρων βαθμών. Ο δεύτερος τρόπος είναι να ληφθούν όλα τα διαγωνίσματα υπόψη και να υπολογιστεί η διάμεσος των βαθμών και των πέντε διαγωνισμάτων. Οι βαθμοί του Σόλωνα στα διαγωνίσματα είναι 8, 15, 18, 18, 19. Να βρείτε ποιο από τους δύο τρόπους θα επιλέξει, ο Σόλωνας για να υπολογιστεί η συνολική γραπτή βαθμολογία του.

5. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των απουσιών που έκαναν οι μαθητές σε ένα τμήμα τους μήνες Οκτώβριο και Νοέμβριο:

Οκτώβριος	14	7	0	9	21	7	3	0	0	25	2	3	8	7	14	25	0
Νοέμβριος	7	8	2	0	0	5	14	7	0	14	4	7	2	0	0	3	0

Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα για κάθε μήνα και να συγκρίνετε τις απουσίες των μαθητών.

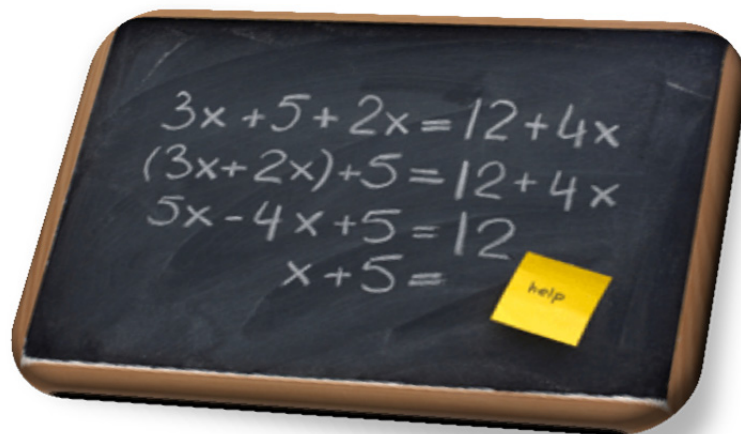
Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Στον διπλανό πίνακα παρουσιάζονται οι βαθμολογίες των Παγκυπρίων Εξετάσεων στα Νέα Ελληνικά των μαθητών των τμημάτων $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.
- (α) Ποιο τμήμα έχει τον πιο ψηλό μέσο όρο;
- (β) Ποιες οι διαφορές των μέσων όρων και ποιες των διαμέσων των βαθμών;
- (γ) Υπάρχουν διαφορές ως προς τα μέτρα διασποράς των βαθμών των τριών τμημάτων;
- (δ) Να επιλέξετε άλλες κατάλληλες στατιστικές μεθόδους για να συγκρίνετε τους βαθμούς των τριών τμημάτων. Να διατυπώσετε τα συμπεράσματά σας.



Γ_1	Γ_2	Γ_3
13	10	16
18	12	4
12	15	11
15	12	6
11	14	7
13	14	16
17	13	12
16	12	13
17	7	12
16	14	8
12	14	12
9	14	8
8	11	11
18	13	8
16	11	12
14	10	12
17	18	8
17	15	7
11	11	12
12	11	9
16	14	10
13	16	10
15	14	10

Απαντήσεις Δραστηριοτήτων



Τριγωνομετρία

Σελίδα 12 Νόμος Ημιτόνων

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$\beta = 2 \text{ cm}$
2.	$\eta\mu\Gamma = \frac{1}{3}$
3.	$a = 3 \text{ cm}, \beta = 3\sqrt{2} \text{ cm}, \gamma = 5,8 \text{ cm}$
4.	(α) $a = 7 \text{ cm}, \gamma = 5 \text{ cm}, \beta = 5,65 \text{ cm}, \hat{A} = 81,9^\circ, \hat{B} = 53,1^\circ, \hat{\Gamma} = 45^\circ$, ή $a = 7 \text{ cm}, \gamma = 5 \text{ cm}, \beta = 4,24 \text{ cm}, \hat{A} = 98,1^\circ, \hat{B} = 36,9^\circ, \hat{\Gamma} = 45^\circ$ (β) $\hat{Z} = 43^\circ, Z\Delta = 3,53 \text{ cm}, ZE = 5,78 \text{ cm}$ (γ) $\hat{A} = 30^\circ, \hat{K} = 90^\circ, \Lambda M = 16 \text{ m}$ (δ) $\hat{A} = \hat{B} = 30^\circ, a = \beta = 6 \text{ cm}$
7.	$a = 4 \text{ cm}, \beta = 2\sqrt{2} \text{ cm}, \gamma = 5,46 \text{ cm}, \hat{A} = 45^\circ, \hat{B} = 30^\circ, \hat{\Gamma} = 105^\circ$ ή $a = 4 \text{ cm}, \beta = 2\sqrt{2} \text{ cm}, \gamma = 1,46 \text{ cm}, \hat{A} = 135^\circ, \hat{B} = 30^\circ, \hat{\Gamma} = 15^\circ$
9.	685 m

Σελίδα 17 Νόμος Συνημιτόνων

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$a = 3\sqrt{7} \text{ cm}$
2.	$\sigma\upsilon\nu\Gamma = -\frac{5}{16}$
4.	(α) $a = 6 \text{ cm}, \gamma = 10 \text{ cm}, \beta = 5,14 \text{ cm}, \hat{A} = 28,4^\circ, \hat{B} = 127,6^\circ, \hat{\Gamma} = 24^\circ$ (β) $\hat{A} = 96,4^\circ, \hat{Z} = 58,4^\circ, \hat{Z} = 25,2^\circ$ (γ) $\hat{A} = \hat{B} = 30^\circ, \hat{\Gamma} = 120^\circ, a = \beta = 4 \text{ cm}, \gamma = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ (δ) $\hat{K} = 90^\circ, \hat{M} = 53,1^\circ, \hat{\lambda} = 36,9^\circ, g = 2,57 \text{ cm}$

Σελίδα 20 Εμβαδόν Τριγώνου

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$E = 3 \text{ cm}^2$
2.	$\beta = 4 \text{ cm}$
3.	$\eta\mu\Gamma = \frac{1}{4}$
4.	(α) $9,71 \text{ cm}^2$ (β) 84 m^2
5.	$E = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$
7.	$a = 2 \text{ cm}, \beta = 4 \text{ cm}, \gamma = 2\sqrt{3} \text{ cm}, \hat{A} = 30^\circ, \hat{B} = 90^\circ, \hat{\Gamma} = 60^\circ$

Σελίδα 21 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) $\hat{A} = 30^\circ, \beta = 3\sqrt{3} \text{ m}, \gamma = 3 \text{ m}$
(β) $\hat{B} = 30^\circ, \hat{\Gamma} = 120^\circ, a = 5 \text{ cm}$
(γ) $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 30^\circ, \hat{B} = 120^\circ$
(δ) $\hat{A} = 90^\circ, a = 3\sqrt{7} \text{ cm}, \hat{B} = 40,9^\circ, \hat{\Gamma} = 49,1^\circ$
(ε) $\beta = 2\sqrt{3}, \hat{A} = 80^\circ, a = 3,94 \text{ cm}, \gamma = 2,57 \text{ cm}$
7. Η Άρτεμις ($E_{AB\Gamma\Delta} = 8590 \text{ m}^2$)
8. 2,82 m

Συναρτήσεις

Σελίδα 34 Η έννοια της συνάρτησης

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $A = \left\{\frac{1}{2}, 1, \sqrt{3}, 2\right\}, f(A) = \left\{\frac{1}{4}, 1, 3, 4\right\}$ (β) $A = \{1, 2, 4, 5\}, f(A) = \left\{\frac{1}{4}, 1, 3\right\}$ (γ) $A = \left\{\frac{1}{4}, 1, 2, 4, 5\right\}, f(A) = \{1\}$
2.	(α) $f(0) = -4$ (β) $f(2) = -7$ (γ) $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$ (δ) $f(-t) = \frac{t^2-1}{t^2+4}$ (ε) $f(1) + f(-1) = 10$ (στ) $f(2x) = \sqrt{4x^2 + 2x}$
3.	$x + a$
4.	$A = -\frac{7}{2}$
5.	(α) (i) 15,1 m (ii) 14,071 m (β) (i) 1,01 sec (ii) 1,43 sec (iii) 1,75 sec (γ) 2,02 sec

Σελίδα 42 Γράφημα – Γραφική παράσταση συνάρτησης

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $G = \{(1,5), (2,1), (3,5)\}$ (β) $G = \{(1,12), (2,14), (3,16), (4,16)\}$ (γ) $G = \{(1,16), (2,12), (3,10), (4,14)\}$ (δ) $G = \{(1,10), (2,16), (3,12), (4,18)\}$
2.	(α) Ορίζει, Π.Ο: $\{-2, 0, 1, 2\}$, Σ.Τ: $\{-7, 1, 4, 5\}$ (β) Δεν ορίζει (γ) Ορίζει: Π.Ο: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, Σ.Τ: $\{1\}$ (δ) Δεν ορίζει
3.	(α) Ορίζει συνάρτηση (β) Δεν ορίζει συνάρτηση (γ) Δεν ορίζει συνάρτηση (δ) Ορίζει συνάρτηση
4.	(α) $a = -1$ (β) $a = 2$
5.	(α) Π.Ο: \mathbb{R} , Σ.Τ: $(-\infty, 1]$ (β) Π.Ο: \mathbb{R} , Σ.Τ: $\{-3\}$ (γ) Π.Ο: \mathbb{R} , Σ.Τ: $[-1, 2]$ (δ) Π.Ο: \mathbb{R} , Σ.Τ: $[1, +\infty)$ (ε) Π.Ο: \mathbb{R} , Σ.Τ: $(2, +\infty)$ (στ) Π.Ο: $[-4, +\infty)$, Σ.Τ: $(-\infty, 0]$

6. (α) Ορίζει συνάρτηση
 (β) Ορίζει συνάρτηση
 (γ) Ορίζει συνάρτηση
 (δ) Δεν ορίζει συνάρτηση
 (ε) Δεν ορίζει συνάρτηση
 (στ) Ορίζει συνάρτηση
 (ζ) Ορίζει συνάρτηση
 (η) Ορίζει συνάρτηση
 (θ) Ορίζει συνάρτηση

Σελίδα 48 Πεδίο ορισμού – Σύνολο τιμών πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής που ορίζεται με τύπο

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) \mathbb{R}
 (β) \mathbb{R}
 (γ) \mathbb{R}

2. (α) $\mathbb{R} - \{4\}$
 (β) $\mathbb{R} - \{\pm 4\}$
 (γ) $\mathbb{R} - \{0, \pm 2\}$
 (δ) $\mathbb{R} - \{-2\}$

3. (α) $[-2, +\infty)$
 (β) $(-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$
 (γ) $(-\infty, \frac{1}{2}]$
 (δ) $[-3, 1) \cup (1, +\infty)$

4. (α) \mathbb{R}
 (β) $[17, 213]$
 (γ) $\mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$
 (δ) $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

Σελίδα 52 Ισότητα συναρτήσεων

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) ΣΩΣΤΟ
 (β) ΣΩΣΤΟ
 (γ) ΣΩΣΤΟ

2. (α) $f = g$
 (β) $f \neq g$ ($f = g, \forall x \in \mathbb{R} - \{-3, 1\}$)

3. $f = g$

4. Δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού

Σελίδα 56 Πράξεις συναρτήσεων

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. (α) ΛΑΘΟΣ
(β) ΣΩΣΤΟ
(γ) ΛΑΘΟΣ
(δ) ΣΩΣΤΟ
(ε) ΣΩΣΤΟ

2. $(f + g)(x) = 3x - 2, x \in \mathbb{R}$
 $(f - g)(x) = x - 8, x \in \mathbb{R}$

3. Δεν ορίζεται

4. $(f \cdot g)(x) = \frac{4x}{(x+5)(x+2)}, x \in \mathbb{R} - \{-2, -5, +5\}$
 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{4x(x+2)}{(x+5)(x-5)^2}, x \in \mathbb{R} - \{-2, -5, +5\}$

5. $(f + g)(x) = 2, x > 1$
 $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}-1}, x \in \left(1, \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$

6. Δεν υπάρχουν κοινά στοιχεία στα πεδία ορισμού τους

Σελίδα 60 Συναρτήσεις 1 – 1

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. (α) ΛΑΘΟΣ
(β) ΣΩΣΤΟ
(γ) ΛΑΘΟΣ
(δ) ΛΑΘΟΣ
(ε) ΛΑΘΟΣ

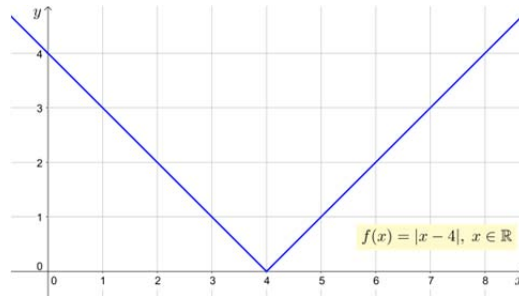
3. (α) Η f είναι 1 – 1
(β) Η g δεν είναι 1 – 1
(γ) Η h είναι 1 – 1
(δ) Η k είναι 1 – 1

4. (α) Η f είναι 1 – 1
(β) Η f είναι 1 – 1
(γ) Η f δεν είναι 1 – 1
(δ) Η f είναι 1 – 1
(ε) Η f δεν είναι 1 – 1

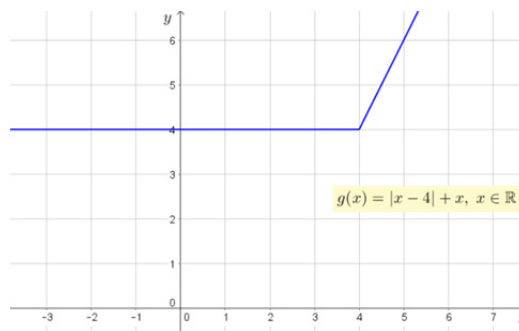
Σελίδα 66 Συναρτήσεις με απόλυτες τιμές – Συναρτήσεις πολλαπλού τύπου

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΣΩΣΤΟ
	(β) ΛΑΘΟΣ
	(γ) ΣΩΣΤΟ
	(δ) ΣΩΣΤΟ
	(ε) ΣΩΣΤΟ

(α) ΝΑΙ

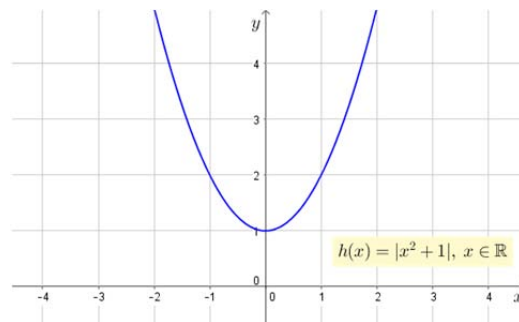


(β) ΝΑΙ

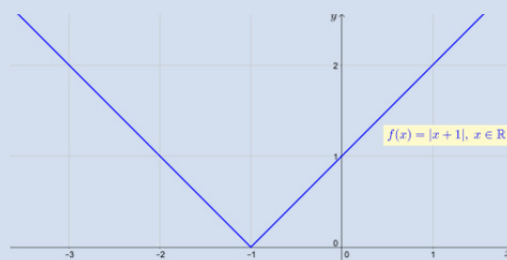


2.

(γ) ΟΧΙ



4.



Συμμετρική ως προς την ευθεία $x = -1$, Σ.Τ: $[0, +\infty)$

Σελίδα 67 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΣΩΣΤΟ (ε) ΛΑΘΟΣ
2.	(β) Ορίζει συνάρτηση (γ) Π.Ο: {2004, 2005, 2006, 2007} (δ) $G_f =$ $\{(2004, 58140), (2005, 64000), (2006, 71690), (2007, 74560)\}$ (ε) $f(2004) = 58140$, $f(2006) = 71690$
3.	(α) 6, 12 (β) $[3, +\infty)$
4.	(α) \mathbb{R} (β) $[-4, +\infty)$ (γ) \mathbb{R} (δ) $\mathbb{R} - \{4\}$ (ε) $\left(-\infty, \frac{9}{2}\right]$
5.	$f(A) = \{-8, 1, 4, 13\}$
6.	(α) \mathbb{R} (β) $[7, 15]$
7.	(α) Π.Ο: \mathbb{R} , Σ.Τ: $[1, +\infty)$ (β) Π.Ο: \mathbb{R} , Σ.Τ: $[-3, +\infty)$ (γ) Π.Ο: \mathbb{R} , Σ.Τ: \mathbb{R}
8.	(α) Π.Ο: $(0, 50]$, Σ.Τ: $[7, 5, 82, 5]$ (β) Π.Ο: $[0, +\infty)$, Σ.Τ: $[0, +\infty)$ (γ) Π.Ο: $[0, 3]$, Σ.Τ: $[0, 240]$
9.	$(f \cdot g)(x) = \frac{2x^2 - x}{x + 3}$, $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x}{(x + 3)(2x - 1)}$, $x \in \mathbb{R} - \left\{-3, -\frac{1}{2}\right\}$
10.	(α) Ορίζει συνάρτηση (β) Ορίζει συνάρτηση (γ) Ορίζει συνάρτηση (δ) Δεν ορίζει συνάρτηση (ε) Δεν ορίζει συνάρτηση (στ) Ορίζει συνάρτηση
11.	(α) $f = g$, $\forall x \geq 2$ (β) $f = g$, $\forall x \in \{-2, 3\}$ (γ) $f = g$, για $x = 3$ (δ) $f = g$, $\forall x \in \{-2, 0, +2\}$

12. (α) Είναι $1 - 1$
 (β) Δεν είναι $1 - 1$
 (γ) Είναι $1 - 1$
13. (α) Είναι πολλαπλού τύπου
 (β) Είναι πολλαπλού τύπου
 (γ) Δεν είναι πολλαπλού τύπου

Σελίδα 70 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $(-2, 11)$ (β) $(0, 15)$ (γ) $(-5, 5)$ (δ) $(-15, -15)$
2.	$a = 0$ ή $a = -6$
3.	(α) \mathbb{R} (β) $\mathbb{R} - \{0,1\}$ (γ) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
4.	$A = \left\{-2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right\}$
5.	Σύνολο τιμών $f : \mathbb{R}$ Σύνολο τιμών $g: [13, +\infty)$ $(f + g)(x) = x + 2, [3, +\infty)$ $(f - g)(x) = -7x, [3, +\infty)$ $(f \cdot g)(x) = x + 2, [3, +\infty)$
6.	(α) Είναι πολλαπλού τύπου (β) Είναι πολλαπλού τύπου
7.	$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x < 5 \\ -x + 7, & 5 \leq x < 7 \end{cases}$

Εκθετική – Λογαριθμική συνάρτηση

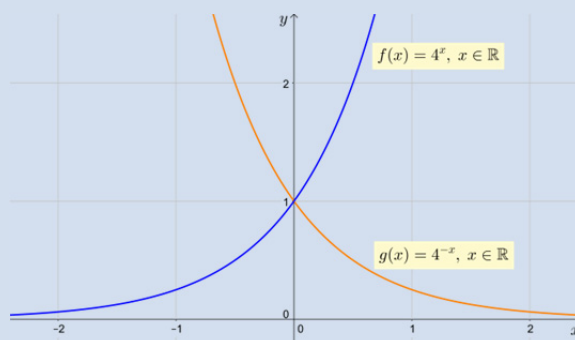
Σελίδα 81 Εκθετική συνάρτηση

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (β), (ε), (στ)

2. (α) 1
(β) 9
(γ) $\frac{1}{27}$
(δ) 1,316
(ε) 6,705

3.



Συμμετρικές ως προς τον άξονα των τεταγμένων

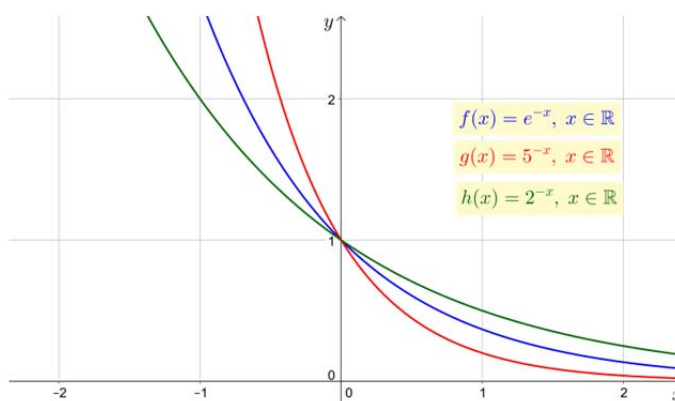
4. (α) $\frac{1}{2}$
(β) 3

5. (α) $a = 2, \beta = 3$
(β) $f(x) = 2 \cdot 3^x, x \in \mathbb{R}$

6. (α) $f(x) = 3^x, x \in \mathbb{R}$
(β) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x, x \in \mathbb{R}$

7. (α) $y = 2^x$
(β) $y = e^x$

8.



$$h(x) < f(x) < g(x), \forall x \in (-\infty, 0)$$

$$h(0) = f(0) = g(0) = 1$$

$$h(x) > f(x) > g(x), \forall x \in (0, +\infty)$$

Σελίδα 85 Εκθετικές εξισώσεις

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) $x = 2$
 (β) $x = 12$
 (γ) $x = 6$
 (δ) $x = -1$
 (ε) $x = 7$
 (στ) $x = 3$

2. (α) $3κ$
 (β) $\frac{κ}{3}$
 (γ) $9κ^2$
 (δ) $\frac{κ^3}{729}$
 (ε) $\sqrt{κ}$

3. (α) $x = 1$ ή $x = 2$
 (β) $x = -1$ ή $x = \frac{3}{2}$
 (γ) $x = -1$ ή $x = -\frac{1}{3}$
 (δ) $x = 1$ ή $x = -3$
 (ε) $x = -1$ ή $x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = 3$

Σελίδα 89 Εφαρμογές εκθετικής συνάρτησης

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) €1092,73
 (β) €1194,05

2. €36926,97

3. (α) 40000 άτομα
 (β) 45023 άτομα

4. (α) 40 mg
 (β) 21,95 mg

Σελίδα 97 Έννοια του λογάριθμου

Δραστηριότητα Απαντήσεις

2. (α) $3 = \log_5 125$
 (β) $-3 = \log_3 \left(\frac{1}{27}\right)$
 (γ) $0 = \log_1 4$
 (δ) $-4 = \log \left(\frac{1}{1000}\right)$
 (ε) $\frac{1}{3} = \log_8 2$
 (στ) $\frac{3}{2} = \log_4 8$

3. (α) 5
(β) 2
(γ) -2
(δ) 7
(ε) $\frac{2}{3}$
(στ) 10
(ζ) 1
(η) $-\frac{1}{2}$

4. (α) $x = \sqrt{10}$
(β) $x = 20,5$
(γ) $x = 10^{-9}$
(δ) $x = 0$
(ε) $x = 1$
(στ) $x = 999$
(ζ) $x = \frac{3}{2}$
(η) $x = 4$

5. (α) $x = 0,70$
(β) $x = 3,32$
(γ) $x = 14,21$
(δ) $x = -2,71$
(ε) $x = 3,00$
(στ) Αδύνατη στο \mathbb{R}

6. $t = 5$ χρόνια
Ένα κεφάλαιο €20000, ανατοκίζόμενο ετήσια για 5 χρόνια προς 3%, γίνεται €23185,48.

7. (α) €10000
(β) €7788
(γ) 8,3 χρόνια

Σελίδα 103 Ιδιότητες λογάριθμων

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

1. (α) $1 + \log_3 x$
(β) $2 \log x + \log y$
(γ) $3 \log x - \frac{1}{2} \log y$
(δ) $2 - \frac{1}{3} \log_5 a$
(ε) $-3 - \log x - \log y$
(στ) $\frac{1}{2} \log a - \frac{1}{4} \log \beta$

3. (α) $2a$
(β) $6a - 6$
(γ) $\frac{1}{2}a - 2$
(δ) $\frac{8}{3}a$

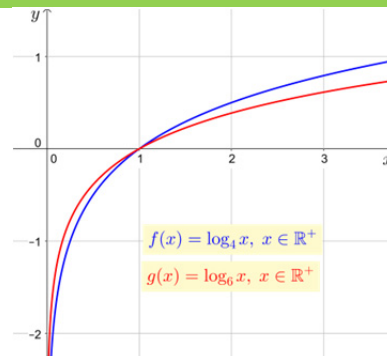
4. (α) $a + \beta$
 (β) $3a + \beta$
 (γ) $\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}\beta$
 (δ) $2a - 3\beta$

5. (α) 2
 (β) $\frac{3}{2}$

Σελίδα 108 Λογαριθμική συνάρτηση

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1.



2. (α) $(3, +\infty)$
 (β) $(-1, 1)$
 (γ) $(2, +\infty)$
3. (α) $y = \log_7 x, x > 0$
 (β) $y = \log_{\frac{2}{5}} x, x > 0$
 (γ) $y = 5^x, x \in \mathbb{R}$
4. (α) $(1, +\infty)$
 (β) $(-2, +\infty)$
 (γ) $(0, +\infty)$

Σελίδα 113 Λογαριθμικές εξισώσεις

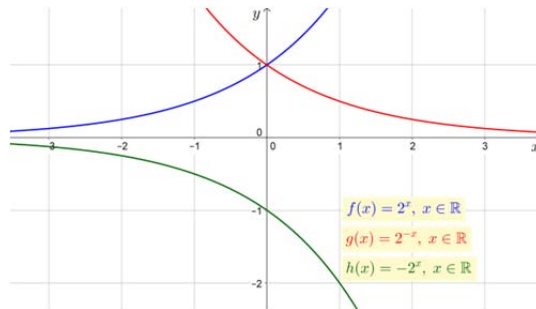
Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) $x = 6$
 (β) Αδύνατη στο \mathbb{R}
 (γ) $x = 4$
 (δ) $x = 1000000$
2. (α) $x = 2$
 (β) $x = \frac{5}{2}$ ή $x = 7$
 (γ) $x = 100$
 (δ) $x = 16$
3. (α) $x = 4$
 (β) $x = 10$
 (γ) $x = 4$
 (δ) $x = 2$
4. (α) $x = 5$
 (β) $x = \frac{1}{2}$ ή $x = 8$
5. $x = 100$

Σελίδα 114 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) 2 (β) 7,10 (γ) 77,88 (δ) 1,59

2.



- (α) Σ.Τ. f : $(0, +\infty)$, Σ.Τ. g : $(0, +\infty)$, Σ.Τ. h : $(-\infty, 0)$
 (β) i. Οι γραφικές παραστάσεις των f, g είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα των τεταγμένων.
 ii. Οι γραφικές παραστάσεις των f, h είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα των τετμημένων.

3.	(α) $a = 3, \beta = 2$ (β) $a = 5, \beta = \frac{1}{3}$
----	--

4.	(α) $4a$ (β) $\frac{1}{a}$ (γ) $\frac{a^2}{16}$ (δ) $16a$
----	--

5.	(α) $x = 2$ (β) $x = 0$ (γ) $x = -2$ (δ) $x = 11$ (ε) $x = 0$ ή $x = 1$ (στ) $x = 1$ (ζ) $x = 0$ (η) $x = -1$ ή $x = 1$ (θ) $x = 0$ ή $x = 2$
----	---

6.	(α) €12922,69 (β) €13576,90 (γ) €15361,01
----	---

7.	(α) 100 (β) i. 482 ii. 1168 iii. 1196 iv. 1200
----	--

8. (α) $2 = \log_4 16$
(β) $3 = \log 1000$
(γ) $-3 = \log_2 \left(\frac{1}{8}\right)$
(δ) $\frac{1}{2} = \log_{81} 9$
(ε) $\frac{1}{3} = \log_{125} 5$
(στ) $0 = \log_{17} 1$

9. (α) 1
(β) 0
(γ) 3
(δ) 4
(ε) $\frac{1}{2}$
(στ) 4

10. (α) $x = 8$
(β) $x = 4$
(γ) $x = 1$
(δ) $x = e^4 + 1$
(ε) $x = 36$
(στ) $x = 2$

11. (α) $x = 1,465$
(β) $x = 1,086$
(γ) $x = 0,693$

12. (α) 50
(β) 3013890

13. (α) $1 + \log_2 a$
(β) $\log_5 y - \log_5 2$
(γ) $\frac{1}{2} \ln z$
(δ) $2 \log_a x - \log_a y - 3 \log_a z$
(ε) $\frac{1}{2} (\log_5(x+1) - \log_5(x-1))$
(στ) $\frac{1}{2} \log x + \frac{1}{4} \log y$

14. (α) 2
(β) 5
(γ) 51
(δ) 1
(ε) 4
(στ) $\frac{3}{2}$

17. (α) $(-1, +\infty)$
(β) $\left(\frac{9}{4}, +\infty\right)$
(γ) \mathbb{R}
(δ) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
(ε) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
(στ) $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

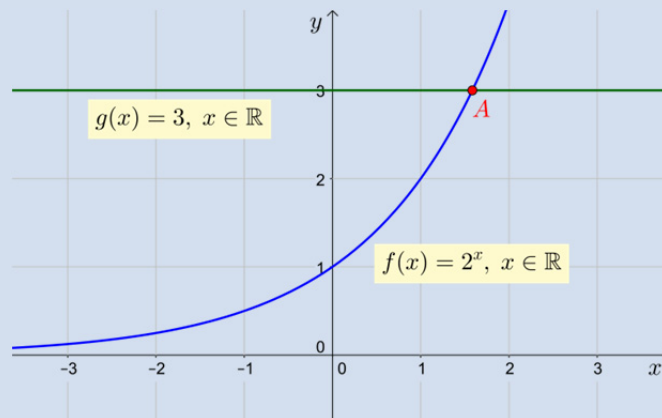
18. (α) $x = 8$
 (β) $x = \frac{13}{12}$
 (γ) $x = 2$ ή $x = 4$
 (δ) $x = 2$
 (ε) $x = 3$
 (στ) $x = 2$
19. (α) $f(x) = \log_2 x, x \in (0, +\infty)$
 (β) $f(x) = \log_9 x, x \in (0, +\infty)$

Σελίδα 118 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. $x = 10$
2. $A = \frac{71}{20}$
3. (α) $(5, +\infty)$
 (β) $x = 9$

4.



$A(\log_2 3, 3)$

7. $(x, y) = (81, 9)$ ή $(x, y) = (9, 81)$
8. 33062 χρόνια
9. (γ) $x = 1$ ή $x = 0,0001$

Όριο – Παράγωγος συνάρτησης

Σελίδα 129 Η έννοια του ορίου – Πλευρικά όρια συνάρτησης

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) -4 (β) -1 (γ) 0 (δ) Δεν υπάρχει (ε) 4
2.	(α) Δεν υπάρχει (β) 3
3.	$\kappa = \pm 1$

Σελίδα 131 Όριο πολυωνυμικής – ρητής συνάρτησης στο $a \in \mathbb{R}$

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) 0 (β) 27 (γ) $\frac{3}{4}$ (δ) -3 (ε) -2 (στ) 12

Σελίδα 136 Όριο συνάρτησης στο άπειρο

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $+\infty$ (β) $+\infty$ (γ) $+\infty$ (δ) $-\infty$
2.	(α) $+\infty$ (β) 1

Σελίδα 140 Παράγωγος αριθμός

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) 0 (β) -3 (γ) -1 (δ) -1

Σελίδα 143 Παράγωγος συνάρτηση

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $f'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ (β) $f'(x) = -4, x \in \mathbb{R}$ (γ) $f'(x) = 2x + 1, x \in \mathbb{R}$ (δ) $f'(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}$

Σελίδα 150 Παράγωγος βασικών συναρτήσεων – Κανόνες παραγώγισης

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $f'(x) = 0$ (β) $f'(x) = 0$ (γ) $f'(x) = 2x$ (δ) $f'(x) = \pi x^{\pi-1}$ (ε) $f'(x) = -6x^{-7}$ (στ) $f'(x) = 3x^2 + 1$ (ζ) $f'(x) = -5$ (η) $f'(x) = 6x + 1$ (θ) $f'(x) = 36x^8 + 64x^7 - 84x^6$ (ι) $f'(x) = 2x + 1$ (ια) $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ (ιβ) $f'(x) = \frac{x^2-8x+6}{(x-4)^2}$
2.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΣΩΣΤΟ

Σελίδα 156 Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) 0 (β) 3 (γ) 4
2.	(α) $y = 2x$ (β) $y = -1$ (γ) $y = 2x + 3$
3.	(2, 2)
4.	$f'(-2) = 2$
5.	$f'(-2) = 3$

Σελίδα 157 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) -1 (β) e
2.	$a = 2, \beta = 3$
3.	(α) 4 (β) $-\frac{1}{4}$ (γ) 4 (δ) $\frac{1}{3}$ (ε) $-\infty$ (στ) $-\infty$

4. (α) 0
(β) $\frac{1}{2}$
(γ) -6

5. $f'(3) = -\frac{1}{5}$

6. (α) $f'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$
(β) $f'(x) = -2, x \in \mathbb{R}$
(γ) $f'(x) = 2x - 3, x \in \mathbb{R}$

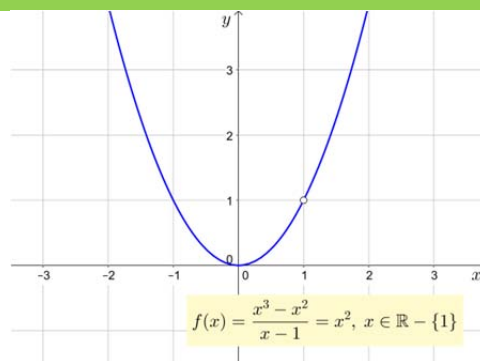
7. (α) $f'(x) = 0$
(β) $f'(x) = 0$
(γ) $f'(x) = 2016x^{2015}$
(δ) $f'(x) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$
(ε) $f'(x) = -6x^{-7}$
(στ) $f'(x) = 4x^3 + 3x^2$
(ζ) $f'(x) = 3$
(η) $f'(x) = -4x + 3$
(θ) $f'(x) = -14x^6 - 6x^5 + 20x^4$
(ι) $f'(x) = 2x + 6$
(ια) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$
(ιβ) $f'(x) = \frac{3x^2 - 18x + 2}{(x-3)^2}$

8. (α) $y = 24x + 32$
(β) $y = 6x - 5$
(γ) $y = -4$
(δ) $8x - 81y - 23 = 0$

Σελίδα 159 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1.



(α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

2. Δεν υπάρχει

3. (α) $\lambda = 1$
(β) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 1$
(γ) $\lim_{h \rightarrow 0} f(4 + h) = 1$

4. $f(3) = 2$

5. (α) $f(3) = 7$
(β) $f'(3) = 2$
(γ) 7

Ακολουθίες

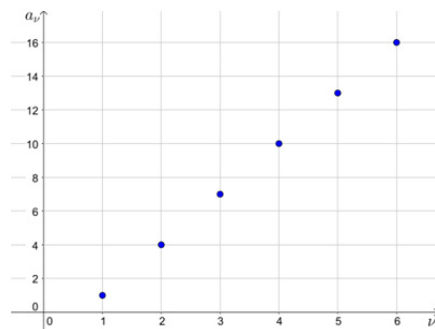
Σελίδα 168 Η έννοια της ακολουθίας

Δραστηριότητα Απαντήσεις

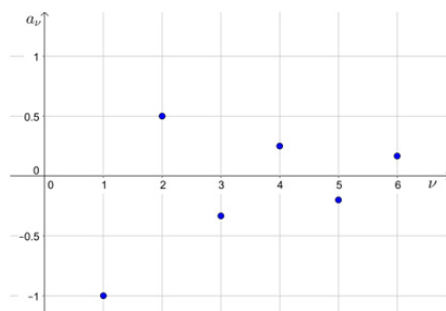
1.

- (α) 3, 4, 5, 6, 7, 8
- (β) -2, 1, 6, 13, 22, 33
- (γ) 3, 9, 27, 81, 243, 729
- (δ) -1, 1, -1, 1, -1, 1
- (ε) 10, 11, 12, 13, 14, 15

(α)

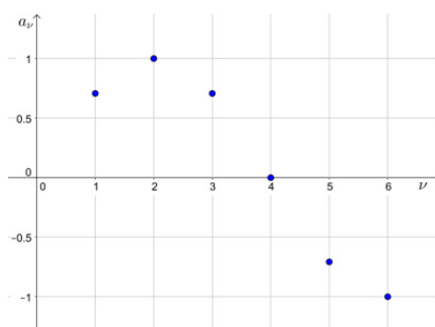


(β)



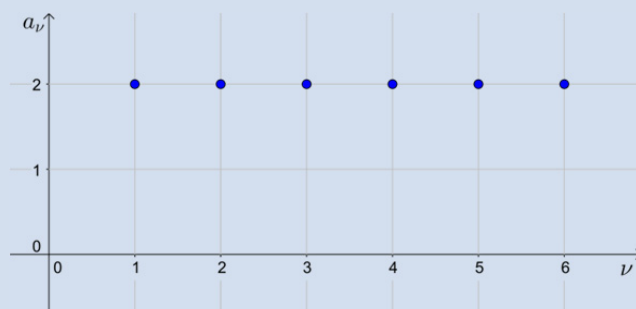
2.

(γ)



2, 2, 2, 2, 2

3.



4. $v = 7$
5. (α) v^2
(β) $\frac{v+2}{v+3}$
6. (α) $a_1 = 1, a_{v+1} = a_v + 3$
(β) $a_1 = 1, a_{v+1} = 2a_v$
(γ) $a_1 = 2, a_{v+1} = 2a_v + 1$

Σελίδα 174 Ειδικές ακολουθίες – Αριθμητική Πρόοδος

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΣΩΣΤΟ (ε) ΣΩΣΤΟ
2.	(α) $a_{10} = 25$ (β) $a_{101} = 298$
3.	3, 8, 13, 18, 23
4.	$a_{18} = -82$
5.	$\delta = 9$
6.	17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, 94, 101
7.	7, 10, 13, 16, 19, ...
8.	8, 3, -2, -7, -12, ...
9.	$\frac{23}{2}$
10.	$x = -7$
11.	$\Sigma_{12} = 456$
12.	$\Sigma_{20} = 530$
13.	$\Sigma_{30} = -720$
14.	(α) 50 σειρές (β) 2500 μαθητές
15.	4233

Σελίδα 183 Ειδικές ακολουθίες – Γεωμετρική Πρόοδος

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΣΩΣΤΟ (ε) ΣΩΣΤΟ
2.	(α) $a_5 = -81$ (β) $a_{10} = -19683$
3.	$\frac{1}{4}, 1, 4, 16, 64, \dots$ ή $-\frac{1}{4}, 1, -4, 16, -64, \dots$

4.	$\kappa = 2$ ή $\kappa = 8$
5.	2
6.	$a_1 = 3$
7.	$\Sigma_7 = 2186$
8.	$\Sigma_7 = 127$
9.	381
10.	(α) $\Sigma_\infty = \frac{1}{2}$ (β) $\Sigma_\infty = 5$
11.	$\lambda = \frac{1}{2}$
12.	$a_{64} = 2^{63}$
13.	$\Sigma_\infty = 2$
14.	3, 6, 12, 24, 48, 96, 192

Σελίδα 185 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΛΑΘΟΣ (ε) ΣΩΣΤΟ (στ) ΣΩΣΤΟ (ζ) ΣΩΣΤΟ (η) ΣΩΣΤΟ (θ) ΣΩΣΤΟ (ι) ΣΩΣΤΟ (ια) ΣΩΣΤΟ (ιβ) ΛΑΘΟΣ
2.	3, 6, 30, 870, 756030
3.	(α) 3, 8, 15, 24 (β) -1, -13, -61, -253 (γ) 0, -1, 2, -3
4.	$a_{1000} = 7989$
5.	$x = 1$
6.	9, 14, 19, 24, 29, 34
7.	4, 7, 10, 13, 16, ...
8.	$\nu = 8$
9.	47 σειρές και 5076 καθίσματα
10.	$a_9 = 131072$
11.	$\lambda = \frac{1}{2}$
12.	10, 20, 40 ή -10, 20, -40
13.	$\frac{13}{4}$
14.	$x = -1$
15.	(α) $a_{11} = \frac{5}{256}$ (β) $\Sigma_\infty = 40$

Σελίδα 187 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
3.	Α.Π. : 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Γ.Π. : $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \dots$
4.	$a_1 = 5$
5.	$\Sigma_{40} = -100$
7.	(α) 0,52 m (β) 18 m
10.	€4733,58
11.	$\lambda = \frac{1}{2}$

Γεωμετρία

Σελίδα 196 Εγγεγραμμένα – Εγγράψιμα τετράπλευρα

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. $\hat{B} = 100^\circ, \hat{\Gamma} = 60^\circ, \hat{\Delta} = 80^\circ$
2. (α) $x = 135^\circ$
(β) $B\Delta = 4 \text{ cm}$
3. (α) $\hat{x} = 76^\circ, \hat{y} = 114^\circ, \hat{z} = 24^\circ$
(β) $\hat{x} = 34^\circ, \hat{y} = 70^\circ, \hat{z} = 62^\circ$

Σελίδα 204 Κανονικά πολύγωνα – Ιδιότητες

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. $\widehat{K}_5 = 72^\circ, \widehat{K}_{10} = 36^\circ, \widehat{K}_{12} = 30^\circ$
 $\widehat{\varphi}_5 = 108^\circ, \widehat{\varphi}_{10} = 144^\circ, \widehat{\varphi}_{12} = 150^\circ$
2. Υπάρχει μόνο το ισόπλευρο τρίγωνο
(α) Υπάρχει το κανονικό πεντάγωνο
3. (β) Δεν υπάρχει
(γ) Υπάρχει το κανονικό δωδεκάγωνο
4. $\frac{R_1}{R_2} = 2, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2, \frac{a_1}{a_2} = 2, \frac{\Pi_1}{\Pi_2} = 2$

	Πλήθος πλευρών	Κεντρική γωνία	Γωνία πολυγώνου
5.	12	30°	150°
	10	36°	144°
	5	72°	108°
	8	$\frac{1}{2}L$	135°

Σελίδα 208 Κανονικά πολύγωνα – Εγγραφή σε κύκλο

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. $\Pi_3 = 3R\sqrt{3}, \Pi_4 = 4R\sqrt{2}, \Pi_6 = 6R$
 $E_3 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}, E_4 = 2R^2, E_6 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$
2. $\Pi = R(1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}), E = R^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $E = 128 \text{ cm}^2$
Μήκος μη-παράλληλων πλευρών: $R\sqrt{2}$
4. Ύψος: $\frac{R(\sqrt{3} + 1)}{2}$
 $E = \frac{R^2(2 + \sqrt{3})}{2}$
5. (β) $\Pi = (8 + 4\sqrt{2}) \text{ cm}$
 $E = (4 + 4\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

Σελίδα 214 Μέτρηση κύκλου

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	45°
2.	$2\pi \text{ cm}$
5.	$\frac{\pi R}{2}, \frac{2\pi R}{3}, \frac{5\pi R}{6}$

Σελίδα 219 Μέτρηση κύκλου

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$E = 144\pi \text{ cm}^2$
4.	$\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}}$

Σελίδα 222 Μέτρηση κύκλου

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$E = \frac{\rho}{2}(2\sqrt{3} - \pi)$
2.	$\Pi = 8\pi \text{ cm}, E = 16(4 - \pi) \text{ cm}^2$
3.	$E = \frac{1}{6}(2\pi - 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2$
4.	$\Pi = 6\pi \text{ cm}, E = 3\pi \text{ cm}^2$
5.	$\Pi = 4\left(1 + \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ cm}, E = 8\left(3\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}\right) \text{ cm}^2$
6.	$\Pi = R\left(1 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right), E = \frac{R^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$
7.	$\Pi = \frac{\pi}{3}(5\rho + 6\sqrt{3}), E = \frac{\rho^2}{6}(24\sqrt{3} - 11\pi)$
8.	$\Pi = \frac{10\pi}{3} \text{ cm}, E = \left(4\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) \text{ cm}^2$
9.	$E = \frac{R^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3})$

Σελίδα 224 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
2.	(α) $A\Gamma = 2 \text{ cm}$ (β) $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ (γ) $E_1 = \frac{1}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2, E_2 = \frac{1}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2, E_3 = \frac{\pi}{2} \text{ cm}^2$
3.	$E = \frac{175\pi}{3} - 50(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$
7.	$\frac{1}{6}$

Σελίδα 226 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $\angle AB\Gamma = 105^\circ$

Στατιστική

Σελίδα 233 Σύγκριση δύο πληθυσμών

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) Τομέας A : $x_{\varepsilon} = \text{ΝΑΙ}$ Τομέας B : $x_{\varepsilon} = \text{ΟΧΙ}$ Τομέας Γ : $x_{\varepsilon} = \text{ΝΑΙ, ΟΧΙ}$ Τομέας Δ : $x_{\varepsilon} = \text{ΟΧΙ}$ (β) ΟΧΙ
2.	(α) Τοξότης A (β) Τοξότης B
3.	(α) $CV_A = 0,08$, $CV_B = 0,086$ (β) Το A , αφού $CV_A < CV_B$.
4.	(α) Μεγαλύτερη μέση τιμή: B_2 Μικρότερη τυπική απόκλιση: B_3 (β) Το B_1 (γ) Το B_3

Σελίδα 237 Σύγκριση δύο πληθυσμών – Διαγράμματα

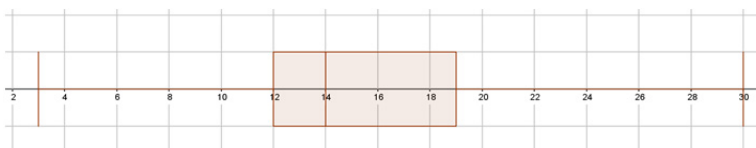
Δραστηριότητα	Απαντήσεις
2.	(α) $x_{\delta} = 11$, $Q_1 = 5$, $Q_3 = 13$ (β) 312
4.	(α) 8,58 (β) <u>Ανοικτός Στίβος</u> : Εύρος: 0,28 m, IQR : 0,13 m <u>Κλειστός Στίβος</u> : Εύρος: 0,29 m, IQR : 0,14 m

Σελίδα 245 Σύγκριση δύο πληθυσμών – Διαγράμματα

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΣΩΣΤΟ (ε) ΣΩΣΤΟ

- (α) Δεν υπάρχουν ακραίες τιμές.
(β)

2.



- 3.
- (α) 6
 - (β) Ελάχιστη παρατήρηση: 0
Μέγιστη παρατήρηση: 6
Εύρος: 6
 - (γ) $x_\delta = 1, Q_1 = 0,5, Q_3 = 2,5, IQR = 2$
 - (δ) $\bar{x} > x_\delta$
 - (ε) Δεν είναι συμμετρικό το δείγμα.

Σελίδα 247 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα

Απαντήσεις

- 1.
- (α) ΛΑΘΟΣ
 - (β) ΣΩΣΤΟ
 - (γ) ΛΑΘΟΣ
 - (δ) ΣΩΣΤΟ
 - (ε) ΛΑΘΟΣ
2. Δεν υπάρχουν ακραίες τιμές.
- 3.
- (β) Είδος A: $x_\delta = 22, \bar{x} = 22, s = 2,58$
Είδος B: $x_\delta = 24, \bar{x} = 24, s = 4,28$
 - (γ) Το πρώτο δείγμα έχει περισσότερη ομοιογένεια.

Σελίδα 249 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα

Απαντήσεις










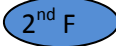












- 1.
- (α) Γ_1
 - (β) $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1,34, x_{\delta_1} - x_{\delta_2} = 2$
 $\bar{x}_1 - \bar{x}_3 = 4, x_{\delta_1} - x_{\delta_3} = 5$
 $\bar{x}_2 - \bar{x}_3 = 2,65, x_{\delta_2} - x_{\delta_3} = 3$

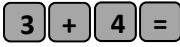


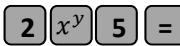


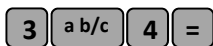



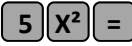

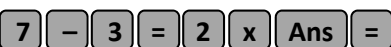
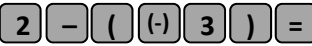

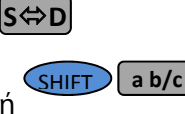


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

\in	ανήκει
\notin	δεν ανήκει
\forall	για κάθε
\exists	υπάρχει
\cup	ένωση συνόλων
\cap	τομή συνόλων
\subset	γνήσιο υποσύνολο
\subseteq	υποσύνολο
\emptyset ή $\{ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
\neq	άνισο
\equiv	ταυτοτικά ίσο
\cong	κατά προσέγγιση ίσο
\mathbb{N}	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
\mathbb{N}_0	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4,\dots\}$
\mathbb{Z}	ακέραιοι αριθμοί $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
\mathbb{Z}^+	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
\mathbb{Z}^-	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$
\mathbb{Q}	ρητοί αριθμοί $\{\alpha/\beta: \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \text{ και } \beta \neq 0\}$
\mathbb{Q}^+	θετικοί ρητοί αριθμοί
\mathbb{Q}_0^+	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
\mathbb{Q}^-	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
\mathbb{R}	πραγματικοί αριθμοί
\Rightarrow	απλή συνεπαγωγή
\Leftrightarrow	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
\perp	κάθετες
\parallel	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή



		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
		Υποδιαστολή
		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
	ή  ή 	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
	ή 	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
		Εισαγωγή Προσήμου –
	ή 	Κλάσμα
	ή 	Μετατροπή Κλάσματος ⇔ Δεκαδικό
		Σβήσιμο μνήμης
		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3 + 4$		3+4 7
$2,34 - 1,1$		2.34 - 1.1 1.24
$3 \cdot 2$		3X2 6
2^5		2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$		5E3 ή 5X103 5000
$\frac{3}{4}$	 ή 	$\frac{3}{4}$ 3J4
$2\frac{3}{4}$	 ή 	$2\frac{3}{4}$ 2 J 3 J 4
$\sqrt{4}$		$\sqrt{4}$ 2
5^2		5^2 25
$2 \cdot (7 - 3)$		2X(7 - 3) 8
$2 \cdot (7 - 3)$		2XAns 8
$2 - (-3)$		$2 - (-3)$ 5
$ -3 $		$ -3 $ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης		$\frac{1}{4}$
$9 - 6 : 2$	Υπολογισμός και αποθήκευση 	$9 - 6 : 2 M +$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9 - 6 : 2) - 6 : (9 - 6 : 2)$		$3 X M - 6 : M$ 17

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ 1°- 89°

Γωνία	ημω	συνω	εφω
1°	0,017	0,999	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,995	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,384
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
28°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
38°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Γωνία	ημω	συνω	εφω
46°	0,720	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,470	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,748
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,333
78°	0,978	0,203	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	0,999	0,018	57,290