

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Β' Τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Λυκείου Κατεύθυνσης

Β' τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Β΄ Λυκείου Κατεύθυνσης, Β΄ Τεύχος

Συγγραφή Α΄ έκδοσης:	Δημητρίου – Καραντάνου Τέρψα Ιωάννου Ιωάννης Καραντάνος Δημήτρης Κωνσταντινίδης Κυριάκος Λοϊζιάς Σωτήρης Ματθαίου Κυριάκος	Παπαγιάννης Κωνσταντίνος Παραγυίου Θεόκλητος Σεργίδης Μάριος Στυλιανού Ανδρέας Τιμοθέου Σάββας Χατζηγεωργίου Έλενα
Συγγραφή Β΄ έκδοσης:	Κωνσταντίνου Παναγιώτα	Λοϊζιάς Σωτήρης
Επιμέλεια:	Πίκας Μάριος	Πίτσιλλου – Τσαγγαρίδη Νεοφύτα
Συντονισμός:	Χρίστου Κωνσταντίνος, <i>Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου</i> Βίδρας Αλέκος, <i>Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου</i>	
Εποπτεία:	Παπαγιάννη Όλγα, <i>Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης</i> Χατζηχρίστου Χρυσούλα, <i>Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης</i> Ιωάννου Ιωάννης, <i>Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης</i> Μεγάλεμος Ιωάννης, <i>Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης</i>	
Γλωσσική επιμέλεια Α΄ Έκδοσης:	Παλάτου – Χριστόφια Μαριάννα, <i>Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων</i>	
Σχεδιασμός εξωφύλλου:	Σιαμμάς Χρύσης, <i>Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων</i>	
Συντονισμός έκδοσης:	Παρπούνας Χρίστος, <i>Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων</i>	

Α΄ Έκδοση 2017

Β΄ Έκδοση 2021

Εκτύπωση: NBF Graphic Solution Ltd

© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ISBN: 978-9963-54-297-0



Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε τρία τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Κατεύθυνσης», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Το βιβλίο έχει έναν διττό ρόλο να εκπληρώσει, να μυηθεί ο μαθητής στη συλλογιστική την οποία εκφράζει το αξεπέραστο λογικό-επαγωγικό σύστημα των Μαθηματικών και παράλληλα να ανταποκριθεί στις σύγχρονες εκπαιδευτικές επιταγές.

Όλο το υλικό που περιλαμβάνεται στο παρόν βιβλίο, σύμφωνα με τα Νέα Αναλυτικά Προγράμματα και τους Δείκτες Επιτυχίας και Επάρκειας που τίθενται από την εκπαιδευτική μεταρρύθμιση, αποσκοπεί αφενός στη βοήθεια των μαθητών/τριών να κατανοήσουν τη μαθηματική λογική και σκέψη και αφετέρου στη συνεισφορά της μαθηματικής παιδείας του τόπου.

Το βιβλίο «Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Κατεύθυνσης» περιλαμβάνει την ύλη των Μαθηματικών που προβλέπεται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Β΄ τάξης Λυκείου, του οποίου η εφαρμογή άρχισε από το σχολικό έτος 2016 – 2017 και είναι εμπλουτισμένο με αυστηρούς ορισμούς και αποδείξεις όπως επίσης με πολλές εφαρμογές και παραδείγματα, που ανταποκρίνονται στις δυνατότητες και στα ενδιαφέροντα των μαθητών/τριών. Επιπρόσθετα, καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια, ώστε να είναι δυνατή η ολοκλήρωση της διδασκαλίας του στον διδακτικό χρόνο, ο οποίος προβλέπεται από το εγκεκριμένο ωρολόγιο πρόγραμμα.

Το κλειδί της επιτυχίας στο μάθημα των Μαθηματικών είναι η ουσιαστική κατανόηση των εννοιών, η ανάπτυξη αναλυτικής και συνθετικής σκέψης, η μεθοδολογική αντιμετώπιση ομαδοποιημένων προβλημάτων και η αποφυγή της αποστήθισης. Η ορθή χρήση του βιβλίου δημιουργεί στον μαθητή, εκτός από το φιλικό περιβάλλον, όλες εκείνες τις προϋποθέσεις, κυριότερες των οποίων είναι ο προβληματισμός και η αυτενέργεια, για ανάπτυξη μιας κριτικής, διερευνητικής και ορθολογιστικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τους Καθηγητές του Πανεπιστημίου Κύπρου Κωνσταντίνο Χρίστου και Αλέκο Βίδα.

Δρ Κυπριανός Δ. Λούης
Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	Σελίδα
5. Όριο – Συνέχεια συνάρτησης	7
▪ Εισαγωγή στο όριο συνάρτησης	8
▪ Έννοια ορίου – Ορισμός ορίου	9
▪ Πλευρικά όρια της συνάρτησης f	17
▪ Ιδιότητες ορίων	23
▪ Μη πεπερασμένο όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$	29
▪ Όριο συνάρτησης στο άπειρο	38
▪ Όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων	47
▪ Συνέχεια συνάρτησης	53
▪ Βασικά θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων	62
6. Ακολουθίες	79
▪ Εισαγωγή	80
▪ Η έννοια της ακολουθίας	81
▪ Μονότονες ακολουθίες	87
▪ Όριο ακολουθίας	91
▪ Ειδικές ακολουθίες	95
7. Γεωμετρικοί τόποι	119
▪ Η έννοια του γεωμετρικού τόπου	120
▪ Εύρεση γεωμετρικού τόπου	122
▪ Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στο επίπεδο	124
▪ Παράρτημα	133
8. Εκθετική – Λογαριθμική συνάρτηση	151
▪ Εκθετική συνάρτηση	152
▪ Λογαριθμική συνάρτηση	170
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ	205
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	221

ΕΝΟΤΗΤΑ 05

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 5.1 Εισαγωγή στο όριο συνάρτησης
- 5.2 Έννοια ορίου – Ορισμός ορίου
 - 5.2.1 Διαστήματα – Περιοχή πραγματικού αριθμού
 - 5.2.2 Έννοια ορίου συνάρτησης
 - 5.2.3 Ορισμός του ορίου συνάρτησης
- 5.3 Πλευρικά όρια της συνάρτησης f
- 5.4 Ιδιότητες ορίων
- 5.5 Μη πεπερασμένο όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$
 - 5.5.1 Η έννοια του μη πεπερασμένου ορίου
 - 5.5.2 Πλευρικά όρια – Ιδιότητες
 - 5.5.3 Επέκταση του \mathbb{R}
- 5.6 Όριο συνάρτησης στο άπειρο
 - 5.6.1 Ορισμός ορίου συνάρτησης στο $+\infty$
 - 5.6.2 Ορισμός ορίου συνάρτησης στο $-\infty$
 - 5.6.3 Όρια βασικών συναρτήσεων
- 5.7 Όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων
 - 5.7.1 Κριτήριο παρεμβολής
 - 5.7.2 Βασικά όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων
- 5.8 Συνέχεια συνάρτησης
 - 5.8.1 Ορισμός συνέχειας σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης
 - 5.8.2 Συνεχείς συναρτήσεις
- 5.9 Βασικά θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων
 - 5.9.1 Θεώρημα Bolzano – Εφαρμογές
 - 5.9.2 Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών
 - 5.9.3 Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η έννοια του ορίου κατέχει καίρια θέση στη Μαθηματική Ανάλυση και είναι μια από τις πιο θεμελιώδεις έννοιες στα σύγχρονα Μαθηματικά με εφαρμογές σε όλες τις θετικές επιστήμες. Το όριο γεννήθηκε στην προσπάθεια των Μαθηματικών να απαντήσουν ερωτήματα, όπως:

- Πώς υπολογίζουμε το μήκος ενός καμπυλόγραμμου τμήματος;
- Πώς υπολογίζουμε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ μίας παραβολής και μίας ευθείας;
- Πώς υπολογίζουμε την κλίση της εφαπτομένης μίας καμπύλης σε ένα σημείο της;
- Πώς υπολογίζουμε την στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού;

Ιστορικό Σημείωμα

Στην αρχαία Ελλάδα η έννοια του ορίου ήταν άγνωστη. Οι Έλληνες Μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν άπειρες διαδικασίες, οι οποίες βασίζονταν στην έννοια του ορίου. Ο Εύδοξος ο Κνίδιος ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων μέσα από διαδοχικές προσεγγίσεις. Ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης, για να υπολογίσει εμβαδά που περικλείονται μεταξύ διάφορων καμπυλών.

Μέχρι τα χρόνια της Αναγέννησης, οι Μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν τις μεθόδους των αρχαίων Ελλήνων. Τον 17^ο αιώνα οι Isaac Newton και Gottfried Wilhelm Leibniz, αν και εργάζονταν ανεξάρτητα, έβαλαν τα θεμέλια του απειροστικού λογισμού. Τον 18^ο αιώνα ο Augustin Louis Cauchy συνέβαλε σημαντικά στη διατύπωση του ορισμού του ορίου μιας συνάρτησης. Ο αυστηρός ορισμός του ορίου συνάρτησης, που χρησιμοποιούμε σήμερα, δόθηκε από τον Karl Weierstrass (19^{ος} αιώνας).

5.2 ΕΝΝΟΙΑ ΟΡΙΟΥ – ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΡΙΟΥ

Διερεύνηση

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

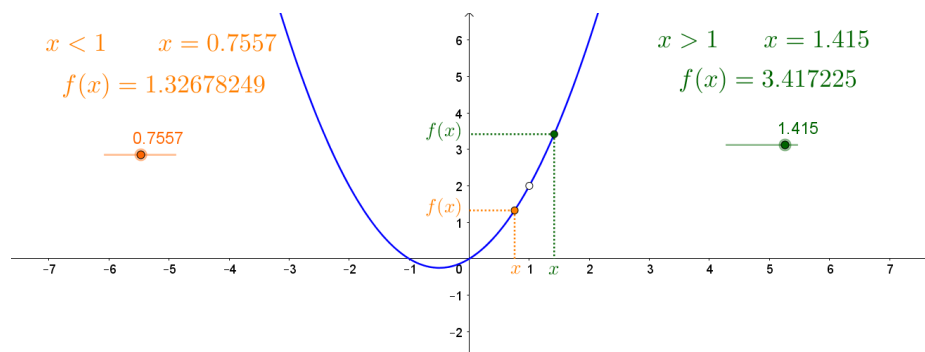
$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x - 1}$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
(β) Να συμπληρώσετε τους πιο κάτω πίνακες τιμών της f για τις τιμές του x «κοντά» στο 1 και να αναφέρετε τις παρατηρήσεις σας.

x	$f(x) = \frac{x^3 - x}{x - 1}$
0,9	
0,99	
0,999	
0,99999	

x	$f(x) = \frac{x^3 - x}{x - 1}$
1,1	
1,01	
1,001	
1,0001	

- (γ) Να ανοίξετε το αρχείο «[Blyk_Kat_En05_Oria.ggb](#)».



Πως «συμπεριφέρονται» οι τιμές της f , όταν:

- το x προσεγγίζει το 1 από «αριστερά» ($x \rightarrow 1^-$)
 - το x προσεγγίζει το 1 από «δεξιά» ($x \rightarrow 1^+$)
- (δ) Μπορούμε για οποιαδήποτε τιμή του y «κοντά» στο $y = 2$ να βρούμε αντίστοιχη τιμή του x ;

5.2.1 Διαστήματα – Περιοχή πραγματικού αριθμού

Γνωρίζουμε ότι για $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$ ορίζονται υποσύνολα των πραγματικών αριθμών τα οποία ονομάζονται **διαστήματα** με άκρα τα a και β . Συγκεκριμένα, έχουμε:

- $(a, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < \beta\}$: ανοικτό διάστημα



- $[a, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq \beta\}$: κλειστό διάστημα



- $(a, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq \beta\}$: ανοικτό αριστερά διάστημα

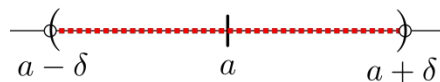


- $[a, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < \beta\}$: ανοικτό δεξιά διάστημα



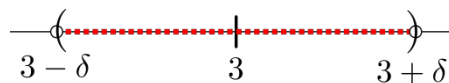
Κάθε ανοικτό διάστημα της μορφής $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, ονομάζεται δ – περιοχή του πραγματικού αριθμού a και συμβολίζεται με $\pi(a)$. Δηλαδή:

$$\pi(a) = (a - \delta, a + \delta), \text{ για κάθε } \delta > 0$$



Για παράδειγμα, μια δ - περιοχή του αριθμού 3 είναι το διάστημα:

$$\pi(3) = (3 - \delta, 3 + \delta), \delta > 0$$



Εσωτερικό σημείο ενός συνόλου A ονομάζουμε κάθε στοιχείο $a \in A$, για το οποίο υπάρχει δ –περιοχή $\pi(a)$, τέτοια ώστε να ισχύει $\pi(a) \subset A$.

Για παράδειγμα:

- Κάθε αριθμός x που ανήκει στο διάστημα $(3, 4)$ είναι εσωτερικό σημείο του $(3, 4)$.
- Το 1 δεν είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[1, 5]$, γιατί **δεν** υπάρχει δ –περιοχή του 1, δηλαδή $\pi(1) = (1 - \delta, 1 + \delta)$, $\delta > 0$, για την οποία να ισχύει $\pi(1) \subset [1, 5]$.

Παρατηρήσεις

- Κάθε αριθμός x που ανήκει στο διάστημα (a, β) είναι εσωτερικό σημείο του.
- Τα άκρα a και β ενός διαστήματος της μορφής $[a, \beta]$ **δεν** είναι εσωτερικά σημεία του διαστήματος.

- Ένας πραγματικός αριθμός a λέγεται **σημείο συσσώρευσης** ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, αν κάθε δ -περιοχή του a περιέχει άπειρα στοιχεία του A .
- Ένας πραγματικός αριθμός a λέγεται **μεμονωμένο σημείο** ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, αν και μόνον αν υπάρχει δ -περιοχή του a που δεν περιέχει άλλα στοιχεία του συνόλου A εκτός από το a .

Για παράδειγμα, για το σύνολο $A = [0, 1) \cup (1, 2) \cup \{3\}$ έχουμε ότι:

- Σημεία συσσώρευσης του συνόλου A είναι όλοι οι αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα $[0, 2]$.
- Μεμονωμένο σημείο του A είναι ο αριθμός 3.

5.2.2 Έννοια ορίου συνάρτησης

Δίνεται η συνάρτηση:

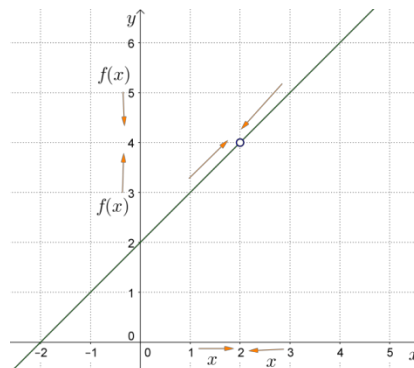
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

Εξετάζουμε τις τιμές της συνάρτησης, όταν το x προσεγγίζει το 2, δηλαδή όταν το x παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 2.

Η πιο πάνω συνάρτηση γράφεται ως εξής:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 2$$

Η γραφική παράσταση της f είναι τα σημεία της ευθείας $y = x + 2$ εκτός του σημείου $(2, 4)$, όπως φαίνεται και στο πιο κάτω σχήμα.



Παρατηρούμε ότι καθώς το x κινείται πάνω στον άξονα των x και προσεγγίζει την τιμή $x = 2$, είτε από αριστερά, είτε από δεξιά, τότε οι αντίστοιχες τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f κινούνται πάνω στον άξονα των y και προσεγγίζουν την τιμή $y = 4$.

Οι παρατηρήσεις αυτές συνοψίζονται στην έκφραση

«Το όριο της f όταν το x τείνει στο 2 ισούται με 4»

και συμβολίζεται με:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

Γενικά

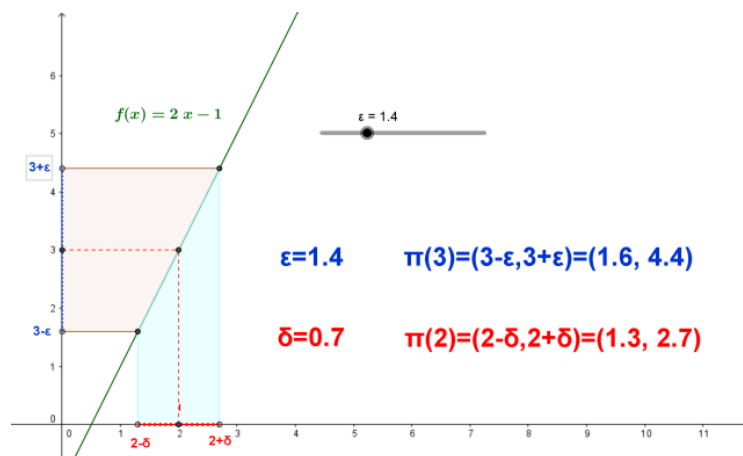
Αν το όριο της f , όταν το x τείνει στο x_0 , ισούται με λ , τότε γραφούμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$$

5.2.3 Ορισμός του ορίου συνάρτησης

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «Blyk_Kat_En05_e_dlimit.ggb».



Ο δρομέας ϵ καθορίζει πόσο κοντά μπορούμε να πλησιάσουμε στην τιμή $\lambda = 3$ (επιθυμητή ακρίβεια), δίνοντας μια περιοχή της μορφής $\pi(3) = (3 - \epsilon, 3 + \epsilon)$. Δεδομένης της επιθυμητής ακρίβειας με την οποία θέλουμε να πλησιάσουμε την τιμή 3, υπάρχουν κατάλληλες τιμές «κοντά» στον αριθμό $x = 2$, που μπορούμε να πλησιάσουμε. Υπάρχουν, δηλαδή, τιμές δ , ώστε τα στοιχεία x που ανήκουν στην περιοχή $\pi(2) = (2 - \delta, 2 + \delta)$ να διασφαλίζουν ότι οι αντίστοιχες τιμές $f(x)$ πλησιάζουν την τιμή 3 με δεδομένη ακρίβεια ϵ .

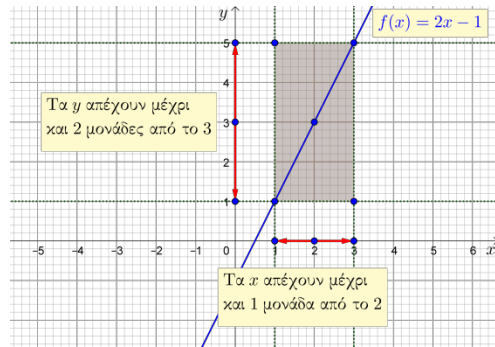
- Αν $f(x) \in \pi(3) = (3 - \epsilon, 3 + \epsilon)$, να βρείτε την τιμή του δ , ώστε το x να ανήκει στην $\pi(2) = (2 - \delta, 2 + \delta)$ για τις πιο κάτω τιμές του ϵ :
 - (α) $\epsilon_1 = 0,5$
 - (β) $\epsilon_2 = 0,1$
 - (γ) $\epsilon_3 = 0,01$
 - (δ) $\epsilon_4 = \epsilon$, $\epsilon > 0$ (Να βρείτε τη σχέση του δ με τη θετική τιμή του ϵ .)

Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x) = 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι προφανές ότι όταν το x ($x \neq 2$) προσεγγίζει τον αριθμό $x_0 = 2$, οι αντίστοιχες τιμές του y προσεγγίζουν το 3.

Γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} y = 3$$

Από το διπλανό σχήμα φαίνεται ότι όταν οι τιμές του y απέχουν από το 3 μέχρι 2 μονάδες, τότε οι τιμές του x απέχουν από το $x_0 = 2$ μέχρι 1 μονάδα.



Αλγεβρικά, έχουμε:

$$\begin{aligned} |y - 3| < 2 &\Leftrightarrow |(2x - 1) - 3| < 2 \\ &\Leftrightarrow |2x - 4| < 2 \Leftrightarrow -2 < 2x - 4 < 2 \\ &\Leftrightarrow 2 < 2x < 6 \Leftrightarrow 1 < x < 3 \\ &\Leftrightarrow 1 < x - 2 < 1 \Leftrightarrow |x - 2| < 1 \end{aligned}$$

Πόσο κοντά στο $x_0 = 2$ πρέπει να πλησιάσουν οι τιμές του x , ώστε οι τιμές του y να απέχουν από το 3 μέχρι $\frac{1}{2}$ της μονάδας;

Με ανάλογες αλγεβρικές πράξεις, όπως και προηγουμένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} |y - 3| < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow |(2x - 1) - 3| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |2x - 4| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < 2x - 4 < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x - 2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Άρα, όταν οι τιμές των x απέχουν από το 2 μέχρι $\frac{1}{4}$ της μονάδας, τότε οι αντίστοιχες τιμές των y απέχουν από το 3 μέχρι $\frac{1}{2}$ της μονάδας.

Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει ορισμένες τιμές του x , που βρίσκονται κοντά στο 2 σε απόσταση δ και διασφαλίζουν ότι οι αντίστοιχες τιμές των y βρίσκονται σε απόσταση ε από το 3.

$ y - 3 < \varepsilon$	$0 < x - 2 < \delta$
$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$	$\exists \delta_2 : \delta_2 = \frac{1}{4}$
$\varepsilon_3 = \frac{1}{10}$	$\exists \delta_3 : \delta_3 = \frac{1}{20}$
$\varepsilon_4 = \frac{1}{100}$	$\exists \delta_4 : \delta_4 = \frac{1}{200}$
$\varepsilon_5 = \varepsilon$	$\exists \delta_5 : \delta_5 = \frac{\varepsilon}{2}$

Για κάθε τιμή δηλαδή του $\varepsilon > 0$, μπορεί κάποιος να εξασφαλίσει κατάλληλο δ , το οποίο εξαρτάται κάθε φορά από το συγκεκριμένο ε . Στο πιο πάνω παράδειγμα, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ (ή $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$). Έτσι, διασφαλίζεται ότι οι αντίστοιχες τιμές των y βρίσκονται στην «επιθυμητή» ε -απόσταση από το 3, αφού υπάρχει κατάλληλο $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ που περιορίζει τις τιμές κοντά στο 2.

Ορισμός

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο D_f , τότε η συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 τον πραγματικό αριθμό λ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in D_f$ με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$, όπου x_0 σημείο συσσώρευσης του D_f .

Συμβολικά, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

Σχόλια

- Αποδεικνύεται ότι όταν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 , τότε αυτό είναι **μοναδικό**.
- Ο συμβολισμός « $0 < |x - x_0|$ » δηλώνει «Όλα τα x που είναι διαφορετικά του x_0 ($x \neq x_0$).».
- Ο συμβολισμός « $\exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta$ » δηλώνει «Οι τιμές του x που βρίσκονται κατάλληλα κοντά στο x_0 .».
- Για την ύπαρξη του ορίου

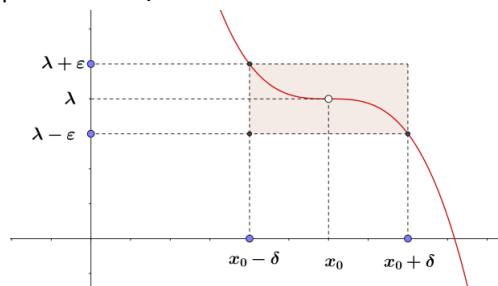
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

δεν είναι αναγκαίο να ορίζεται η f στο x_0 .

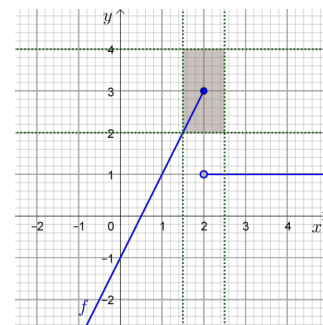
- Η μελέτη του ορίου στο x_0 έχει έννοια και στις περιπτώσεις που η συνάρτηση είναι ορισμένη:
 - σε διαστήματα που περιέχουν το x_0
 - σε διαστήματα της μορφής (α, x_0) ή (x_0, β)

Η έννοια του ορίου μπορεί να παρουσιαστεί γραφικά ως εξής:

Για κάθε περιοχή $\pi(\lambda) = (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ του λ , υπάρχει μια περιοχή $\pi(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ του x_0 , έτσι ώστε το ορθογώνιο που σχηματίζεται να περιέχει πάντοτε το τμήμα της συνάρτησης $y = f(x)$ που ορίζεται από την περιοχή $\pi(x_0)$.



Αντίθετα, στο παράδειγμα του διπλανού γραφήματος, στο ορθογώνιο που περιγράφεται από την περιοχή $(3 - 1, 3 + 1)$ του 3 και την περιοχή $(2 - 0,5, 2 + 0,5)$ του 2, υπάρχει τμήμα της συνάρτησης που δεν περιλαμβάνεται στο ορθογώνιο.



Πρόταση

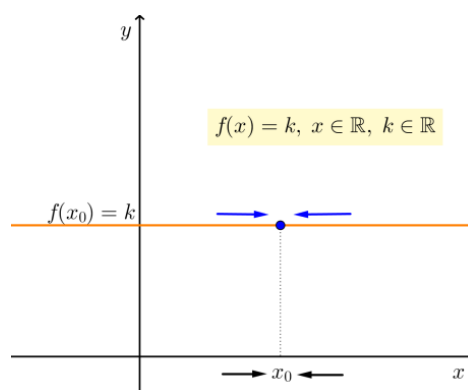
Για τη **σταθερή συνάρτηση** f με τύπο $f(x) = \kappa$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \kappa = \kappa$$

Απόδειξη

Για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, βρίσκουμε $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για όλα τα x με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - \kappa| < \varepsilon \Leftrightarrow |\kappa - \kappa| < \varepsilon$. Αφού $|\kappa - \kappa| = 0 < \varepsilon$, τότε η συνεπαγωγή ισχύει για οποιοδήποτε $\delta > 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \kappa = \kappa$$



Πρόταση

Για την **ταυτοτική συνάρτηση** f με τύπο $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

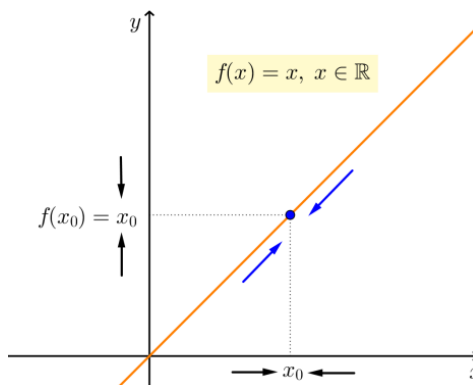
$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

Απόδειξη

Για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, βρίσκουμε $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για όλα τα x με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - \lambda| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon$.

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $\delta \leq \varepsilon$. Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$



Παράδειγμα 1

Να δείξετε, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$$

Λύση

Ισχύει $f(x) = 3x - 1$, $x_0 = 2$, $\lambda = 5$ και $D_f = \mathbb{R}$.

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ (συναρτήσει του ε), τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $0 < |x - 2| < \delta$, να ισχύει:

$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon \Leftrightarrow |(3x - 1) - 5| < \varepsilon$$

Έχουμε ότι:

$$|(3x - 1) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Συνεπώς, αρκεί να επιλέξουμε οποιοδήποτε θετικό $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Επομένως, με βάση τον ορισμό, ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$$

Παρατηρήσεις

- Αποδεικνύοντας με τη βοήθεια του ορισμού ότι το όριο της $f(x) = 3x - 1$ στο $x_0 = 2$ είναι ο πραγματικός αριθμός $\lambda = 5$, σημαίνει ότι μπορούμε να πλησιάσουμε την τιμή της f στο 5 όσο κοντά θέλουμε (επιθυμητή ακρίβεια ε), αρκεί να επιλέξουμε τιμές κατάλληλα κοντά στο 2 σε απόσταση $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Δηλαδή, για $0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$, διασφαλίζεται ότι $|f(x) - 5| < \varepsilon$.
- Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας την έννοια της περιοχής, μπορούμε να ερμηνεύσουμε το πιο πάνω όριο ως εξής:
«Αν το $x \in \pi(2) = \left(2 - \frac{\varepsilon}{3}, 2 + \frac{\varepsilon}{3}\right)$, τότε $f(x) \in \pi(5) = (5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$, για κάθε $\varepsilon > 0$ ».
- Δίνοντας μόνο μία τιμή στο ε (ή και περισσότερες), και βρίσκοντας μία κατάλληλη τιμή για το δ σε κάθε περίπτωση, δεν αποτελεί απόδειξη. Αυτό που αποτελεί απόδειξη είναι να βρούμε κατάλληλο δ συναρτήσει του ε , **για οποιαδήποτε επιλογή του ε** .

Δραστηριότητες

1. Να αποδείξετε, με την βοήθεια του ορισμού, ότι:

$$(α) \quad \lim_{x \rightarrow 1} 5 = 5 \qquad (β) \quad \lim_{x \rightarrow -3} (x - 4) = -7 \qquad (γ) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = 2$$

5.3 ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f

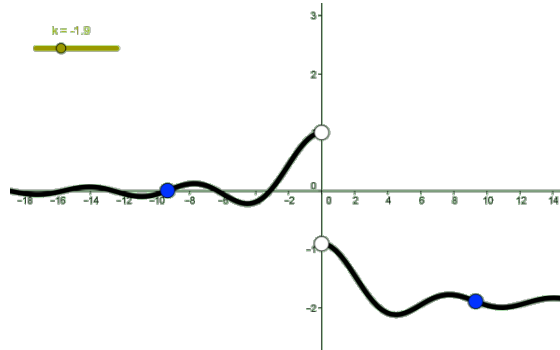
Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «Blyk_Kat_En05_Plevrika.ggb».

(α) Να βρείτε ποιον αριθμό προσεγγίζουν οι τιμές της συνάρτησης f , όταν το x προσεγγίζει το 0 από αριστερά.

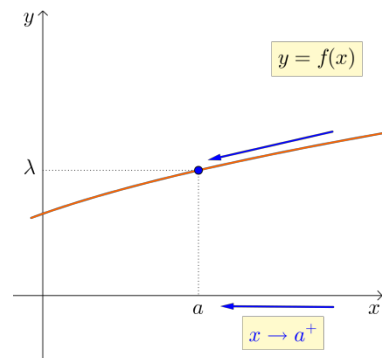
(β) Να δώσετε στον δρομέα k τις τιμές $-2, 0, 1$, και να βρείτε ποιον αριθμό προσεγγίζουν οι τιμές της συνάρτησης f , όταν το x προσεγγίζει το 0 από δεξιά σε κάθε περίπτωση.

(γ) Να βρείτε για ποια τιμή του k υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 = 0$.



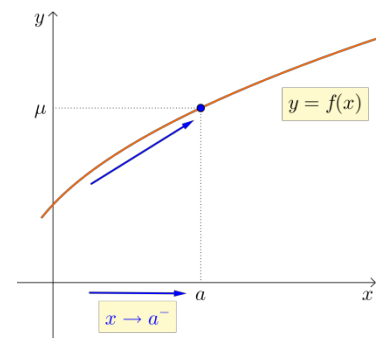
Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης f προσεγγίζουν έναν πραγματικό αριθμό λ , καθώς το x προσεγγίζει το a από μεγαλύτερες τιμές του a ($x > a$), δηλαδή από δεξιά, αυτό συμβολίζεται με:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lambda$$



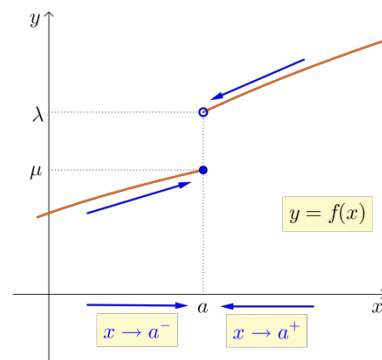
Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης f προσεγγίζουν έναν πραγματικό αριθμό μ , καθώς το x προσεγγίζει το a από μικρότερες τιμές του a ($x < a$), δηλαδή από αριστερά, αυτό συμβολίζεται με:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \mu$$



Το όριο από δεξιά και το όριο από αριστερά της συνάρτησης f λέγονται **πλευρικά όρια** της συνάρτησης f .

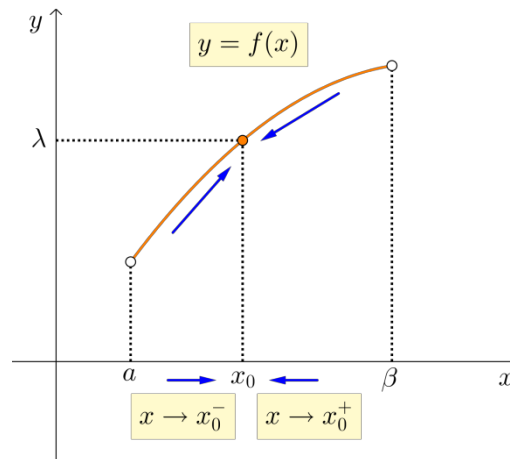
Αν για τα δύο πιο πάνω όρια ισχύει $\mu \neq \lambda$, τότε το όριο της συνάρτησης f στο a δεν υπάρχει, όπως φαίνεται και στην διπλανή γραφική παράσταση.



Ορισμός

Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 , που είναι ορισμένη στο D_f , υπάρχει αν και μόνον αν υπάρχουν και τα δύο πλευρικά όρια στο x_0 και είναι ίσα. Δηλαδή:

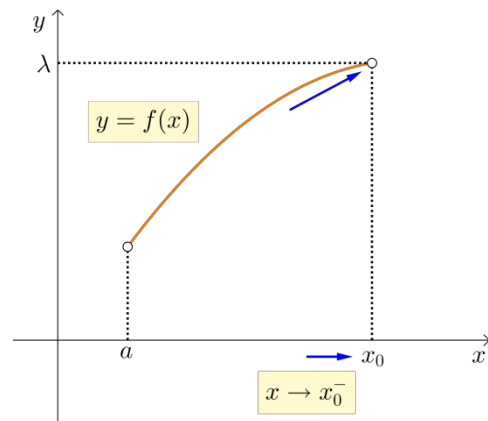
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$$



Σχόλια

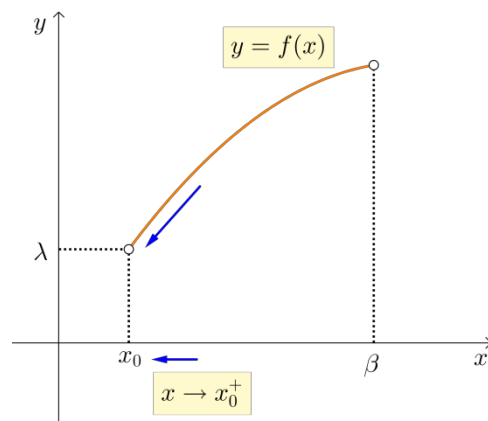
- Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 , που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (a, x_0) ή $(a, x_0]$ και δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β) , ισούται με το αριστερά πλευρικό όριο στο x_0 αν αυτό υπάρχει. Δηλαδή, ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$



- Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 , που είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) ή $[x_0, \beta)$ και δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (a, x_0) , ισούται με το δεξιά πλευρικό όριο στο x_0 αν αυτό υπάρχει. Δηλαδή, ισχύει:

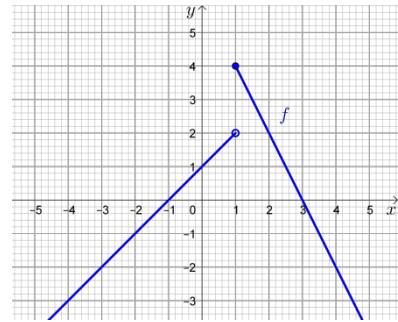
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$



Παράδειγμα 1

Με βάση τη διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να υπολογίσετε τα πιο κάτω πλευρικά όρια:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) & (\beta) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \\ (\gamma) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) & (\delta) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{array}$$



Λύση

(α) Όταν το x προσεγγίζει το 3 από αριστερά, τότε οι τιμές της συνάρτησης f προσεγγίζουν τον αριθμό 0. Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$$

(β) Όταν το x προσεγγίζει το 3 από δεξιά, τότε οι τιμές της συνάρτησης f προσεγγίζουν τον αριθμό 0. Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0$$

(γ) Όταν το x προσεγγίζει το 1 από αριστερά, τότε οι τιμές της συνάρτησης f προσεγγίζουν τον αριθμό 2. Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

(δ) Όταν το x προσεγγίζει το 1 από δεξιά, τότε οι τιμές της συνάρτησης f προσεγγίζουν τον αριθμό 4. Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «Blyk_Kat_En05_PlevrikaOria.ggb» για να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας.

Παράδειγμα 2

Με βάση τη διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) & (\beta) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \end{array}$$

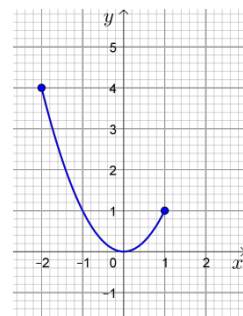
Λύση

(α) Αφού το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $D_f = [-2, 1]$, τότε το όριο της συνάρτησης f στο -2 είναι ίσο με το δεξί πλευρικό όριο της συνάρτησης f στο -2 . Δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 4$$

(β) Ομοίως, έχουμε ότι:

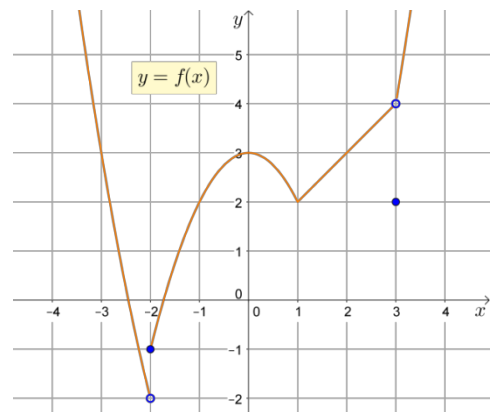
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$



Παράδειγμα 3

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

- (α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- (β) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- (γ) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- (δ) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$



Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$. Επομένως, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

(β) Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$. Επομένως, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$.

(γ) Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια στο -2 είναι άνισα:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -2$$

Επομένως, το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ δεν υπάρχει.

(δ) Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4$. Επομένως, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$.

Παράδειγμα 4

Για τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο $a \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \kappa^2 - 8 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 4\kappa + 4$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του κ υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Λύση

Το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ υπάρχει αν και μόνον αν υπάρχουν και τα δύο τα πλευρικά όρια στο a και είναι ίσα.

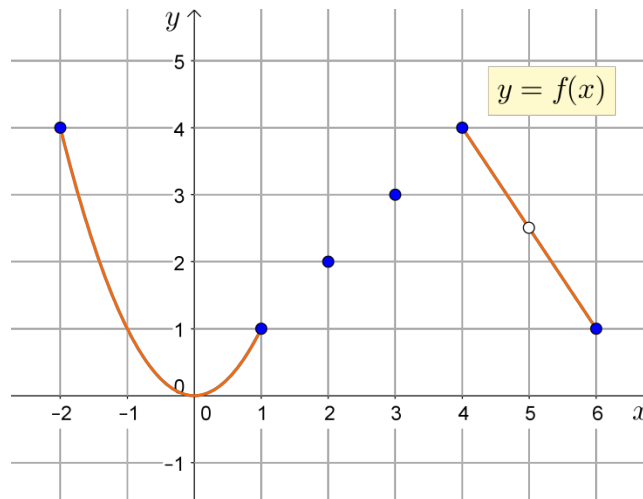
Συνεπώς:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &\Rightarrow \kappa^2 - 8 = 4\kappa + 4 \Rightarrow \kappa^2 - 4\kappa - 12 = 0 \\ &\Rightarrow (\kappa - 6)(\kappa + 2) = 0 \Rightarrow \kappa = 6 \quad \text{ή} \quad \kappa = -2 \end{aligned}$$

Το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ υπάρχει, όταν $\kappa = 6$ ή $\kappa = -2$.

Παράδειγμα 5

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $y = f(x)$. Να εξετάσετε αν έχει έννοια η μελέτη του ορίου στα σημεία $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$ της συνάρτησης $y = f(x)$ και να βρείτε το όριο στις περιπτώσεις που έχει νόημα η μελέτη του.



Λύση

Παρατηρούμε από τη γραφική παράσταση ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο:

$$D_f = [-2, 1] \cup \{2\} \cup \{3\} \cup [4, 5) \cup (5, 6]$$

- Στο $x_1 = -1$ έχει έννοια η μελέτη του ορίου, γιατί υπάρχουν τιμές του πεδίου ορισμού της οσοδήποτε κοντά στο -1 . Δηλαδή, το -1 είναι σημείο συσσώρευσης της συνάρτησης f . Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

- Στο $x_2 = 2$ δεν έχει έννοια η μελέτη του ορίου, γιατί δεν υπάρχουν τιμές του πεδίου ορισμού της οσοδήποτε κοντά στο 2 . Δηλαδή, το 2 είναι μεμονωμένο σημείο της συνάρτησης f .

Για παράδειγμα, το $x_0 = 1,9$ (το οποίο βρίσκεται «κοντά» στο 2) δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

- Στο $x_3 = 4$ η μελέτη του ορίου έχει έννοια μόνο από δεξιά, αφού η συνάρτηση ορίζεται στο διάστημα $[4, 6]$. Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 4$$

- Στο $x_4 = 5$ έχει έννοια η μελέτη του ορίου, γιατί υπάρχουν τιμές του πεδίου ορισμού της συνάρτησης οσοδήποτε κοντά στο $x_4 = 5$, παρόλο που το $x_4 = 5$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \frac{5}{2}$$

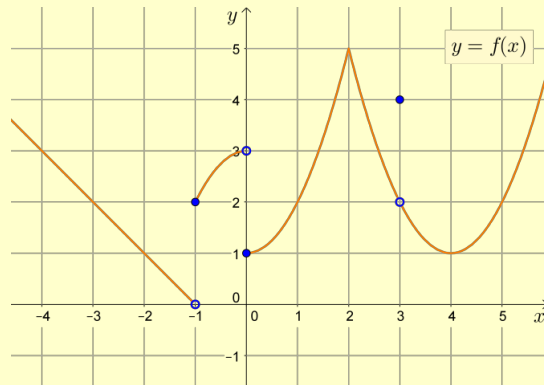
Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Αν $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, τότε το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ δεν υπάρχει.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν $y = f(x)$, $x > 3$ και ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5$, τότε $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \geq 3 \\ 7 - x, & x < 3 \end{cases}$, τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

- (α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (β) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$
 (γ) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ (δ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 (ε) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (στ) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
 (ζ) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ (η) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$



3. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 3$$

Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

- (α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (β) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

4. Τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο $a \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 3 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 4 - \kappa^2$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του κ υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

5.4 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ

Διερεύνηση

(α) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με τύπο $f(x) = x + 1$ και $g(x) = x - 1$. Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

(β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f + g$, $f - g$ και fg . Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f + g)(x), \lim_{x \rightarrow 2} (f - g)(x), \lim_{x \rightarrow 2} (fg)(x)$$

(γ) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα στα (α) και (β). Τι παρατηρείτε;

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου συνάρτησης στο a , αποδεικνύονται βασικές ιδιότητες με πράξεις συναρτήσεων, που συνοψίζονται πιο κάτω:

Ιδιότητες

Αν οι συναρτήσεις f και g ορίζονται στα σύνολα A και B , αντίστοιχα, υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο a , όπου a σημείο συσσώρευσης για το σύνολο $A \cap B$, τότε:

(α) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

(β) $\lim_{x \rightarrow a} (\kappa f(x)) = \kappa \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, κ σταθερά

(γ) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

(δ) Αν $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$.

(ε) $\lim_{x \rightarrow a} (f^v(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^v$, $v \in \mathbb{N}$

(στ) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right|$

(ζ) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[v]{f(x)} = \sqrt[v]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$, $f(x) \geq 0$, $v \in \mathbb{N}$

Παρατηρήσεις

- Η ιδιότητα (γ) ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.
- Η ιδιότητα (ε) είναι επέκταση της ιδιότητας (γ).

Παράδειγμα 1

Οι συναρτήσεις f και g ορίζονται στο \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -3$.

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια.

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 4} (f(x) - g(x))$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 4} (2f(x) + 5g(x))$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 4} (f(x)g(x))$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 4} [g^5(x)]$$

$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow 4} [\sqrt[3]{f(x)}]$$

$$(\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|g(x)|}{f(x)}$$

Λύση

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 4} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) - \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 1 - (-3) = 4$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 4} (2f(x) + 5g(x)) = 2 \lim_{x \rightarrow 4} f(x) + 5 \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 2 \cdot 1 + 5(-3) = -13$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 4} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 1(-3) = -3$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 4} [g^5(x)] = \left(\lim_{x \rightarrow 4} g(x) \right)^5 = (-3)^5 = -243$$

$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow 4} [\sqrt[3]{f(x)}] = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 4} f(x)} = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$(\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|g(x)|}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} |g(x)|}{\lim_{x \rightarrow 4} f(x)} = \frac{|\lim_{x \rightarrow 4} g(x)|}{1} = |-3| = 3$$

Οι ιδιότητες που ακολουθούν προκύπτουν από τις προηγούμενες ιδιότητες.

Ιδιότητες

- Αν $y = P(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

- Αν $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα και $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι ρητή συνάρτηση με $Q(a) \neq 0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} (x^7 - 2x^3 + 1)$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3} \right)$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3}{x^3 + x} \right)$$

Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι η $f(x) = x^7 - 2x^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, είναι πολυωνυμική συνάρτηση. Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^7 - 2x^3 + 1) = 1^7 - 2 \cdot 1^3 + 1 = 0$$

(β) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$, $x \neq -3$, είναι ρητή και δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής στο 2. Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-1}{x+3} \right) = \frac{2-1}{2+3} = \frac{1}{5}$$

(γ) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, $x \neq 3$, είναι ρητή και μηδενίζεται ο παρονομαστής στο 3. Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πιο πάνω πρόταση. Επομένως, απλοποιούμε τη συνάρτηση f και παίρνουμε ότι:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = x + 3, \quad x \neq 3$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

(δ) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x^3+x}$, $x \neq 0$, είναι ρητή και μηδενίζεται ο παρονομαστής στο 0. Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη πιο πάνω πρόταση. Επομένως, απλοποιούμε τη συνάρτηση f και παίρνουμε ότι:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3 + x} = \frac{x^3}{x(x^2 + 1)} = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x \neq 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right) = \frac{0}{0 + 1} = 0$$

Παράδειγμα 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 5, & x < 3 \\ 2, & x = 3 \\ \frac{5}{x^2 - 8}, & x > 3 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Λύση

Η συνάρτηση αλλάζει τύπο στο $x_0 = 3$. Έτσι, υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια της συνάρτησης f στο 3. Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^3 - 3x^2 + 5) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 5 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5}{x^2 - 8} = \frac{5}{3^2 - 8} = 5$$

Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια στο 3 είναι ίσα. Επομένως, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$.

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2|x-2|}{x-2}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$$

Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι μηδενίζεται ο παρονομαστής στο 2. Γράφουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2|x-2|}{x-2}, \quad x \neq 2 \text{ ως συνάρτηση πολλαπλού τύπου:}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2(x-2)}{x-2}, & x > 2 \\ -\frac{x^2(x-2)}{x-2}, & x < 2 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x > 2 \\ -x^2, & x < 2 \end{cases}$$

Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια της συνάρτησης f στο 2. Έχουμε ότι:

- Για $x > 2$, έχουμε ότι $f(x) = x^2$. Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4$$

- Για $x < 2$, έχουμε ότι $f(x) = -x^2$. Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2) = -4$$

Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια στο 2 δεν είναι ίσα. Επομένως, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

(β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}, x \neq \pm 1$. Παρατηρούμε ότι μηδενίζεται ο παρονομαστής στο 1. Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή, που είναι η $\sqrt{x^2+3}+2, x \in \mathbb{R}$ και παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3})^2-2^2} \\ &= \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1} = \frac{\sqrt{1^2+3}+2}{1+1} = 2$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5)$

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{10} - 5x^4 + 3x^2 - 7x + 3)$

(γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2}{2x + 1}$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(x^2 - \frac{5}{x + 2} \right)$

2. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται στο \mathbb{R} και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -4$ και $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 4$, τότε $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x)) = 0$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$, τότε $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν f πολυώνυμο, τότε $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = f(-4)$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

3. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 4x + 1)^5$

(β) $\lim_{x \rightarrow -5} |x^2 - 3x + 1|$

(γ) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{x^2 + 4}$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x - 2|}{x + 1}$

4. Δίνονται συναρτήσεις f και g , τέτοιες ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -3$$

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow -2} (f(x) - g(x))$

(β) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{6f(x)}{g(x)} \right)$

(γ) $\lim_{x \rightarrow -2} (f^{10}(x) \cdot |g(x)|)$

(δ) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[7]{(3f(x) + g(x))}$

5. Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο της f στο a , αν:

(α) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 2 \\ 3x - 4, & x \geq 2 \end{cases}, \quad a = 2$

(β) $f(x) = \begin{cases} |x - 2|, & x \leq 3 \\ \frac{3}{x} + 1, & x > 3 \end{cases}, \quad a = 3$

6. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x^2 + x}$$

$$(\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2| + x^2 - 4}{x - 2}$$

7. Δίνεται η συνάρτηση πολλαπλού τύπου:

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + \beta, & x \leq -1 \\ ax^2 + \beta x, & x > -1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των a και β , έτσι ώστε να ισχύει:

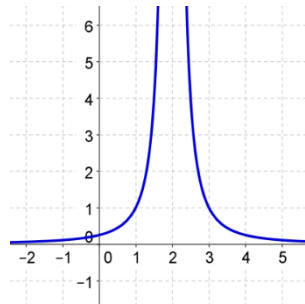
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4$$

5.5 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

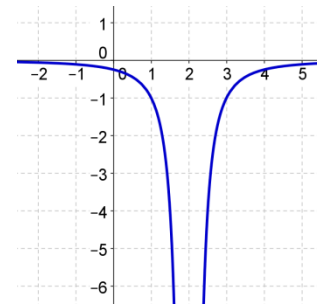
Διερεύνηση

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων με πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

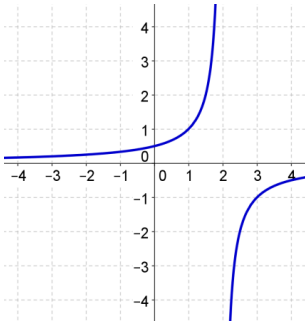
(α)



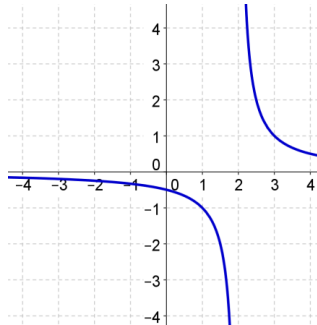
(β)



(γ)



(δ)



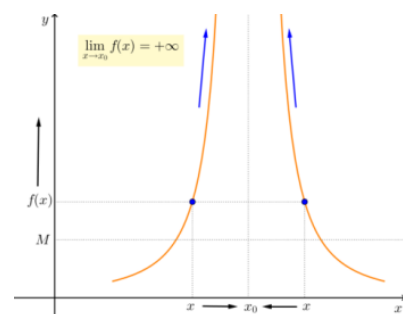
Να ερευνήσετε τη συμπεριφορά των τιμών των πιο πάνω συναρτήσεων, όταν το x τείνει στο 2 από δεξιά και από αριστερά. Τι παρατηρείτε;

5.5.1 Η έννοια του μη πεπερασμένου ορίου

Η έννοια του μη πεπερασμένου ορίου είναι γνωστή και ως έννοια του άπειρου ορίου. Όταν οι τιμές $f(x)$ μιας συνάρτησης f , που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ «ξεπερνούν» κάθε πραγματικό αριθμό (είτε προς τα πάνω, είτε προς τα κάτω) καθώς το x προσεγγίζει το x_0 (είτε από δεξιά είτε από αριστερά), τότε η συνάρτηση f έχει όριο το άπειρο.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $y = f(x)$. Παρατηρούμε ότι όταν το x κινείται είτε από δεξιά είτε από αριστερά στον άξονα των x , προσεγγίζοντας τον πραγματικό αριθμό x_0 , οι τιμές $f(x)$ αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιοδήποτε θετικό αριθμό M . Σε αυτή την περίπτωση, η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $+\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$



Ορισμός

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $D_f = (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

αν και μόνον αν για κάθε $M > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in D_f$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει $f(x) > M$.

Ισοδύναμα, ο πιο πάνω ορισμός γράφεται ως:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Παράδειγμα 1

Να δείξετε, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Λύση

Θεωρούμε συνάρτηση f με τύπο:

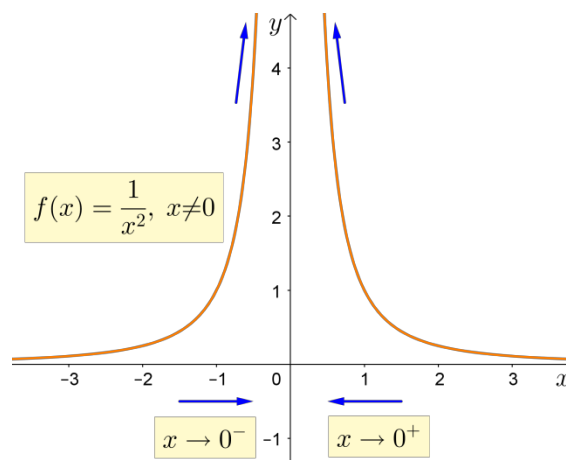
$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $M > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ με $0 < |x - 0| < \delta$ να ισχύει $f(x) > M \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > M$. Είναι:

$$\frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\frac{1}{M}}$$

Συνεπώς, αρκεί να επιλέξουμε $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}}$. Έτσι, έχουμε αποδείξει ότι:

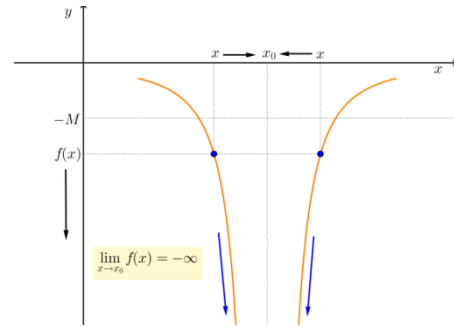
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



Γενικότερα, ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $y = f(x)$. Παρατηρούμε ότι όταν το x κινείται είτε από δεξιά είτε από αριστερά στον άξονα των x , προσεγγίζοντας τον πραγματικό αριθμό x_0 , οι τιμές $f(x)$ μειώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιοδήποτε αρνητικό αριθμό $-M$ ($M > 0$).



Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $-\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Ορισμός

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $D_f = (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

αν και μόνον αν για κάθε $M > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in D_f$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει $f(x) < -M$.

Ισοδύναμα, ο πιο πάνω ορισμός γράφεται ως:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in D_f \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$

5.5.2 Πλευρικά όρια – Ιδιότητες

Πρόταση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

Με τη βοήθεια του ορισμού, αποδεικνύονται οι πιο κάτω ιδιότητες:

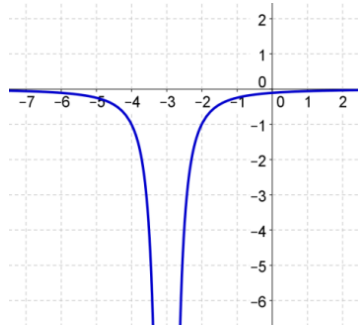
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ όταν το x τείνει στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ όταν το x τείνει στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$, $\kappa \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-3\}$$

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -3} \left(-\frac{1}{(x+3)^2} \right)$.



Λύση

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$$

Συνεπώς:

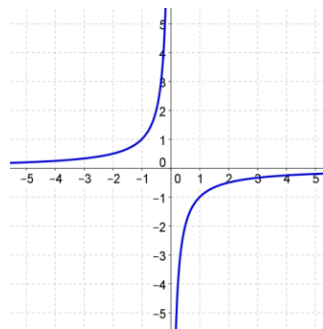
$$\lim_{x \rightarrow -3} \left(-\frac{1}{(x+3)^2} \right) = -\infty$$

Παράδειγμα 3

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = -\frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \right)$.



Λύση

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

Συνεπώς, το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \right)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-4)^7}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^{10}}$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{|x+3|}$$

Λύση

(α) Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια στο 4.

Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{(x-4)^7} = +\infty \quad (x-4)^7 > 0, \text{ όταν } x \rightarrow 4^+$$

Ακολουθως, έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{(x-4)^7} = -\infty \quad (x-4)^7 < 0, \text{ όταν } x \rightarrow 4^-$$

Τα πλευρικά όρια στο 4 είναι άνισα. Επομένως, το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-4)^7}$ δεν υπάρχει.

(β) Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^{10}} = +\infty \quad (x-2)^{10} > 0, \text{ όταν } x \rightarrow 2$$

(γ) Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{|x+3|} = +\infty \quad |x+3| > 0, \text{ όταν } x \rightarrow -3$$

5.5.3 Επέκταση του \mathbb{R}

Είναι χρήσιμο να επεκτείνουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} με δύο ακόμα στοιχεία, το $+\infty$ και το $-\infty$, τα οποία δεν είναι πραγματικοί αριθμοί. Έτσι, δημιουργείται το σύνολο $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, με $-\infty < x < +\infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Στο σύνολο $\bar{\mathbb{R}}$ μπορούμε να ορίσουμε πράξεις, σύμφωνα με τον πιο κάτω πίνακα:

Πράξεις στο $\bar{\mathbb{R}}$	
<ul style="list-style-type: none">• $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$• $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$• $(+\infty) + a = +\infty, \forall a \in \mathbb{R}$• $(-\infty) + a = -\infty, \forall a \in \mathbb{R}$• $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$• $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$• $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$	<ul style="list-style-type: none">• $a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$• $a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } a > 0 \\ +\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$• $\frac{a}{\pm\infty} = 0, \forall a \in \mathbb{R}$• $a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 1 \\ 0, & \text{αν } 0 \leq a < 1 \end{cases}$• $(+\infty)^a = +\infty, \forall a \in \mathbb{R}^+$

Απροσδιόριστες Μορφές

Ορισμένες από τις αλγεβρικές πράξεις του \mathbb{R} δεν μπορούν να επεκταθούν στο $\overline{\mathbb{R}}$, γιατί **δεν έχουν μονοσήμαντα ορισμένη τιμή**. Οι μορφές αυτές των πράξεων λέγονται **απροσδιόριστες**.

Μερικές απροσδιόριστες μορφές, που προκύπτουν ως άμεση συνέπεια ορίων, είναι:

$$\begin{aligned} & (+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \\ & 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0^0, \quad 1^{\pm\infty}, \quad (\pm\infty)^0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5

Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) τα πιο κάτω όρια:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{|x|} \right) & \quad (\beta) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5}{2 - x} & \quad (\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x} \right) = +\infty + \infty = +\infty \quad x > 0, \text{ όταν } x \rightarrow 0^+$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5}{2 - x} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left((x^2 - 5) \cdot \frac{1}{2 - x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 5) \cdot \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{2 - x} \right) \\ &= (-1)(+\infty) = -\infty \end{aligned} \quad 2 - x > 0, \text{ όταν } x \rightarrow 2^-$$

(γ) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x + 1} \cdot \frac{1}{x - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x + 1} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (+\infty) = +\infty \end{aligned} \quad x - 1 > 0, \text{ όταν } x \rightarrow 1^+$$

Παράδειγμα 6

Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x^2 - 3x - 12}{x - 5} \right)$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 3x - 12}{x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5^-} \left((x^2 - 3x - 12) \cdot \frac{1}{x - 5} \right) \\ &= (-2)(-\infty) = +\infty \end{aligned} \quad x - 5 < 0, \text{ όταν } x \rightarrow 5^-$$

Ομοίως, έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 3x - 12}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \left((x^2 - 3x - 12) \cdot \frac{1}{x - 5} \right) \\ = (-2)(+\infty) = -\infty \quad x - 5 > 0, \text{ όταν } x \rightarrow 5^+$$

Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια της συνάρτησης f στο $x_0 = 5$ είναι άνισα. Επομένως, το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x^2 - 3x - 12}{x - 5} \right)$$

δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 7

Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο της f στο $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x < 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

Λύση

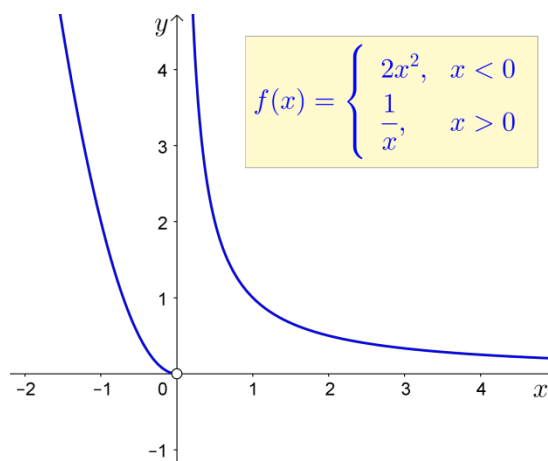
Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x^2 = 2 \cdot 0^2 = 0$$

Ακολουθώντας, έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad x > 0, \text{ όταν } x \rightarrow 0^+$$

Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια της συνάρτησης f στο $x_0 = 0$ είναι άνισα. Επομένως, το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δεν υπάρχει.



Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

$$(\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{x-4}$$

$$(\beta) \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2}$$

$$(\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{1}{(7-x)^3}$$

$$(\delta) \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{(x+3)^{2018}}$$

2. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x),$$

όταν:

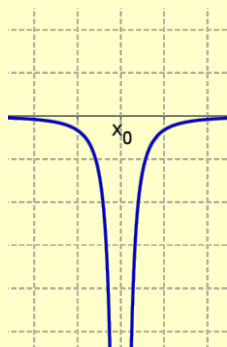
$$\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) \cdot (3x^2 - 4)) = -\infty$$

3. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

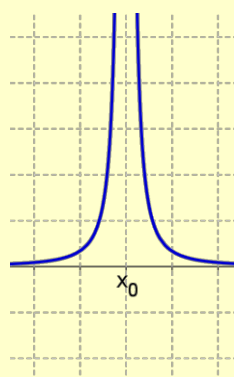
(α)	Αν $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) - g(x)) = +\infty$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -1$, τότε $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, $\nu \in \mathbb{N}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

4. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{x_0\}$. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο στο x_0 σε κάθε περίπτωση.

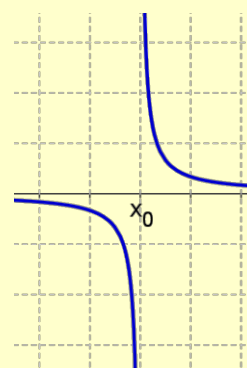
(α)



(β)



(γ)



5. Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο της f στο $x = 0$:

$$(\alpha) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} \quad (\beta) \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x^3}, & x > 0 \end{cases}$$

6. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

$$(\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right) \quad (\beta) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x^2 + x - 1}{4 - x} \right)$$
$$(\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{2x^2 + 1}{|x + 3|} \right) \quad (\delta) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x + 3}{x^2 - 6x + 9} \right)$$

5.6 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Διερεύνηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, $x \neq 1$.

- Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών χρησιμοποιώντας αριθμομηχανή και να κάνετε τις παρατηρήσεις σας.

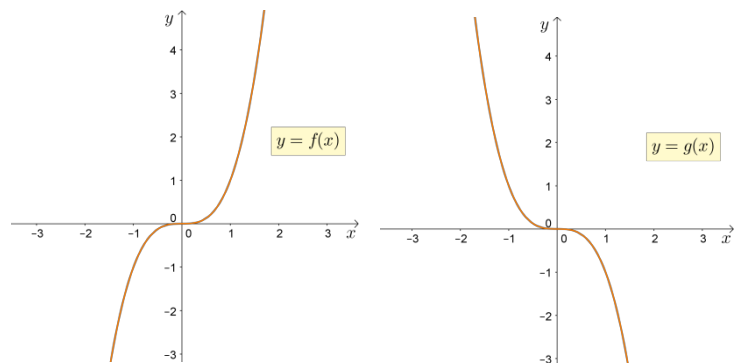
x	$f(x) = \frac{2x}{x-1}, x \neq 1$
-10	
-100	
-10000	
.	
.	
.	
10	
100	
10000	
1000000	

- Να εξετάσετε τι συμβαίνει με τις τιμές της συνάρτησης f :
(α) όταν το x αυξάνεται απεριόριστα
(β) όταν το x μειώνεται απεριόριστα
- Να ανοίξετε το αρχείο «[Blyk_Kat_En05_Oria2.ggb](#)» και χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, να κάνετε ανάλογες παρατηρήσεις όπως και πιο πάνω.

Διερεύνηση 2

Να εξετάσετε τη συμπεριφορά των συναρτήσεων f και g από τη γραφική τους παράσταση:

- (α) όταν το x αυξάνεται απεριόριστα
- (β) όταν το x μειώνεται απεριόριστα



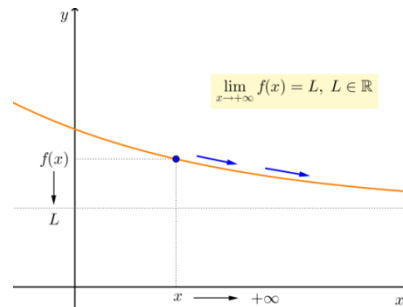
5.6.1 Ορισμός ορίου συνάρτησης στο $+\infty$

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a, +\infty)$.

- Όταν οι τιμές της συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό L ($L \in \mathbb{R}$), καθώς το x αυξάνει απεριόριστα, τότε η συνάρτηση f έχει όριο τον πραγματικό αριθμό L και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Ο ορισμός του ορίου συνάρτησης στο $+\infty$ δίνεται συμβολικά ως εξής:

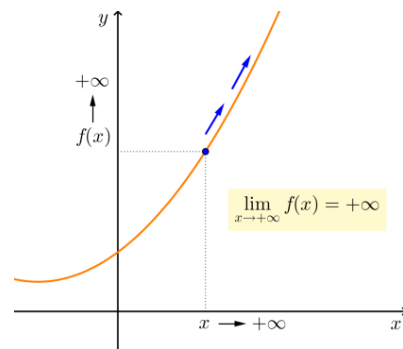


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 > 0 : \forall x \in D_f \text{ με } x > x_0 \text{ ισχύει } |f(x) - L| < \varepsilon$$

- Όταν οι τιμές της συνάρτησης f αυξάνονται απεριόριστα, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα, τότε η συνάρτηση f έχει όριο το $+\infty$ στο $+\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Ο ορισμός του ορίου συνάρτησης στο $+\infty$ δίνεται συμβολικά ως εξής:

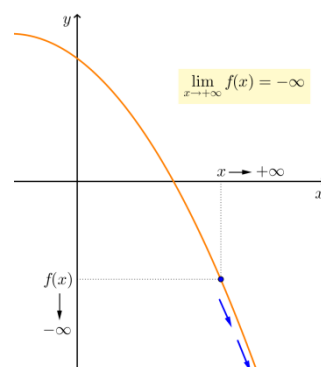


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0 > 0 : \forall x \in D_f \text{ με } x > x_0 \text{ ισχύει } f(x) > M$$

- Όταν οι τιμές της συνάρτησης f μειώνονται απεριόριστα, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα, τότε η συνάρτηση f έχει όριο το $-\infty$ στο $+\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Ο ορισμός του ορίου συνάρτησης στο $+\infty$ δίνεται συμβολικά ως εξής:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0 > 0 : \forall x \in D_f \text{ με } x > x_0 \text{ ισχύει } f(x) < -M$$

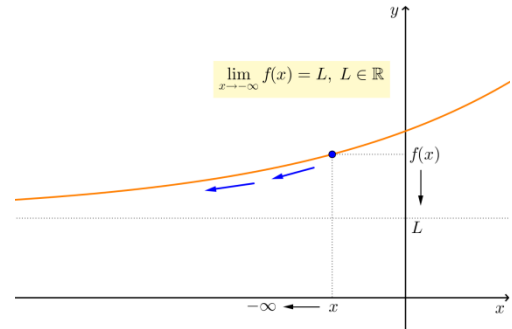
5.6.2 Ορισμός ορίου συνάρτησης στο $-\infty$

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(-\infty, a)$.

- Όταν οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό L ($L \in \mathbb{R}$), καθώς το x μειώνεται απεριόριστα, τότε η συνάρτηση f έχει όριο τον πραγματικό αριθμό L στο $-\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Ο ορισμός του ορίου συνάρτησης στο $-\infty$ δίνεται συμβολικά ως εξής:

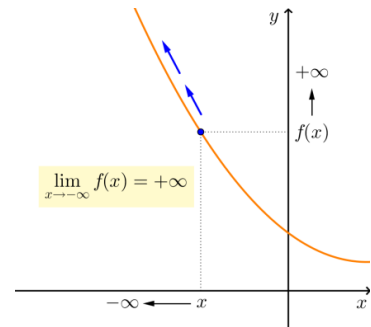


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 > 0: \forall x \in D_f \text{ με } x < -x_0 \text{ ισχύει } |f(x) - L| < \varepsilon$$

- Όταν οι τιμές της συνάρτησης f αυξάνονται απεριόριστα, καθώς το x μειώνεται απεριόριστα, τότε η συνάρτηση f έχει όριο το $+\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Ο ορισμός του ορίου συνάρτησης στο $-\infty$ δίνεται συμβολικά ως εξής:

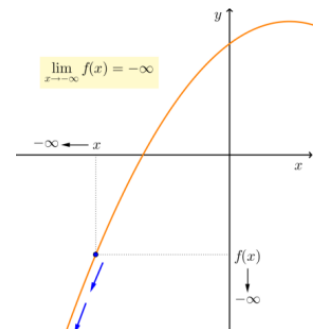


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0 > 0: \forall x \in D_f \text{ με } x < -x_0 \text{ ισχύει } f(x) > M$$

- Όταν οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ μειώνονται απεριόριστα, καθώς το x μειώνεται απεριόριστα, τότε η συνάρτηση f έχει όριο το $-\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Ο ορισμός του ορίου συνάρτησης στο $-\infty$ δίνεται συμβολικά ως εξής:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0 > 0: \forall x \in D_f \text{ με } x < -x_0 \text{ ισχύει } f(x) < -M$$

5.6.3 Όρια βασικών συναρτήσεων

Γενικά, για τα όρια στο $\pm\infty$, ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων, όπως και στον πραγματικό αριθμό x_0 , με την προϋπόθεση ότι:

- οι συναρτήσεις είναι ορισμένες στα κατάλληλα διαστήματα
- δεν καταλήγουν σε απροσδιόριστη μορφή

Όρια βασικών συναρτήσεων

$$(\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$(\beta) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c = c, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$$

$$(\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Πρόταση

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, με $a_n \neq 0$.

Τότε, ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$$

Πρόταση

Δίνεται η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_0}$, με $a_n \neq 0$ και $\beta_k \neq 0$.

Τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{\beta_k x^k} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{\beta_k x^k}$$

Παράδειγμα 1

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

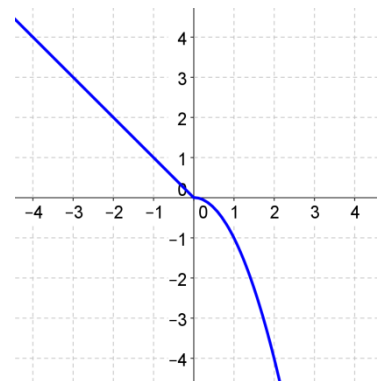
Λύση

Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνει απεριόριστα, οι τιμές της συνάρτησης f μειώνονται απεριόριστα.

Συνεπώς, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Παρατηρούμε ότι καθώς το x μειώνεται απεριόριστα, οι τιμές της συνάρτησης f αυξάνονται απεριόριστα.

Συνεπώς, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.



Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 4x)$

(β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 4x + 1)$

(γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^2 - 7x^3 - 4 + 2x)$

Λύση

(α) 1^{ος} τρόπος

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x = +\infty$.

Επομένως, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) - (+\infty)$. Παρατηρούμε ότι

$$3x^2 - 4x = 3x^2 \left(1 - \frac{4}{3x}\right)$$

και υπολογίζουμε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{3x}\right) = 1 - 0 = 1$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 4x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x^2 \left(1 - \frac{4}{3x}\right)\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{3x}\right) \\ &= (+\infty) \cdot 1 = +\infty \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος

Εφαρμόζοντας την αντίστοιχη πρόταση για όριο στο άπειρο πολυωνυμικής συνάρτησης και όρια βασικών συναρτήσεων, έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = +\infty$$

(γ) Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^2 - 7x^3 - 4 + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^3) = +\infty$$

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x + 1}{2x - 3}\right)$

(β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x - 1}{5x + 2}\right)$

(γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{2x + 7}\right)$

(δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{10x - 1}{5x^3 + 2}\right)$

(ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^4 - 5x^3 + 2x}{7x^2 - 4x + 1}\right)$

(στ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x - 3x^3 + 4x^2}{3 - x^2 + 6x^3}\right)$

Λύση

Εφαρμόζοντας την αντίστοιχη πρόταση για τη ρητή συνάρτηση, και όρια βασικών συναρτήσεων, έχουμε ότι:

$$(\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+1}{2x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

$$(\beta) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-1}{5x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{5x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$(\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{2x+7} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \frac{1}{2} (+\infty) = +\infty$$

$$(\delta) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{10x-1}{5x^3+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{10x}{5x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x^2} \right) = 2 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \right)^2 = 2 \cdot 0^2 = 0$$

$$(\epsilon) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^4 - 5x^3 + 2x}{7x^2 - 4x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^4}{7x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{7} = +\infty$$

$$(\sigma\tau) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x - 3x^3 + 4x^2}{3 - x^2 + 6x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-3x^3}{6x^3} \right) = -\frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω όρια:

$$(\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + |x-3|}{4x-1} \quad (\beta) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) \quad (\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 5x - 1}}{1-x}$$

Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι υπάρχει απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{+\infty}{-\infty} \right)$. Εφαρμόζοντας την αντίστοιχη πρόταση για τη ρητή συνάρτηση, και όρια βασικών συναρτήσεων, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + |x-3|}{4x-1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 3}{4x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{4x} && x-3 < 0, \text{ όταν } x \rightarrow -\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{4} = -\infty \end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι υπάρχει απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) - (+\infty)$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη συζυγή παράσταση $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}$, για να μετασχηματίσουμε τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x-2})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \frac{x+2 - x+2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \frac{4}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = 0.$$

(γ) Παρατηρούμε ότι υπάρχει απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)$. Γράφουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 5x - 1}}{1-x}$$

ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{4x^2 - 5x - 1}}{1 - x} = \frac{\sqrt{x^2 \left(4 - \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}}{x \left(\frac{1}{x} - 1\right)} = \frac{|x| \sqrt{4 - \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}}}{x \left(\frac{1}{x} - 1\right)} \\ &= \frac{-x \sqrt{4 - \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}}}{x \left(\frac{1}{x} - 1\right)} = \frac{-\sqrt{4 - \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x} - 1} \end{aligned} \quad |x| = -x, \quad x < 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 5x - 1}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 - \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{-\sqrt{4}}{-1} = 2$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

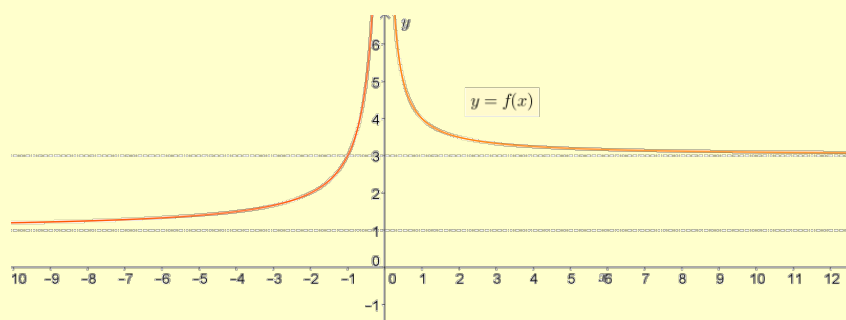
$$\begin{array}{lll}
 (\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 & (\beta) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 & (\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \\
 (\delta) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} & (\epsilon) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} & (\sigma\tau) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^5}
 \end{array}$$

2. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Όταν οι τιμές της συνάρτησης f αυξάνονται απεριόριστα, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lambda$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^6}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$



4. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^4 + 3x^2 - 4x - 3) & (\beta) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3x^4) \\
 (\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^5 - 3x^2 + 1} & (\delta) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2 - x - 7} \\
 (\epsilon) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - x^{10}}{x^3 + 5x^{10}} & (\sigma\tau) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 - x^4}{x - 2}
 \end{array}$$

5. Να βρείτε την τιμή του a , έτσι ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^3 + 2x^2 + 2}{1 - x^2 - x^3} = 4$$

6. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$(\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 5x + 4}$$

$$(\beta) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x)$$

$$(\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 1}}{x + 2}$$

$$(\delta) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1})$$

7. Δίνονται τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + 3ax + \beta}{\beta x^2 - 4a} = 3 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha^2 - x^2}{a\beta^2 - x\beta^2} = 6.$$

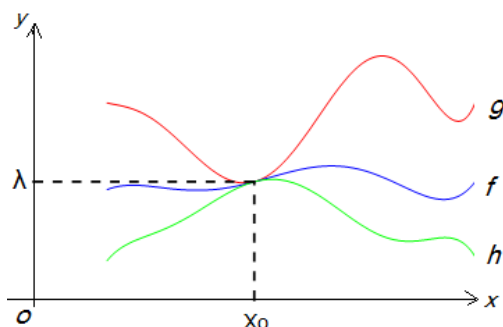
Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$.

8. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\sqrt{x-1}+1} - \sqrt{\sqrt{x+1}+1})$.

5.7 ΟΡΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

5.7.1 Κριτήριο παρεμβολής

Στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης f βρίσκονται μεταξύ των τιμών δύο άλλων συναρτήσεων h και g . Αν στην περιοχή του x_0 οι τιμές των συναρτήσεων h και g προσεγγίζουν τον πραγματικό αριθμό λ , τότε και οι τιμές της f επίσης προσεγγίζουν το λ στην ίδια περιοχή.



Θεώρημα

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h .

Αν σε μια περιοχή $\pi(x_0)$ ισχύει

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in \pi(x_0), \text{ εκτός ίσως του } x_0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lambda,$$

τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda.$$

Παρατήρηση

Το πιο πάνω θεώρημα ισχύει και όταν το $x \rightarrow +\infty$ ή $x \rightarrow -\infty$.

5.7.2 Βασικά όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Λήμμα

- $\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu x = 1$

Απόδειξη

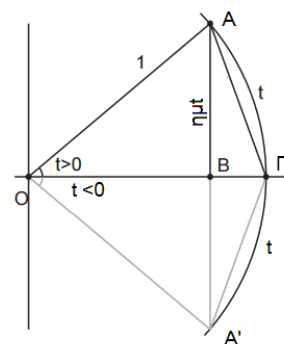
Παίρνουμε πάνω σε τριγωνομετρικό κύκλο γωνία AOG σε κανονική θέση, που αντιστοιχεί σε τόξο μήκους t , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ισχύει ότι:

$$0 < AB < AG < t \quad (1)$$

Έχουμε $B\Gamma = 1 - OB = 1 - \sigma\upsilon\nu t$.

Επομένως, στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (A\Gamma)^2 &= \eta\mu^2 t + (1 - \sigma\upsilon\nu t)^2 = 2 - 2\sigma\upsilon\nu t \\ \Rightarrow A\Gamma &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu t} \end{aligned}$$



Από την (1) έχουμε ισοδύναμα ότι:

$$0 < \eta\mu t < \sqrt{2} \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu t} < t$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} 0 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \eta\mu t \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{2} \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu t} \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} t$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \eta\mu t \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{2} \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu t} \leq 0$$

Από το κριτήριο παρεμβολής, προκύπτει ότι:

$$(\alpha) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \eta\mu t = 0$$

$$(\beta) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} (\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu t}) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu t} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} (1 - \sigma\upsilon\nu t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \sigma\upsilon\nu t = 1$$

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \eta\mu t = 0 \text{ και } \lim_{t \rightarrow 0^-} \sigma\upsilon\nu t = 1$$

Άρα,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \eta\mu t = \lim_{t \rightarrow 0^-} \eta\mu t = \lim_{t \rightarrow 0} \eta\mu t = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \sigma\upsilon\nu t = \lim_{t \rightarrow 0^-} \sigma\upsilon\nu t = \lim_{t \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu t = 1$$

Πρόταση

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0, x_0 \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0, x_0 \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

Απόδειξη

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \lim_{t \rightarrow 0} \eta\mu(x_0 + t)$ Θέτουμε $t = x - x_0$
 $x \rightarrow x_0 \Rightarrow t \rightarrow 0$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (\eta\mu x_0 \cdot \sigma\upsilon\nu t + \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot \eta\mu t)$$
 $\eta\mu(a + \beta) = \eta\mu a \sigma\upsilon\nu \beta + \sigma\upsilon\nu a \eta\mu \beta$

$$= \eta\mu x_0 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu t + \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \eta\mu t$$

$$= \eta\mu x_0 \cdot 1 + \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot 0 = \eta\mu x_0$$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \lim_{t \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu(x_0 + t)$ Θέτουμε $t = x - x_0$
 $x \rightarrow x_0 \Rightarrow t \rightarrow 0$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (\sigma\upsilon\nu x_0 \cdot \sigma\upsilon\nu t - \eta\mu x_0 \cdot \eta\mu t)$$
 $\sigma\upsilon\nu(a + \beta) = \sigma\upsilon\nu a \sigma\upsilon\nu \beta - \eta\mu a \eta\mu \beta$

$$= \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu t - \eta\mu x_0 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \eta\mu t$$

$$= \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot 1 - \eta\mu x_0 \cdot 0 = \sigma\upsilon\nu x_0$$

- Έχουμε ότι:

$$E_{OAG} < E_{\text{κ.τομέα } OAG} < E_{O\Gamma N} \quad E_{\text{τριγ.}} = \frac{\beta\upsilon}{2}$$

$$\frac{1 \cdot \eta\mu t}{2} < \frac{t}{2} < \frac{(1 \cdot \varepsilon\phi t)}{2} \Rightarrow \eta\mu t < t < \varepsilon\phi t \quad AB = \eta\mu t, \quad \Gamma N = \varepsilon\phi t$$

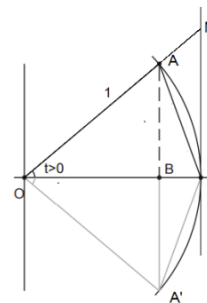
$$1 < \frac{t}{\eta\mu t} < \frac{1}{\sigma\upsilon\eta t} \quad (\eta\mu t > 0) \Rightarrow \sigma\upsilon\eta t < \frac{\eta\mu t}{t} < 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sigma\upsilon\eta t \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu t}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} 1 \Rightarrow 1 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu t}{t} \leq 1$$

$$\text{Άρα, } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu t}{t} = 1.$$

$$\text{Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι } \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu t}{t} = 1.$$

$$\text{Άρα, } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta\mu t}{t} = 1.$$



$$E_{\text{κ.τομέα}} = \frac{1}{2} R^2 \theta, \\ \theta \text{ σε ακτίνια}$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow \pi} ((x^2 - 1) \cdot \sigma\upsilon\eta x)$

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x - 4}$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon\phi^3 x$

(δ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sqrt[5]{\eta\mu x}$

Λύση

(α) Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (x^2 - 1) = \pi^2 - 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \sigma\upsilon\eta x = \sigma\upsilon\eta \pi = -1$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} ((x^2 - 1) \cdot \sigma\upsilon\eta x) = \lim_{x \rightarrow \pi} (x^2 - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow \pi} \sigma\upsilon\eta x = (\pi^2 - 1)(-1) = 1 - \pi^2$$

(β) Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x = \eta\mu 0 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x - 4) = -4$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x - 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x}{\lim_{x \rightarrow 0} (x - 4)} = \frac{0}{-4} = 0$$

(γ) Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon\phi x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\eta x} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x}{\lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\eta x} = \frac{\eta\mu 0}{\sigma\upsilon\eta 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon\phi^3 x = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon\phi x \right)^3 = 0^3 = 0$$

(δ) Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \eta\mu x = \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sqrt[5]{\eta\mu x} = \sqrt[5]{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \eta\mu x} = \sqrt[5]{1} = 1$$

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4}$

Λύση

(α) Θέτουμε $u = 3x \Rightarrow x = \frac{1}{3}u$. Επειδή ισχύει $x \rightarrow 0 \Rightarrow 3x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{\frac{1}{3}u} = 3 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 3 \cdot 1 = 3$$

Συνεπώς, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = 3$.

(β) Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4} = \frac{1}{x+2} \cdot \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}$$

Επομένως, αρκεί να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}$, αφού $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$.

Θέτουμε $u = x - 2$. Επειδή ισχύει $x \rightarrow 2 \Rightarrow x - 2 \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

Συνεπώς:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x+2} \cdot \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x+2} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta\mu \left(\frac{1}{x} \right)$

(β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x+3}$

Λύση

(α) Για $x \neq 0$ ισχύει:

$$-1 \leq \eta\mu \left(\frac{1}{x} \right) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x} \right) \leq x^2, \text{ αφού } x^2 > 0$$

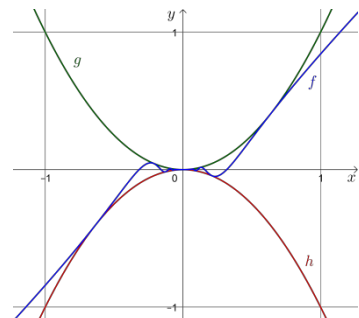
Δηλαδή, η συνάρτηση $f(x) = x^2 \eta\mu \left(\frac{1}{x} \right)$ παρεμβάλλεται μεταξύ των συναρτήσεων $h(x) = -x^2$ και $g(x) = x^2$.

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Από το κριτήριο της παρεμβολής προκύπτει ότι:

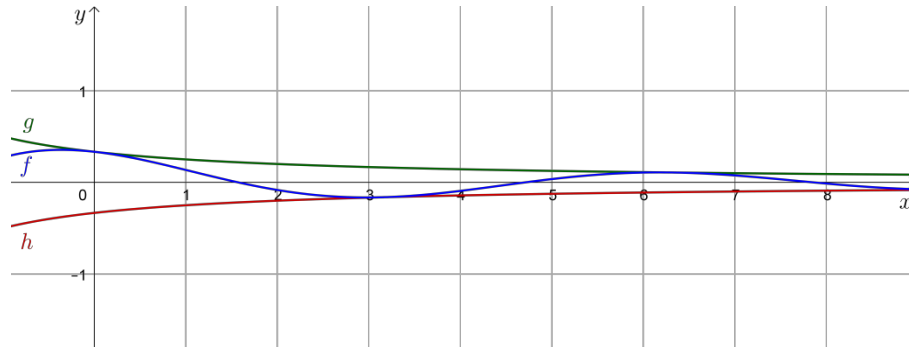
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$



(β) Ισχύει ότι:

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x+3} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x+3} \leq \frac{1}{x+3}, \text{ αφού } x > 0$$

Δηλαδή, η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x+3}$ παρεμβάλλεται μεταξύ των συναρτήσεων $h(x) = -\frac{1}{x+3}$ και $g(x) = \frac{1}{x+3}$.



Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x+3} \right) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+3} = 0$$

Από το κριτήριο της παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x+3} = 0$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^4}{\sin x}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x + 1}$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \tau\epsilon\mu x$$

2. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 3x}{x}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu 4x}$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\varphi 2x}{x}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\eta\mu(x - 4)}{x^3 - 4x^2}$$

$$(\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^2 x}{x^2}$$

$$(\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x}{x \eta\mu 2x}$$

3. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} x^4 \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x - 5}$$

$$(\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin 3x}{x^3 + x}$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^2 - 2x + 1) \eta\mu\left(\frac{1}{x - 1}\right) \right]$$

5.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Διερεύνηση

Δίνονται οι πιο κάτω γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων f , οι οποίες είναι ορισμένες σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$.

(α) Να μελετήσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

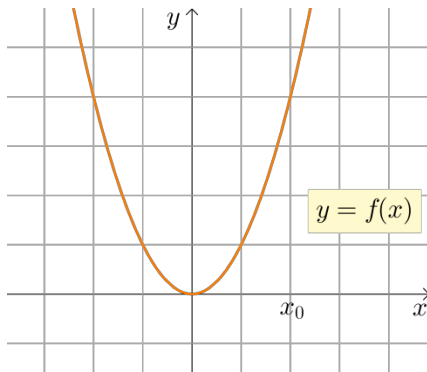
την αριθμητική τιμή $f(x_0)$ και να εξετάσετε αν ισχύει η ισότητα

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

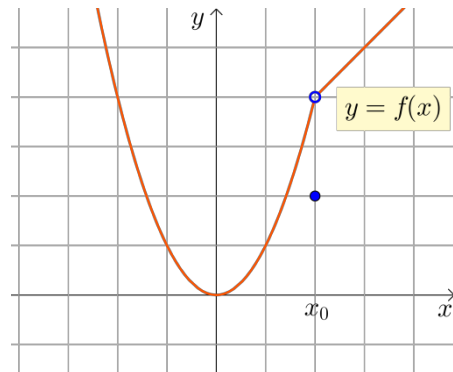
σε κάθε περίπτωση.

(β) Να αναφέρετε τις παρατηρήσεις σας για τη συνάρτηση f , όταν δεν ισχύει η πιο πάνω ισότητα.

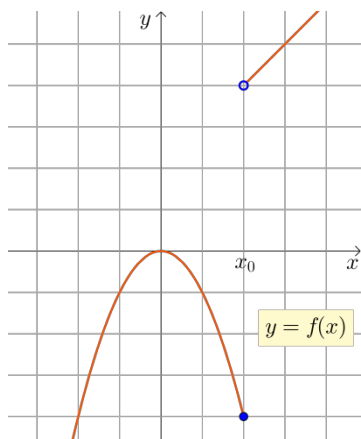
i.



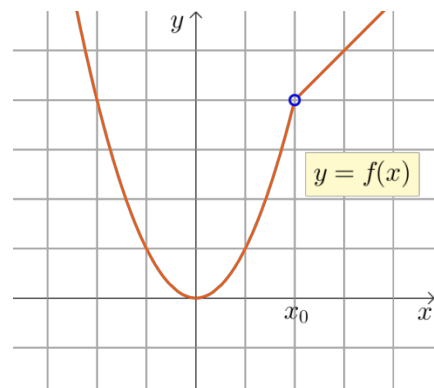
ii.



iii.



iv.



5.8.1 Ορισμός συνέχειας σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης

Ορισμός

Έστω f συνάρτηση και x_0 είναι ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Η συνάρτηση f λέγεται **συνεχής στο x_0** , όταν ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Για να ισχύει η πρόταση $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, με $x_0 \in D_f$, όπου D_f το πεδίο ορισμού της f , πρέπει:

- να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Παρατήρηση

Αν έστω και ένα από τα πιο πάνω δεν ισχύει, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f **δεν είναι συνεχής** στο x_0 .

Παράδειγμα 1

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, $x \neq \pm 1$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι:

$$f(2) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2^2 - 1} = \frac{1}{3}$$

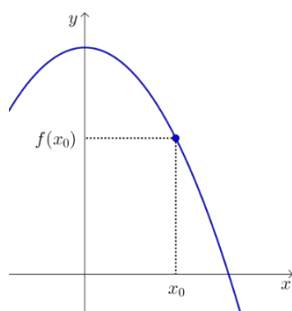
Επομένως, η συνάρτηση είναι συνεχής στο 2, γιατί:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \frac{1}{3}$$

Παράδειγμα 2

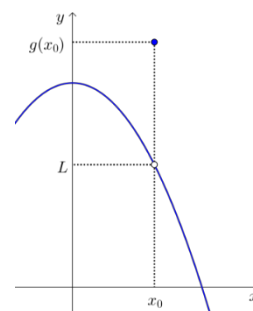
Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h , των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στα πιο κάτω σχήματα. Να αναφέρετε αν είναι συνεχείς στο x_0 , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(α)



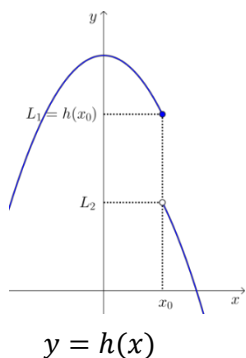
$$y = f(x)$$

(β)

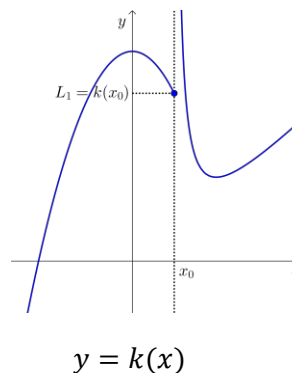


$$y = g(x)$$

(γ)



(δ)



Λύση

Από τις πιο πάνω γραφικές παραστάσεις έχουμε τα ακόλουθα:

(α) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο x_0 και ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Επομένως, η f είναι συνεχής στο x_0 .

(β) Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο x_0 , υπάρχει το όριο της

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

και είναι ο πραγματικός αριθμός L , αλλά:

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq g(x_0)$$

Επομένως, η g δεν είναι συνεχής στο x_0 .

(γ) Η συνάρτηση h είναι ορισμένη στο x_0 , αλλά δεν υπάρχει το όριο της

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x),$$

γιατί τα πλευρικά της όρια

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x) = h(x_0), \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x)$$

είναι διαφορετικά μεταξύ τους ($L_1 \neq L_2$).

Επομένως, η h δεν είναι συνεχής στο x_0 .

(δ) Η συνάρτηση k είναι ορισμένη στο x_0 , αλλά δεν υπάρχει το όριο της

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k(x),$$

γιατί τα πλευρικά της όρια

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} k(x) = k(x_0), \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} k(x) = +\infty$$

είναι διαφορετικά μεταξύ τους ($L_1 \neq L_2$).

Επομένως, η k δεν είναι συνεχής στο x_0 .

Παράδειγμα 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq 2 \\ 5 - x, & x < 2 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

Λύση

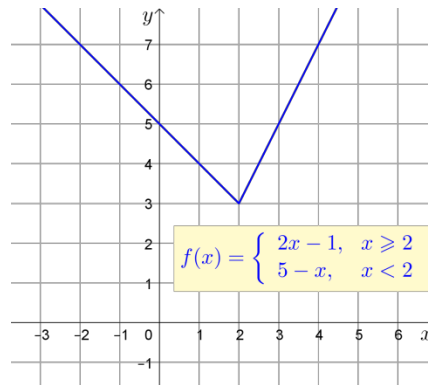
Έχουμε ότι:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (5 - x) = 5 - 2 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 1) = 4 - 1 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

Επίσης, $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Επομένως, η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, γιατί:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 3$$



Παράδειγμα 4

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση g με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & x > -3 \\ x - 4, & x \leq -3 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x_0 = -3$.

Λύση

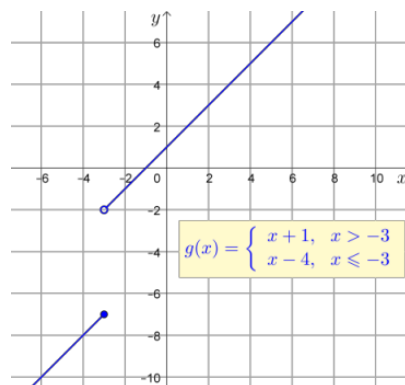
Έχουμε ότι:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} (x - 4) = -3 - 4 = -7 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} (x + 1) = -3 + 1 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$$

Συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x_0 = -3$.



Παράδειγμα 5

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση

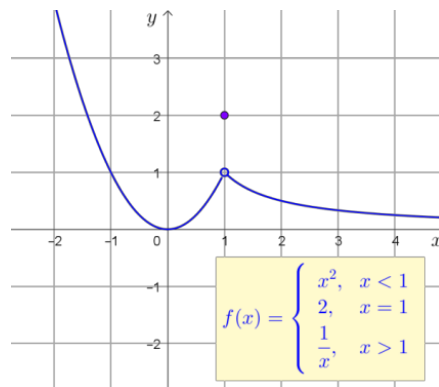
Έχουμε ότι:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

Επίσης, $f(1) = 2$.

Επομένως, η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, γιατί:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$



5.8.2 Συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός

Μια συνάρτηση ονομάζεται **συνεχής** στο διάστημα (a, β) , όταν αυτή είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in (a, \beta)$.

Παρατηρήσεις

- Μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in (a, \beta)$ και:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $y = P(x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, γιατί ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

- Κάθε ρητή συνάρτηση $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, με $Q(x) \neq 0$, είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, γιατί ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)},$$

για κάθε x_0 στο πεδίο ορισμού της.

- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους, γιατί ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Πρόταση

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις $f \pm g$, cf , (c σταθερά), f/g , $\frac{f}{g}$ με $g(x_0) \neq 0$, $|f|$, $\sqrt[n]{f}$ με $f(x) \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}$, με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 .

Παρατηρήσεις

- Όταν η συνέχεια μιας συνάρτησης f αναφέρεται σε σημείο x_0 , η έκφραση «συνεχής στο x_0 » σημαίνει ότι το x_0 βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της.
- Δεν έχει νόημα να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε σημείο εκτός του πεδίου ορισμού της.

Για παράδειγμα, δεν έχει νόημα να εξετάσουμε αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αφού το $x_0 = 0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Παράδειγμα 6

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ως προς τη συνέχεια.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

- Αν $x_0 \in A$, τότε ισχύει:

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}, \quad x_0 \neq 0$$

- Επίσης, ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

Αφού

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού της.

Παράδειγμα 7

Να εξετάσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις ως προς την συνέχεια.

$$(α) f(x) = \frac{\eta\mu x}{x^2 + 1} \quad (β) f(x) = |x^7 + 3| \quad (γ) f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Λύση

(α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το \mathbb{R} , αφού $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

- Η συνάρτηση με τύπο $g(x) = \eta\mu x$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , γιατί είναι τριγωνομετρική συνάρτηση.
- Η συνάρτηση με τύπο $h(x) = x^2 + 1$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , γιατί είναι πολυωνυμική συνάρτηση.

Συνεπώς, η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x^2 + 1}$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , ως πηλίκο δύο συνεχών συναρτήσεων.

(β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το \mathbb{R} .

Η συνάρτηση $g(x) = x^7 + 3$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , γιατί είναι πολυωνυμική συνάρτηση.

Συνεπώς, η συνάρτηση $f(x) = |x^7 + 3|$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , γιατί είναι η απόλυτη τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης.

(γ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το \mathbb{R} .

Η συνάρτηση $g(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο \mathbb{R} .

Επομένως, η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , γιατί είναι η τετραγωνική ρίζα μιας συνεχούς συνάρτησης.

Παράδειγμα 8

Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια:

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{x^3}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$$

Λύση

- Για $x < 0$, $f(x) = \eta\mu x$. Επομένως, είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$, γιατί είναι τριγωνομετρική συνάρτηση.
- Για $x > 0$, $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$. Επομένως, είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, γιατί είναι ρητή συνάρτηση.
- Θα εξετάσουμε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Έχουμε ότι:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \eta\mu x = \eta\mu 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x+1} = \frac{0}{0+1} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Επίσης, $f(0) = 0$. Συνεπώς, η συνάρτηση είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, αφού:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

Επομένως, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Πρόταση

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεση των δύο συναρτήσεων $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

Παράδειγμα 9

Να εξετάσετε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \eta\mu(x^2 + x)$, $x \in \mathbb{R}$ ως προς τη συνέχεια.

Λύση

- Η συνάρτηση $g(x) = \eta\mu x$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , γιατί είναι τριγωνομετρική συνάρτηση.
- Η συνάρτηση $h(x) = x^2 + x$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , γιατί είναι πολυωνυμική συνάρτηση.

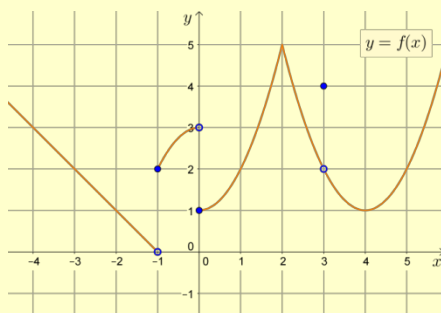
Συνεπώς, η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(x^2 + x)$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , γιατί είναι η σύνθεση $g \circ h$ των συνεχών συναρτήσεων g και h .

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις ως προς τη συνέχεια:

(α) $f(x) = x^5 - 3x^2$ (β) $g(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$ (γ) $h(x) = \eta\mu x$

2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η f είναι συνεχής.



3. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο \mathbb{R} , τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} .	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν η συνάρτηση $f + g$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , τότε και οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο \mathbb{R} .	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in (a, \beta)$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

4. Να εξετάσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις ως προς τη συνέχεια:

(α) $f(x) = \frac{x}{\eta\mu x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(β) $g(x) = \sqrt[3]{x} + |\sigma\upsilon\nu x|, x \geq 0$

(γ) $h(x) = \epsilon\varphi(3x^2 - 5)$

5. Να εξετάσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις ως προς τη συνέχεια.

(α) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ (β) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-16x}, & x < -1 \\ 4, & x = -1 \\ |x - 3|, & x > -1 \end{cases}$

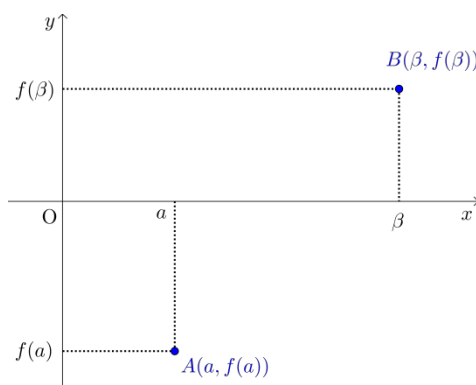
6. Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \leq -5 \\ x^2 + 2x, & -5 < x < 2 \\ \frac{\beta x}{2} - a, & x \geq 2 \end{cases}$$

5.9 ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Διερεύνηση

Στο πιο κάτω σχήμα φαίνονται τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

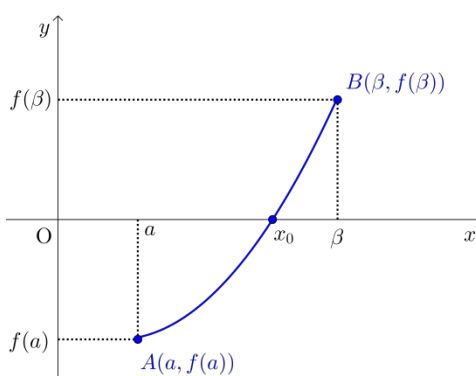


- (α) Να βρείτε τα πρόσημα των $f(a)$, $f(\beta)$ και $f(a) \cdot f(\beta)$.
- (β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $y = f(x)$, $x \in [a, \beta]$.
- (γ) Σε πόσα σημεία τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τον άξονα των τετμημένων;
- (δ) Μπορείτε να χαράξετε τη γραφική παράσταση μιας άλλης συνεχούς συνάρτησης f , έτσι ώστε να μην έχει ρίζες η εξίσωση $f(x) = 0$;
- (ε) Με τη βοήθεια των πιο πάνω ερωτημάτων, να διατυπώσετε μία πρόταση για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0, x \in [a, \beta]$.
- (στ) Να επαναλάβετε τις πιο πάνω δραστηριότητες, αλλάζοντας το σημείο A με το συμμετρικό του σημείο ως προς τον άξονα των τετμημένων.

5.9.1 Θεώρημα Bolzano – Εφαρμογές

Θεώρημα (Bolzano)

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και επιπλέον ισχύει ότι $f(a) \cdot f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.



Παρατήρηση

Για μια συνάρτηση f , για την οποία ισχύει το θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (a, β) .

Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^2 + (x - 1)\text{συν}x$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , γιατί προκύπτει από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε ότι:

$$f(0) = 2 \cdot 0^2 + (0 - 1)\text{συν}0 = -1 < 0 \text{ και } f(1) = 2 \cdot 1^2 + (1 - 1)\text{συν}1 = 2 > 0$$

Άρα, $f(0) \cdot f(1) = -2 < 0$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$. Ισχύει το θεώρημα Bolzano, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Παράδειγμα 2

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1, 2]$ με $f(-1) + f(2) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $[-1, 2]$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι:

$$f(-1) + f(2) = 0 \Rightarrow f(-1) = -f(2) \Rightarrow f(-1) \cdot f(2) = -f^2(2) \leq 0$$

- Αν $f(2) = 0$, τότε και $f(-1) = 0$. Έτσι, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $[-1, 2]$, τις $x = 2$ και $x = -1$.
- Αν $f(2) \neq 0$, τότε $f(-1) \cdot f(2) = -f^2(2) < 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 2]$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-1, 2)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ (Θεώρημα Bolzano).

Παράδειγμα 3

Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 3x + 1 = 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο διάστημα $(0, 2)$.

Λύση

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο \mathbb{R} , αφού είναι πολυωνυμική.

Παρατηρούμε ότι $f(1) = -1$ και $f(2) = 3$. Επομένως, $f(1) \cdot f(2) = -3 < 0$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και ισχύει $f(1) \cdot f(2) < 0$, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

(β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0, 1)$, αφού ήδη αποδείξαμε στο ερώτημα (α) ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(1, 2)$.

Παρατηρούμε ότι $f(0) = 1$ και $f(1) = -1$. Επομένως, $f(0)f(1) = -1 < 0$.

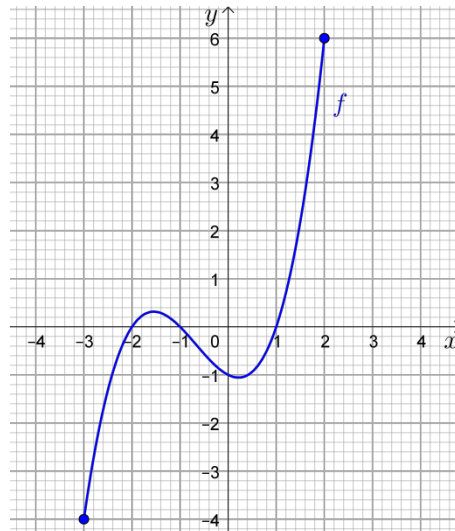
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0) \cdot f(1) < 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Συνεπώς, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο διάστημα $(0, 2)$.

5.9.2 Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Διερεύνηση

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $A = [-3, 2]$.



- (α) Να αναφέρετε το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f .
- (β) Να επιλέξετε ένα στοιχείο κ από το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να φέρετε την ευθεία $y = \kappa$. Έχει λύση η εξίσωση $f(x) = \kappa$, $\kappa \in f(A)$;
- (γ) Μπορείτε να φέρετε ευθεία $y = \kappa$, $\kappa \in f(A)$, έτσι ώστε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ να μην έχει λύσεις;
- (δ) Να διατυπώσετε μία πρόταση σχετικά με το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης $f(x) = \kappa$, όπου η συνάρτηση $y = f(x)$ ορίζεται σε κλειστό διάστημα Δ .

Το πιο κάτω θεώρημα είναι γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano.

Θεώρημα (Ενδιάμεσων Τιμών)

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και $f(a) \neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό κ μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ ($f(a) < \kappa < f(\beta)$ ή $f(\beta) < \kappa < f(a)$), υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = \kappa$.

Παράδειγμα 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + \eta\mu(\pi x)$. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\xi \in (-1, 3)$, ώστε να ισχύει $f(\xi) = 2$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Παρατηρούμε ότι $f(-1) = 1$, $f(3) = 9$. Επομένως, $f(-1) < 2 < f(3)$.

Επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[-1, 3]$ και $f(-1) \neq f(3)$ με $f(-1) < 2 < f(3)$, τότε από το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1, 3)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2$.

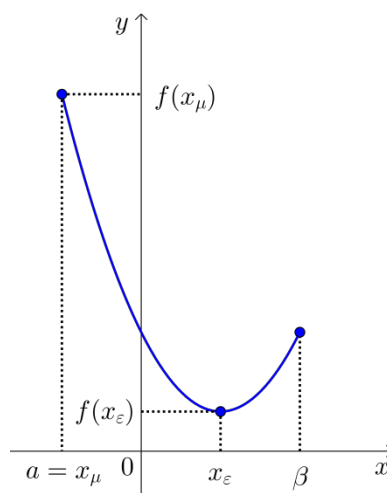
5.9.3 Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

Θεώρημα (Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής)

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $x_\varepsilon, x_\mu \in [a, \beta]$, στα οποία η f παίρνει την ελάχιστη τιμή $f(x_\varepsilon)$ και τη μέγιστη τιμή $f(x_\mu)$.

Παρατηρήσεις

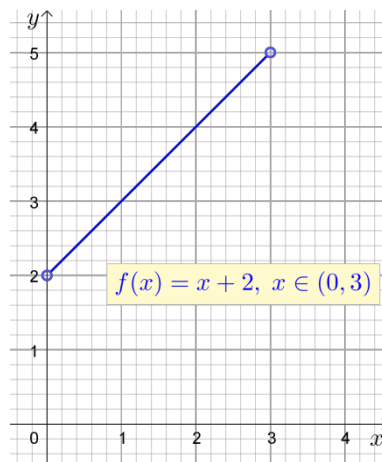
- Από το πιο πάνω θεώρημα, και σε συνδυασμό με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[f(x_\varepsilon), f(x_\mu)]$.



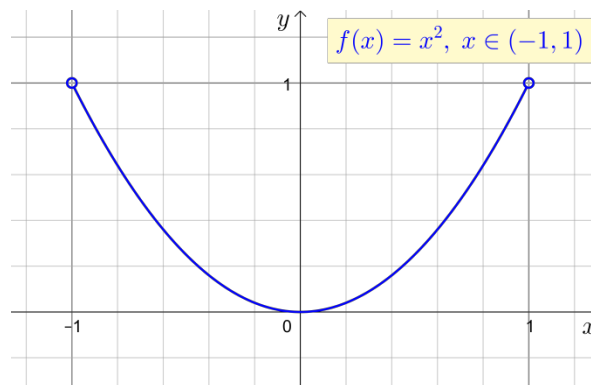
- Είναι σημαντική η προϋπόθεση ότι η συνάρτηση f πρέπει να είναι συνεχής, αλλά και να ορίζεται σε κλειστό διάστημα. Αν μία τουλάχιστον από τις δύο συνθήκες δεν ισχύει, τότε δεν ισχύει το θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής. Δηλαδή, η ύπαρξη μέγιστης ή/και ελάχιστης τιμής δεν εξασφαλίζεται.

Για παράδειγμα:

- Η συνάρτηση $f(x) = x + 2$, $x \in (0, 3)$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0, 3)$, αλλά αυτό δεν είναι κλειστό διάστημα. Μπορεί να δείξει κανείς ότι η f δεν έχει ούτε μέγιστη, αλλά και ούτε ελάχιστη τιμή.



- Η συνεχής συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in (-1, 1)$, η οποία ορίζεται πάλι σε ανοικτό διάστημα, έχει ελάχιστη τιμή στο $x_0 = 0$, αλλά δεν έχει μέγιστη τιμή.



Παράδειγμα 5

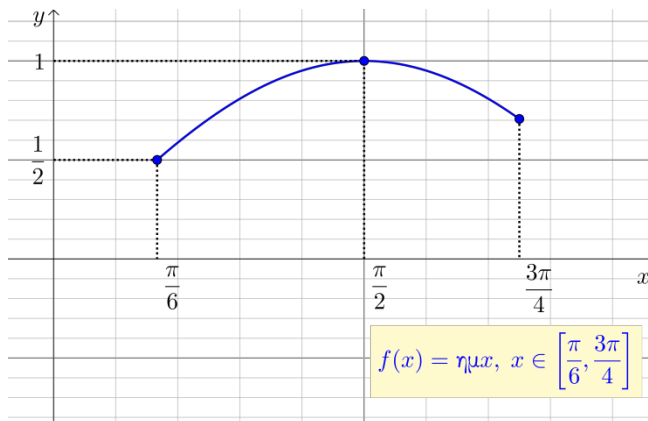
Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \eta\mu x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

Να βρείτε τη μέγιστη, την ελάχιστη τιμή της και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Λύση

Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Άρα, η συνάρτηση f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$, όπως φαίνεται πιο κάτω.



Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$, η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της, όταν $x_{\mu} = \frac{\pi}{2}$, την $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ και την ελάχιστη τιμή της όταν $x_{\varepsilon} = \frac{\pi}{6}$, την $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Συνεπώς, σε συνδυασμό με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Παράδειγμα 6

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν m είναι η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι:

$$m \leq \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9} \leq M$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [2, 4]$, γιατί m είναι η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[2, 4]$. Συνεπώς:

$$m \leq f(2) \leq M \Leftrightarrow 2m \leq 2f(2) \leq 2M$$

$$m \leq f(3) \leq M \Leftrightarrow 3m \leq 3f(3) \leq 3M$$

$$m \leq f(4) \leq M \Leftrightarrow 4m \leq 4f(4) \leq 4M$$

Προσθέτουμε τις πιο πάνω σχέσεις και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 2m + 3m + 4m &\leq 2f(2) + 3f(3) + 4f(4) \leq 2M + 3M + 4M \\ \Leftrightarrow 9m &\leq 2f(2) + 3f(3) + 4f(4) \leq 9M \\ \Leftrightarrow m &\leq \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9} \leq M \end{aligned}$$

Δραστηριότητες

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 5x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.
2. Δίνεται η εξίσωση $x^5 - 3x - 2 = 0$.
(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(1, 3)$.
(β) Να υπολογίσετε μία λύση της εξίσωσης στο διάστημα $(1, 3)$ με προσέγγιση δεκάτου.
3. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και $f(a) \neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό λ μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = \lambda$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.
Να εξετάσετε αν υπάρχει $\xi \in [0, \pi]$, ώστε να ισχύει $f(\xi) = 2$.
5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα που αναφέρεται:
(α) $f(x) = -3x + 1$, $x \in [0, 3]$ (β) $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$
6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 - x^2 + 3x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο διάστημα $(-2, 0)$.
7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow [-5, -3]$ και η συνάρτηση $g: [0, 1] \rightarrow [-2, 3]$ με τύπο $g(x) = (x - 1)f(x) - 2$.
Να αποδείξετε ότι:
(α) $g(0)g(1) < 0$
(β) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, 1]$.
(γ) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.
(δ) Η εξίσωση $f(x) = \frac{2}{x-1}$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$.
8. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $x \in [1, 5]$ παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Στη συνέχεια, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f στο διάστημα $[1, 5]$.

9. Να βρείτε το σύνολο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

(α) $f_1(x) = 3x + 2, x \in [0, 3]$

(β) $f_2(x) = x^2 + x + 1, x \in [-1, 4]$

(γ) $f_3(x) = \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

10. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [3, 7] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν m είναι η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της συνάρτησης, να αποδείξετε ότι:

$$m \leq \frac{3f(3) + 7f(7)}{10} \leq M$$

Περίληψη

1. Κάθε ανοικτό διάστημα της μορφής $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, ονομάζεται δ – περιοχή του πραγματικού αριθμού a και συμβολίζεται με $\pi(a)$. Δηλαδή:

$$\pi(a) = (a - \delta, a + \delta), \text{ για κάθε } \delta > 0$$

2. Εσωτερικό σημείο ενός συνόλου A ονομάζουμε κάθε στοιχείο $a \in A$, για το οποίο υπάρχει δ – περιοχή $\pi(a)$, τέτοια ώστε να ισχύει $\pi(a) \subset A$.

3. Ένας πραγματικός αριθμός a λέγεται σημείο συσσώρευσης ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, αν κάθε δ – περιοχή του a περιέχει άπειρα στοιχεία του A .

4. Ένας πραγματικός αριθμός a λέγεται μεμονωμένο σημείο ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, αν και μόνον αν υπάρχει δ – περιοχή του a που δεν περιέχει άλλα στοιχεία του συνόλου A εκτός από το a .

5. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο D_f , τότε η συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 τον πραγματικό αριθμό λ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in D_f$ με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$, όπου x_0 σημείο συσσώρευσης του D_f .

Συμβολικά, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

6. Το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 , που είναι ορισμένη στο D_f , υπάρχει αν και μόνον αν υπάρχουν και τα δύο πλευρικά όρια στο x_0 και είναι ίσα. Δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$$

7. Ιδιότητες

Αν οι συναρτήσεις f και g ορίζονται στα σύνολα A και B , αντίστοιχα, υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο a , όπου a σημείο συσσώρευσης για το σύνολο $A \cap B$, τότε:

$$(\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(\beta) \quad \lim_{x \rightarrow a} (\kappa \cdot f(x)) = \kappa \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad \kappa \text{ σταθερά}$$

$$(\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(\delta) \quad \text{Αν } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

$$(\epsilon) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f^v(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^v, \quad v \in \mathbb{N}$$

$$(\sigma\tau) \quad \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right|$$

$$(\zeta) \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[v]{f(x)} = \sqrt[v]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}, \quad f(x) \geq 0, \quad v \in \mathbb{N}$$

8. Ιδιότητες

- Αν $y = P(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

- Αν $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα και $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι ρητή συνάρτηση με $Q(a) \neq 0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

9. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $D_f = (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

αν και μόνον αν για κάθε $M > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in D_f$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει $f(x) > M$.

10. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $D_f = (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

αν και μόνον αν για κάθε $M > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in D_f$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει $f(x) < -M$.

11. Ιδιότητες

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ όταν το x τείνει στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ όταν το x τείνει στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$, $\kappa \in \mathbb{N}$.

12. Στο σύνολο $\overline{\mathbb{R}}$ μπορούμε να ορίσουμε τόσο τη διάταξη όσο και απλές πράξεις, σύμφωνα με τον πιο κάτω πίνακα:

Πράξεις στο $\overline{\mathbb{R}}$	
• $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	• $a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$
• $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	• $a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } a > 0 \\ +\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$
• $(+\infty) + a = +\infty, \forall a \in \mathbb{R}$	• $\frac{a}{\pm\infty} = 0, \forall a \in \mathbb{R}$
• $(-\infty) + a = -\infty, \forall a \in \mathbb{R}$	• $a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 1 \\ 0, & \text{αν } 0 \leq a < 1 \end{cases}$
• $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$	• $(+\infty)^a = +\infty, \forall a \in \mathbb{R}^+$
• $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$	
• $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$	

Απροσδιόριστες Μορφές

Ορισμένες από τις αλγεβρικές πράξεις του \mathbb{R} δεν μπορούν να επεκταθούν στο $\overline{\mathbb{R}}$, γιατί **δεν έχουν μονοσήμαντα ορισμένη τιμή**. Οι μορφές αυτές των πράξεων λέγονται **απροσδιόριστες**.

Μερικές απροσδιόριστες μορφές, που προκύπτουν ως άμεση συνέπεια ορίων, είναι:

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty),$$

$$0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0^0, \quad 1^{\pm\infty}, \quad (\pm\infty)^0$$

13. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(a, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 > 0 : \forall x \in D_f \text{ με } x > x_0 \text{ ισχύει } |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0 > 0 : \forall x \in D_f \text{ με } x > x_0 \text{ ισχύει } f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0 > 0 : \forall x \in D_f \text{ με } x > x_0 \text{ ισχύει } f(x) < -M$$

14. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(-\infty, a)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 > 0 : \forall x \in D_f \text{ με } x < -x_0 \text{ ισχύει } |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0 > 0 : \forall x \in D_f \text{ με } x < -x_0 \text{ ισχύει } f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0 > 0 : \forall x \in D_f \text{ με } x < -x_0 \text{ ισχύει } f(x) < -M$$

15. **Όρια βασικών συναρτήσεων**

$$(\alpha) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$(\beta) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c = c, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$$

$$(\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

16. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, με $a_n \neq 0$.

Τότε, ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$$

17. Δίνεται η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_0}$, με $a_n \neq 0$ και $\beta_k \neq 0$.

Τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{\beta_k x^k} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{\beta_k x^k}$$

18. **Κριτήριο παρεμβολής**

Έστω οι συναρτήσεις f, g και h .

Αν σε μια περιοχή $\pi(x_0)$ ισχύει ότι $h(x) \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in \pi(x_0)$, εκτός ίσως του x_0 , και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lambda,$$

τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda.$$

19. Βασικά όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0, x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0, x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

20. Έστω f συνάρτηση και x_0 είναι ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Η συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0 , όταν ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

21. Μια συνάρτηση ονομάζεται συνεχής στο διάστημα (a, β) , όταν αυτή είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in (a, \beta)$.

22. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις $f \pm g$, $c \cdot f$, (c σταθερά), f/g , $\frac{f}{g}$ με $g(x_0) \neq 0$, $|f|$, $\sqrt[n]{f}$ με $f(x) \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}$, με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 .

23. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεση των δύο συναρτήσεων $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

24. Θεώρημα (Bolzano)

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και επιπλέον ισχύει ότι $f(a) \cdot f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

25. Θεώρημα (Ενδιάμεσων Τιμών)

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και $f(a) \neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό κ μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ ($f(a) < \kappa < f(\beta)$ ή $f(\beta) < \kappa < f(a)$), υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = \kappa$.

26. Θεώρημα (Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής)

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $x_\epsilon, x_\mu \in [a, \beta]$, στα οποία η f παίρνει την ελάχιστη τιμή $f(x_\epsilon)$ και τη μέγιστη τιμή $f(x_\mu)$.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Αν $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$, τότε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x)g(x)) = 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x)g(x)) = 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 9$, τότε $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{f(x)} = 3$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} x + 2 $ είναι ίσα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	Αν το όριο μιας συνάρτησης στο x_0 υπάρχει, τότε το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(η)	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, τότε και η συνάρτηση $ f $ είναι συνεχής.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(θ)	Αν για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[a, \beta]$ ισχύει ότι $f(a)f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ι)	Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[a, \beta]$ δεν υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε ισχύει ότι $f(a)f(\beta) \geq 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

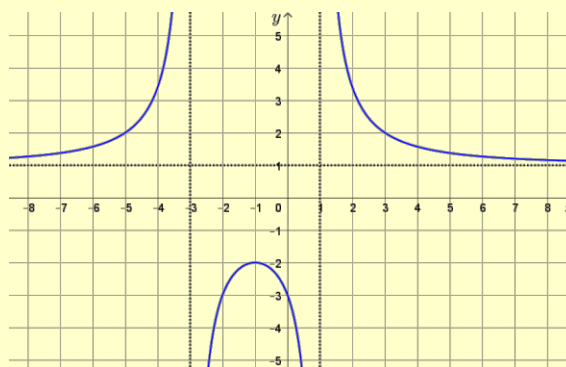
(α) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ (β) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (δ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

(ε) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (στ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(ζ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (η) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$

(θ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ (ι) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$



3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x < 1 \\ -x + 5, & x \geq 1 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \qquad (β) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \qquad (γ) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

4. Δίνονται συναρτήσεις f και g , ορισμένες στο \mathbb{R} , τέτοιες ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$$

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) \qquad (β) \lim_{x \rightarrow 2} |f(x) - g(x)|$$
$$(γ) \lim_{x \rightarrow 2} (3f^{10}(x) - 2g^3(x)) \qquad (δ) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{f(x)g(x)}$$

5. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x + 1) \qquad (β) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{x - 8}$$
$$(γ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x \text{ συν} 5x}{x} \qquad (δ) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 2x + 2}{3x^2 + x}$$
$$(ε) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 5x - x^2}{4 + 6x^2} \qquad (στ) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^3 - 4x}$$
$$(ζ) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) \qquad (η) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 7x - \eta\mu x}{2x}$$
$$(θ) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x}{x^2 + 2} \qquad (ι) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$$
$$(ια) \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{x^2 - 7|x - 2| - 2}{|x - 4|} \right) \qquad (ιβ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$$
$$(ιγ) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x-1} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{9x+5}} \qquad (ιδ) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu 4x}{2x}$$

6. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 2x + 1|}{x - 1}$$
$$(β) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 + x - 2|}{x - 1}$$

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 2a + 1, & x \leq 1 \\ a^2x + 7x, & x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε την τιμή του a , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} ax + \beta, & x \leq 3 \\ ax^2 + \beta x + \gamma, & x > 3 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των σταθερών αριθμών a , β και γ , έτσι ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2.$$

9. Να εξετάσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις ως προς τη συνέχεια:

(α) $f(x) = |7x + 3|$

(β) $f(x) = \sqrt{3x - 5}$

(γ) $f(x) = \varepsilon\varphi 2x$

(δ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2x + 1}{x - 2}\right)$

(ε) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x > 3 \\ x^2 - 2, & x \leq 3 \end{cases}$

(στ) $f(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x, & 0 \leq x < \pi \\ \eta\mu x, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$

10. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0, \pi)$.

11. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\sqrt{x} + 5x + 1 = 3x^2 - \frac{96}{x}$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(4, 16)$.

12. Να βρείτε με προσέγγιση δεκάτου μια λύση της εξίσωσης $x^3 - 3x^2 + x - 7 = 0$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Να εξετάσετε αν υπάρχει $\xi \in [0, \pi]$, ώστε να ισχύει $f(\xi) = 1$.

14. Να βρείτε το σύνολο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^2 - 6x + 2$, $x \in [0, 7]$

(β) $f(x) = 2\eta\mu x + 1$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$$

2. Αν $a + \beta + \gamma = 0$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^4 + \beta x^3 + \gamma}{x^2 - 1}$$

3. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με την ιδιότητα:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

4. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με τύπο $f(x) = x^4 + 4x + 3$ και $g(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2$ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο $A(x_0, y_0)$, με $x_0 \in (0, 1)$.

5. Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - a}{|x - 2|}$$

6. Να αποδείξετε, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^3 = a^3$$

7. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, 2a]$ με $f(0) = f(2a)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, a)$, έτσι ώστε $f(\xi) = f(\xi + a)$.

8. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $|f(x)| = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1$ ή $f(x) = -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 06

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

ΠΕΡΙΧΟΜΕΝΑ

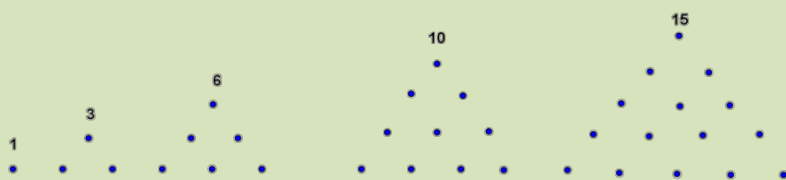
- 6.1. Εισαγωγή
- 6.2. Η έννοια της ακολουθίας
 - 6.2.1 Ορισμός – Αναπαράσταση ακολουθίας
- 6.3. Μονότονες ακολουθίες
- 6.4. Όριο ακολουθίας
 - 6.4.1 Ορισμός συγκλίνουσας ακολουθίας
 - 6.4.2 Υπολογισμός ορίου ακολουθίας
- 6.5. Ειδικές ακολουθίες
 - 6.5.1 Αριθμητική πρόοδος
 - 6.5.2 Γεωμετρική πρόοδος

6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ιστορικό σημείωμα

Οι ακολουθίες αριθμών αποτέλεσαν ιστορικά ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα για την εξέλιξη των Μαθηματικών. Κάποια σημειώματα σε πάπυρο έχουν δείξει ότι γύρω στο 2100 π.Χ. οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν αριθμητικές και γεωμετρικές ακολουθίες. Το όνομα αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος πιθανόν να έχει δοθεί από τη σχέση που έχει ο κάθε όρος με τον προηγούμενο και τον επόμενο του και συνδέονταν με γεωμετρικά προβλήματα.

Οι Πυθαγόρειοι, είχαν δημιουργήσει τους πολύγωνους αριθμούς, οι οποίοι βασικά ήταν ακολουθίες αριθμών που η γεωμετρική αναπαράστασή τους έδινε κανονικά πολύγωνα. Όπως φαίνεται και στο πιο κάτω σχήμα, οι τρίγωνοι αριθμοί είναι 1, 3, 6, 10, 15,



Ο Ζήνων ο Ελεάτης (490 – 425 π.Χ.) είχε διατυπώσει τα γνωστά «Παράδοξα του Ζήωνα», τα οποία ήταν συγκεκριμένες προτάσεις που, ενώ εκ πρώτης όψεως φάνοιαν παράλογες, είναι θεμελιωμένες πάνω σε σοβαρά επιχειρήματα. Το παράδοξο του Αχιλλέα και της Χελώνας αναφέρει:

«Ο Αχιλλέας κυνηγά μια χελώνα, η οποία προηγείται κατά μια απόσταση έστω δ . Όταν ο Αχιλλέας θα έχει καλύψει την απόσταση δ , η χελώνα θα έχει διανύσει μια νέα απόσταση δ_1 . Τη στιγμή που ο Αχιλλέας θα έχει καλύψει και την απόσταση δ_1 , η χελώνα θα προηγείται κατά μια απόσταση δ_2 κ.ο.κ. Επομένως, ο Αχιλλέας δεν θα φτάσει ποτέ τη χελώνα».

Το πιο πάνω παράδοξο, όπως και τα άλλα που είχε διατυπώσει ο Ζήνων, για να εξηγηθούν είναι απαραίτητες βασικές έννοιες, όπως η ακολουθία, το όριο ακολουθίας και το άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου.

Αργότερα, Ινδοί μαθηματικοί είχαν διατυπώσει τύπους υπολογισμού του αθροίσματος των n πρώτων όρων των τετραγώνων και των κύβων των φυσικών αριθμών.

Ιστορικά, μια από τις πρώτες αναδρομικές ακολουθίες το 1220 ήταν η γνωστή ακολουθία Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

που περιγραφόταν από τη εξίσωση

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$

και η λύση της έδινε το συνολικό πλήθος κουνελιών μετά από n μήνες όταν ένα αρχικό ζεύγος κουνελιών έδινε ένα νέο ζεύγος από κουνέλια και κάθε νέο ζεύγος με τη σειρά του έδινε και αυτό μετά τον 1^ο μήνα (κάθε μήνα) ένα νέο ζεύγος.

6.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Εξερεύνηση

Να προβλέψετε τους επόμενους τρεις αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, ...

Διερεύνηση

Δίνονται οι αριθμοί

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{100}, \frac{1}{101}, \dots$$

- (α) Να βρείτε ποιος αριθμός βρίσκεται στην 8^η θέση και ποιος στην 105^η θέση.
- (β) Να βρείτε έναν τύπο που να συνδέει τον κάθε αριθμό με τη θέση του.
- (γ) Να αποδείξετε ότι ο πιο πάνω τύπος αποτελεί συνάρτηση και να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

6.2.1 Ορισμός – Αναπαράσταση ακολουθίας

Ορισμός

Κάθε συνάρτηση a , με πεδίο ορισμού το \mathbb{N} και πεδίο τιμών το \mathbb{R} , λέγεται **ακολουθία πραγματικών αριθμών**.

Συμβολικά έχουμε:

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Για παράδειγμα, τα πιο κάτω μοτίβα είναι ακολουθίες:

- 6, 10, 14, 18, 22, 26, ...
- 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$
- 2, 7, 22, 67, 202, 607, ...

Παρατηρήσεις

- Μια ακολουθία συμβολίζεται με (a_n) , $n \in \mathbb{N}$.
- Η τιμή μιας ακολουθίας στη n -οστή θέση, δηλαδή ο πραγματικός αριθμός $a(n)$, $n \in \mathbb{N}$, συμβολίζεται με a_n και διαβάζεται « a με δείκτη n ». Οι τιμές της ακολουθίας (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ για διάφορες τιμές του n είναι:

$$a(1) = a_1, a(2) = a_2, \dots, a(n) = a_n, \dots$$

- Τα στοιχεία του πεδίου ορισμού μιας ακολουθίας ονομάζονται **δείκτες** και οι εικόνες των δεικτών ονομάζονται **όροι** της ακολουθίας. Έτσι:
 - Ο a_1 ονομάζεται **πρώτος** όρος της ακολουθίας.
 - Ο a_2 ονομάζεται **δεύτερος** όρος της ακολουθίας.
 - ⋮
 - Ο a_n ονομάζεται **νιοστός ή γενικός όρος** της ακολουθίας.

- Ο γενικός όρος a_n μιας ακολουθίας (a_n) , $n \in \mathbb{N}$, εκπροσωπεί οποιονδήποτε από τους άπειρους όρους της.
- Μια σχέση που συνδέει δύο ή περισσότερους διαδοχικούς γενικούς όρους μιας ακολουθίας ονομάζεται **αναγωγικός** ή **αναδρομικός τύπος** της ακολουθίας.

Για παράδειγμα:

- η σχέση $a_{n+1} = a_n + 7$ είναι ένας αναγωγικός τύπος, γιατί συνδέει δύο διαδοχικούς γενικούς όρους (δηλαδή τον όρο a_n και τον επόμενο του a_{n+1}).
- η σχέση $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ είναι ένας αναγωγικός τύπος, γιατί συνδέει τρεις διαδοχικούς γενικούς όρους.

Μια ακολουθία (a_n) , $n \in \mathbb{N}$, είναι **πλήρως ορισμένη** ή **τελείως ορισμένη**, όταν υπάρχει η δυνατότητα να υπολογίσουμε οποιοδήποτε όρο της ακολουθίας. Έτσι, μια ακολουθία ορίζεται πλήρως όταν δίνεται:

- Ο γενικός όρος a_n με τύπο.
- Για παράδειγμα, οι πιο κάτω ακολουθίες ορίζονται πλήρως:*
- $a_n = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$
 - $\beta_n = \begin{cases} 5, & n \text{ περιττός} \\ 10, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$
- Ικανοποιητικό πλήθος αρχικών όρων και ένας αναγωγικός τύπος.

Για παράδειγμα, οι πιο κάτω ακολουθίες ορίζονται πλήρως:

- $a_{n+1} = a_n + 7$, $a_1 = 2$
- $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = a_2 = 1$

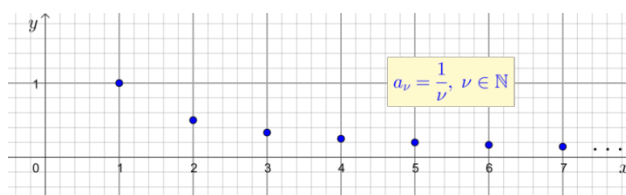
Γράφημα – Γραφική παράσταση ακολουθίας

Αφού μια ακολουθία είναι συνάρτηση, έτσι για κάθε ακολουθία το γράφημά της είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών

$$G = \{(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n), \dots, n \in \mathbb{N}\},$$

στο οποίο αντιστοιχεί ένα σύνολο σημείων σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

Για παράδειγμα, η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ έχει την πιο κάτω γραφική παράσταση.



Παρατηρήσεις

- Όταν δίνονται μερικοί από τους αρχικούς όρους μιας ακολουθίας, θεωρούμε ότι η ακολουθία αυτή δεν ορίζεται πλήρως.

Για παράδειγμα, η ακολουθία (a_n) , $n \in \mathbb{N}$, στην οποία δίνονται οι τέσσερις πρώτοι όροι της με $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$, είναι δυνατόν:

- να έχει γενικό τύπο $a_n = 2n$ ή
- να έχει γενικό τύπο $a_n = 2n + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

Παρατηρούμε ότι οι δύο πιο πάνω ακολουθίες έχουν μόνο τους τέσσερις πρώτους όρους ίδιους. Επομένως, η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$, στην οποία δίνονται οι τέσσερις πρώτοι όροι της με $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, a_4 = 8$, δεν είναι τελείως ορισμένη.

- Υπάρχουν ακολουθίες, οι οποίες μέχρι σήμερα δεν έχουν οριστεί πλήρως.
Για παράδειγμα, μια τέτοια ακολουθία είναι η ακολουθία των πρώτων αριθμών $2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$.
- Σε μια ακολουθία, το πλήθος των όρων της είναι πάντα άπειρο, ενώ το σύνολο των τιμών της είναι είτε άπειρο είτε πεπερασμένο.
Για παράδειγμα, η ακολουθία $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$, έχει άπειρο το πλήθος όρων, τους $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$, ενώ το σύνολο των τιμών της είναι μόνο το σύνολο $\{-1, 1\}$.

Παράδειγμα 1

Να γράψετε τους τέσσερις πρώτους όρους των ακολουθιών με γενικούς όρους:

- (α) $a_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$ (β) $a_n = n(-1)^n, n \in \mathbb{N}$
 (γ) $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ περιττός} \\ 0, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$ (δ) $a_n = 2, n \in \mathbb{N}$

Λύση

Έχουμε ότι:

- (α) $a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}, a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$
 (β) $a_1 = 1(-1)^1 = -1, a_2 = 2(-1)^2 = 2, a_3 = 3(-1)^3 = -3, a_4 = 4(-1)^4 = 4$
 (γ) $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 3, a_4 = 0$
 (δ) $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 2$

Παράδειγμα 2

Δίνεται η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο $a_n = 3n^2 + 2n$.

- (α) Να υπολογίσετε τον δέκατο όρο της (a_{10}) .
 (β) Να υπολογίσετε τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$.

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

$$a_{10} = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 = 320$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= [3(n+1)^2 + 2(n+1)] - (3n^2 + 2n) \\ &= 3n^2 + 6n + 3 + 2n + 2 - 3n^2 - 2n \\ &= 6n + 5, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3

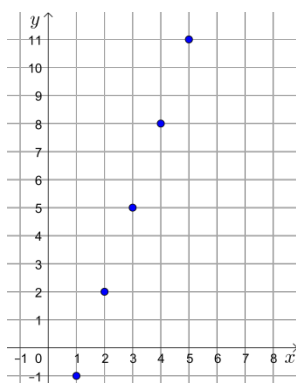
Η ακολουθία (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ εκφράζεται με τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = a_n + 3$, $a_1 = -1$.
Να γράψετε τους πέντε πρώτους όρους της και να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = a_1 + 3 = 2, \quad a_3 = a_2 + 3 = 5, \quad a_4 = a_3 + 3 = 8, \quad a_5 = a_4 + 3 = 11$$

Μέρος της γραφικής παράστασης φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Παράδειγμα 4

Δίνεται η ακολουθία:

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots$$

Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο για την ακολουθία αυτή.

Λύση

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος (εκτός από τον πρώτο) προκύπτει, όταν διπλασιάσουμε τον προηγούμενό του. Άρα:

$$a_{n+1} = 2a_n, \quad a_1 = 3, \quad n \in \mathbb{N}$$

Παράδειγμα 5

Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο για την ακολουθία (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο $a_n = 4n + 3$.

Λύση

Γράφουμε τους τρεις πρώτους όρους της ακολουθίας: $a_1 = 7$, $a_2 = 11$, $a_3 = 15$

Παρατηρούμε ότι ο κάθε όρος, μετά από τον πρώτο όρο, προκύπτει αν προσθέσουμε 4 στον αμέσως προηγούμενο όρο. Επομένως, υπάρχει ένδειξη ότι ένας αναδρομικός τύπος για την ακολουθία μπορεί να είναι ο $a_{n+1} = a_n + 4$, $a_1 = 7$.

Θα αποδείξουμε ότι $a_{n+1} = a_n + 4$, $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι:

$$a_{n+1} = 4(n+1) + 3 = 4n + 4 + 3 = 4n + 3 + 4 = a_n + 4 \Rightarrow a_{n+1} = a_n + 4$$

Επομένως, ένας αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι ο $a_{n+1} = a_n + 4$, $a_1 = 7$.

Παράδειγμα 6

Να βρείτε τον νιοστό όρο της ακολουθίας:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$$

Λύση

Αναζητούμε μια σχέση που να συνδέει τον κάθε όρο με τη θέση του. Παρατηρούμε ότι κάθε όρος είναι κλάσμα γραμμένο στη μορφή:

$$\frac{a_n}{\beta_n}$$

- Σε κάθε κλάσμα, οι αριθμητές είναι όροι της ακολουθίας a_n :

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Επομένως, ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$.

- Σε κάθε κλάσμα, οι παρονομαστές είναι όροι της ακολουθίας β_n :

$$2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

Επομένως, ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι $\beta_n = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Άρα, ένας πιθανός γενικός όρος της ακολουθίας είναι:

$$\frac{a_n}{\beta_n} = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Δραστηριότητες

1. Να γράψετε τους έξι πρώτους όρους των πιο κάτω ακολουθιών:

(α) $a_n = n + 2, n \in \mathbb{N}$

(β) $a_n = n^2 - 3, n \in \mathbb{N}$

(γ) $a_n = 3^n, n \in \mathbb{N}$

(δ) $a_n = (-4)^n, n \in \mathbb{N}$

(ε) $a_n = (-1)^n + 1, n \in \mathbb{N}$

(στ) $a_n = \eta\mu\left(\frac{n\pi}{2}\right), n \in \mathbb{N}$

(ζ) $a_{n+1} = a_n - 2, a_1 = 2$

(η) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 4, a_1 = -3$

(θ) $a_{n+1} = a_n^3, a_1 = -1$

2. Να παραστήσετε γραφικά τις πιο κάτω ακολουθίες με γενικό όρο:

(α) $a_n = 3n - 2, n \in \mathbb{N}$ (β) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$ (γ) $a_n = \eta\mu\left(\frac{n\pi}{4}\right), n \in \mathbb{N}$

3. Δίνεται η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ με αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = 3a_n - 4, a_1 = 2$.
Να γράψετε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας.

4. Δίνεται η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ με τύπο $a_n = n^2 + n + 1$.
Να βρείτε την τιμή του n , ώστε να ισχύει $a_n = 57$.

5. Να βρείτε τον νιοστό όρο των πιο κάτω ακολουθιών:

(α) $-1, 2, -3, 4, \dots$

(β) $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$

6. Δίνεται ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο $a_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$.

(α) Να γράψετε τους τέσσερις πρώτους όρους της ακολουθίας.

(β) Να δείξετε ότι $a_{n+1} - a_n = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$.

(γ) Να βρείτε τον γενικό όρο της ακολουθίας.

6.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «Blyk_Kat_En06_Akolouthies.ggb».



- (α) Να εξετάσετε σε ποια από τις ακολουθίες $(a_n), (\beta_n), (\gamma_n)$, $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι ο κάθε όρος της είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του.
- (β) Να εξετάσετε σε ποια από τις ακολουθίες $(a_n), (\beta_n), (\gamma_n)$, $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι ο κάθε όρος της είναι μικρότερος από τον προηγούμενό του.
- (γ) Να αλλάξετε τις τιμές των δρομέων a, β και γ , έτσι ώστε για τους όρους της ακολουθίας (δ_n) να ισχύει ότι ο κάθε όρος της:
- είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του
 - είναι μικρότερος από τον προηγούμενό του
 - είναι ίσος με τον προηγούμενό του.

Ορισμοί

- Μια ακολουθία λέγεται **γνησίως αύξουσα**, όταν κάθε όρος της, εκτός από τον πρώτο, είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του.
Δηλαδή, ισχύει ότι $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Μια ακολουθία λέγεται **αύξουσα**, όταν κάθε όρος της, εκτός από τον πρώτο, είναι μεγαλύτερος ή ίσος από με τον προηγούμενό του.
Δηλαδή, ισχύει $a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Μια ακολουθία λέγεται **γνησίως φθίνουσα**, όταν κάθε όρος της, εκτός από τον πρώτο, είναι μικρότερος από τον προηγούμενό του.
Δηλαδή, ισχύει $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Μια ακολουθία λέγεται **φθίνουσα**, όταν κάθε όρος της, εκτός από τον πρώτο, είναι μικρότερος ή ίσος από τον προηγούμενό του.
Δηλαδή, ισχύει $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Μια ακολουθία λέγεται **σταθερή**, όταν κάθε όρος της, εκτός από τον πρώτο, είναι ίσος με τον προηγούμενό του.
Δηλαδή, ισχύει $a_{n+1} = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Σημείωση

Οι πιο πάνω ακολουθίες ονομάζονται **μονότονες**.

Για παράδειγμα:

- Η ακολουθία $1, 1, 2, 3, 3, 4, \dots$ είναι αύξουσα, αλλά όχι γνησίως αύξουσα, αφού έχει τουλάχιστον δύο διαδοχικούς όρους ίσους.
- Δεν υπάρχει ακολουθία που να είναι γνησίως φθίνουσα και να μην είναι ταυτόχρονα και φθίνουσα.

Δηλαδή, όταν ισχύει διάταξη $a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$, τότε ισχύει και η διάταξη $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$.

- Η μοναδική ακολουθία που είναι αύξουσα και φθίνουσα ταυτόχρονα είναι η ακολουθία για την οποία ισχύει:

$$(a_{n+1} \geq a_n) \text{ και } (a_{n+1} \leq a_n) \Rightarrow (a_{n+1} = a_n)$$

Αφού κάθε όρος είναι ίσος με τον επόμενό του, τότε η ακολουθία είναι σταθερή.

Μια τέτοια ακολουθία είναι η $3, 3, 3, 3, \dots$, η οποία είναι η σταθερή ακολουθία και μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα $a_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1

Να δείξετε ότι:

(α) Η ακολουθία $a_n = n^2, n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n+3}, n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση

(α) Αρκεί να δείξουμε ότι $a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Έχουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ότι:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

Αφού $2n + 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, τότε $a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Επομένως, η ακολουθία $a_n = n^2, n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι $a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Έχουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ότι:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+3} = \frac{n+3 - n-4}{(n+3)(n+4)} = \frac{-1}{(n+3)(n+4)}$$

Αφού $\frac{-1}{(n+3)(n+4)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, τότε $a_{n+1} - a_n < 0 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Επομένως, η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n+3}, n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Παράδειγμα 2

Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις πιο κάτω ακολουθίες:

(α) $a_{n+1} = a_n^2 + 3, a_1 = 1, n \in \mathbb{N}$

(β) $a_n = (-2)^n, n \in \mathbb{N}$

Λύση

(α) Θεωρούμε τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 + 3 - a_n = a_n^2 - a_n + 3,$$

το οποίο είναι της μορφής τριωνύμου.

Το τριώνυμο είναι θετικό για όλες τις τιμές του a_n , αφού η διακρίνουσά του είναι

$$\Delta = (-1)^2 - 12 = -11 < 0$$

και ο συντελεστής του a_n^2 , δηλαδή ο αριθμός 1, είναι θετικός.

Επομένως:

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + 3 > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Αφού, $a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Παρατηρούμε ότι $a_1 = -2, a_2 = 4, a_3 = -8$.

Επομένως, η ακολουθία δεν είναι μονότονη, γιατί $a_1 < a_2$ και $a_2 > a_3$.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Κάθε σταθερή ακολουθία είναι αύξουσα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία είναι φθίνουσα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Κάθε αύξουσα ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Κάθε ακολουθία που είναι και αύξουσα και φθίνουσα είναι σταθερή.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία είναι μονότονη.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Να δείξετε ότι:

- (α) Η ακολουθία $a_n = 2$, $n \in \mathbb{N}$ είναι σταθερή.
(β) Η ακολουθία $a_n = 5 - n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
(γ) Η ακολουθία $a_n = n^3 - 1$, $n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα.

3. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις πιο κάτω ακολουθίες:

- (α) $a_n = 3n - 5$, $n \in \mathbb{N}$
(β) $a_n = 4^n$, $n \in \mathbb{N}$
(γ) $a_n = (-3)^n$, $n \in \mathbb{N}$
(δ) $a_n = \frac{2n + 3}{2n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$
(ε) $a_n = (n - 1)3^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

4. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της ακολουθίας που εκφράζεται με τον αναδρομικό τύπο

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2, \quad a_1 = 3,$$

αιτιολογώντας την απάντησή σας.

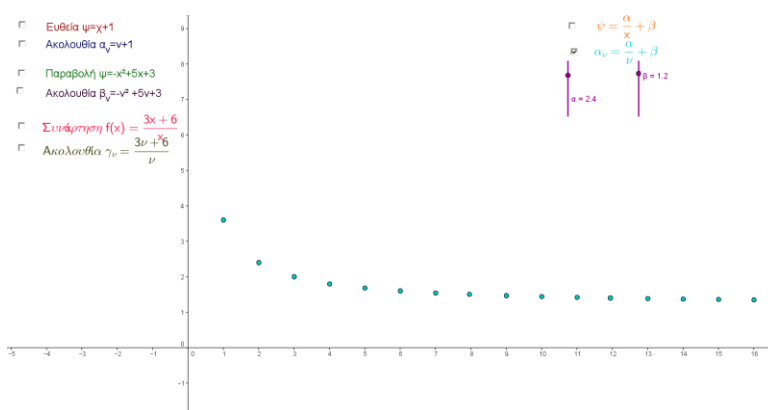
6.4 ΟΡΙΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Εξερεύνηση

Ένα φυτό ύψους 1 m τοποθετείται σε ένα δωμάτιο ύψους 2 m. Το φυτό σε κάθε επόμενη μέρα «ανεβαίνει» σε ύψος που αντιστοιχεί στο $\frac{1}{2}$ του ύψους που είχε την προηγούμενη μέρα. Να εξετάσετε αν το φυτό θα αγγίξει ποτέ στην οροφή του δωματίου, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «Blyk_Kat_En06_Akolouthies1.ggb».



- (α) Να εξετάσετε τι συμβαίνει με τους όρους των ακολουθιών $(a_n), (\beta_n), (\gamma_n), n \in \mathbb{N}$ όταν το n μεγαλώνει απεριόριστα.
- (β) Να αλλάξετε τις τιμές των δρομέων a και β , έτσι ώστε όταν το n μεγαλώνει απεριόριστα οι όροι της ακολουθίας (δ_n) να προσεγγίζουν τον αριθμό 2.

6.4.1 Ορισμός συγκλίνουσας ακολουθίας

Όταν οι όροι μιας ακολουθίας $(a_n), n \in \mathbb{N}$ προσεγγίζουν έναν πραγματικό αριθμό λ , καθώς το n αυξάνεται απεριόριστα, τότε ο αριθμός λ λέγεται **όριο** της ακολουθίας και γράφουμε:

$$\lim a_n = \lambda \text{ ή } a_n \rightarrow \lambda$$

Λέμε ότι η ακολουθία συγκλίνει στον αριθμό λ και την ονομάζουμε **συγκλίνουσα ακολουθία**.

Για παράδειγμα, αν σχηματίσουμε πίνακα τιμών για την ακολουθία $a_n = \frac{2n+1}{n}, n \in \mathbb{N}$, τότε παρατηρούμε ότι προσεγγίζει όσο κοντά θέλουμε τον αριθμό 2.

n	1	2	3	5	10	100	1000	10000
a_n	3	2,5	2,25	2,2	2,1	2,01	2,001	2,0001

Ορισμός

Μια ακολουθία (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ έχει **όριο** τον πραγματικό αριθμό λ ή **συγκλίνει στον αριθμό λ** , αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για όλα τα $n \geq n_0$ να έχουμε $|a_n - \lambda| < \varepsilon$.

Συμβολικά, έχουμε ότι:

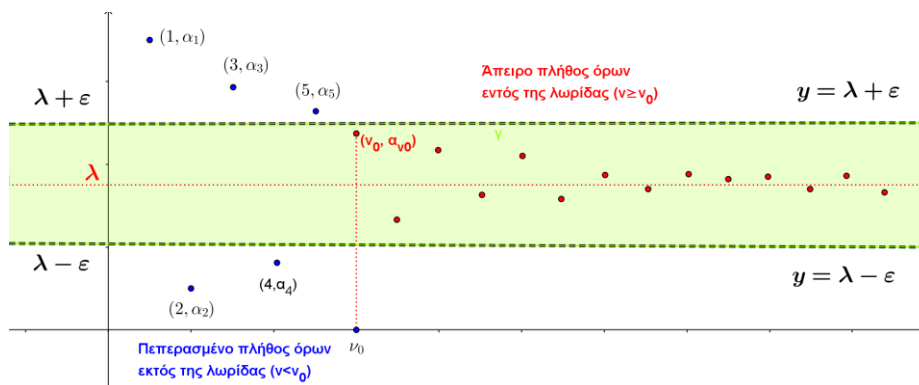
$$\lim a_n = \lambda \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \lambda| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Σημείωση

Αντί $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, γράφουμε $\lim a_n = \lambda$.

Παρατηρήσεις

- Ο φυσικός αριθμός n_0 εξαρτάται από το ε και γράφεται και ως $n_0 = n_0(\varepsilon)$.
- Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι **μοναδικό**.
- Μια ακολουθία με όριο το 0 λέγεται **μηδενική ακολουθία**.
- Γραφικά, όταν μια ακολουθία συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 0$, τότε παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας με δείκτες n , $n \geq n_0$, ανήκουν στην «οριζόντια λωρίδα» που ορίζουν οι ευθείες $y = \lambda - \varepsilon$ και $y = \lambda + \varepsilon$. Εκτός της λωρίδας μένει μόνο το πεπερασμένο πλήθος όρων $a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}$, με το n_0 προφανώς να αλλάζει για κάθε επιλογή του ε .



Παράδειγμα 1

Δίνεται η ακολουθία $a_n = \frac{n-1}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι $\lim a_n = 1$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n-1}{n+3} - 1 \right| = \left| \frac{n-1-n-3}{n+3} \right| = \left| \frac{-4}{n+3} \right| = \frac{4}{n+3} < \frac{4}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{4}{\varepsilon}$$

Δηλαδή, για οποιοδήποτε θετικό αριθμό ε , υπάρχει δείκτης n_0 τον οποίο επιλέγουμε ως έναν φυσικό αριθμό που είναι μεγαλύτερος του $\frac{4}{\varepsilon}$. Έτσι, ισχύει $|a_n - 1| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$ και $\lim a_n = 1$.

6.4.2. Υπολογισμός ορίου ακολουθίας

Με χρήση των ιδιοτήτων των ορίων των συναρτήσεων με τύπο $y = f(x)$, όταν $x \rightarrow +\infty$, καθώς και με χρήση των βασικών ορίων, υπολογίζονται και τα όρια των ακολουθιών.

Για παράδειγμα:

- Η ακολουθία $a_n = 2n^2 + 3n - 5$, $n \in \mathbb{N}$ έχει όριο το $+\infty$, αφού:

$$\lim a_n = \lim(2n^2 + 3n - 5) = \lim(2n^2) = 2 \lim n^2 = +\infty$$

- Η ακολουθία $a_n = \frac{2-5n^2}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ έχει όριο το $-\infty$, αφού:

$$\lim a_n = \lim\left(\frac{2-5n^2}{n+1}\right) = \lim\left(\frac{-5n^2}{n}\right) = \lim(-5n) = -5 \lim n = -5(+\infty) = -\infty$$

- Η ακολουθία $a_n = \frac{3n^2+5}{6n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$ έχει όριο το $\frac{1}{2}$, αφού:

$$\lim a_n = \lim \frac{3n^2 + 5}{6n^2 + 1} = \lim \frac{3n^2}{6n^2} = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε τα όρια των ακολουθιών με γενικό όρο:

- (α) $a_n = -3n^2 + 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ (β) $a_n = \frac{n+1}{2n-3}$, $n \in \mathbb{N}$
(γ) $a_n = \frac{2n^3 - 5n^2 - n}{4n^3 + 3}$, $n \in \mathbb{N}$ (δ) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$

Λύση

Έχουμε ότι:

(α) $\lim a_n = \lim\left(\frac{n+1}{2n-3}\right) = \lim\left(\frac{n}{2n}\right) = \frac{1}{2}$

(β) $\lim a_n = \lim(-3n^2 + 2n + 1) = \lim(-3n^2) = -\infty$

(γ) $\lim a_n = \lim\left(\frac{2n^3 - 5n^2 - n}{4n^3 + 3}\right) = \lim\left(\frac{2n^3}{4n^3}\right) = \frac{1}{2}$

(δ) $\lim a_n = \lim\left(\frac{1}{n^2}\right) = \left(\lim\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = 0$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνον αν το όριό της είναι πραγματικός αριθμός.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Κάθε σταθερή ακολουθία είναι συγκλίνουσα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν $a_n = 3n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $a_n \rightarrow 3$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν $a_n = \frac{2n^2-1}{n^3+2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $a_n \rightarrow 0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Να υπολογίσετε τα όρια των πιο κάτω ακολουθιών:

(α) $a_n = 4n - 2$, $n \in \mathbb{N}$

(β) $a_n = \frac{3n+1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

(γ) $a_n = \frac{n^3 - 2n}{n^2 - 2n + 2}$, $n \in \mathbb{N}$

(δ) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$

(ε) $a_{n+1} = a_n + 2$, $a_1 = 1$

6.5. ΕΙΔΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

6.5.1 Αριθμητική πρόοδος

Διερεύνηση

Σε ένα αμφιθέατρο, η πρώτη σειρά έχει 20 καθίσματα και κάθε επόμενη σειρά έχει 4 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.

- (α) Να υπολογίσετε πόσα καθίσματα θα έχει η 5^η σειρά.
- (β) Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο της ακολουθίας που εκφράζει το πλήθος των καθισμάτων σε κάθε σειρά.



Ορισμός

Αριθμητική πρόοδος λέγεται η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$, της οποίας ο κάθε όρος, εκτός από τον πρώτο, προκύπτει από τον προηγούμενό του αν σε αυτόν προσθέσουμε τον ίδιο σταθερό αριθμό. Ο σταθερός αριθμός ονομάζεται **διαφορά** της αριθμητικής προόδου και συμβολίζεται με δ .

Συμβολικά, έχουμε ότι:

$$a_{n+1} = a_n + \delta, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Παρατηρήσεις

- Μία αριθμητική πρόοδος ορίζεται πλήρως, όταν είναι γνωστός ο πρώτος όρος της και η διαφορά της.

Για παράδειγμα, η αριθμητική πρόοδος με $a_1 = -1$, $\delta = 5$ ορίζεται πλήρως και οι πέντε πρώτοι όροι της είναι οι $-1, 4, 9, 14, 19, \dots$.

Συνεπώς, η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ είναι αριθμητική πρόοδος, όταν ισχύει:

$$a_{n+1} = a_n + \delta \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \delta \in \mathbb{R}$$

- Για να είναι μια ακολουθία αριθμητική πρόοδος, αρκεί η διαφορά $a_{n+1} - a_n$ να είναι σταθερή, ανεξάρτητη του n .

Για παράδειγμα, η ακολουθία $2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$ είναι αριθμητική πρόοδος, αφού ισχύει ότι $a_{n+1} - a_n = 2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου, προκύπτει άμεσα ότι το είδος της μονοτονίας της εξαρτάται από το δ . Η αριθμητική πρόοδος είναι **γνησίως αύξουσα** αν $\delta > 0$, **γνησίως φθίνουσα** αν $\delta < 0$ και **σταθερή** αν $\delta = 0$.

Για παράδειγμα, η αριθμητική πρόοδος:

- $2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$ είναι γνησίως αύξουσα, αφού $\delta > 0$
- $13, 10, 7, 4, 1, -2, \dots$ είναι γνησίως φθίνουσα, αφού $\delta < 0$
- $5, 5, 5, 5, 5, \dots$ είναι σταθερή, αφού $\delta = 0$.

Παράδειγμα 1

Να δείξετε ότι η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 4n - 2$, $n \in \mathbb{N}$ είναι αριθμητική πρόοδος και να εξετάσετε το είδος της μονοτονίας της.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η διαφορά $a_{n+1} - a_n$ είναι σταθερή (ανεξάρτητη του n).

Έχουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ότι:

$$a_{n+1} - a_n = 4(n+1) - 2 - (4n - 2) = 4n + 4 - 2 - 4n + 2 = 4$$

Συνεπώς, η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $a_1 = 2$ και $\delta = 4$.

Η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα, αφού $\delta = 4 > 0$.

Πρόταση

Αν a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει η σχέση $2\beta = a + \gamma$. Αντίστροφα, αν για κάθε τριάδα a, β, γ διαδοχικών όρων της ακολουθίας $(a_n), n \in \mathbb{N}$, ισχύει η σχέση $2\beta = a + \gamma$, τότε η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ είναι αριθμητική πρόοδος.

Απόδειξη

Αφού η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ είναι αριθμητική πρόοδος, τότε ισχύει ότι $a_{n+1} - a_n = \delta$.

Συνεπώς, $\beta - a = \delta$ και $\gamma - \beta = \delta$. Έχουμε ότι:

$$\beta - a = \gamma - \beta \Rightarrow 2\beta = a + \gamma$$

Αντίστροφα, αν $2\beta = a + \gamma$, τότε $\beta - a = \gamma - \beta$. Επομένως, οι αριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Σημείωση

Σε μια αριθμητική πρόοδο, αν a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι της, τότε ο αριθμός β λέγεται **αριθμητικός μέσος** των αριθμών a και γ και ισούται με το ημίθροισμα των a, γ . Δηλαδή, $\beta = \frac{a+\gamma}{2}$.

Παράδειγμα 2

Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $1, \text{συν}^2\theta, \text{συν}2\theta, \theta \in \mathbb{R}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $2\beta = a + \gamma$, όπου $a = 1$, $\beta = \text{συν}^2\theta$ και $\gamma = \text{συν}2\theta$.

Έχουμε ότι:

$$2\text{συν}^2\theta = 2 \cdot \frac{1 + \text{συν}2\theta}{2} = 1 + \text{συν}2\theta \Leftrightarrow 2\beta = a + \gamma$$

Επομένως, οι αριθμοί $1, \text{συν}^2\theta, \text{συν}2\theta, \theta \in \mathbb{R}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Πρόταση

Ο γενικός όρος a_n μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο τον a_1 και διαφορά δ δίνεται από τον τύπο:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την πιο πάνω σχέση με τη μέθοδο της Μαθηματικής (Τέλειας) Επαγωγής.

Έστω $(a_n), n \in \mathbb{N}$ μια αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο τον a_1 και διαφορά δ .

Θα αποδείξουμε ότι με τη μέθοδο της Τέλειας Επαγωγής ότι:

$$p(n) : a_n = a_1 + (n - 1)\delta, \quad n \in \mathbb{N}$$

Έχουμε ότι:

Βήμα 1°

Για $n = 1$, έχουμε $p(1) : a_1 = a_1 + (1 - 1)\delta$, αληθής.

Βήμα 2°

Υποθέτουμε ότι για $n = k$ ο δεδομένος τύπος είναι αληθής. Δηλαδή:

$$p(k) : a_k = a_1 + (k - 1)\delta \tag{1}$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι ο δεδομένος τύπος είναι αληθής για $n = k + 1$. Δηλαδή:

$$p(k + 1) : a_{k+1} = a_1 + k\delta$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \text{Α' μέλος} &= a_{k+1} = a_k + \delta = a_1 + (k - 1)\delta + \delta && \text{Από την (1)} \\ &= a_1 + k\delta = \text{Β' μέλος} \end{aligned}$$

Άρα, $p(k + 1)$ αληθής και συνεπώς η πρόταση $p(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 3

Σε αριθμητική πρόοδος δίνεται ότι $a_1 = -3$ και $\delta = 4$. Να υπολογίσετε τον δωδέκατο όρο της (a_{12}) .

Λύση

Έχουμε ότι:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\delta \Rightarrow a_{12} = -3 + (12 - 1)4 \Rightarrow a_{12} = -3 + 11 \cdot 4 = -3 + 44 = 41$$

Παράδειγμα 4

Σε αριθμητική πρόοδο, ο τρίτος όρος είναι 8 και το άθροισμα του πρώτου και έκτου όρου είναι 19. Να σχηματίσετε την αριθμητική πρόοδο.

Λύση

Έστω a_1, a_2, a_3, \dots οι όροι της αριθμητικής προόδου. Ισχύει ότι:

$$\begin{cases} a_3 = 8 \\ a_1 + a_6 = 19 \end{cases}$$

Ισοδύναμα, έχουμε ότι:

$$\begin{cases} a_1 + 2\delta = 8 \\ a_1 + a_1 + 5\delta = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2\delta = 8 \\ 2a_1 + 5\delta = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 4\delta = 16 \\ 2a_1 + 5\delta = 19 \end{cases}$$

Λύνοντας το πιο πάνω γραμμικό σύστημα, παίρνουμε ότι $\delta = 3, a_1 = 2$.

Επομένως, οι αρχικοί όροι της αριθμητικής προόδου είναι οι:

$$2, 5, 8, 11, 14, \dots$$

Παράδειγμα 5

Ένας υπάλληλος παίρνει σταθερή αύξηση €5 κάθε μήνα. Αν το Μάρτιο του 2021 ο μισθός του είναι €500, να υπολογίσετε:

- (α) το μισθό του το Δεκέμβριο του ίδιου χρόνου
- (β) ποιο μήνα θα πάρει μισθό €675.

Λύση

(α) Ο μηνιαίος μισθός του υπαλλήλου αυτού αποτελεί αριθμητική πρόοδο με $a_1 = 500$ και $\delta = 5$. Έτσι, ο μισθός του Δεκέμβριου του 2021 είναι ο δέκατος όρος της αριθμητικής προόδου. Έχουμε ότι:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\delta \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9\delta = 500 + 9 \cdot 5 = €545$$

(β) Γνωρίζουμε ότι $a_1 = 500$, $\delta = 5$ και $a_n = 675$. Επομένως, έχουμε ότι:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\delta \Rightarrow 675 = 500 + (n - 1)5 \Rightarrow n = 36$$

Σε 36 μήνες (ή σε 3 χρόνια) από τον Μάρτιο του 2021, ο μηνιαίος μισθός του υπαλλήλου αυτού θα γίνει €675. Δηλαδή, τον Μάρτιο του 2024, ο μισθός του θα γίνει €675.

Διερεύνηση

Ο Gauss είναι ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς στην Ιστορία. Όταν ήταν μαθητής στο σχολείο, ο δάσκαλος του ζήτησε να υπολογίσει το άθροισμα όλων των φυσικών αριθμών μέχρι το 100. Ο Gauss απάντησε αμέσως με μια μέθοδο που αγνοούσε ο δάσκαλός του. Να ερευνήσετε ποια μέθοδο χρησιμοποίησε ο Gauss και να τη σχολιάσετε.



Πρόταση

Το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου είναι:

$$\Sigma_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \text{ή} \quad \Sigma_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)\delta]}{2}$$

Απόδειξη

Το άθροισμα των n πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι:

$$\begin{aligned} \Sigma_n &= a_1 + (a_1 + \delta) + (a_1 + 2\delta) + \dots + (a_n - 2\delta) + (a_n - \delta) + a_n \\ \Sigma_n &= a_n + (a_n - \delta) + (a_n - 2\delta) + \dots + (a_1 + 2\delta) + (a_1 + \delta) + a_1 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις πιο πάνω σχέσεις, προκύπτει ότι:

$$2\Sigma_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ προσθετέοι}} = n(a_1 + a_n) \Rightarrow \Sigma_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $a_n = a_1 + (n-1)\delta$, παίρνουμε ότι:

$$\Sigma_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)\delta]}{2}$$

Παράδειγμα 6

Σε αριθμητική πρόοδος δίνεται ότι $a_1 = 3$ και $\delta = 2$. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \Sigma_n &= \frac{n[2a_1 + (n-1)\delta]}{2} \Rightarrow \Sigma_{20} = \frac{20[2 \cdot 3 + (20-1)2]}{2} \Rightarrow \Sigma_{20} = \frac{20(6 + 19 \cdot 2)}{2} \\ &\Rightarrow \Sigma_{20} = 10(6 + 38) \Rightarrow \Sigma_{20} = 10 \cdot 44 = 440 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος με $a_4 = 3$ και $a_5 + a_7 = 14$.

Να υπολογίσετε το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της προόδου.

Λύση

Αρχικά, θα υπολογίσουμε τις τιμές των a_1 και δ . Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} a_4 = 3 &\Rightarrow a_1 + 3\delta = 3 \\ a_5 + a_7 = 14 &\Rightarrow a_1 + 4\delta + a_1 + 6\delta = 14 \Rightarrow a_1 + 5\delta = 7 \end{aligned}$$

Επιλύουμε το πιο πάνω σύστημα και παίρνουμε ότι $a_1 = -3$ και $\delta = 2$.

Συνεπώς:

$$\Sigma_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)\delta]}{2} \Rightarrow \Sigma_{100} = \frac{100[2(-3) + 99 \cdot 2]}{2} = 9600$$

Το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της προόδου είναι 9600.

Παράδειγμα 8

Ένας εργολάβος συμφώνησε με τον ιδιοκτήτη ότι αν το σπίτι δεν είναι έτοιμο τη μέρα που συμφώνησαν, τότε θα του έδινε €100 την επόμενη μέρα και για κάθε επιπλέον μέρα καθυστέρησης θα του έδινε €50 περισσότερα από την αμέσως προηγούμενη μέρα. Αν τελικά ο εργολάβος έδωσε €2700 για καθυστέρηση, να βρείτε πόσες μέρες καθυστέρησης να κτίσει το σπίτι.

Λύση

Τα χρήματα που δίνει ο εργολάβος στον ιδιοκτήτη για κάθε μέρα καθυστέρησης αποτελούν αριθμητική πρόοδος με $a_1 = 100$ και $\delta = 50$. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων της προόδου είναι $S_n = 2700$. Έτσι:

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)\delta]}{2} \Rightarrow 2700 = \frac{n[200 + (n-1)50]}{2} \Rightarrow 54 = \frac{n(4+n-1)}{2} \\ \Rightarrow n^2 + 3n - 108 = 0 \Rightarrow (n+12)(n-9) = 0 \Rightarrow n = 9$$

Ο εργολάβος καθυστέρησε 9 μέρες να κτίσει το σπίτι.

Παράδειγμα 9

Δίνεται ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ είναι:

$$S_n = 3n^2 + n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

Λύση

Ο νιοστός όρος της ακολουθίας προκύπτει, όταν αφαιρέσουμε από το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της το άθροισμα S_{n-1} των $(n-1)$ πρώτων όρων της ακολουθίας.

Αν $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ και $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$, τότε ισχύει:

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = a_n$$

Έτσι:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 + n - (3(n-1)^2 + n - 1) = 6n - 2$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η διαφορά $a_{n+1} - a_n$ είναι σταθερή (ανεξάρτητη του n).

Έχουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ότι:

$$a_{n+1} - a_n = 6(n+1) - 2 - (6n - 2) = 6$$

Συνεπώς, η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με πρώτον όρο τον $a_1 = 4$ και διαφορά $\delta = 6$.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, όταν ο δεύτερος της όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του, αν σε αυτόν προσθέσουμε έναν σταθερό αριθμό.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν ισχύει ότι $2\beta = \alpha + \gamma$, τότε οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε $\beta - \alpha = \beta - \gamma$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν σε αριθμητική πρόοδο ισχύει ότι $\delta = 1$, τότε $a_n - a_1 = n$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Αν η ακολουθία $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ είναι αριθμητική πρόοδος, τότε και η ακολουθία που αποτελείται από τους όρους a_1, a_3, a_5, \dots είναι αριθμητική πρόοδος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Σε αριθμητική πρόοδο δίνεται ότι $a_1 = -2$ και $\delta = 3$. Να υπολογίσετε:
- (α) τον δέκατο όρο της
 - (β) το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της.
3. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία με νιοστό όρο $a_n = 3 - 5n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι αριθμητική πρόοδος.
4. Σε αριθμητική πρόοδο, δίνεται ότι ο $1^{\text{ος}}$ όρος της ισούται με -6 και ο $7^{\text{ος}}$ όρος της ισούται με 15. Να υπολογίσετε τον $27^{\text{ο}}$ όρο της προόδου.
5. Σε αριθμητική πρόοδο, δίνεται ότι $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ και $a_6 - a_5 - a_4 = 2$. Να σχηματίσετε την πρόοδο.
6. Να υπολογίσετε το άθροισμα $8 + 11 + 14 + \dots + 158$.
7. Μια ομάδα στρατιωτών παρατάσσεται σε τριγωνικό σχήμα, έτσι ώστε στην πρώτη σειρά να στέκεται ένας στρατιώτης και σε κάθε επόμενη σειρά να στέκονται δύο περισσότεροι στρατιώτες από την αμέσως προηγούμενη σειρά. Αν στην τελευταία σειρά στέκονται 99 στρατιώτες, να υπολογίσετε:
- (α) πόσες σειρές σχηματίστηκαν
 - (β) πόσοι είναι όλοι οι στρατιώτες.
8. Δίνεται ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ είναι:

$$\Sigma_n = 5n^2 - n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Να αποδείξετε ότι η πιο πάνω ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

6.5.2 Γεωμετρική πρόοδος

Διερεύνηση

Ένα νούφαρο διπλασιάζεται κάθε μέρα.



- (α) Αν σε 100 μέρες καλύπτει όλη τη λίμνη, σε πόσες μέρες κάλυψε τη μισή λίμνη;
(β) Να βρείτε ένα αναδρομικό τύπο της ακολουθίας που εκφράζει το μέρος της επιφάνειας της λίμνης που καλύπτεται από το νούφαρο κάθε μέρα.

Ορισμός

Γεωμετρική πρόοδος λέγεται η ακολουθία μη μηδενικών όρων, της οποίας ο κάθε όρος, εκτός από τον πρώτο, προκύπτει από τον προηγούμενό του, αν τον πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο σταθερό αριθμό. Ο σταθερός αριθμός συμβολίζεται με λ και ονομάζεται **λόγος** της γεωμετρικής προόδου.

Δηλαδή, για την ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$, με $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι:

$$a_{n+1} = \lambda a_n \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$$

Παρατηρήσεις

- Από τον ορισμό, προκύπτει ότι $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.
 - Μια γεωμετρική πρόοδος, και γενικότερα μια ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$:
 - λέγεται **απόλυτα γνήσια αύξουσα**, όταν η ακολουθία $|a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$ (δηλαδή, η ακολουθία $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$) είναι γνησίως αύξουσα.
Δηλαδή, ισχύει ότι $|a_{n+1}| > |a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$.
 - λέγεται **απόλυτα γνήσια φθίνουσα**, όταν η ακολουθία $|a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$ (δηλαδή, η ακολουθία $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$) είναι γνησίως φθίνουσα.
Δηλαδή, ισχύει ότι $|a_{n+1}| < |a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$.
- Από τα πιο πάνω έχουμε συνοπτικά ότι:
- Αν $|\lambda| > 1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι απόλυτα γνήσια αύξουσα και
 - Αν $0 < |\lambda| < 1$ τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι απόλυτα γνήσια φθίνουσα.
 - Αν $\lambda = 1$ τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι σταθερή.
- Μια ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος, αν ο λόγος $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ είναι σταθερός, ανεξάρτητος του n .

Παράδειγμα 1

Δίνεται η ακολουθία $a_n = 3 \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο λόγος $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ είναι σταθερός, ανεξάρτητος του n .

Έχουμε ότι:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3 \cdot 2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{2^n} = 2$$

Συνεπώς, η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με $a_1 = 6$ και $\lambda = 2$.

Πρόταση

Αν a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει η σχέση $\beta^2 = a\gamma$. Αντίστροφα, αν για κάθε τριάδα a, β, γ διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας $(a_n), n \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση $\beta^2 = a\gamma$, τότε η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος.

Απόδειξη

Αφού η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος, τότε ισχύει ότι:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Συνεπώς, $\frac{\beta}{a} = \lambda$ και $\frac{\gamma}{\beta} = \lambda$. Έχουμε ότι:

$$\frac{\beta}{a} = \frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow \beta^2 = a\gamma$$

Αντίστροφα, αν $\beta^2 = a\gamma$, τότε $\frac{\beta}{a} = \frac{\gamma}{\beta}$. Επομένως, οι αριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Σημείωση

Σε μια γεωμετρική πρόοδο με θετικούς όρους, αν a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι της, τότε ο αριθμός β λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των αριθμών a και γ και ισούται με την θετική τετραγωνική ρίζα των a, γ . Δηλαδή, $\beta = \sqrt{a\gamma}$.

Παράδειγμα 2

Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει ότι $\lambda\mu = \kappa\nu$.

Λύση

Ισχύει ότι $\lambda^2 = \kappa\mu$ και $\mu^2 = \lambda\nu$, αφού οι αριθμοί $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Επομένως:

$$\lambda^2 \mu^2 = \kappa\mu\lambda\nu \Leftrightarrow \lambda\mu = \kappa\nu$$

Πρόταση

Ο γενικός όρος a_n μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο τον a_1 και λόγο λ δίνεται από τον τύπο:

$$a_n = a_1 \lambda^{n-1}$$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την πιο πάνω σχέση με τη μέθοδο της Μαθηματικής (Τέλειας) Επαγωγής.

Έστω $(a_n), n \in \mathbb{N}$ μια γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο τον a_1 και λόγο λ .

Θα αποδείξουμε ότι με τη μέθοδο της Τέλειας Επαγωγής ότι:

$$p(n) : a_n = a_1 \lambda^{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Έχουμε ότι:

Βήμα 1^ο

Για $n = 1$, έχουμε $p(1) : a_1 = a_1 \lambda^0 = a_1$, αληθής.

Βήμα 2^ο

Υποθέτουμε ότι για $n = k$ ο δεδομένος τύπος είναι αληθής. Δηλαδή:

$$p(k) : a_k = a_1 \lambda^{k-1} \tag{1}$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι ο δεδομένος τύπος είναι αληθής για $n = k + 1$. Δηλαδή:

$$p(k + 1) : a_{k+1} = a_1 \lambda^k$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \text{Α' μέλος} &= a_{k+1} = \lambda a_k = \lambda a_1 \lambda^{k-1} && \text{Από την (1)} \\ &= a_1 \lambda^k = \text{Β' μέλος} \end{aligned}$$

Άρα, $p(k + 1)$ αληθής και συνεπώς η πρόταση $p(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 3

Ο πληθυσμός μιας πόλης αυξάνεται σταθερά 10% κάθε χρόνο. Αν ο πληθυσμός της πόλης ήταν 10000 άτομα στο τέλος του 2021, να υπολογίσετε το πληθυσμό της πόλης στο τέλος του 2026.

Λύση

Ο πληθυσμός κάθε χρόνο είναι γεωμετρική πρόοδος με $a_1 = 10000$ και $\lambda = \frac{110}{100} = 1,1$.

Ο πληθυσμός στο τέλος του 2026 είναι ο έκτος όρος της γεωμετρικής προόδου:

$$a_n = a_1 \lambda^{n-1} \Rightarrow a_6 = 10000 \cdot 1,1^5 = 16105$$

Το άθροισμα Σ_n των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου

Διερεύνηση

Ένας μαθητής αποκαλύπτει ένα μυστικό σε 2 πολύ καλούς του φίλους την πρώτη μέρα του σχολείου. Την επόμενη μέρα, οι 2 φίλοι του μαθητή αποκαλύπτουν το μυστικό αυτό σε 2 φίλους του ο καθένας κοκ. Πόσα άτομα θα γνωρίζουν το μυστικό του μαθητή μετά από 7 ημέρες;



Πρόταση

Το άθροισμα Σ_n των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο τον a_1 και λόγο λ είναι:

$$\Sigma_n = \frac{a_1(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda}, \quad \lambda \neq 1$$

Αν $\lambda = 1$, τότε $\Sigma_n = na_1$ (σταθερή ακολουθία με $a_n = a_1$).

Απόδειξη

Το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ ($\lambda \neq 1$) είναι:

$$\Sigma_n = a_1 + a_1\lambda + a_1\lambda^2 + \dots + a_1\lambda^{n-2} + a_1\lambda^{n-1}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της πιο πάνω ισότητας με $-\lambda$ και προσθέτουμε κατά μέλη. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \Sigma_n &= a_1 + a_1\lambda + a_1\lambda^2 + \dots + a_1\lambda^{n-2} + a_1\lambda^{n-1} \\ -\lambda\Sigma_n &= -a_1\lambda - a_1\lambda^2 - \dots - a_1\lambda^{n-2} - a_1\lambda^{n-1} - a_1\lambda^n \quad (+) \end{aligned}$$

$$\Sigma_n - \lambda\Sigma_n = a_1 - a_1\lambda^n \Rightarrow (1 - \lambda)\Sigma_n = a_1(1 - \lambda^n) \Rightarrow \Sigma_n = \frac{a_1(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda}$$

Παράδειγμα 4

Σε γεωμετρική πρόοδο δίνεται ότι $a_1 = 3$ και $\lambda = 2$. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\Sigma_n = \frac{a_1(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda} \Rightarrow \Sigma_7 = \frac{3(1 - 2^7)}{1 - 2} \Rightarrow \Sigma_7 = \frac{3(1 - 128)}{-1} \Rightarrow \Sigma_7 = \frac{3(-127)}{-1} = 381$$

Παράδειγμα 5

Σε γεωμετρική πρόοδο, δίνεται ότι $a_5 - a_1 = 15$ και $a_2 - a_4 = 6$. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της προόδου.

Λύση

Θα υπολογίσουμε τις τιμές των a_1 και λ . Έχουμε ότι:

$$a_5 - a_1 = 15 \Rightarrow a_1\lambda^4 - a_1 = 15 \Rightarrow a_1(\lambda^4 - 1) = 15 \quad (1) \quad (a_1 \neq 0, \lambda \neq \pm 1)$$

$$a_2 - a_4 = 6 \Rightarrow a_1\lambda - a_1\lambda^3 = 6 \Rightarrow a_1\lambda(1 - \lambda^2) = 6 \quad (2) \quad (a_1 \neq 0, \lambda \neq \pm 1, \lambda \neq 0)$$

Επομένως, διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2), έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\frac{a_1(\lambda^4 - 1)}{a_1\lambda(1 - \lambda^2)} = \frac{15}{6} &\Rightarrow \frac{(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)}{\lambda(1 - \lambda^2)} = \frac{5}{2} = 0 \\ &\Rightarrow 2\lambda^2 + 2 = -5\lambda \Rightarrow 2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0 \\ &\Rightarrow (2\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \lambda = -2\end{aligned}$$

- Αν $\lambda = -\frac{1}{2}$, τότε $a_1 = \frac{15}{\frac{1}{16} - 1} = -16$.

Επομένως:

$$\Sigma_v = \frac{a_1(1 - \lambda^v)}{1 - \lambda} \Rightarrow \Sigma_5 = \frac{-16\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -11$$

- Αν $\lambda = -2$, τότε $a_1 = \frac{15}{16 - 1} = 1$.

Επομένως:

$$\Sigma_v = \frac{a_1(1 - \lambda^v)}{1 - \lambda} \Rightarrow \Sigma_5 = \frac{1(1 - (-2)^5)}{1 - (-2)} = 11$$

Παράδειγμα 6

Δίνεται ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ είναι:

$$\Sigma_n = 3^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος.

Λύση

Ο νιοστός όρος της ακολουθίας προκύπτει, όταν αφαιρέσουμε από το άθροισμα Σ_n των n πρώτων όρων το άθροισμα Σ_{n-1} των $(n - 1)$ πρώτων όρων της ακολουθίας.

Αν $\Sigma_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ και $\Sigma_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$, τότε ισχύει:

$$\Sigma_n - \Sigma_{n-1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = a_n$$

Έτσι:

$$a_n = \Sigma_n - \Sigma_{n-1} = 3^n - 1 - (3^{n-1} - 1) = 3^n - 3^{n-1}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο λόγος $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ είναι σταθερός (ανεξάρτητη του n).

Έχουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ότι:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1} - 3^n}{3^n - 3^{n-1}} = \frac{3^{n-1}(9 - 3)}{3^{n-1}(3 - 1)} = 3$$

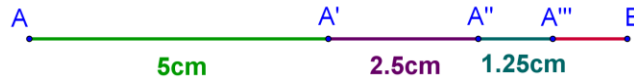
Συνεπώς, η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με $a_1 = 2$ και $\lambda = 3$.

Διερεύνηση

Το σημείο A απέχει από το σημείο B απόσταση 10 cm. Το σημείο A ξεκινά να κινείται προς το σημείο B με τον εξής τρόπο:

Το πρώτο λεπτό καλύπτει 5 cm, το δεύτερο 2,5 cm, το τρίτο 1,25 cm κ.τ.λ.

Πόσα λεπτά θα χρειαστεί το σημείο A για να φτάσει στο σημείο B ;



Σημείωση: Το πιο πάνω πρόβλημα αποτελεί παραλλαγή του «Παράδοξου» του Ζήνωνα γνωστού από την αρχαιότητα.

Σε μια γεωμετρική πρόοδο, και γενικά σε μια ακολουθία (a_n) , $n \in \mathbb{N}$, το άθροισμα των n πρώτων όρων της το συμβολίσαμε με Σ_n .

Αν το $\lim \Sigma_n$ είναι πραγματικός αριθμός, τότε η ακολουθία (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ λέγεται ότι έχει άθροισμα απείρων όρων και το όριο $\lim \Sigma_n$ συμβολίζεται με Σ_∞ .

Πρόταση

Το άθροισμα των απείρων όρων (Σ_∞) μιας απόλυτα γνήσια φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με πρώτον όρο τον a_1 και λόγο λ είναι:

$$\Sigma_\infty = \frac{a_1}{1-\lambda}, \quad |\lambda| < 1$$

Απόδειξη

Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο με πρώτον όρο τον a_1 και λόγο $\lambda \neq 1$, ισχύει ότι:

$$\Sigma_n = \frac{a_1(1-\lambda^n)}{1-\lambda}$$

Από τις ιδιότητες ορίων ακολουθίας, έχουμε ότι $\lim \lambda^n = 0$ ($|\lambda| < 1$).

Επομένως:

$$\Sigma_\infty = \lim \Sigma_n = \lim \frac{a_1(1-\lambda^n)}{1-\lambda} = \lim \left(\frac{a_1}{1-\lambda} - \frac{a_1\lambda^n}{1-\lambda} \right) = \frac{a_1}{1-\lambda} - 0 = \frac{a_1}{1-\lambda}$$

Παράδειγμα 7

Να υπολογίσετε το άθροισμα των απείρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο τον $a_1 = 2$ και λόγο $\lambda = -\frac{1}{2}$.

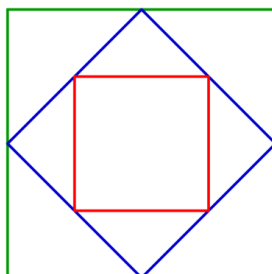
Λύση

Η γεωμετρική πρόοδος είναι απόλυτα γνήσια φθίνουσα, γιατί $|\lambda| < 1$. Επομένως:

$$\Sigma_\infty = \frac{a_1}{1-\lambda} \Rightarrow \Sigma_\infty = \frac{2}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

Παράδειγμα 8

Δίνεται τετράγωνο με πλευρά 2 cm. Με κορυφές τα μέσα των πλευρών του κατασκευάζουμε άλλο τετράγωνο και συνεχίζουμε κατασκευάζοντας τετράγωνα με τον ίδιο τρόπο. Να βρείτε το άθροισμα των περιμέτρων των απείρων τετραγώνων που δημιουργούνται με αυτόν τον τρόπο.



Λύση

Αποδεικνύεται ότι η πλευρά κάθε τετραγώνου έχει μήκος ίσο με το μισό του μήκους της διαγωνίου του προηγούμενου τετραγώνου. Δηλαδή:

$$a_1 = 2 \text{ cm}, \quad a_2 = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ cm}, \quad a_3 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1 \text{ cm}, \dots$$

Οι περίμετροι των τετραγώνων είναι $\Pi_1 = 8 \text{ cm}$, $\Pi_2 = 4\sqrt{2} \text{ cm}$, $\Pi_3 = 4 \text{ cm}$, ... και σχηματίζουν απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο τον $\Pi_1 = 8 \text{ cm}$ και $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Συνεπώς:

$$\Sigma_{\infty} = \frac{\Pi_1}{1 - \lambda} \Rightarrow \Sigma_{\infty} = \frac{8}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{16}{2 - \sqrt{2}} = \frac{16}{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{16(2 + \sqrt{2})}{2} = (16 + 8\sqrt{2}) \text{ cm}$$

Παράδειγμα 9

Καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο a ευρώ με ετήσιο επιτόκιο $\varepsilon\%$. Με τη συμπλήρωση ενός χρόνου, οι τόκοι που προκύπτουν προστίθενται στο κεφάλαιο αυτό και το ποσό που προκύπτει είναι το νέο κεφάλαιο που τοκίζεται με το ίδιο επιτόκιο για τον επόμενο χρόνο. Αν η διαδικασία αυτή επαναληφθεί για n χρόνια, να βρείτε ποιο θα είναι το ποσό που θα εισπράξουμε στο τέλος του n -οστού χρόνου.

Λύση

- Στο τέλος του πρώτου χρόνου, το κεφάλαιο a δίνει τόκο $a \cdot \frac{\varepsilon}{100}$. Έτσι, το νέο κεφάλαιο a_1 είναι:

$$a_1 = a + a \cdot \frac{\varepsilon}{100} = a \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$$

- Στο τέλος του δεύτερου χρόνου, το κεφάλαιο a_1 δίνει τόκο $a_1 \cdot \frac{\varepsilon}{100}$. Έτσι, το νέο κεφάλαιο a_2 είναι:

$$a_2 = a_1 + a_1 \cdot \frac{\varepsilon}{100} = a_1 \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$$

- Στο τέλος του τρίτου χρόνου, το κεφάλαιο a_2 δίνει τόκο $a_2 \cdot \frac{\varepsilon}{100}$. Έτσι, το νέο κεφάλαιο a_3 είναι:

$$a_3 = a_2 + a_2 \cdot \frac{\varepsilon}{100} = a_2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$$

⋮

- Στο τέλος του n -οστού χρόνου, το κεφάλαιο a_{n-1} δίνει τόκο $a_{n-1} \cdot \frac{\varepsilon}{100}$. Έτσι, το νέο κεφάλαιο a_n είναι:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-1} \cdot \frac{\varepsilon}{100} = a_{n-1} \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$$

Παρατηρούμε ότι τα $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $a_1 = a \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$ και λόγο $\lambda = 1 + \frac{\varepsilon}{100}$. Επομένως, από τον τύπο του n -οστού όρου γεωμετρικής προόδου, παίρνουμε ότι:

$$a_n = a_1 \lambda^{n-1} = a \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{n-1} = a \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^n$$

Αν θέσουμε $\frac{\varepsilon}{100} = \tau$, τότε παίρνουμε τον τύπο

$$a_n = a(1 + \tau)^n,$$

που είναι γνωστός ως **τύπος του ανατοκισμού**.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Η ακολουθία με αναδρομικό τύπο $a_{v+1} = 5a_v, v \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν για τρεις οποιουσδήποτε διαδοχικούς όρους μιας ακολουθίας ισχύει ότι $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma}$, τότε οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Κάθε σταθερή ακολουθία $a_v = c, v \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν σε γεωμετρική πρόοδο ισχύει ότι $\lambda = 1$, τότε $\Sigma_v = va_1$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Αν η ακολουθία $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ είναι γεωμετρική πρόοδος, τότε και η ακολουθία που αποτελείται από τους όρους a_2, a_4, a_6, \dots είναι γεωμετρική πρόοδος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Σε γεωμετρική πρόοδο δίνεται ότι $a_1 = -1$ και $\lambda = 3$. Να υπολογίσετε:
- (α) τον πέμπτο όρο της
 (β) το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της.
3. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία με νιοστό όρο $a_v = -5 \cdot 4^v, v \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος.
4. Σε γεωμετρική πρόοδο, δίνεται ότι $a_4 = 3$ και $a_8 = \frac{1}{27}$. Να σχηματίσετε τη γεωμετρική πρόοδο.
5. Μεταξύ των αριθμών 15 και 480 να παρεμβάλετε τέσσερις αριθμούς, ώστε όλοι μαζί να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.
6. Σε γεωμετρική πρόοδο, δίνεται ότι $a_1 + a_2 = 3$ και $a_3 + a_4 = 12$. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της προόδου.
7. Να υπολογίσετε το άθροισμα $3 + 6 + 12 + \dots + 192$.
8. Σε απόλυτα γνήσια φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο, ο πρώτος όρος ισούται με το $\frac{1}{2}$ του αθροίσματος των άπειρων όρων της. Αν το άθροισμα των δύο πρώτων όρων της είναι 20, να σχηματίσετε την πρόοδο.
9. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω αθροίσματα:

(α) $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \dots$

(β) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{9} + \frac{1}{10} + \frac{4}{27} - \frac{1}{50} - \dots$

10. Πόσα χρήματα πρέπει να τοκίσει κάποιος με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 2%, ώστε να πάρει μετά από 10 χρόνια συνολικά €30000;

11. Τοποθετούμε κόκκους ρυζιού στα 64 τετράγωνα της διπλανής σκακιέρας με τον τρόπο που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, δηλαδή ένας κόκκος στο κάτω αριστερά τετραγωνάκι, δύο στο τετράγωνο που βρίσκεται στα δεξιά του, τέσσερεις στο επόμενο κτλ. Να υπολογίσετε πόσους κόκκους ρυζιού πρέπει να βάλουμε στο 64^ο τετράγωνο της σκακιέρας.



12. Δίνεται ότι το άθροισμα Σ_n των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ είναι:

$$\Sigma_n = 2 - \frac{2}{5^n}$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος και να υπολογίσετε το άθροισμα των άπειρων όρων της.

Περίληψη

1. Κάθε συνάρτηση a , με πεδίο ορισμού το \mathbb{N} και πεδίο τιμών το \mathbb{R} , λέγεται **ακολουθία πραγματικών αριθμών**.

Συμβολικά έχουμε $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

2. Μια ακολουθία λέγεται:

- **γνησίως αύξουσα**, όταν κάθε όρος της, εκτός από τον πρώτο, είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του. Δηλαδή, ισχύει $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- **αύξουσα**, όταν κάθε όρος της, εκτός από τον πρώτο, είναι μεγαλύτερος ή ίσος από με τον προηγούμενό του. Δηλαδή, ισχύει $a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- **γνησίως φθίνουσα**, όταν κάθε όρος της, εκτός από τον πρώτο, είναι μικρότερος από τον προηγούμενό του. Δηλαδή, ισχύει $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- **φθίνουσα**, όταν κάθε όρος της, εκτός από τον πρώτο, είναι μικρότερος ή ίσος από τον προηγούμενό του. Δηλαδή, ισχύει $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- **σταθερή**, όταν κάθε όρος της, εκτός από τον πρώτο, είναι ίσος με τον προηγούμενό του. Δηλαδή, ισχύει $a_{n+1} = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Μια ακολουθία (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ έχει **όριο** τον πραγματικό αριθμό λ ή **συγκλίνει στον αριθμό λ** , αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για όλα τα $n \geq n_0$ να έχουμε $|a_n - \lambda| < \varepsilon$.

Συμβολικά, έχουμε ότι:

$$\lim a_n = \lambda \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \lambda| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

4. Με χρήση των ιδιοτήτων των ορίων των συναρτήσεων με τύπο $y = f(x)$, όταν $x \rightarrow +\infty$, καθώς και με χρήση των βασικών ορίων, υπολογίζονται και τα όρια των ακολουθιών.

5. **Αριθμητική πρόοδος** λέγεται η ακολουθία (a_n) , $n \in \mathbb{N}$, της οποίας ο κάθε όρος, εκτός από τον πρώτο, προκύπτει από τον προηγούμενό του αν σε αυτόν προσθέσουμε τον ίδιο σταθερό αριθμό. Ο σταθερός αριθμός ονομάζεται **διαφορά** της αριθμητικής πρόοδου και συμβολίζεται με δ .

Συμβολικά, έχουμε ότι $a_{n+1} = a_n + \delta$, $n = 1, 2, 3, \dots$

6. Αν a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής πρόοδου, τότε ισχύει η σχέση $2\beta = a + \gamma$. Αντίστροφα, αν για κάθε τριάδα a, β, γ διαδοχικών όρων της ακολουθίας (a_n) , $n \in \mathbb{N}$, ισχύει η σχέση $2\beta = a + \gamma$, τότε η ακολουθία (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ είναι αριθμητική πρόοδος. Σε μια αριθμητική πρόοδο, αν a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι της, τότε ο αριθμός β λέγεται **αριθμητικός μέσος** των αριθμών a και γ και ισούται με το ημίαθροισμα των a, γ . Δηλαδή, $\beta = \frac{a+\gamma}{2}$.

7. Ο **γενικός όρος** a_n μιας αριθμητικής πρόοδου με πρώτο όρο τον a_1 και διαφορά δ δίνεται από τον τύπο $a_n = a_1 + (n - 1)\delta$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

8. Το **άθροισμα των n πρώτων όρων** μιας αριθμητικής προόδου είναι:

$$\Sigma_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \text{ή} \quad \Sigma_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)\delta]}{2}$$

9. **Γεωμετρική πρόοδος** λέγεται η ακολουθία μη μηδενικών όρων, της οποίας ο κάθε όρος, εκτός από τον πρώτο, προκύπτει από τον προηγούμενό του, αν τον πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο σταθερό αριθμό. Ο σταθερός αριθμός συμβολίζεται με λ και ονομάζεται **λόγος** της γεωμετρικής προόδου. Δηλαδή, για την ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$, με $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι:

$$a_{n+1} = \lambda a_n \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

10. Μια γεωμετρική πρόοδος, και γενικότερα μια ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ λέγεται:

- **απόλυτα γνήσια αύξουσα**, όταν η ακολουθία $|a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$ (δηλαδή, η ακολουθία $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$) είναι γνήσιως αύξουσα.

Δηλαδή, ισχύει ότι $|a_{n+1}| > |a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$.

- **απόλυτα γνήσια φθίνουσα**, όταν η ακολουθία $|a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$ (δηλαδή, η ακολουθία $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$) είναι γνήσιως φθίνουσα.

Δηλαδή, ισχύει ότι $|a_{n+1}| < |a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$.

Από τα πιο πάνω έχουμε συνοπτικά ότι:

- Αν $|\lambda| > 1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι απόλυτα γνήσια αύξουσα και
- Αν $0 < |\lambda| < 1$ τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι απόλυτα γνήσια φθίνουσα.
- Αν $\lambda = 1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι σταθερή.

11. Αν a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει η σχέση $\beta^2 = a\gamma$. Αντίστροφα, αν για κάθε τριάδα a, β, γ διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας $(a_n), n \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση $\beta^2 = a\gamma$, τότε η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος. Σε μια γεωμετρική πρόοδο με θετικούς όρους, αν a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι της, τότε ο αριθμός β λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των αριθμών a και γ και ισούται με την θετική τετραγωνική ρίζα των a, γ . Δηλαδή, $\beta = \sqrt{a\gamma}$.

12. Ο **γενικός όρος** a_n μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο τον a_1 και λόγο λ δίνεται από τον τύπο $a_n = a_1 \lambda^{n-1}$.

13. Το **άθροισμα Σ_n των n πρώτων όρων** γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο τον a_1 και λόγο λ είναι:

$$\Sigma_n = \frac{a_1(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda}, \quad \lambda \neq 1$$

Αν $\lambda = 1$, τότε $\Sigma_n = na_1$ (σταθερή ακολουθία με $a_n = a_1$).

14. Το **άθροισμα των άπειρων όρων (Σ_∞)** μιας απόλυτα γνήσια φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με πρώτον όρο τον a_1 και λόγο λ είναι:

$$\Sigma_\infty = \frac{a_1}{1 - \lambda}, \quad |\lambda| < 1$$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Κάθε ακολουθία έχει πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Μια ακολουθία λέγεται φθίνουσα, όταν κάθε επόμενος όρος της είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με τον προηγούμενό του.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Όλοι οι όροι κάθε σταθερής ακολουθίας είναι ίσοι.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Κάθε αύξουσα ακολουθία είναι μονότονη.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Κάθε μονότονη ακολουθία είναι αύξουσα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Κάθε σταθερή ακολουθία είναι μονότονη.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	Μια ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει, όταν $\lim a_n = \lambda$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(η)	Μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, όταν $a_{n+1} - a_n = \delta, \forall n \in \mathbb{N}, \delta \in \mathbb{R}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(θ)	Κάθε σταθερή ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ι)	Μία αριθμητική πρόοδος είναι γνησίως αύξουσα, όταν $\delta > 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ια)	Δεν υπάρχει ακολουθία, η οποία να είναι αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος ταυτόχρονα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ιβ)	Το άπειρο άθροισμα των όρων απόλυτα φθίνουσας γεωμετρικής προόδου είναι πάντα πραγματικός αριθμός.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Έστω μια ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$, που ορίζεται από τον γενικό τύπο $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$.
Να βρείτε τους έξι πρώτους όρους της.

3. Έστω μια ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$, που ορίζεται από τον αναγωγικό τύπο:

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n, \quad a_1 = 3$$

Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους της.

4. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία με γενικό όρο

$$a_n = \frac{3}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

είναι γνησίως φθίνουσα.

5. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας των πιο κάτω ακολουθιών $(a_n), n \in \mathbb{N}$, με γενικό όρο:

(α) $a_n = n^2 + 2n$

(β) $a_n = -4^n + 3$

(γ) $a_n = (-n + 1)(-1)^n$

6. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω ακολουθίες $(a_n), n \in \mathbb{N}$, είναι συγκλίνουσες:
- (α) $a_n = \frac{3n^2}{n+1}$
- (β) $a_n = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$
7. Δίνεται η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$, με αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = 2a_n + 1$.
Αν ο τρίτος όρος της ακολουθίας είναι ο 23, να υπολογίσετε τον πρώτο όρο της.
8. Να βρείτε τον χιλιοστό όρο της αριθμητικής προόδου $-3, 5, 13, \dots$.
9. Να υπολογίσετε την τιμή του x , ώστε οι αριθμοί $x-2, x, 2x+1$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
10. Μεταξύ των αριθμών 4 και 39, να παρεμβάλετε 6 αριθμούς, ώστε να σχηματίζουν όλοι μαζί αριθμητική πρόοδο.
11. Να σχηματίσετε αριθμητική πρόοδο, της οποίας ο $3^{\text{ος}}$ και ο $7^{\text{ος}}$ όρος της έχουν άθροισμα 32, ενώ ο $4^{\text{ος}}$ και ο $5^{\text{ος}}$ όρος της έχουν άθροισμα 29.
12. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 6, 10, 14, Να βρείτε πόσοι όροι της προόδου έχουν άθροισμα 160.
13. Ο αριθμός των καθισμάτων σε κάθε σειρά ενός θεάτρου αποτελεί αριθμητική πρόοδο. Η πρώτη σειρά έχει 16 καθίσματα και η τελευταία 200 καθίσματα. Αν η δέκατη σειρά έχει 32 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά, να βρείτε πόσες σειρές και πόσα καθίσματα έχει το θέατρο.
14. Να λύσετε την εξίσωση $(x+3) + (x+7) + (x+11) + \dots + (x+79) = 800$.
15. Σε γεωμετρική πρόοδος δίνεται ότι $a_3 = 5$ και $a_8 = \frac{5}{32}$. Να υπολογίσετε:
- (α) τον εντέκατο όρο της προόδου
- (β) το άθροισμα των άπειρων όρων της προόδου.
16. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1 + (-2) + 4 + (-8) + 16 + \dots + 256$$

17. Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a^3 + \beta^3 + \gamma^3}{a^2\beta^2\gamma^2} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3}$$

18. Να δείξετε ότι οι αριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί αριθμοί γεωμετρικής προόδου, αν και μόνον αν οι αριθμοί

$$\frac{1}{a + \beta}, \frac{1}{a - \gamma}, \frac{1}{a - \beta}$$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

19. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$2 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{18} + \dots$$

20. Σε απόλυτα φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο, ο πρώτος όρος, το άθροισμα των δύο πρώτων όρων και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον λόγο της γεωμετρικής προόδου.

21. Μια ελαστική μπάλα πέφτει από ύψος 2 m και κάθε φορά που κτυπά στο έδαφος χάνει 20% της αρχικής της ενέργειας. Αν δεν υπάρχουν άλλες απώλειες, να υπολογίσετε:

(α) το ύψος της μπάλας μετά την 6^η αναπήδηση

(β) το συνολικό διάστημα που θα διανύσει η μπάλα μέχρι να ακινητοποιηθεί.

22. Δίνεται πρόδος με $a_1 = x^2$, $a_2 = x^2 - 1$, $a_3 = x^2 - 2$ και $a_{10} = 40$.

(α) Να βρείτε το είδος της προόδου.

(β) Να υπολογίσετε τις τιμές του x .

(γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα όλων των θετικών όρων της.

23. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x^3}{8} + \frac{x}{16} + \frac{x^4}{16} + \dots = \frac{3}{2}, \quad |x| < 2$$

24. Αν οι αριθμοί x, y, ω είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι και οι αριθμοί $x^2 - \omega y$, $y^2 - \omega x$, $\omega^2 - xy$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

25. Αριθμητική πρόδος και απόλυτα γνήσια φθίνουσα γεωμετρική πρόδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι τριπλάσια του λόγου της γεωμετρικής προόδου. Το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι ίσο με τον όγδοο όρο της, ενώ ο πέμπτος όρος της είναι διπλάσιος του αθροίσματος των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου. Να σχηματίσετε τις δύο προόδους.

26. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου είναι ίσο με $G_n = a_1^n \lambda^{\frac{n^2-n}{2}}$.

27. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (a_n) , $n \in \mathbb{N}$, με $a_1 \neq 0$ και $\lambda \neq 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\beta_n = \frac{1}{a_n}$ είναι γεωμετρική πρόοδος.

(β) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n} = a_1 a_n$$

28. Το αμφιθέατρο «Μακαρίου Γ'», το οποίο βρίσκεται στο χώρο της «Σχολής Τυφλών», αποτελείται από 8 κερκίδες $(A - \theta)$, από τις οποίες οι 6 $(B - H)$ έχουν ισάριθμες σειρές με ισάριθμες θέσεις. Η πρώτη σειρά κάθε κερκίδας περιέχει 8 καθίσματα και η κάθε επόμενη σειρά αυξάνεται ακριβώς κατά ένα κάθισμα. Αν οι 6 κερκίδες $(B - H)$ αποτελούνται συνολικά από 1350 καθίσματα, να βρείτε:

(α) πόσες σειρές έχει η κάθε κερκίδα

(β) πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά κάθε κερκίδας.

Αν σε μια συναυλία στην πρώτη σειρά της κερκίδας Γ υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, και σε κάθε επόμενη σειρά 3 περισσότερα κενά καθίσματα, να βρείτε:

(γ) από ποια σειρά και μετά θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα και

(δ) πόσοι θα είναι οι θεατές της κερκίδας Γ .



Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Δίνεται η ακολουθία

$$a_n = \frac{x^n - y^n}{x^n + y^n}, \quad x, y > 0$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα όταν $x > y$ και γνησίως φθίνουσα όταν $x < y$.

2. Δίνεται η ακολουθία (a_n) , $n \in \mathbb{N}$, με γενικό όρο:

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ άρτιος} \\ n + 1, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα.

3. Δίνεται η ακολουθία (a_n) , $n \in \mathbb{N}$, με όρους $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ...

(α) Να βρείτε ένα αναδρομικό τύπο για την πιο πάνω ακολουθία.

(β) Να αποδείξετε ότι $a_n = 2^{1 - \frac{1}{2^n}}$.

4. Ο Μαθηματικός Leonardo Fibonacci (13^{ος} αιώνας) από την Πίζα της Ιταλίας έγινε γνωστός από την ακολουθία που φέρει το όνομα του στη λύση του προβλήματος που ακολουθεί:

«Πόσα ζεύγη κουνελιών παράγονται από ένα αρχικό ζευγάρι κουνελιών σε ένα χρόνο, αν κάθε μήνα κάθε ζευγάρι γεννά ένα νέο ζευγάρι, το οποίο τον δεύτερο μήνα της ζωής του αρχίζει και αυτό να γεννά, με την προϋπόθεση ότι κανένα κουνέλι δεν πεθαίνει;»

(α) Να συμπληρωθεί ο πιο κάτω πίνακας που μας δίνει τη λύση του προβλήματος:

Μήνας	Ιαν	Φεβ	Μαρ	Απρ	Μαη	Ιουν	Ιουλ	Αυγ	Σεπ	Οκτ	Νιο	Δεκ
Όριμα ζευγάρια	1	1	2	3	5	8	13	21				
Νεαρά ζευγάρια	0	1	1	2	3	5	8	13				

(β) Αν με φ_n συμβολίζουμε τον αριθμό των ζευγαριών μετά από n μήνες, τότε είναι φανερό ότι στο τέλος του $(n + 1)$ μήνα θα υπάρχουν φ_n ζευγάρια και όλα τα άλλα που γεννήθηκαν και αυτά είναι ίσα με τον αριθμό των ζευγαριών που υπήρχαν τον $(n - 1)$ μήνα. Δηλαδή, η ακολουθία ορίζεται από τη σχέση:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1}, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 1$$

Ο λόγος του επόμενου όρου προς τον προηγούμενο συμβολίζεται με φ και είναι ο λόγος της «**χρυσής τομής**». Δηλαδή, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \varphi$.

Να δείξετε ότι $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 07

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

ΠΕΡΙΧΟΜΕΝΑ

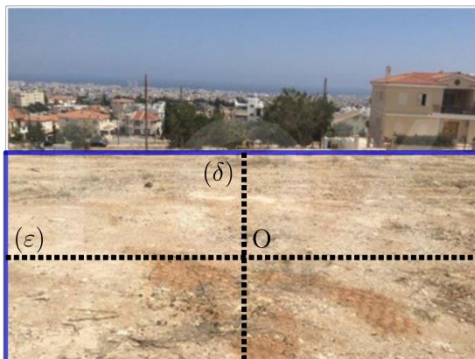
- 7.1 Η έννοια του γεωμετρικού τόπου
- 7.2 Εύρεση γεωμετρικού τόπου
- 7.3 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στο επίπεδο

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

7.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΠΟΥ

Διερεύνηση

Στη διπλανή εικόνα, φαίνεται ένα οικοπέδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 28 m και 15 m, στο οποίο πρόκειται να ανεγερθεί οικοδομή. Οι μεσοκάθετοι (ϵ) και (δ) των πλευρών του τέμνονται στο σημείο O .



Οι τέσσερις βάσεις για τις γωνιακές δοκούς της οικοδομής θα πρέπει να τοποθετηθούν στα σημεία του οικοπέδου που απέχουν από

την ευθεία (ϵ) απόσταση 5 m και από το κέντρο O του οικοπέδου απόσταση 7 m.

- Να βρείτε έναν πρακτικό τρόπο, με τον οποίο ο εργολάβος της οικοδομής μπορεί να προσδιορίσει τις τέσσερις θέσεις για τις βάσεις των δοκών.
- Να διερευνήσετε αν τα σημεία αυτά, που ικανοποιούν τις πιο πάνω συνθήκες, είναι μοναδικά και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην Ευκλείδεια Γεωμετρία παρουσιάζουν προβλήματα του τύπου:

«Να προσδιορίσετε ένα σύνολο σημείων (σημειοσύνολο), του οποίου κάθε στοιχείο (σημείο) ικανοποιεί μια δεδομένη συνθήκη (ιδιότητα) I ή και περισσότερες.»

Η επίλυση αυτών των προβλημάτων συνίσταται στον προσδιορισμό της μορφής αυτού του σημειοσυνόλου G στο επίπεδο ή στο χώρο, με τη βοήθεια άλλων γνωστών σχημάτων ή γραμμών των οποίων γνωρίζουμε τις ιδιότητες και μπορούμε να τα κατασκευάσουμε. Αυτά τα προβλήματα λέμε ότι είναι προβλήματα **γεωμετρικών τόπων**.

Ιστορικό σημείωμα

Στην Ακαδημία του Πλάτωνα στην Αρχαία Αθήνα (430 – 347 π.Χ) αναπτύχθηκαν οι γεωμετρικοί τόποι, σε συνδυασμό με την αναλυτική – συνθετική μέθοδο απόδειξης γεωμετρικών και όχι μόνο προβλημάτων.

Αργότερα, όμως, ο «μέγας Γεωμέτρης» Απολλώνιος ο Περγαίος ασχολήθηκε με τους γεωμετρικούς τόπους πιο συστηματικά. Ο Απολλώνιος έγραψε δύο βιβλία με τίτλο «Επίπεδοι τόποι», τα οποία δυστυχώς δεν σώζονται. Στα βιβλία αυτά, ο Απολλώνιος αναφέρεται στην εύρεση του γεωμετρικού τόπου ενός σημείου στο επίπεδο, σε πολλές περιπτώσεις, αν ο τόπος είναι ευθεία γραμμή ή περιφέρεια.

Ορισμός

Γεωμετρικός τόπος ονομάζεται κάθε σημειοσύνολο G , του οποίου όλα τα σημεία και μόνο αυτά έχουν μια δεδομένη ιδιότητα I .

Παρατήρηση

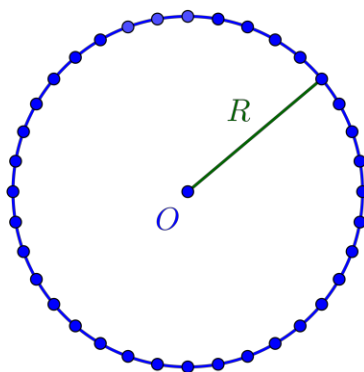
Η φράση «**όλα τα σημεία του συνόλου και μόνο αυτά**» έχει διπλή σημασία:

- i. Όλα τα σημεία του γεωμετρικού τόπου ικανοποιούν τη δεδομένη ιδιότητα.
- ii. Όλα τα σημεία που ικανοποιούν τη δεδομένη ιδιότητα βρίσκονται πάνω στον γεωμετρικό τόπο.

Για παράδειγμα, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία απέχουν σταθερή απόσταση R από σταθερό σημείο O του επιπέδου, είναι ο κύκλος (O, R) .

Παρατηρούμε ότι:

- i. *αν ένα σημείο ανήκει στον κύκλο (O, R) , τότε η απόστασή του από το κέντρο του κύκλου είναι προφανώς ίση με R (Ορισμός του κύκλου).*
- ii. *κάθε σημείο, που απέχει από το σημείο O απόσταση ίση με R , προφανώς ανήκει στον κύκλο (O, R) , αφού, αν δεν ανήκει στον κύκλο (O, R) , τότε η απόστασή του θα είναι είτε μικρότερη, είτε μεγαλύτερη από R .*



7.2 ΕΥΡΕΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΠΟΥ

Μεθοδολογία εύρεσης γεωμετρικού τόπου

(α) Πιθανολόγηση του γεωμετρικού τόπου

Για να αναγνωρίσουμε το σχήμα του γεωμετρικού τόπου των σημείων που ακολουθούν μια ιδιότητα και να προσδιορίσουμε τη θέση του, εξετάζουμε μερικά σημεία που ικανοποιούν την δοθείσα ιδιότητα και αναζητούμε να βρούμε ποια είναι η γραμμή, η οποία πιθανόν να διέρχεται από τα σημεία αυτά. Η διαδικασία αυτή δεν αποτελεί απόδειξη, αλλά μας βοηθά στην εύρεση του γεωμετρικού τόπου.

(β) Εύρεση του γεωμετρικού τόπου

Για την εύρεση του γεωμετρικού τόπου ακολουθούμε τα πιο κάτω βήματα:

- Κατασκευάζουμε με κανόνα και διαβήτη τη γραμμή του πιθανού γεωμετρικού τόπου G .
- Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο M του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου και, με βάση την ιδιότητα I που έχει, αποδεικνύουμε ότι βρίσκεται πάνω στη γραμμή G του γεωμετρικού τόπου.
- **Αντίστροφα**, παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο της γραμμής G του γεωμετρικού τόπου και αποδεικνύουμε ότι αυτό ικανοποιεί τη δεδομένη ιδιότητα I του.
- **Διερεύνηση**
Το αντίστροφο μπορεί να μην ισχύει γενικά. Δηλαδή, μπορεί να υπάρχουν σημεία του σημειοσυνόλου G που δεν επαληθεύουν την ιδιότητα I . Τότε, ο γεωμετρικός τόπος δεν θα είναι ολόκληρη η γραμμή, αλλά ένα μέρος της, το οποίο πρέπει να προσδιορίσουμε.

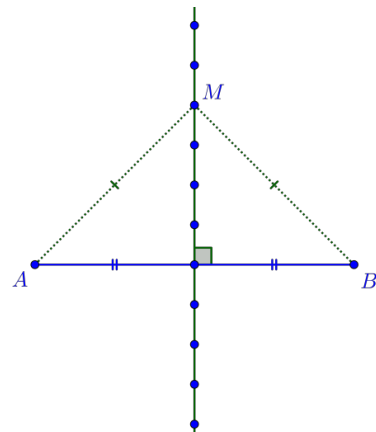
Παράδειγμα 1

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο σταθερά σημεία A και B .

Λύση

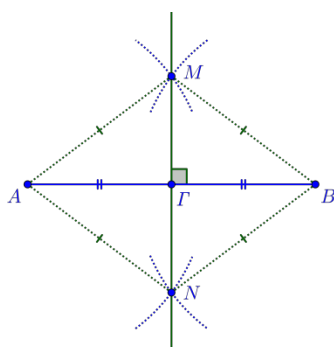
Πιθανολόγηση του γεωμετρικού τόπου

Το σταθερό στοιχείο του προβλήματος είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB . Παίρνοντας σημεία στο επίπεδο που έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του A και B , παρατηρούμε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, ότι ο πιθανός γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος AB .



Απόδειξη

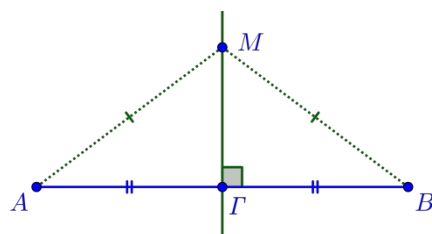
Χρησιμοποιώντας χάρακα και διαβήτη, κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος AB , όπως φαίνεται και στο πιο κάτω σχήμα.



Παίρνουμε τυχαίο σημείο M του πιθανού γεωμετρικού τόπου, το οποίο έχει την ιδιότητα να ισαπέχει από τα σημεία A και B . Δηλαδή, $MA = MB$. Αφού $MA = MB$, τότε το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές. Αφού το σημείο G βρίσκεται πάνω στον πιθανό γεωμετρικό τόπο, τότε και αυτό ισαπέχει από τα άκρα του AB . Άρα, η MG είναι διάμεσος του τριγώνου AMB . Επομένως, η MG είναι και ύψος του τριγώνου AMB . Έτσι, η ευθεία MG είναι η μεσοκάθετος του AB .

Αντίστροφα

Παίρνουμε τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB και φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα MA και MB , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AMG και BMG . Έχουμε ότι:

$$\left. \begin{array}{l} MG \text{ κοινή κάθετη πλευρά} \\ \angle AGM = \angle BGM = 90^\circ \text{ (} MG \perp AB \text{)} \\ AG = BG \text{ (} MG \text{ διάμεσος)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMG = \triangle BMG \Rightarrow MA = MB$$

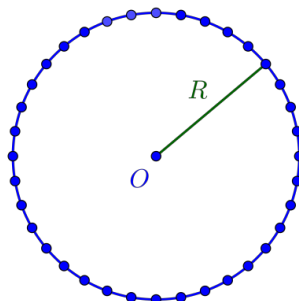
Διερεύνηση

Δεν παρατηρούμε οποιοδήποτε περιορισμό στον γεωμετρικό τόπο. Δηλαδή, κανένα σημείο δεν εξαιρείται. Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος είναι ολόκληρη η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος AB .

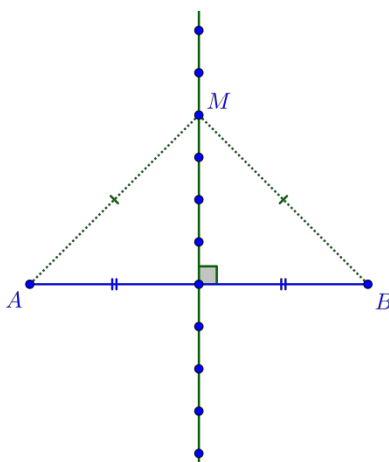
Ο πιο πάνω γεωμετρικός τόπος είναι ένας από τους **βασικούς γεωμετρικούς τόπους**, τους οποίους παραθέτουμε, χωρίς απόδειξη, πιο κάτω.

7.3 ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

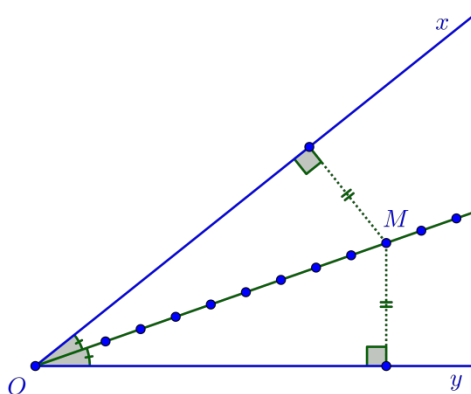
1. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία απέχουν σταθερή απόσταση R από ένα δεδομένο σταθερό σημείο O , είναι ο κύκλος με κέντρο O και ακτίνα R .



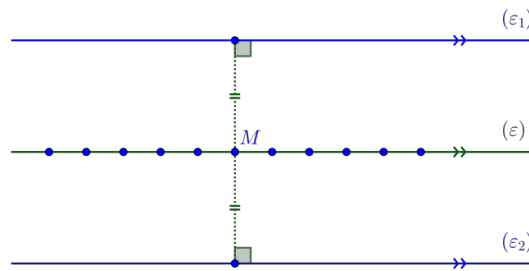
2. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο δεδομένα σημεία A και B του επιπέδου είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AB .



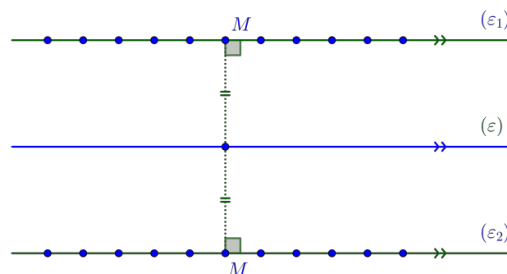
3. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία βρίσκονται στο εσωτερικό μιας γωνίας $\angle xOy$ και ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας, είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle xOy$.



4. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι η μεσοπαράλληλος (ε) των δύο ευθειών.



5. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου, τα οποία απέχουν απόσταση d από μια ευθεία (ε) του επιπέδου, είναι δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) παράλληλες προς την (ε) και σε απόσταση d από αυτή.



Οι βασικοί γεωμετρικοί τόποι πιθανολογούνται και αποδεικνύονται σχετικά εύκολα. Υπάρχουν, όμως, γεωμετρικοί τόποι οι οποίοι πιθανολογούνται και αποδεικνύονται με περισσότερη δυσκολία. Σε αυτές τις περιπτώσεις, για την απλούστευση της αποδεικτικής διαδικασίας, καλό είναι να γίνεται χρήση των βασικών γεωμετρικών τόπων.

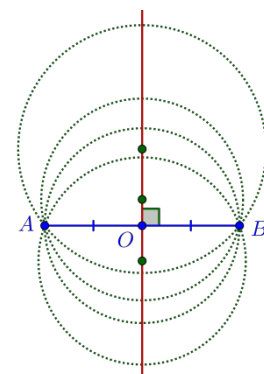
Παράδειγμα 1

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B .

Λύση

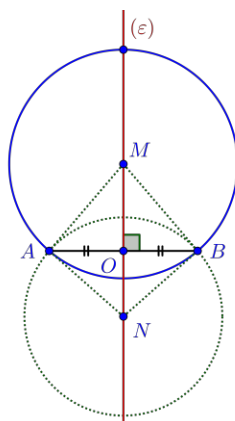
Πιθανολόγηση

Το σταθερό στοιχείο του προβλήματος είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB . Επομένως, και το μέσο O του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι σταθερό. Ο κύκλος $(O, \frac{AB}{2})$ διέρχεται από τα σημεία A και B . Άρα, το σημείο O είναι σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Παίρνοντας μερικά σημεία του τόπου, πιθανολογούμε ότι τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται πάνω στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος AB .



Απόδειξη

Έστω M ένα σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Δηλαδή, το σημείο M είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A και B , όπως φαίνεται και στο πιο κάτω σχήμα.



Τότε, $MA = MB$ ως ακτίνες του κύκλου (M, MA) . Άρα, το σημείο M ανήκει στην μεσοκάθετο (ε) του τμήματος AB .

Αντίστροφα

Έστω N σημείο της μεσοκαθέτου (ε) του ευθυγράμμου τμήματος AB . Άρα, $NA = NB$. Επομένως, ο κύκλος (N, NB) διέρχεται και από το σημείο A . Έτσι, κάθε σημείο της (ε) είναι κέντρο ενός κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A και B . Δηλαδή, το τυχαίο σημείο $N \in (\varepsilon)$ έχει την ιδιότητα του γεωμετρικού τόπου.

Διερεύνηση

Το τυχαίο σημείο $N \in (\varepsilon)$ έχει την ιδιότητα του γεωμετρικού τόπου. Συνεπώς, όλα τα σημεία της (ε) ικανοποιούν την ιδιότητα αυτή. Από τα πιο πάνω, συμπεραίνουμε ότι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος (ε) του τμήματος AB .

Παράδειγμα 2

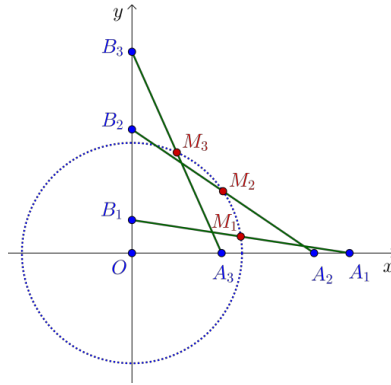
Πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy παίρνουμε μεταβλητά σημεία A και B , αντίστοιχα, έτσι ώστε $AB = \lambda$, όπου λ σταθερό. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου M του AB .

Λύση

Πιθανολόγηση

Τα σταθερά στοιχεία του προβλήματος είναι το μήκος $AB = \lambda$ και το σημείο O (αρχή των αξόνων).

Παίρνοντας μερικές θέσεις για το AB παρατηρούμε ότι τα μέσα M_1, M_2, M_3 ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το O .



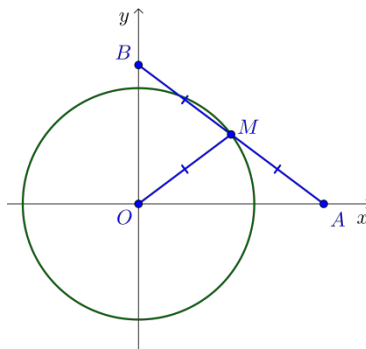
Απόδειξη

Έστω ένα σημείο M του γεωμετρικού τόπου. Τότε, $MA = MB$. Άρα, το σημείο M είναι το μέσο της υποτείνουσας του ορθογώνιου τριγώνου AOB .

Γνωρίζουμε, από τις μετρικές σχέσεις στο ορθογώνιο τρίγωνο, ότι:

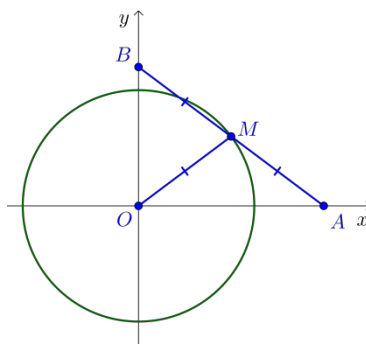
$$OM = \frac{AB}{2} = \frac{\lambda}{2}, \text{ σταθερό}$$

Επομένως, το σημείο M βρίσκεται πάνω στον κύκλο $(O, \frac{\lambda}{2})$.



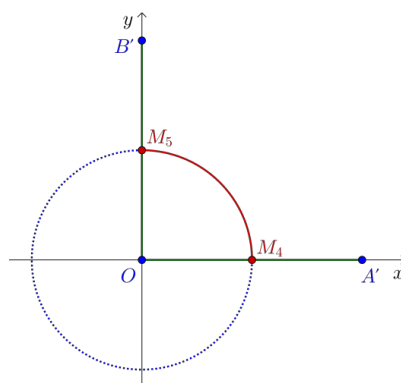
Αντίστροφα

Παίρνουμε σημείο $M \in (O, \frac{\lambda}{2})$. Φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους λ , που περνά από το σημείο M και τα άκρα του να βρίσκονται πάνω στους άξονες. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB , το ευθύγραμμο τμήμα OM ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Άρα, η OM είναι διαμεσός του ορθογώνιου τριγώνου. Επομένως, το σημείο M έχει την ιδιότητα του γεωμετρικού τόπου.



Διερεύνηση

Με τη βοήθεια του πιο κάτω σχήματος, παρατηρούμε ότι στο πρόβλημα αυτό έχουμε οριακές θέσεις για το ευθύγραμμο τμήμα AB .



- Αν $B \equiv O$, τότε $A \equiv A'$, ώστε $OA' = \lambda$. Τότε, το μέσο M_4 του OA' είναι σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου.
- Αν $A \equiv O$, τότε $B \equiv B'$, ώστε $OB' = \lambda$. Τότε, το μέσο M_5 του OB' είναι σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου.

Ο γεωμετρικός τόπος ανήκει σε κύκλο $(O, \frac{\lambda}{2})$, αλλά όπως είδαμε υπάρχουν οριακές θέσεις στο πρόβλημα, τα σημεία M_4 και M_5 . Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος είναι το τόξο του κύκλου με επίκεντρο γωνία 90° και ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο του ορθογωνίου συστήματος αξόνων.

Δραστηριότητες

1. Δίνεται κύκλος (O, ρ) . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων M των ακτίνων του κύκλου.
2. Δίνεται κύκλος (O, ρ) . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων M των χορδών του κύκλου (O, ρ) που είναι παράλληλες προς μια διάμετρο AB αυτού.
3. Δίνονται δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) που τέμνονται στο σημείο O . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που ορίζουν οι ευθείες (ε_1) , (ε_2) και απέχουν από την (ε_1) απόσταση 2 cm και ταυτόχρονα από την ευθεία (ε_2) απόσταση 3 cm.
4. Δίνεται ευθεία (ε) και ένα σημείο A εκτός αυτής. Αν σημείο B κινείται πάνω στην (ε) , να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου M του AB .
5. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κορυφών A των τριγώνων $AB\Gamma$ που έχουν την πλευρά $B\Gamma$ ίση με δεδομένο σταθερό τμήμα $B\Gamma = a$ και τη διάμεσο μ_a ίση με δεδομένο τμήμα λ .

Περίληψη

1. Γεωμετρικός τόπος ονομάζεται κάθε σημειοσύνολο G , του οποίου όλα τα σημεία και μόνο αυτά έχουν μια δεδομένη ιδιότητα I .
2. **Μεθοδολογία εύρεσης γεωμετρικού τόπου**
 - Πιθανολόγηση
 - Εύρεση
 - Κατασκευάζουμε με κανόνα και διαβήτη τη γραμμή του πιθανού γεωμετρικού τόπου G .
 - Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο M του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου και, με βάση την ιδιότητα I που έχει, αποδεικνύουμε ότι βρίσκεται πάνω στη γραμμή G του γεωμετρικού τόπου.
 - Αντίστροφα, παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο της γραμμής G του γεωμετρικού τόπου και αποδεικνύουμε ότι αυτό ικανοποιεί τη δεδομένη ιδιότητα I του.
 - Διερεύνηση
Το αντίστροφο μπορεί να μην ισχύει γενικά. Δηλαδή, μπορεί να υπάρχουν σημεία του σημειοσυνόλου G που δεν επαληθεύουν την ιδιότητα I . Τότε, ο γεωμετρικός τόπος δεν θα είναι ολόκληρη η γραμμή, αλλά ένα μέρος της, το οποίο πρέπει να προσδιορίσουμε.
3. **Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στο επίπεδο**
 - Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία απέχουν σταθερή απόσταση R από ένα δεδομένο σταθερό σημείο O , είναι ο κύκλος με κέντρο O και ακτίνα R .
 - Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο δεδομένα σημεία A και B του επιπέδου είναι η μεσοκάθετος του τμήματος AB .
 - Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία βρίσκονται στο εσωτερικό μιας γωνίας $\angle xOy$ και ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας, είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle xOy$.
 - Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι η μεσοπαράλληλος (ε) των δύο ευθειών.
 - Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου, τα οποία απέχουν απόσταση d από μια ευθεία (ε) του επιπέδου, είναι δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) παράλληλες προς την (ε) και σε απόσταση d από αυτή.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) ξένοι μεταξύ τους. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων από τα οποία μπορούμε να φέρουμε ίσα εφαπτόμενα τμήματα προς τους δύο κύκλους.
2. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και σταθερό σημείο A εκτός αυτού. Αν σημείο B κινείται πάνω στον κύκλο, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου M του AB .
3. Δίνεται κύκλος (O, ρ) . Αν N τυχαίο σημείο του κύκλου και M σημείο στην προέκταση της ακτίνας ON , έτσι ώστε $ON = NM$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου M όταν το σημείο N κινείται πάνω στον κύκλο (O, ρ) .
4. Δίνεται γωνία $\angle xOy$. Πάνω στις πλευρές της γωνίας Ox και Oy παίρνουμε σημεία A και B αντίστοιχα, έτσι ώστε $OA + OB = \kappa$, κ δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα. Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $AOBM$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κορυφών M αυτών των παραλληλογράμμων.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και διάμετρος AB αυτού. Φέρουμε τυχαία χορδή $B\Gamma$ και στην προέκτασή της παίρνουμε σημείο θ , έτσι ώστε $B\Gamma = \Gamma\theta$. Αν M είναι το σημείο τομής των ευθειών $A\Gamma$ και $O\theta$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου M .
2. Δίνονται δύο ορισμένα σημεία A και B . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M , για τα οποία ισχύει

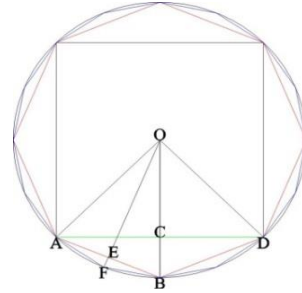
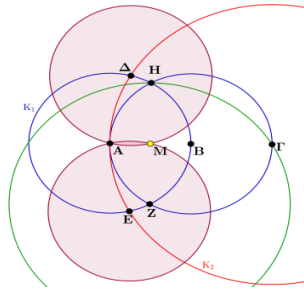
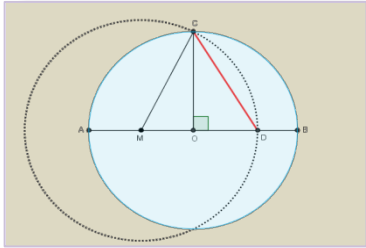
$$\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu} \neq 1,$$

όπου μ, ν φυσικοί αριθμοί και $\frac{\mu}{\nu}$ σταθερός λόγος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Π.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Η κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων, όταν δίνονται ορισμένα στοιχεία τους ή συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες, είναι ένα θέμα που μας απασχολεί συχνά. Η κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων δεν είναι πάντα απλή υπόθεση και ούτε πάντοτε εφικτή.



Πρόβλημα

Να κατασκευαστεί τρίγωνο $AB\Gamma$, όταν δίνονται οι πλευρές του $B\Gamma = a$, $AB = \gamma$ και η διάμεσός του $AM = \mu_a$.

- Πρόβλημα, όπως το προηγούμενο, λέμε ότι είναι ένα **γεωμετρικό πρόβλημα**.
- **Λύση** ενός γεωμετρικού προβλήματος ονομάζεται η διαδικασία που ακολουθούμε, για να κατασκευάσουμε το ζητούμενο σχήμα.
- Αν κατασκευάσουμε το σχήμα, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά **κανόνα και διαβήτη**, τότε λέμε ότι έχουμε μια **γεωμετρική κατασκευή**.
- Ένα πρόβλημα κατασκευής λέμε ότι **δε λύνεται γεωμετρικά**, όταν το σχήμα δεν μπορεί να κατασκευαστεί με χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη.

Μερικά προβλήματα που δεν έχουν γεωμετρική λύση είναι:

1. Η τριχοτόμηση της γωνίας. Δηλαδή, η διαίρεση τυχαίας γωνίας (εκτός της ορθής) σε τρεις ίσες γωνίες.
2. Ο τετραγωνισμός του κύκλου. Δηλαδή, η κατασκευή τετραγώνου που να έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν δεδομένου κύκλου.
3. Η κατασκευή τριγώνου, αν γνωρίζουμε τα μήκη των διχοτόμων των γωνιών του.
4. Η κατασκευή ευθείας από δεδομένο σημείο που να τέμνει δύο γνωστούς κύκλους, έτσι ώστε η διαφορά των χορδών που αποκόπτονται από τους δύο κύκλους να είναι ίση με λ , $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ιστορικό Σημείωμα

Ένα από τα βασικά στοιχεία της Ελληνικής Γεωμετρίας ήταν οι Γεωμετρικές κατασκευές. Περίπου τον 5^ο π.Χ αιώνα εικάζεται ότι επιλέχθηκαν από τους Αρχαίους Έλληνες Γεωμέτρους, ως θεμελιώδη σχήματα για τις Γεωμετρικές κατασκευές, οι ευθείες και οι κύκλοι.

Στα προβλήματα των **Γεωμετρικών κατασκευών** μας δίνονται κάποια στοιχειώδη γεωμετρικά στοιχεία, όπως για παράδειγμα σημεία, ευθείες, κύκλοι και με βάση αυτά, χρησιμοποιώντας **αποκλειστικά κανόνα και διαβήτη**, πρέπει να κατασκευάσουμε γεωμετρικά σχήματα, τα οποία να ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες.

Οι Αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί, ως θεμελιωτές της Θεωρητικής Γεωμετρίας, παρατήρησαν ότι υπήρχαν προβλήματα Γεωμετρικών κατασκευών που δεν μπορούσαν να λυθούν μόνο με **κανόνα και διαβήτη**. Αυτά ήταν τα τρία περίφημα Άλυτα Προβλήματα της Αρχαιότητας που αποτέλεσαν για αιώνες, πρόκληση για τους Μαθηματικούς και τελικά αποδείχθηκε, ότι τα προβλήματα αυτά δεν έχουν λύση, δηλαδή οι γεωμετρικές αυτές κατασκευές δεν μπορούν να γίνουν, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά κανόνα και διαβήτη. Τα προβλήματα αυτά είναι:

- **Ο τετραγωνισμός του κύκλου**
- **Η τριχοτόμηση τυχαιάς γωνίας**
- **Ο διπλασιασμός του κύβου**

Ο Ευκλείδης, στα «Στοιχεία» του, τις μόνες γεωμετρικές κατασκευές που επιτρέπει αυστηρά είναι αυτές που χρησιμοποιούν αποκλειστικά κανόνα και διαβήτη. Ο Ευκλείδης όμως, ήταν μαθητής του φιλόσοφου Πλάτωνα από τον οποίο είχε επηρεαστεί καταλυτικά. Επομένως, τα γεωμετρικά προβλήματα ήταν γνωστά από την εποχή του Πλάτωνα (427 – 347 π.Χ).

Αργότερα τον 16^ο και 17^ο αιώνα αποδείχθηκε ότι «Οτιδήποτε μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη, μπορεί να κατασκευαστεί και μόνο με διαβήτη».

Η ιδέα της κατασκευής μόνο με διαβήτη ξεκίνησε από τον Ιταλό επιστήμονα Giovanni Batista Benedetti (1530 – 1590) και αργότερα ο Δανός Γεωμέτρης Georg Mohr (1640 – 1697) απέδειξε ότι κάθε πρόβλημα κατασκευής που ανάγεται σε δευτεροβάθμια εξίσωση, μπορεί να κατασκευασθεί μόνο με διαβήτη. Ένα αιώνα μετέπειτα ο Ιταλός Lorenzo Mascheroni (1750 – 1800) διατύπωσε ξανά το πρόβλημα και πρότεινε μια λύση που έκτοτε αναφέρεται ως Θεώρημα των Mohr – Mascheroni.

Π.2 ΑΠΛΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Εξερεύνηση

Στη διπλανή εικόνα φαίνεται η κυκλική επιφάνεια ενός ξύλινου τραπεζιού, της οποίας ο ξυλουργός πρέπει να εντοπίσει το κέντρο της, για να τοποθετήσει το ξύλινο πόδι της βάσης στήριξης. Χρησιμοποιώντας μόνο τον κανόνα (αβαθμολόγητο) και το διαβήτη σας, να βρείτε με ποιο τρόπο ο ξυλουργός θα προσδιορίσει το κέντρο της κυκλικής επιφάνειας και να καταγράψετε τα βήματα των ενεργειών σας.



Στη διπλανή εικόνα φαίνεται ένα κομμάτι ίσιο ξύλο του οποίου οι απέναντι κατά μήκος πλευρές του, είναι παράλληλες.

Το πλάτος του ξύλου είναι μικρότερο της διαμέτρου της κυκλικής επιφάνειας του τραπεζιού, ενώ το μήκος του είναι μεγαλύτερο της διαμέτρου της.



- Να διερευνήσετε, αν μπορεί ο ξυλουργός, έχοντας στη διάθεσή του μόνο ένα τέτοιο κομμάτι ξύλο, να προσδιορίσει το κέντρο της κυκλικής επιφάνειας του τραπεζιού.
- Να εξηγήσετε γιατί το σημείο που βρήκατε είναι το κέντρο της κυκλικής επιφάνειας.

Θεωρήματα και προτάσεις που αποδείξαμε στη Γεωμετρία σε προηγούμενες τάξεις, μας επιτρέπουν να λύσουμε κάποια βασικά προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών.

Για να επιλύσουμε ένα πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- 1. Κατασκευή:** Είναι όλες εκείνες οι διαδικασίες και ενέργειες που ακολουθούμε, για να επιτύχουμε την ακριβή σχεδίαση του σχήματος, με χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη.
- 2. Απόδειξη:** Είναι η διαδικασία με την οποία, χρησιμοποιώντας θεωρήματα και προτάσεις της Γεωμετρίας, αποδεικνύουμε ότι το σχήμα που κατασκευάστηκε έχει ως στοιχεία του τα δεδομένα του προβλήματος.
- 3. Διερεύνηση:** Γράφουμε όλες τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται, λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα, ώστε το πρόβλημα να έχει λύση. Στο βήμα αυτό εξετάζουμε επίσης, αν το πρόβλημα έχει και άλλες λύσεις. Σε απλές κατασκευές το βήμα αυτό παραλείπεται.

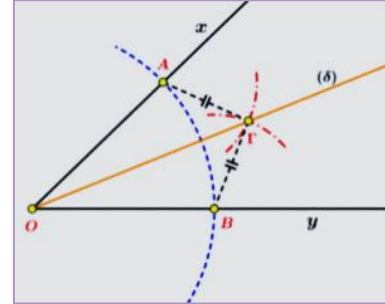


Π.2.1 Βασικές κατασκευές γεωμετρικών αντικειμένων

1. Κατασκευή διχοτόμου δεδομένης γωνίας

Κατασκευή

Με κέντρο το σημείο O και τυχαία ακτίνα, γράφουμε κύκλο που τέμνει τις πλευρές της δεδομένης γωνίας $\angle xOy$ στα σημεία A, B . Στη συνέχεια, με ακτίνα μεγαλύτερη από το μισό της απόστασης AB γράφουμε δύο τόξα με κέντρα τα σημεία A, B τα οποία τέμνονται στο σημείο Γ . Η ημιευθεία $O\Gamma$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle xOy$.



Σχήμα 1

Απόδειξη

Τα τρίγωνα AOG και BOG είναι ίσα, αφού η OG είναι κοινή πλευρά των τριγώνων, $OB = OA$ και $BG = AG$ από κατασκευής. Επομένως, $\angle AOG = \angle BOG$.

Άρα, η ημιευθεία $O\Gamma$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle xOy$.

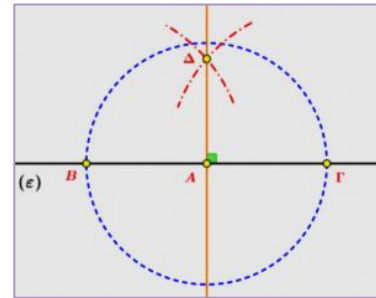


Do.01.ggb και Show.01.ggb

2. Κατασκευή κάθετης σε σημείο A ευθείας (ε)

Κατασκευή

Με κέντρο το σημείο A και τυχαία ακτίνα ρ , γράφουμε κύκλο (A, ρ) που τέμνει την ευθεία (ε) στα σημεία B και Γ . Στη συνέχεια, με ακτίνα μεγαλύτερη από την απόσταση AB γράφουμε δύο τόξα με κέντρα τα σημεία B και Γ . Αν Δ το σημείο τομής τους στο ένα ημιεπίπεδο που ορίζει η (ε) , τότε η ευθεία ΔA είναι η ζητούμενη κάθετη ευθεία στην (ε) .



Σχήμα 2

Απόδειξη

Από την κατασκευή είναι προφανές ότι $\Delta B = \Delta \Gamma$. Επομένως, το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. Το σημείο A είναι το μέσον της βάσης $B\Gamma$, άρα το ΔA είναι διάμεσος του τριγώνου, συνεπώς και ύψος, δηλαδή $\Delta A \perp B\Gamma$.

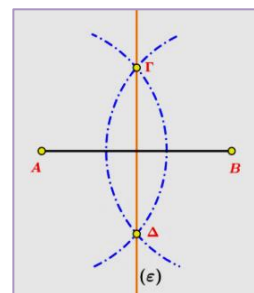


Do.02.ggb και Show.02.ggb

3. Κατασκευή μέσου και μεσοκάθετου ευθυγράμμου τμήματος AB .

Κατασκευή

Με κέντρα τα σημεία A και B και τυχαία ακτίνα $\rho > \frac{AB}{2}$ γράφουμε δύο ίσους κύκλους. Έστω Γ, Δ τα σημεία τομής των κύκλων. Η ευθεία (ε) που ορίζεται από τα Γ, Δ είναι η ζητούμενη μεσοκάθετος του AB .



Σχήμα 3

Απόδειξη

Η ευθεία (ε) από την κατασκευή είναι κοινή χορδή των δύο κύκλων και επομένως θα είναι κάθετη στη διάκεντρο AB και επειδή οι κύκλοι είναι ίσοι η ευθεία (ε) είναι μεσοκάθετος.

Διερεύνηση

Για να έχει λύση το πρόβλημα, θα πρέπει οι δύο κύκλοι που κατασκευάσαμε να τέμνονται. Επειδή, όμως, ισχύει $\rho - \rho < AB < \rho + \rho$, συμπεραίνουμε ότι οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι.

Παρατήρηση

Με την ίδια κατασκευή βρίσκουμε και το μέσο ευθυγράμμου τμήματος.

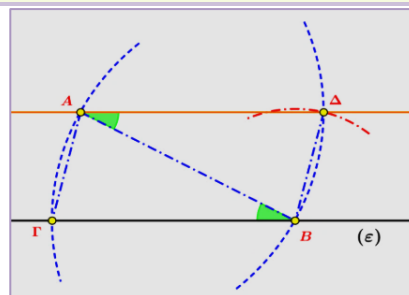


[Do.03.ggb](#) και [Show.03.ggb](#)

4. Κατασκευή παράλληλης από σημείο A εκτός ευθείας (ε) προς την (ε) .

Κατασκευή

Με κέντρο το σημείο A και τυχαία ακτίνα ρ μεγαλύτερη της απόστασης του σημείου A από την ευθεία (ε) , κατασκευάζουμε κύκλο (A, ρ) . Έστω B το ένα σημείο τομής του με την (ε) . Με κέντρο το B και ακτίνα BA γράφουμε τόξο που τέμνει την (ε) στο σημείο Γ .



Σχήμα 4

Στη συνέχεια με κέντρο το B και ακτίνα ίση με το AG γράφουμε τόξο και έστω Δ το σημείο τομής του με τον κύκλο (A, ρ) που βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η (ε) με το σημείο A .

Ισχυριζόμαστε ότι η ευθεία $A\Delta \parallel (\varepsilon)$.

Απόδειξη

Από την κατασκευή $\triangle ADB = \triangle AB\Gamma$ αφού $AB = AB$, $AD = B\Gamma$ και $AG = B\Delta$.

Επομένως, $\angle DAB = \angle AB\Gamma \Rightarrow AD \parallel B\Gamma$, αφού δύο εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζουν με την AB είναι ίσες.



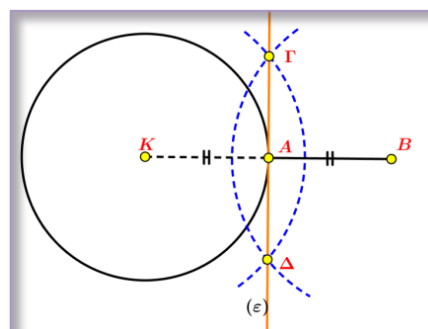
Do.04.ggb και Show.04.ggb

5. Κατασκευή εφαπτομένης κύκλου (K, ρ) σε ένα σημείο του A .

Κατασκευή

Στην προέκταση της ακτίνας KA παίρνουμε σημείο B , τέτοιο ώστε $KA = AB$.

Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετη (ε) του τμήματος KB , που είναι η ζητούμενη εφαπτομένη του κύκλου (K, ρ) στο σημείο A του κύκλου (K, ρ) .



Σχήμα 5

Απόδειξη

Η ευθεία (ε) , από την κατασκευή, είναι κάθετη στην ακτίνα KA στο άκρο της A , άρα είναι εφαπτομένη του κύκλου στο A .



Do.05.ggb και Show.05.ggb

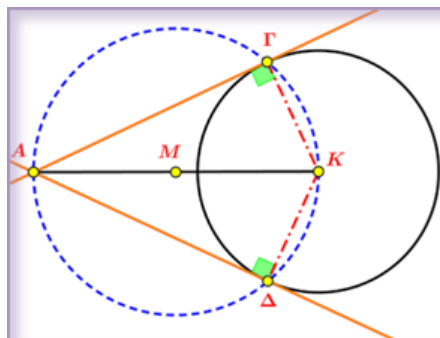
6. Κατασκευή εφαπτομένων από σημείο A εκτός κύκλου (K, ρ) .

Κατασκευή

Αρχικά βρίσκουμε το μέσο M του τμήματος AK .

Το μέσο M μπορεί να είναι έξω από τον δεδομένο κύκλο, όπως φαίνεται στο (Σχήμα 6), μπορεί όμως, να είναι και εσωτερικό σημείο του κύκλου.

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον κύκλο διαμέτρου KA και έστω Γ και Δ τα σημεία τομής του με τον κύκλο (K, ρ) .



Σχήμα 6

Φέρουμε τις ευθείες AG και AD , που είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες του κύκλου (K, ρ) από το σημείο $A \notin (K, \rho)$.

Απόδειξη

Οι γωνίες $\angle AGK$ και $\angle ADK$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες στον κύκλο διαμέτρου KA και βαίνουν σε ημικύκλιο, επομένως $\angle AGK = \angle ADK = 90^\circ$.

Άρα, οι ακτίνες $K\Gamma$ και $K\Delta$ του κύκλου (K, ρ) είναι κάθετες, αντίστοιχα, στις AG , AD και επομένως είναι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Γ και Δ , αντίστοιχα.

Διερεύνηση

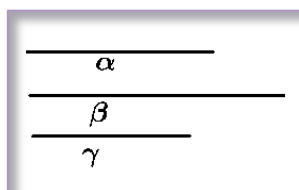
Το πρόβλημα έχει πάντοτε λύση, γιατί οι δύο κύκλοι (K, ρ) και (M, MA) είναι πάντοτε τεμνόμενοι, αφού ο κύκλος (M, MA) διέρχεται από τα σημεία A, K με το ένα σημείο να είναι εξωτερικό και το άλλο εσωτερικό του κύκλου (K, ρ) .



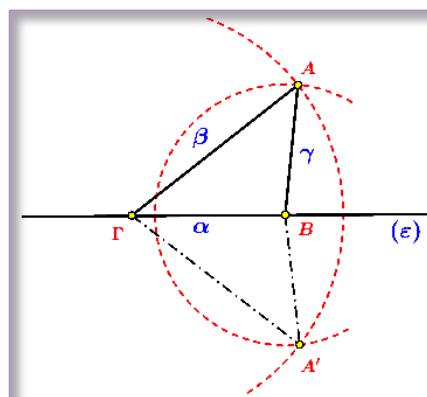
[Do.06.ggb](#) και [Show.06.ggb](#)

Π.2.2 Βασικές κατασκευές τριγώνων

1. Κατασκευή τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ όταν δίνονται οι πλευρές του α, β, γ .



Do.07.ggb και Show.07.ggb



Σχήμα 7

Κατασκευή

Πάνω σε ευθεία (ε) , (Σχήμα 7), παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ ίσο με ένα από τα δεδομένα τμήματα, έστω $B\Gamma = \alpha$. Γράφουμε δύο κύκλους με κέντρα τα σημεία B και Γ και με ακτίνες ίσες με γ και β , αντίστοιχα.

Αν οι κύκλοι τέμνονται, το σημείο τομής τους θα είναι η τρίτη κορυφή του τριγώνου (A ή A' στο παραπάνω σχήμα).

Απόδειξη

Πράγματι, από την κατασκευή που κάναμε, το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ έχει ως πλευρές του τα δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα, γιατί $B\Gamma = \alpha$, $AB = \gamma$ ως ακτίνα του κύκλου (B, γ) και $A\Gamma = \beta$ ως ακτίνα του κύκλου (Γ, β) .

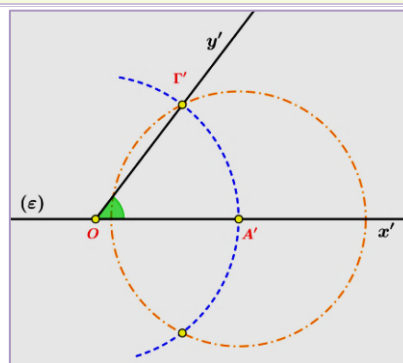
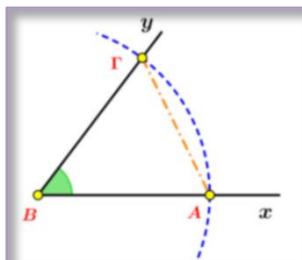
Διερεύνηση

Για να έχει λύση το πρόβλημα πρέπει οι δύο κύκλοι (B, γ) και (Γ, β) να τέμνονται. Για να ισχύει αυτό, αν υποθέσουμε ότι $\beta > \gamma$, θα πρέπει να ισχύει η τριγωνική ανισότητα, δηλαδή $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$.

Αν A' το δεύτερο σημείο τομής των δύο κύκλων (B, γ) και (Γ, β) , το τρίγωνο $\triangle A'B\Gamma$ είναι ίσο με το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και άρα δεν αποτελεί άλλη λύση του προβλήματος.

Η παρακάτω βασική κατασκευή γωνίας ίση με μια δεδομένη γωνία, είναι χρήσιμη και απαραίτητη στην κατασκευή τριγώνων.

Κατασκευή γωνίας ίση με μια δεδομένη γωνία $\angle xBy$ και τέτοια ώστε μία από τις πλευρές της να είναι δεδομένη ευθεία (ε) , και η κορυφή της σημείο O πάνω στην (ε) .



Σχήμα 8

Κατασκευή

Πάνω στην πλευρά Bx της δεδομένης γωνίας $\angle xBy$ παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο A και κατασκευάζουμε τον κύκλο (B, BA) . Με τον τρόπο αυτό έχουμε κάνει την δεδομένη γωνία επίκεντρη, με το αντίστοιχο τόξο της να είναι $A\Gamma$. Με κέντρο το σημείο O και ακτίνα ίση με BA γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει την ημιευθεία Ox' στο σημείο A' . Στη συνέχεια κατασκευάζουμε κύκλο $(A', A\Gamma)$ ο οποίος τέμνει τον κύκλο (O, OA') σε δύο σημεία και έστω ότι ένα από αυτά είναι το Γ' (Σχήμα 8). Φέρουμε την ημιευθεία $O\Gamma'$ και η γωνία $\angle A'O\Gamma'$ είναι η ζητούμενη.

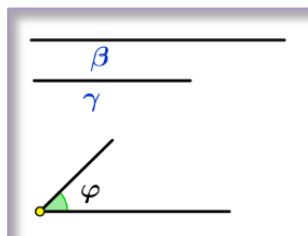
Απόδειξη

Οι γωνίες $\angle xBy$ και $\angle x'Oy'$ είναι ίσες, γιατί είναι επίκεντρες γωνίες των ίσων κύκλων (B, BA) και (O, OA') και τα αντίστοιχα τόξα τους $A\Gamma$ και $A'\Gamma'$ είναι ίσα από κατασκευής.

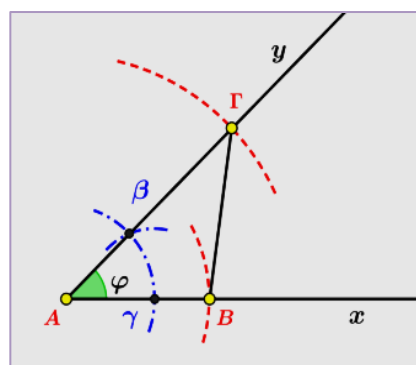


Do.07.ggb και Show.07.ggb

2. Κατασκευή τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ όταν δίνονται οι δύο πλευρές του $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$ και η περιεχόμενη σε αυτές γωνία $\angle A = \varphi$.



Do.08.ggb και Show.08.ggb



Σχήμα 9

Κατασκευή

Αρχικά κατασκευάζουμε γωνία $\angle xAy = \varphi$ (Σχήμα 9) (Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη κατασκευή) και στις πλευρές Ax , Ay της γωνίας φ παίρνουμε, χρησιμοποιώντας τον διαβήτη, τα σημεία B και Γ , αντίστοιχα, τέτοια ώστε $A\Gamma = \beta$ και $AB = \gamma$. Το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο.

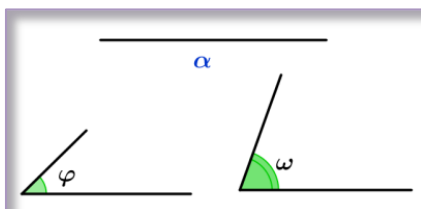
Απόδειξη

Πράγματι, από την κατασκευή που κάναμε το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο, γιατί έχει $A\Gamma = \beta$, $AB = \gamma$ και $\angle A = \varphi$.

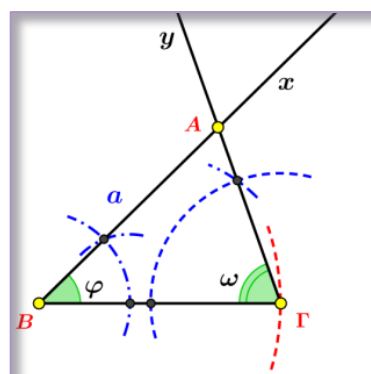
Διερεύνηση

Για να έχει λύση το πρόβλημα πρέπει να ισχύει $0^\circ < \varphi < 180^\circ$. Το πρόβλημα έχει μια μοναδική λύση.

3. Κατασκευή τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ όταν δίνονται η πλευρά του $B\Gamma = \alpha$ και οι προσκείμενες σε αυτήν γωνίες $\angle \Gamma = \varphi$ και $\angle B = \omega$.



Do.10.ggb και Show.10.ggb



Σχήμα 10

Κατασκευή

Παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma = \alpha$, (Σχήμα 10), και με κορυφές τα σημεία B και Γ κατασκευάζουμε στο ίδιο ημιεπίπεδο που καθορίζει η ευθεία $B\Gamma$, γωνίες τέτοιες ώστε $\angle \Gamma B \chi = \varphi$ και $\angle B \Gamma \gamma = \omega$.

Οι πλευρές $B\chi$ και $\Gamma\gamma$ των γωνιών αυτών τέμνονται στο σημείο A . Το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

Από την κατασκευή το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ έχει $B\Gamma = \alpha$, $\angle B = \varphi$ και $\angle \Gamma = \omega$.

Διερεύνηση

Το πρόβλημα έχει μοναδική λύση, αν $0^\circ < \omega + \varphi < 180^\circ$, γιατί τότε οι ημιευθείες $B\chi$ και $\Gamma\gamma$ τέμνονται.

Ιστορικό Σημείωμα

Από όλα αυτά εκείνο που κεντρίζει ιδιαίτερα τον αναγνώστη, με επιστημονική περιέργεια, είναι η ομολογουμένως συγκλονιστική διαιώνιση στον κόσμο μας ενός «χρυσού κανόνα». Οι Ευρωπαίοι τον πρωτογνώρισαν στα κείμενα και στα οικοδομήματα των δικών μας προγόνων, ως μια γεωμετρική αναλογία διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων, ορθογωνίων ή όγκων, που είναι **«η πιο αρμονική και αισθητικά ευχάριστη στο μάτι»**.

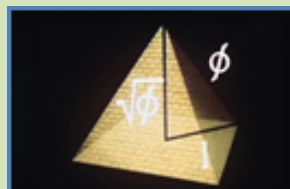
Την είχε βρει ο Πυθαγόρας (580π.Χ-490 π.Χ) και την είχε απεικονίσει στο σύμβολο της σχολής του, το πεντάλφα και τη διατύπωσε μαθηματικά ο Ευκλείδης το 300 π.Χ.



Την υιοθέτησε επίσης ο Πλάτωνας στα ιδεατά σχήματά του, τα κανονικά πολύεδρα, που συνθέτουν τον κόσμο.



Έπειτα την εφάρμοσαν ο Ικτίνος, ο Καλλικράτης και ο Φειδίας στον Παρθενώνα. Την ίδια αυτή αναλογία ξαναβρήκαν οι επιστήμονες του Ναπολέοντα στην Αίγυπτο όταν μέτρησαν τις Πυραμίδες.



Μετά τον Μεσαίωνα και με το πέρασμα της πνευματικής σκυτάλης στους Δυτικούς, την ξαναβρήκε ο Φιμπονάτσι. Την εισήγαγε στις αρχές του 12ου αιώνα στην Ιταλία και την υιοθέτησαν προπομποί της Αναγέννησης όπως ο Ντα Βίντσι, αργότερα ζωγράφοι όπως ο Μοντριάν και πολύ μετά ο Σαλβαντόρ Νταλί, μουσικοσυνθέτες όπως ο Μότσαρτ, ο Μπέλα Μπάρτοκ και ο Ντεμπυσί αλλά και σπουδαίοι αρχιτέκτονες του 20ού αιώνα, όπως ο Λε Κορμπυζιέ.

Τα τελευταία 150 χρόνια, από τότε που ανακίνησε το θέμα ο Γερμανός ψυχολόγος Theodor Fechner ο «χρυσός κανόνας» αποκαλύπτεται συνεχώς να υπάρχει παντού στη φύση ως η βέλτιστη επιλογή ανάπτυξης. Από τα πέταλα των λουλουδιών ως τα φύλλα των δένδρων και από τις έλικες των κοχυλιών ως τα τμήματα του σώματος των πεταλούδων, όλα μοιάζουν να ακολουθούν τη χρυσή αναλογία. Την ίδια εκείνη αναλογία που βρίσκουμε μεταξύ των μελών καλοσχηματισμένων ανθρώπινων σωμάτων, των χαρακτηριστικών «κατά κοινή ομολογία» όμορφων προσώπων και ακόμη στη διατομή αυτού του DNA μας, στις έλικες των γαλαξιών, ακόμη και στη στροφορμή μιας μαύρης τρύπας!

Πρόσφατα, διαπιστώθηκε ότι και τα καλύτερα τεχνητά υλικά που κατασκεύασε ο άνθρωπος, οι νανοσωλήνες άνθρακα, έχουν δομή βασισμένη στα πλατωνικά πολυέδρα, που επίσης εμφανίζουν αυτή την αναλογία μεταξύ των τριγώνων που τα απαρτίζουν. Τέλος μια μαθηματική θεωρία αποφάνθηκε ότι το Σύμπαν είναι ένα πολυέδρο που, φυσικά, υπόκειται στον «χρυσό κανόνα». Το όνομα «χρυσός κανόνας» της αναλογίας αυτής δόθηκε από τον Λατίνο ποιητή Οράτιο και αργότερα από τον Κέπλερ. Οι καλλιτέχνες της Αναγέννησης όμως προτίμησαν τον όρο «Θεία Αναλογία», θεωρώντας ότι μια τόσο τέλεια και θαυμαστή αρμονία θα πρέπει να δόθηκε στους ανθρώπους από τον ίδιο τον Θεό. Η «Χρυσή τομή» είναι λοιπόν ο μηχανισμός όπου κατέληξε η φύση μετά τις άπειρες δοκιμές της, στα δισεκατομμύρια χρόνια που πέρασαν. Οι Έλληνες την ανακάλυψαν όταν μετρούσαν τις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος, για να σμιλέψουν τα υπέροχα γλυπτά τους.

Π.3 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΤΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Ιστορικό Σημείωμα

Η αναλυτική-συνθετική μέθοδος στη Γεωμετρία συνδέεται στενά με την Πλατωνική φιλοσοφία. Για τον φιλόσοφο Πλάτωνα η Γεωμετρία και γενικά τα Μαθηματικά ήταν ο ασφαλέστερος δρόμος, για να προσεγγίσει κάποιος τον Κόσμο των Ιδεών. Για να αναδείξει ο Πλάτωνας την αξία της Γεωμετρίας, όταν ίδρυσε την Ακαδημία του στην Αθήνα γύρω στο 387 π.Χ, στο υπέρθυρο της αναγραφόταν η επιγραφή:

«Μηδείς αγεωμέτητος εισίτω»



Αργότερα ο Αριστοτέλης, που υπήρξε μαθητής της Ακαδημίας του Πλάτωνα, επηρεάστηκε από τη Γεωμετρία και τα Μαθηματικά της εποχής του, χρησιμοποίησε τη μέθοδο της ανάλυσης για την εξαγωγή συμπερασμάτων στις δικές του φιλοσοφικές θεωρίες. Ο Αριστοτέλης, στο έργο του «Ηθικά Νικομάχεια» (1112b. 12-26), παραθέτει ένα απόσπασμα στο οποίο φαίνεται να θεωρεί την **ανάλυση** ως τη μέθοδο σκέψης και απόφασης πάνω σε κάποιο ζήτημα και συνδέει τη διαλεκτική μέθοδο με την ανάλυση ενός σχήματος στη Γεωμετρία. Ο πρώτος ορισμός της μεθόδου ανάλυσης – σύνθεσης εντοπίζεται σε αναφορά κάποιου από τους σχολιαστές του έργου «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Αναφέρεται:

«Τί ἐστιν ἀνάλυσις καὶ τί ἐστι σύνθεσις.

Ἀνάλυσις μὲν οὖν ἐστὶ λήψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου <καὶ το πέρασμα> διὰ τῶν ἀκολουθῶν ἐπὶ τι ἀληθές ὁμολογούμενον.

Σύνθεσις δὲ λήψις τοῦ ὁμολογουμένου <καὶ το πέρασμα> διὰ τῶν ἀκολουθῶν ἐπὶ τι ἀληθές ὁμολογούμενον»

Σύμφωνα λοιπόν με τον ορισμό της Αναλυτικής – Συνθετικής μεθόδου έχουμε:

Ανάλυση είναι η διαδικασία που ξεκινά με την υπόθεση ότι το ζητούμενο είναι αληθές και προχωρά με ακολουθία λογικών αληθών προτάσεων, μέχρι να φτάσουμε σε μια πρόταση που είναι γνωστό εκ των προτέρων ότι είναι αληθής και ανεξάρτητη από το ζητούμενο.

Δηλαδή, έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε

«Αν ισχύει A , τότε ισχύει B »

Στην αναλυτική μέθοδο δεχόμαστε το συμπέρασμα B αληθές και προσπαθούμε με αναγκαίες συνθήκες

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

να φτάσουμε σε μια πρόταση P_n , της οποίας η αλήθεια είναι ανεξάρτητη από την υπόθεση B . Παραστατικά, έχουμε:

$$B \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow P_n$$

✦ Αν οι συνθήκες είναι αναγκαίες και ικανές τότε, γράφουμε:

$$B \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow P_n$$

✦ Η αναλυτική μέθοδος είναι η **μέθοδος της αναζήτησης**. Με τη μέθοδο αυτή προσπαθούμε να **ανακαλύψουμε τον δρόμο P_n** , για να φτάσουμε στο συμπέρασμα B .

Σύνθεση είναι η διαδικασία που ξεκινά από μια αληθή πρόταση και προχωρά με ακολουθία λογικών αληθών προτάσεων, μέχρι να φτάσουμε στην απόδειξη της ζητούμενης πρότασης. Πιο συγκεκριμένα, η σύνθεση ξεκινά από το τελευταίο βήμα της ανάλυσης και με αντίστροφα βήματα φτάνουμε στο ζητούμενο.

Δηλαδή, είναι η αντίστροφη πορεία της ανάλυσης. Ξεκινούμε από μια αληθή πρόταση και με μια σειρά αναγκαίων συνθηκών καταλήγουμε στο συμπέρασμα.

Παραστατικά:

$$P_n \Rightarrow P_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow P_1 \Rightarrow B$$

Ο **Αρχιμήδης** χρησιμοποιεί την Αναλυτική-Συνθετική μέθοδο στο έργο του «Περί σφαίρας και κυλίνδρου», ενώ ο μέγας Γεωμέτρης **Απολλώνιος ο Περγαίος** στο έργο του «Κωνικά».

Ο **Πάππος ο Αλεξανδρεύς**, που έζησε τον 3^ο αιώνα μ.Χ, στο έργο του «Συναγωγή», που αποτελείται από οκτώ βιβλία και περιλαμβάνει δύσκολα προβλήματα και θεωρήματα, χρησιμοποιεί την Αναλυτική-Συνθετική μέθοδο.

Από τον ίδιο τον Πάππο το *VII* βιβλίο αναφέρεται ως «ο θησαυρός της Ανάλυσης» και περιλαμβάνει ένα δεύτερο πληρέστερο ορισμό της μεθόδου.

Την Αναλυτική- Συνθετική μέθοδο χρησιμοποιούμε και για να αντιμετωπίσουμε σύνθετες Γεωμετρικές κατασκευές, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

1. Ανάλυση

Στο στάδιο της ανάλυσης αρχικά υποθέτουμε ότι το πρόβλημα που μας δίνεται έχει λυθεί και θεωρούμε ένα σχήμα που ικανοποιεί όλα τα δεδομένα του προβλήματος. Κατόπιν με διάφορες παρατηρήσεις, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα και φέροντας κατάλληλες γραμμές (ευθείες και κύκλους) προσπαθούμε να δημιουργήσουμε ένα άλλο σχήμα που κατασκευάζεται με γνωστές απλές γεωμετρικές κατασκευές.

Τέλος, **συνδυάζοντας τις διάφορες απλές γεωμετρικές κατασκευές που συναντούμε**, διαδοχικά, προσπαθούμε να φτάσουμε στο ζητούμενο σχήμα.

Σκοπός της Ανάλυσης είναι να μας υποδείξει τον δρόμο για να ξεκινήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα.

2. Σύνθεση (Κατασκευή)

Είναι η αντίστροφη πορεία της Ανάλυσης και ουσιαστικά η λύση του προβλήματος. Στη διαδικασία της σύνθεσης κατασκευάζουμε σταδιακά τα σχήματα που συναντούμε στην Ανάλυση και βήμα –βήμα οδηγούμαστε στο ζητούμενο σχήμα.

3. Απόδειξη

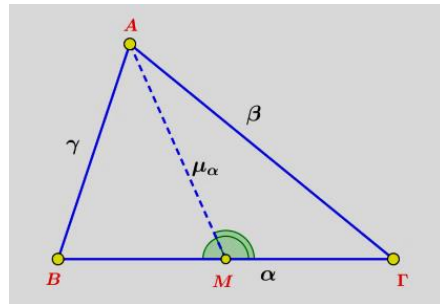
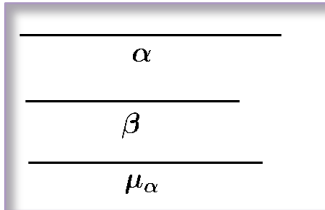
Αποδεικνύουμε ότι το σχήμα που κατασκευάσαμε έχει όλα τα δεδομένα που μας δόθηκαν και άρα είναι το ζητούμενο.

4. Διερεύνηση

Στο στάδιο αυτό αναζητούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα, για να υπάρχει λύση και αναζητούμε όλες τις δυνατές λύσεις του προβλήματος. Με τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί να κατασκευάζονται περισσότερα από ένα σχήματα ή να μην κατασκευάζεται κανένα σχήμα.

Πρόβλημα 1

Να κατασκευαστεί τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ όταν δίνονται οι πλευρές του $\alpha = B\Gamma$, $\beta = A\Gamma$ και η διάμεσός του $AM = \mu_\alpha$



Σχήμα 21

- **Ανάλυση**

Υποθέτουμε ότι το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ έχει κατασκευαστεί με τα δεδομένα του προβλήματος (Σχήμα 21). Παρατηρώντας το σχήμα που σχεδιάσαμε προσπαθούμε να αναζητήσουμε σε αυτό γεωμετρικά σχήματα που μπορούν να κατασκευαστούν με απλές γεωμετρικές κατασκευές.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι το τρίγωνο $\triangle A\Gamma M$ μπορεί να κατασκευαστεί γιατί γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του $A\Gamma = \beta$, $AM = \mu_\alpha$ και $\Gamma M = \frac{\alpha}{2}$.

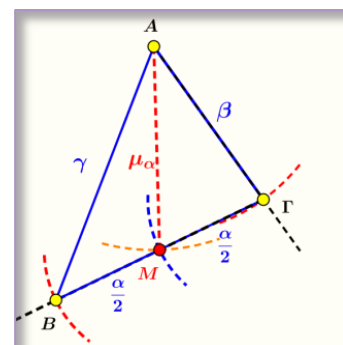
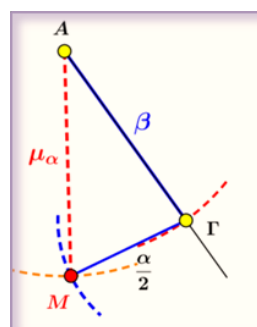
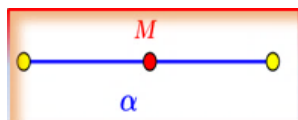
- **Σύνθεση-κατασκευή**

Η κατασκευή του τριγώνου φαίνεται βήμα-βήμα στο επόμενο (Σχήμα 22).

Βήμα 1^ο: Κατασκευάζουμε το μέσον του δεδομένου τμήματος $B\Gamma = \alpha$.

Βήμα 2^ο: Με πλευρές $\frac{B\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$, $A\Gamma = \beta$ και $AM = \mu_\alpha$ κατασκευάζουμε το τρίγωνο $\triangle A\Gamma M$.

Βήμα 3^ο: Προεκτείνουμε την ημιευθεία ΓM και παίρνουμε σημείο B στην προέκταση της τέτοιο ώστε $MB = \Gamma M = \frac{\alpha}{2}$. Το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο.



Σχήμα 22

- **Απόδειξη**

Το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ έχει $A\Gamma = \beta$ από την κατασκευή που κάναμε.

Η πλευρά $B\Gamma = GM + MB = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$ και $AM = \mu_\alpha$ από την κατασκευή. Επίσης η AM είναι διάμεσος του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ αφού το σημείο M είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$.

- **Διερεύνηση**

Για να είναι δυνατή η κατασκευή του τριγώνου $\triangle A\Gamma M$ θα πρέπει για τις πλευρές του να ισχύει η τριγωνική ανισότητα δηλαδή πρέπει για τα μήκη των δεδομένων τμημάτων να ισχύει:

$$|\beta - \mu_\alpha| < \frac{\alpha}{2} < \beta + \mu_\alpha$$

Προφανώς το πρόβλημα έχει μια λύση, δηλαδή δεν μπορεί να κατασκευαστεί άλλο τρίγωνο με αυτά τα δεδομένα.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ευθεία xy και τα σημεία A και B προς το ίδιο μέρος της xy . Να προσδιορίσετε ένα σημείο M πάνω στην ευθεία xy τέτοιο ώστε $\angle AMx = 2(\angle BM\gamma)$.

- **Ανάλυση**

Έστω M το σημείο που θέλουμε να προσδιορίσουμε. Αν ονομάσουμε B' το συμμετρικό του σημείου B ως προς την xy . Τότε:

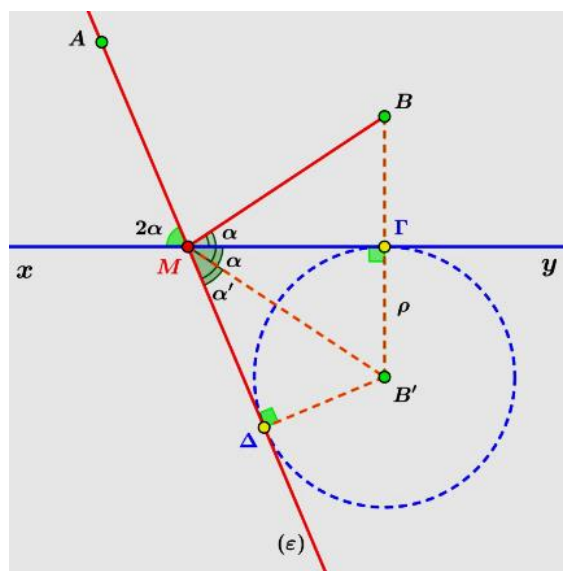
$$\angle BM\Gamma = \angle \Gamma MB' = a$$

Αν προεκτείνουμε την AM , τότε:

$$a + a' = 2a \Rightarrow a = a'$$

Δηλαδή, η MB' είναι διχοτόμος της $\angle \varepsilon M\gamma$ (Σχήμα 23).

Αν $B'\Delta \perp (\varepsilon)$, τότε $B'\Delta = B'\Gamma = \rho$.



Σχήμα 23

Άρα, η ευθεία $AM \equiv (\varepsilon)$ θα εφάπτεται του κύκλου (B', ρ) .

- **Σύνθεση-Κατασκευή**

Έστω B' το συμμετρικό του σημείου B ως προς την ευθεία xy . Γράφουμε τον κύκλο (B', ρ) και από το σημείο A φέρουμε εφαπτομένη $Aε$, που τέμνει την ευθεία xy στο σημείο M που είναι το ζητούμενο.

- **Απόδειξη**

Επειδή από την κατασκευή ισχύει $a = a'$, θα έχουμε $\angle AMx = 2(\angle BMγ)$.

- **Διερεύνηση**

Το πρόβλημα έχει πάντοτε μια λύση. Αν φέρουμε την δεύτερη εφαπτομένη από το σημείο A προς τον κύκλο (B', ρ) τότε για το σημείο M θα έχουμε:

$$\angle AMγ = 2(\angle BMx)$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 08

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

8.1 Εκθετική Συνάρτηση

8.1.1 Δυνάμεις με εκθέτη πραγματικό αριθμό

8.1.2 Ορισμός εκθετικής συνάρτησης

8.1.3 Γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης

8.1.4 Ο αριθμός e και η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$

8.1.5 Εκθετικές εξισώσεις – ανισώσεις

8.1.6 Εφαρμογές της εκθετικής συνάρτησης

8.2 Λογαριθμική Συνάρτηση

8.2.1 Λογάριθμος θετικού αριθμού και λογαριθμική συνάρτηση

8.2.2 Γραφική παράσταση λογαριθμικής συνάρτησης

8.2.3 Ιδιότητες λογάριθμων

8.2.4 Αλλαγή βάσης λογάριθμων

8.2.5 Λογαριθμικές εξισώσεις

8.2.6 Λογαριθμικές ανισώσεις

8.2.7 Εφαρμογές λογαριθμικής συνάρτησης

8.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Διερεύνηση

Ένα φύλλο χαρτιού έχει πάχος 1 mm. Αν μπορούσαμε να το διπλώσουμε 25 φορές, πόσο πάχος θα είχε στο τέλος της 25^{ης} δίπλωσης;

Διπλώσεις	Πάχος χαρτιού
1	2 mm
2	$2 \cdot 2 = 2^2$ mm
3	$2 \cdot 2^2 = 2^3$ mm
⋮	⋮
x	2^x mm

Τέτοια προβλήματα, τα οποία βασίζονται στη μεταβολή του εκθέτη μιας δύναμης με σταθερή βάση, καλούνται **εκθετικά αινίγματα**. Βασικό στοιχείο των εκθετικών αινιγμάτων, που τα κάνει να διαφέρουν από τα υπόλοιπα προβλήματα, είναι η δυσανάλογη μεγάλη αύξηση της τιμής της δύναμης, με σχετικά μικρή μεταβολή του εκθέτη, όπως στο προηγούμενο πρόβλημα.

Ένα επίσης γνωστό εκθετικό αίνιγμα είναι το ακόλουθο:

«Σε μία λίμνη αρχικά υπήρχε ένα νούφαρο. Κάθε μέρα τα νούφαρα διπλασιάζονταν, ώσπου στο τέλος της τριακοστής ημέρας η επιφάνεια της λίμνης καλύφθηκε τελείως με νούφαρα. Ποια μέρα η λίμνη ήταν καλυμμένη κατά το ένα τέταρτο της επιφάνειάς της από νούφαρα;»



8.1.1 Δυνάμεις με εκθέτη πραγματικό αριθμό

Έχουμε μάθει...

Δυνάμεις με εκθέτη ρητό αριθμό

- Δύναμη πραγματικού αριθμού με εκθέτη θετικό ακέραιο:

$$a^{\nu} = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\nu\text{-παράγοντες}}, & \nu > 1 \\ a & , \nu = 1 \end{cases} \quad \text{με } a \in \mathbb{R} \text{ και } \nu \in \mathbb{N}$$

- Ιδιότητες δυνάμεων ($a, \beta \in \mathbb{R}$ και $\nu, \mu \in \mathbb{N}$)

➤ $a^{\nu} \cdot a^{\mu} = a^{\nu+\mu}$

➤ $a^{\nu} : a^{\mu} = \frac{a^{\nu}}{a^{\mu}} = a^{\nu-\mu}, \quad a \neq 0$

➤ $(a^{\nu})^{\mu} = a^{\nu\mu}$

➤ $(a\beta)^{\nu} = a^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$

➤ $\left(\frac{a}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{a^{\nu}}{\beta^{\nu}}, \quad \beta \neq 0$

- Με τη βοήθεια των ισοτήτων $a^{-\nu} = \frac{1}{a^{\nu}}$ και $a^0 = 1, a \neq 0, \nu \in \mathbb{N}$, ορίσαμε τη δύναμη πραγματικού αριθμού και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι ακέραιος.

- Επίσης, ορίσαμε και δυνάμεις με εκθέτη ρητό αριθμό της μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a \geq 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος ($\nu \in \mathbb{N}$) με τέτοιο τρόπο, ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες των δυνάμεων πραγματικού αριθμού.

Γενικά, αν $a \in \mathbb{R}, a > 0, \mu$ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$$

Επιπρόσθετα, αν $a = 0$ και μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$.

Δυνάμεις θετικού αριθμού με άρρητο εκθέτη

Θεωρούμε τη δύναμη $10^{\sqrt{2}}$, στην οποία ο εκθέτης είναι άρρητος αριθμός και εκφράζεται με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Οι δεκαδικές προσεγγίσεις του, κατά προσέγγιση ακεραίας μονάδας, δεκάτου, χιλιοστού, κτλ. είναι:

$$1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, 1,414213, \dots$$

Οι αντίστοιχες τιμές των δυνάμεων του 10 είναι:

$$10^1, 10^{1,4}, 10^{1,41}, 10^{1,414}, 10^{1,4142}, 10^{1,41421}, 10^{1,414213}, \dots$$

Με χρήση μιας υπολογιστικής μηχανής, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} 10^1 &= 10 \\ 10^{1,4} &\simeq 25,11886432 \\ 10^{1,41} &\simeq 25,70395783 \\ 10^{1,414} &\simeq 25,94179362 \\ 10^{1,4142} &\simeq 25,95374301 \\ 10^{1,41421} &\simeq 25,95434062 \\ 10^{1,414213} &\simeq 25,95451991 \\ 10^{1,4142135} &\simeq 25,95454979 \\ 10^{1,41421356} &\simeq 25,95455338 \\ 10^{1,414213562} &\simeq 25,95455350 \end{aligned}$$

Παρατηρώντας τους παραπάνω αριθμούς, διαπιστώνουμε ότι καθώς το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων αυξάνεται, οι αντίστοιχες τιμές των δυνάμεων του 10 προσεγγίζουν έναν ορισμένο αριθμό, που λέγεται **οριακή τιμή**.

Γενικά αποδεικνύεται ότι:

Αν $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, x άρρητος και x_n η δεκαδική προσέγγιση του x με n δεκαδικά ψηφία, τότε ορίζουμε τη δύναμη:

$$a^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{x_n} = a^{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n}$$

Επιπρόσθετα, για κάθε $x > 0$, ορίζουμε $0^x = 0$.

Ο υπολογισμός δυνάμεων με άρρητο εκθέτη γίνεται με χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Παρατήρηση

Οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ρητό αριθμό, αποδεικνύεται ότι ισχύουν και για δυνάμεις με εκθέτη άρρητο αριθμό.

Αν a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\begin{aligned} a^\kappa a^\lambda &= a^{\kappa+\lambda}, & (a^\kappa)^\lambda &= a^{\kappa\lambda} \\ (a^\kappa)^\mu &= a^{\kappa\mu}, & \frac{a^\kappa}{a^\lambda} &= a^{\kappa-\lambda} \end{aligned}$$

8.1.2 Ορισμός εκθετικής συνάρτησης

Ορισμός

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

ονομάζεται **εκθετική συνάρτηση με βάση a** .

Παρατήρηση

Αν $a = 1$, τότε έχουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$, που δεν είναι εκθετική.

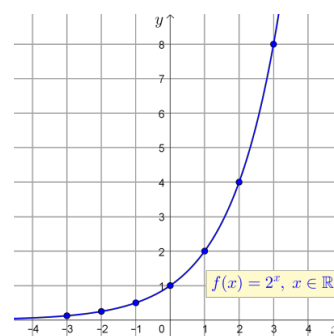
8.1.3 Γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης

Γραφική παράσταση της $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$

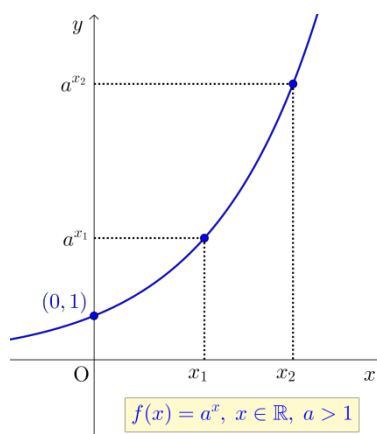
Δίνοντας μερικές τιμές στην ανεξάρτητη μεταβλητή, υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές του $y = f(x) = 2^x$ και κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Τοποθετώντας τα σημεία (x, y) του πιο πάνω πίνακα σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γενικά, κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}, a > 1$, έχει γραφική παράσταση που δίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Από τη γραφική παράσταση, παρατηρούμε ότι:

- Έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$. Έτσι, γράφουμε συμβολικά:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

- Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $a^{x_1} < a^{x_2}$. Δηλαδή:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

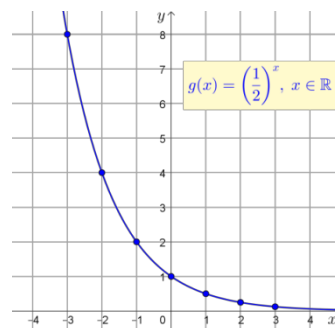
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
- Το σημείο τομής με τον άξονα των τεταγμένων είναι το σημείο $(0, 1)$.

Γραφική παράσταση της $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, x \in \mathbb{R}$

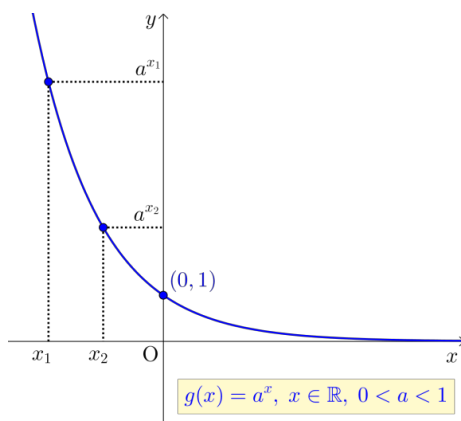
Κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών της g , χρησιμοποιώντας τον πίνακα τιμών της $f(x) = 2^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x) = \frac{1}{2^x}$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Τοποθετώντας τα σημεία (x, y) του πιο πάνω πίνακα σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, x \in \mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γενικά, κάθε συνάρτηση της μορφής $g(x) = a^x, x \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$, έχει γραφική παράσταση που δίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Από τη γραφική παράσταση, παρατηρούμε ότι:

- Έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$. Έτσι, γράφουμε συμβολικά:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

- Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $a^{x_1} > a^{x_2}$. Δηλαδή:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

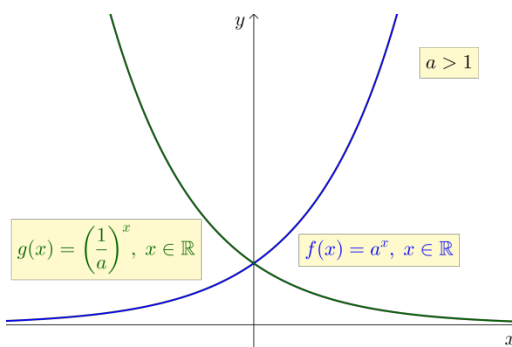
- Το σημείο τομής με τον άξονα των τεταγμένων είναι το σημείο $(0, 1)$.

Παρατηρήσεις

- Για τις συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$, με $a > 1$, παρατηρούμε ότι:

$$g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} = f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$, αφού τα σημεία (x, y) και $(-x, y)$ είναι συμμετρικά ως προς τον $y'y$ άξονα.

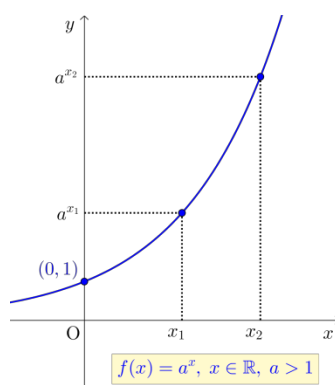


- **Η εκθετική συνάρτηση είναι 1 – 1.**

Συγκεκριμένα:

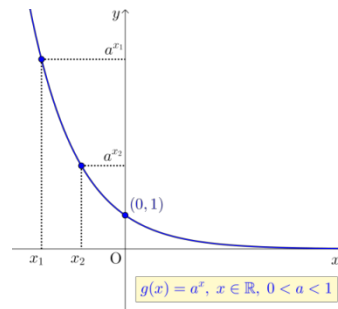
- Για τη συνάρτηση f της μορφής $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, με $a > 1$, ισχύει ότι:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$



➤ Για τη συνάρτηση g της μορφής $g(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, με $0 < a < 1$, ισχύει ότι:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$



Άρα:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Επομένως, η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ είναι 1-1.

- Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ είναι 1-1.

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1 : a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Παράδειγμα 1

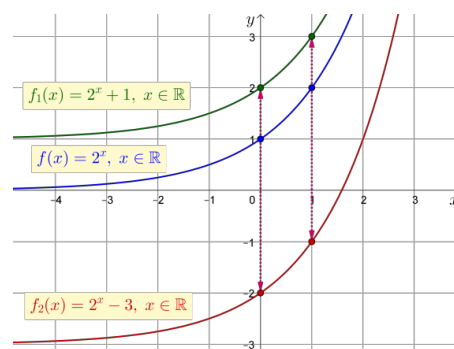
Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$, να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

(α) $f_1(x) = 2^x + 1$ και $f_2(x) = 2^x - 3$ (β) $f_3(x) = 2^{x+1}$ και $f_4(x) = 2^{x-2}$

Λύση

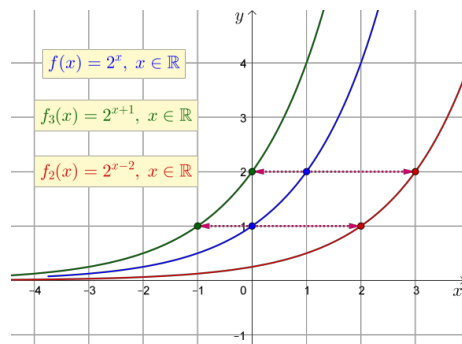
(α) Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

- Η γραφική παράσταση της f_1 προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά μία μονάδα προς τα πάνω.
- Η γραφική παράσταση της f_2 προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά τρεις μονάδες προς τα κάτω.



(β) Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

- Η γραφική παράσταση της f_3 προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά μία μονάδα προς τα αριστερά.
- Η γραφική παράσταση της f_4 προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά δύο μονάδες προς τα δεξιά.



Παράδειγμα 2

(α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \left(\frac{\lambda + 3}{1 - \lambda}\right)^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

να είναι εκθετική συνάρτηση.

(β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f όταν $\lambda = 0$ και να αναφέρετε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στην περιοχή του $+\infty$ και του $-\infty$.

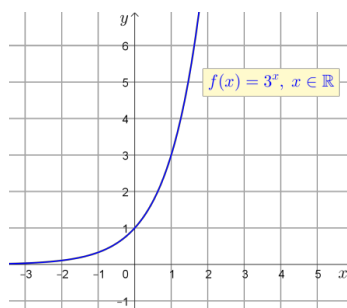
Λύση

(α) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι εκθετική αν $a > 0$ και $a \neq 1$.

Επομένως, η πιο πάνω συνάρτηση είναι εκθετική, όταν:

$$\begin{cases} \frac{\lambda + 3}{1 - \lambda} > 0 \\ \frac{\lambda + 3}{1 - \lambda} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in (-3, 1) \\ \lambda + 3 \neq 1 - \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in (-3, 1) \\ \lambda \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in (-3, -1) \cup (-1, 1)$$

(β) Όταν $\lambda = 0$, τότε ο τύπος της f είναι $f(x) = 3^x$, $x \in \mathbb{R}$. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Η συμπεριφορά της συνάρτησης στο $+\infty$ και στο $-\infty$, όπως φαίνεται και από τη γραφική της παράσταση, είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Δραστηριότητες

1. Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 5^x$, $x \in \mathbb{R}$, να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = -5^x$

(β) $f(x) = 5^x - 1$

(γ) $f(x) = 5^x + 3$

2. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(β) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

(γ) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

3. (α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \left(\frac{\lambda - 2}{1 + \lambda}\right)^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

να είναι εκθετική συνάρτηση.

(β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f όταν $\lambda = 3$ και να αναφέρετε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στην περιοχή του $+\infty$ και του $-\infty$.

8.1.4 Ο αριθμός e και η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

Μια παράξενη διαφήμιση

Μια τράπεζα, για λόγους διαφήμισης, κάνει μια πολύ ειδική προσφορά. Όποιος καταθέσει την επόμενη μέρα 1 εκατομμύριο ευρώ, αυτό θα ανατοκιστεί με επιτόκιο $\varepsilon = 100\%$ και με δυνατότητα ανατοκισμού του 1, 2, 3, ..., ν φορές το χρόνο, σε ίσα χρονικά διαστήματα, ανάλογα με την επιθυμία του καταθέτη.

Έχει σημασία για τον καταθέτη το πόσες φορές το χρόνο θα ανατοκιστεί το κεφάλαιό του.

Ο ανατοκισμός δίνεται από τον τύπο

$$a_\nu = a_0(1 + \tau)^\nu$$

όπου a_0 το αρχικό κεφάλαιο, ε το επιτόκιο, $\tau = \frac{\varepsilon}{100}$ το επιτόκιο της περιόδου και ν ο αριθμός των χρονικών περιόδων.

- Αν $\nu = 1$ (ανατοκισμός ανά χρόνο), τότε $\tau = 1$ και $a_1 = 1(1 + 1)^1 = 2$ εκατομμύρια ευρώ.
- Αν $\nu = 2$ (ανατοκισμός ανά εξάμηνο), τότε $\tau = \frac{1}{2}$ και $a_2 = 1\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$ εκατομμύρια ευρώ.
- Αν $\nu = 3$ (ανατοκισμός ανά τετράμηνο), τότε $\tau = \frac{1}{3}$ και $a_3 = 1\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx 2.44$ εκατομμύρια ευρώ.
- ⋮
- Γενικά, για ν φορές, $\tau = \frac{1}{\nu}$ και έχουμε $a_\nu = 1\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$.

Υπολογίζουμε τις τιμές του a_ν για διάφορες τιμές του ν και κατασκευάζουμε τον πιο κάτω πίνακα:

ν	1	2	4	12	52	10000	100000	1000000
$\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$	2	2,25	2,4414	2,6130	2,7048	2,7181	2,7183	2,7183

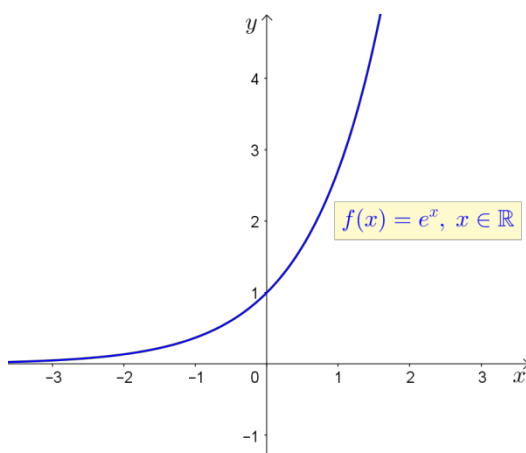
Παρατηρούμε ότι, καθώς το ν αυξάνεται, αυξάνεται και ο αριθμός $\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$, προσεγγίζοντας ένα ορισμένο πραγματικό αριθμό. Ο αριθμός αυτός είναι άρρητος και συμβολίζεται με e . Ο συμβολισμός αυτός οφείλεται στον μεγάλο Ελβετό μαθηματικό Leonhard Euler (1707 – 1783).

Ο αριθμός e είναι άρρητος αριθμός και ορίζεται ως το όριο της ακολουθίας $\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$. Δηλαδή:

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu \approx 2,718281828459 \approx 2,71828$$

Ο αριθμός e καλείται και Νεπέριος αριθμός από το όνομα του Σκωτσέζου John Napier και είναι πολύ σημαντικός αριθμός στην επιστήμη των Μαθηματικών.

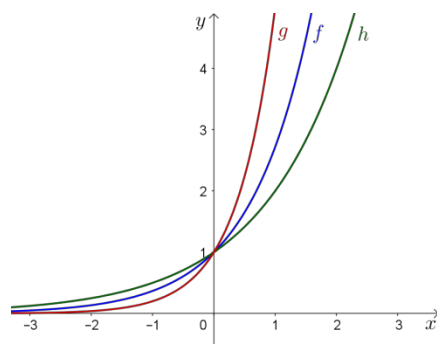
Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με τύπο $f(x) = e^x$ ονομάζεται **εκθετική** και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Όταν αναφερόμαστε στην εκθετική συνάρτηση, εννοούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1

Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$, $g(x) = 5^x$ και $h(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.



Να δικαιολογήσετε πλήρως τη θέση των τριών καμπυλών στο καρτεσιανό επίπεδο.

Λύση

Έχουμε ότι:

- $2 < e < 5 \Rightarrow 2^x < e^x < 5^x \Rightarrow h(x) < f(x) < g(x)$, αν $x > 0$
- $2 < e < 5 \Rightarrow 2^x > e^x > 5^x \Rightarrow h(x) > f(x) > g(x)$, αν $x < 0$
- $h(0) = f(0) = g(0) = 1$

Έτσι, όταν $x > 0$, η καμπύλη $y = g(x) = 5^x$ βρίσκεται πιο πάνω από τις άλλες δύο, ενώ, όταν $x < 0$, βρίσκεται πιο κάτω από τις άλλες δύο, με την $y = f(x) = e^x$ να βρίσκεται πάντα ανάμεσα στις άλλες δύο.

8.1.5 Εκθετικές εξισώσεις – ανισώσεις

Εκθετική εξίσωση λέγεται κάθε εξίσωση που περιέχει τουλάχιστον έναν όρο της μορφής $a^{f(x)}$, όπου $a > 0$, $a \neq 1$ και f συνάρτηση του x , όπως για παράδειγμα:

$$3^{x+1} = 3^{2x}, \quad 2^x + 16 \cdot 2^{-x} - 10 = 0, \quad e^x = 2$$

Παρατήρηση

Η επίλυση εκθετικών εξισώσεων βασίζεται στις πιο κάτω ισοδυναμίες:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1 : a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$
$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in D_f \cap D_g$$

Παράδειγμα 1

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

$$\begin{array}{lll} \text{(α)} & 5^{3x+7} = 125 & \text{(β)} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \\ & & \text{(γ)} \quad 5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}} \\ \text{(δ)} & 4 \cdot 3^x - 2^{x+1} = -\frac{3^x}{2} & \text{(ε)} \quad (x-1)^{x^2-7x+6} = 1 \\ & & \text{(στ)} \quad \theta_{\text{ημ}x} \text{ συν}x = \sqrt{3} \end{array}$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{array}{l} \text{(α)} \quad 5^{3x+7} = 125 \Leftrightarrow 5^{3x+7} = 5^3 \Leftrightarrow 3x+7 = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \\ \text{(β)} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \Leftrightarrow x = -4 \\ \text{(γ)} \quad 5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}} \Leftrightarrow 5^x \cdot 5^{-1} = 2 + \frac{3}{5^x \cdot 5^{-2}} \\ \Leftrightarrow \frac{5^x}{5} = 2 + \frac{3 \cdot 5^2}{5^x} \qquad \text{Θέτουμε όπου } 5^x = y, y > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{y}{5} = 2 + \frac{3 \cdot 5^2}{y} \Leftrightarrow y^2 - 10y - 375 = 0 \end{array} \quad (1)$$

Η αρχική εκθετική εξίσωση μετασχηματίζεται στη δευτεροβάθμια εξίσωση (1) με τον περιορισμό $y > 0$. Έχουμε ότι:

$$(1) \Leftrightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{1600}}{2} = \frac{10 \pm 40}{2} \Leftrightarrow y_1 = 25 \text{ ή } y_2 = -15 < 0 \text{ (απορρίπτεται)}$$

Επομένως, έχουμε ότι:

$$y = 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2 \Leftrightarrow x = 2$$

(δ) Στην εξίσωση εμφανίζονται δύο δυνάμεις με δύο διαφορετικές βάσεις. Η προσπάθειά μας είναι να τη μετασχηματίσουμε σε εξίσωση με δύναμη της ίδιας βάσης. Έχουμε ότι:

$$\begin{array}{l} 4 \cdot 3^x - 2^{x+1} = -\frac{3^x}{2} \Leftrightarrow 4 \cdot 3^x + \frac{3^x}{2} = 2 \cdot 2^x \Leftrightarrow 8 \cdot 3^x + 3^x = 4 \cdot 2^x \\ \Leftrightarrow 9 \cdot 3^x = 4 \cdot 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow x = -2 \end{array}$$

- (ε) Στην εκθετική αυτή εξίσωση ο άγνωστος εμφανίζεται στον εκθέτη, αλλά και στη βάση της δύναμης.

Διακρίνουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

- $\left. \begin{array}{l} x^2 - 7x + 6 = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Rightarrow x = 6 \quad a^0 = 1, a \neq 0$
- $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2 \quad 1^v = 1, \forall v \in \mathbb{R}$
- $\left. \begin{array}{l} x - 1 = -1 \\ x^2 - 7x + 6 \text{ άρτιος} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 0^2 - 7 \cdot 0 + 6 \text{ άρτιος} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0 \quad (-1)^{2\kappa} = 1, \kappa \in \mathbb{Z}$

Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $x = 0$, $x = 2$ και $x = 6$.

(στ) $9^{\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3^{2\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x = 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow \eta\mu 2x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } 2x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{12} \text{ ή } x = \kappa\pi + \frac{5\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Παράδειγμα 2

- (α) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = 5^{x^4+1}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = 5^x + 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.
 Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι 1 – 1.
- (β) Δίνεται η συνάρτηση h με $h(x) = 15^x - 9 \cdot 5^x - 3^x + 7$, $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα $h(0)$, $h(2)$ και να εξετάσετε αν η h είναι 1 – 1.

Λύση

- (α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε ότι:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5^{x_1^4+1} = 5^{x_2^4+1} \Rightarrow x_1^4 + 1 = x_2^4 + 1 \Rightarrow x_1^4 = x_2^4 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

Άρα, η f δεν είναι 1 – 1 συνάρτηση.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, όπου $x_1 \neq x_2$ και έστω $x_1 < x_2$. Έχουμε ότι:

$$\left. \begin{array}{l} 5^{x_1} < 5^{x_2} \\ 2^{x_1} < 2^{x_2} \end{array} \right\} \Rightarrow 5^{x_1} + 2^{x_1} < 5^{x_2} + 2^{x_2} \Rightarrow 5^{x_1} + 2^{x_1} \neq 5^{x_2} + 2^{x_2} \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$$

Άρα, η g είναι 1 – 1 συνάρτηση.

- (β) Έχουμε ότι:

$$h(0) = 15^0 - 9 \cdot 5^0 - 3^0 + 7 = 1 - 9 - 1 + 7 = -2$$

$$h(2) = 15^2 - 9 \cdot 5^2 - 3^2 = 225 - 9 \cdot 25 - 9 = -2$$

Έχουμε $0 \neq 2$ και $h(0) = h(2) = -2$. Άρα, η h δεν είναι 1 – 1 συνάρτηση.

Εκθετική ανίσωση λέγεται κάθε ανίσωση που περιέχει τουλάχιστον έναν όρο της μορφής $a^{f(x)}$, όπου $a > 0$, $a \neq 1$ και f συνάρτηση του x , όπως για παράδειγμα:

$$2^{3^x} > 512, \quad 3^{x^4-3} \geq 9^x$$

Παρατήρηση

Για την επίλυση εκθετικών ανισώσεων χρησιμοποιούμε τις ισοδυναμίες:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x), \text{ όταν } a > 1$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x), \text{ όταν } 0 < a < 1$$

Παράδειγμα 3

Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

$$(\alpha) \quad 3^{x^2-5x+9} \leq 27$$

$$(\beta) \quad \frac{1}{3^{x^2+x}} < \frac{1}{9}$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$(\alpha) \quad 3^{x^2-5x+9} \leq 27 \Leftrightarrow 3^{x^2-5x+9} \leq 3^3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 9 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2, 3]$$

$$\left. \begin{array}{l} a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \\ a > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

$$(\beta) \quad \frac{1}{3^{x^2+x}} < \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+x} < \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x > 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 1$$

$$\left. \begin{array}{l} a^{f(x)} < a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) > g(x)$$

8.1.6. Εφαρμογές της εκθετικής συνάρτησης

Ο νόμος της Εκθετικής Μεταβολής

Μια ακόμη εκθετική συνάρτηση με βάση το e είναι η

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct},$$

γνωστή ως «νόμος της εκθετικής μεταβολής».

Η συνάρτηση αυτή εκφράζει ένα φυσικό μέγεθος, που μεταβάλλεται με τον χρόνο t . Το $Q_0 > 0$ είναι η αρχική τιμή για $t = 0$, ενώ το c είναι μια σταθερά. Αν $c > 0$, τότε η τιμή της συνάρτησης εκφράζει εκθετική αύξηση, ενώ αν $c < 0$, τότε η τιμή της συνάρτησης εκφράζει εκθετική μείωση.

Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση της ποσότητας του Ραδίου ως προς τον χρόνο ακολουθεί τον νόμο της εκθετικής μεταβολής και έχει χρόνο υποδιπλασιασμού 1600 έτη. Αν η αρχική ποσότητα είναι 5 γραμμάρια, να αποδείξετε ότι:

(α) η συνάρτηση, η οποία δίνει την ποσότητα του Ραδίου μετά από t χρόνια, είναι:

$$Q(t) = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$

(β) μετά από 20000 χρόνια θα έχουν απομείνει μόλις 0,001 γραμμάρια.

(Σημείωση: Ο χρόνος υποδιπλασιασμού ενός στοιχείου είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να διασπαστεί η μισή ποσότητα του στοιχείου αυτού.)

Λύση

(α) Σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής, η απόσβεση του ραδιενεργού ραδίου δίνεται από τον τύπο

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}, \tag{1}$$

για τον οποίο πρέπει να υπολογίσουμε την σταθερά $c \in \mathbb{R}$.

Αφού σε 1600 χρόνια η αρχική ποσότητα θα μειωθεί στη μισή, τότε:

$$Q(1600) = \frac{Q_0}{2} \Rightarrow Q_0 \cdot e^{1600c} = \frac{Q_0}{2} \Rightarrow 2e^{1600c} = 1 \Rightarrow e^{1600c} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^c = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1600}}$$

Επομένως, ο τύπος (1) γίνεται:

$$Q(t) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$

(β) Μετά από 20000 χρόνια, θα έχει απομείνει ποσότητα:

$$Q(20000) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20000}{1600}} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{25}{2}} = 5 \cdot 0,0002 = 0,001 \text{ gr}$$

Παράδειγμα 2

Μια αυτοκινητοβιομηχανία εκτιμά ότι η αξία ενός αυτοκινήτου μειώνεται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής. Η αρχική αξία του αυτοκινήτου είναι €20000, ενώ εκτιμάται ότι μετά από 3 χρόνια, η αξία του αυτοκινήτου θα είναι €14580.

(α) Να αποδείξετε ότι η αξία $V(t)$ του αυτοκινήτου μετά από t χρόνια δίνεται από τον τύπο:

$$V(t) = 20000 \cdot (0,9)^t$$

(β) Σύμφωνα με την εκτίμηση της αυτοκινητοβιομηχανίας, να υπολογίσετε την αξία του αυτοκινήτου μετά από 8 χρόνια.

Λύση

(α) Σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής, η αξία του αυτοκινήτου δίνεται από τον τύπο

$$V(t) = V_0 \cdot e^{ct}, \quad (2)$$

για τον οποίο πρέπει να υπολογίσουμε την σταθερά $c \in \mathbb{R}$.

Αφού σε 3 χρόνια η αξία του αυτοκινήτου θα είναι €14580, τότε:

$$V(3) = V_0 \cdot e^{3c} \Rightarrow 14580 = 20000 \cdot e^{3c} \Rightarrow e^{3c} = 0,729 \Rightarrow e^c = 0,9$$

Επομένως, ο τύπος (2) γίνεται:

$$V(t) = 20000 \cdot (0,9)^t$$

(β) Η αξία του αυτοκινήτου μετά από 8 χρόνια θα είναι:

$$V(8) = 20000 \cdot (0,9)^8 \simeq \text{€}8609$$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (-2)^x, x \in \mathbb{R}$ είναι εκθετική συνάρτηση.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Η εξίσωση $16^x = -16$ δεν έχει λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = -4^x, x \in \mathbb{R}$ είναι το σύνολο $(-\infty, 0)$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = 2^x + e^x, x \in \mathbb{R}$ δεν είναι $1 - 1$ συνάρτηση.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Ισχύει ότι $2 < 3 \Leftrightarrow 2^x < 3^x$, για κάθε $x > 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $10^{x-3} = 10000$

(β) $\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{27}{64}$

(γ) $5^{\sqrt{x}} = 125$

(δ) $9^{2x} \cdot 27^{x^2} = 3^{-1}$

(ε) $16^{5-x} = \frac{8^{2x-3}}{2}$

(στ) $e^{2x} \cdot \sqrt{e^x} = \frac{1}{e}$

(ζ) $11^{x^2-3x-4} = 1$

(η) $7^{1+\sin x + \sin^2 x + \dots} = 49$

3. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

(β) $e^x + e^{-x} = 2$

(γ) $25^x + 5^{x+1} - 50 = 0$

(δ) $7 \cdot 3^{x-1} + 5^{x+1} = 3^{x+2} + 5^x$

(ε) $\frac{3^x + 3^{(-x)}}{3^x - 3^{(-x)}} = 2$

(στ) $4 \cdot 3^{2x} + 9 \cdot 4^x = 13 \cdot 6^x$

(ζ) $6^x - 3^x = 2^x - 1$

(η) $(x^2 - 5x + 6)^{x(x-2)} = 1$

4. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

(α) $8^{x^2-1} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

(β) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\right]^{3-x} > 1$

5. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 3^x - 5^y = 4 \\ 9^x - 25^y = 56 \end{cases}$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με:

$$f(x) = 5^{\eta\mu x}, x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) = 2^{\sigma\upsilon\nu x}, x \in [0, \pi]$$

Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι $1 - 1$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{6^x}{4^x + 9^x}$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- (β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.
- (γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = \frac{12}{13}f(0)$$

8. Μια μεγάλη αυτοκινητοβιομηχανία, για να αυξήσει τις πωλήσεις της, δίνει στον γενικό αντιπρόσωπο που έχει στην Κύπρο δώρο $\Delta(x) = 4^x - 2^{x+1} + 4$ αυτοκίνητα, σε περίπτωση που ο αντιπρόσωπος πωλήσει x χιλιάδες αυτοκίνητα τα επόμενα δύο χρόνια.

- (α) Αν ο αντιπρόσωπος στην Κύπρο πωλήσει 2000 αυτοκίνητα τα επόμενα δύο χρόνια, πόσα αυτοκίνητα θα πάρει ως δώρο;
- (β) Πόσα αυτοκίνητα πρέπει να πωλήσει την επόμενη διετία ο αντιπρόσωπος στην Κύπρο για να πάρει δώρο 52 αυτοκίνητα;

9. Οι κοινωνιολόγοι εκτιμούν ότι ο πληθυσμός μιας μικρής πόλης μειώνεται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής. Ο πληθυσμός της πόλης είναι σήμερα 8000 κάτοικοι, ενώ εκτιμάται ότι μετά από 20 χρόνια, ο πληθυσμός της πόλης θα είναι 4000 κάτοικοι.

- (α) Να αποδείξετε ότι ο πληθυσμός $P(t)$ της πόλης μετά από t δεκαετίες δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 8 \cdot 2^{-\frac{t}{2}},$$

με τον πληθυσμό να μετριέται σε χιλιάδες κατοίκους.

- (β) Σύμφωνα με τις εκτιμήσεις των κοινωνιολόγων, να υπολογίσετε τον πληθυσμό της πόλης μετά από 60 χρόνια.

10. Σε έναν ασθενή με ψηλό πυρετό χορηγείται αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία $\theta(t)$ του ασθενούς t ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου δίνεται από τον τύπο

$$\theta(t) = 36 + 4 \cdot 2^{-t},$$

με τη θερμοκρασία να μετριέται σε $^{\circ}\text{C}$.

- (α) Να υπολογίσετε τη θερμοκρασία του ασθενούς τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.
- (β) Να υπολογίσετε σε πόσες ώρες, από τη χορήγηση του φαρμάκου, η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει τη φυσιολογική τιμή των $36,5^{\circ}\text{C}$.
- (γ) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού φαρμάκου διαρκεί 4 ώρες, να υπολογίσετε τη θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου.
- (δ) Να βρείτε ποιο ήταν το χρονικό διάστημα κατά το οποίο η θερμοκρασία του ασθενούς ήταν μεγαλύτερη από 38°C .

8.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

8.2.1 Λογάριθμος θετικού αριθμού και λογαριθμική συνάρτηση

Διερεύνηση

Σύμφωνα με μετρήσεις, ο πληθυσμός της Γης το 1987 ήταν περίπου 5 δισεκατομμύρια ($5 \cdot 10^9$) και είχε υπολογιστεί ότι θα αυξανόταν με ετήσιο ρυθμό 1,7%. Αν υποθέσουμε ότι ο ρυθμός αυτός είχε παραμείνει σταθερός, να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα:

- (α) Πόσα δισεκατομμύρια αναμενόταν να είναι ο πληθυσμός του πλανήτη το 2016;
- (β) Πότε αναμενόταν να διπλασιαστεί ο πληθυσμός της γης;

Ορισμός λογαρίθμου

Αν $\theta > 0$ και $a > 0$, $a \neq 1$ ονομάζουμε **λογάριθμο του θ με βάση a** , συμβολικά $\log_a \theta$, τον εκθέτη στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον a για να πάρουμε τον αριθμό θ .

Συμβολικά, έχουμε:

$$\log_a \theta = x \Leftrightarrow a^x = \theta$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι:

- $\log_2 16 = 4$, γιατί $2^4 = 16$.
- $\log_5 125 = 3$, γιατί $5^3 = 125$.
- $\log_{10} 0,01 = -2$, γιατί $10^{-2} = 0,01$.
- $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$, γιατί $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81$.

Ιδιότητες

- (α) $\log_a 1 = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$
- (β) $\log_a a = 1$, $a > 0$, $a \neq 1$

Απόδειξη

Αν $a > 0$, $a \neq 1$, τότε:

- (α) $\log_a 1 = 0$, γιατί $a^0 = 1$.
- (β) $\log_a a = 1$, γιατί $a^1 = a$.

Οι λογάριθμοι που έχουν βάση τον αριθμό 10 λέγονται **δεκαδικοί ή κοινοί λογάριθμοι**. Ο δεκαδικός λογάριθμος του αριθμού θ συμβολίζεται απλά $\log \theta$ αντί $\log_{10} \theta$. Έτσι, έχουμε:

$$\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta, \theta > 0$$

Οι λογάριθμοι που έχουν βάση τον αριθμό e λέγονται **φυσικοί ή Νεπέριοι λογάριθμοι**. Ο λογάριθμος του θ με βάση το e συμβολίζεται με $\ln \theta$ και ισχύει:

$$\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta, \theta > 0$$

Αν σε κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x αντιστοιχίσουμε τον λογάριθμό του $\log_a x$, ορίζουμε τη λογαριθμική συνάρτηση με βάση a :

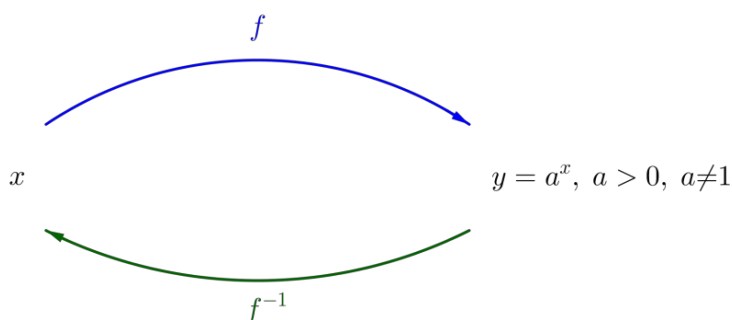
$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$$

Ισχύει η βασική ισοδυναμία:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y, \text{ με } x \in (0, +\infty), y \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$$

Σε προηγούμενη υποενότητα αποδείξαμε ότι η εκθετική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με $f(x) = a^x, 0 < a \neq 1$ είναι 1-1 και επί. Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη. Δηλαδή, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Η αντίστροφη αυτή συνάρτηση ονομάζεται **λογαριθμική** συνάρτηση με βάση a και συμβολίζεται με $f^{-1}(x) = \log_a x$. Ο αριθμός a είναι θετικός ακέραιος διαφορετικός της μονάδας ($a > 0, a \neq 1$).



Από τον ορισμό της λογαριθμικής συνάρτησης, είναι προφανής η σχέση που συνδέει τις δύο αυτές αντίστροφες συναρτήσεις:

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x, \text{ όταν } x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1 \text{ και } y \in (0, +\infty)$$

Γνωρίζουμε ότι η σύνθεση δύο αντιστρόφων συναρτήσεων μας δίνει την ταυτοτική συνάρτηση. Δηλαδή:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ και } (f \circ f^{-1})(x) = x$$

Ιδιότητες

$$(\alpha) \log_a a^x = x, \forall x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

$$(\beta) a^{\log_a x} = x, x > 0, a > 0, a \neq 1$$

Απόδειξη

Αν $a > 0, a \neq 1$, τότε ορίζουμε συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \log_a x$.

Επομένως, έχουμε ότι $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με τύπο $f^{-1}(x) = a^x$. Τότε:

$$(\alpha) (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(a^x) = \log_a a^x = x, \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

$$(\beta) (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x, \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι:

- $\log_2 2^3 = 3$
- $\log_5 \left(\frac{1}{5}\right) = \log_5 5^{-1} = -1$
- $2^{\log_2 4} = 4$
- $3^{\log_3 \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τους πιο κάτω λογαρίθμους, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

$$(\alpha) \log_4 2$$

$$(\beta) \log_{\sqrt{3}} 27$$

Λύση

$$(\alpha) \log_4 2 = x \Leftrightarrow 4^x = 2 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$(\beta) \log_{\sqrt{3}} 27 = x \Leftrightarrow (\sqrt{3})^x = 27 \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^3 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 3 \Leftrightarrow x = 6$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το x στις πιο κάτω ισότητες:

$$(\alpha) \log_x 64 = 2$$

$$(\beta) \log_{\sqrt{3}} 27 = x$$

$$(\gamma) \log_x e^2 = 4$$

$$(\delta) \log_2(\log_x 25) = 1$$

Λύση

$$(\alpha) \log_x 64 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt{64} = 8 \quad x > 0, x \neq 1$$

$$(\beta) \log_{\sqrt{3}} 27 = x \Leftrightarrow (\sqrt{3})^x = 27 \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^3 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 3 \Leftrightarrow x = 6$$

$$(\gamma) \log_x e^2 = 4 \Leftrightarrow x^4 = e^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{e} \quad x > 0, x \neq 1$$

$$(\delta) \log_2(\log_x 25) = 1 \Leftrightarrow \log_x 25 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \sqrt{25} = 5 \quad x > 0, x \neq 1$$

Ιστορικό σημείωμα

Η επινόηση των λογαρίθμων έγινε από τον John Napier (1550 – 1617). Η προσέγγιση της έννοιας έγινε μέσω αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων. Η ανακάλυψη βοήθησε πάρα πολύ τους επιστήμονες εκείνης της εποχής, κυρίως τους αστρονόμους, διότι απετέλεσε μια τεχνική πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μεγάλων αριθμών με ευκολότερο τρόπο. Ο μαθηματικός και καθηγητής του πανεπιστημίου της Οξφόρδης Henry Briggs (1561 – 1631) συνάντησε τον Napier στη Σκωτία και συμφώνησαν να τροποποιήσουν κάποιες έννοιες που έφεραν τους λογαρίθμους όπως είναι στη σημερινή τους μορφή.

Στις αρχές του 17^{ου} αιώνα για την εκτέλεση πράξεων επινοήθηκε και κατασκευάστηκε ο **λογαριθμικός κανόνας**, που στηρίζεται στις ιδιότητες των λογαρίθμων. Ο λογαριθμικός κανόνας χρησιμοποιήθηκε στα σχολεία της Κύπρου μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1970, όταν εμφανίστηκαν στην αγορά τα κομπιουτεράκια και τον εκτόπισαν πολύ γρήγορα.



Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τους πιο κάτω λογαρίθμους:

(α) $\log_3 81$

(β) $\log_2 \sqrt{2}$

(γ) $\log_5 \left(\frac{1}{25}\right)$

(δ) $\ln e^2$

(ε) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$

(στ) $\log 0,1$

2. Να υπολογίσετε το x στις πιο κάτω ισότητες:

(α) $\log_x 1000 = 3$

(β) $\log_5 125 = x$

(γ) $\log_3 x = 4$

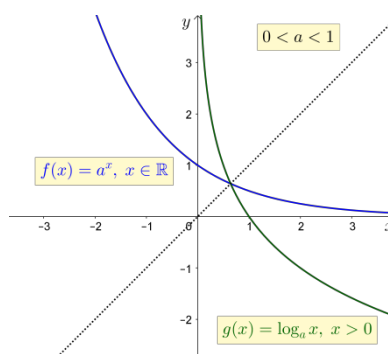
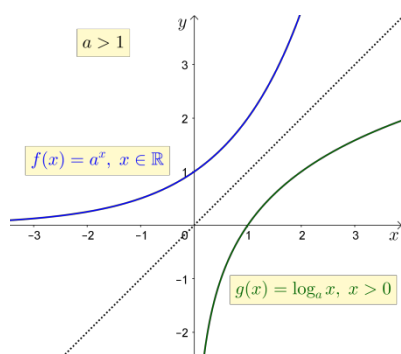
(δ) $\ln \left(\frac{1}{e^3}\right) = x$

(ε) $\ln x = \frac{1}{2}$

(στ) $\log_x \frac{81}{16} = 4$

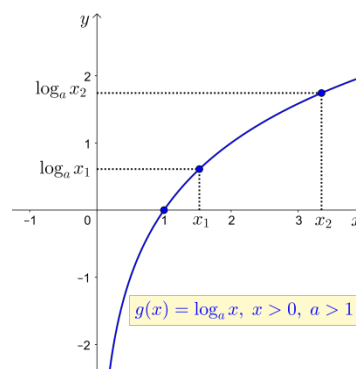
8.2.2 Γραφική παράσταση λογαριθμικής συνάρτησης

Γνωρίζουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις δυο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$. Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = a^x$ και $y = \log_a x$, δηλαδή της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης με την ίδια βάση a , με $a > 0$ και $a \neq 1$, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, αφού είναι αντίστροφες συναρτήσεις.



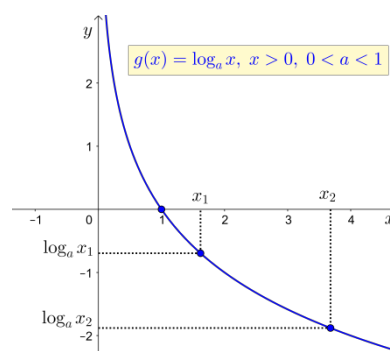
Η λογαριθμική συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \log_a x$, $a > 1$ έχει:

- πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- σύνολο τιμών το \mathbb{R}
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$, από όπου:
 - $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0$
 - $x = 1 \Rightarrow \log_a x = 0$
 - $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν τέμνει τον άξονα των τεταγμένων, ενώ τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο $(1, 0)$, ανεξάρτητα της τιμής του a , αφού $\log_a 1 = 0$, για κάθε $a > 1$.
- Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$.



Η λογαριθμική συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$ έχει:

- πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- σύνολο τιμών το \mathbb{R}
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$, από όπου:
 - $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0$
 - $x = 1 \Rightarrow \log_a x = 0$
 - $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν τέμνει τον άξονα των τεταγμένων, ενώ τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο $(1, 0)$, ανεξάρτητα της τιμής του a , αφού $\log_a 1 = 0$, για κάθε $0 < a < 1$.
- Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$



Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ είναι 1 – 1 συνάρτηση. Επομένως, και η αντίστροφη συνάρτηση της f , δηλαδή η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ είναι 1 – 1 συνάρτηση.

Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), a > 0, a \neq 1 : \log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

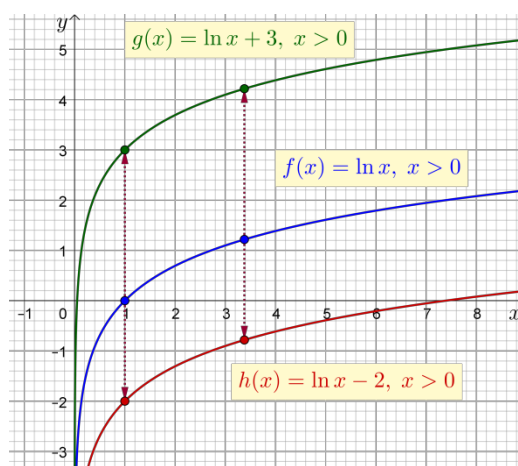
Παράδειγμα 1

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln x + 3$ και $h(x) = \ln x - 2$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f , g και h είναι το $(0, +\infty)$.

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης h προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.



Παράδειγμα 2

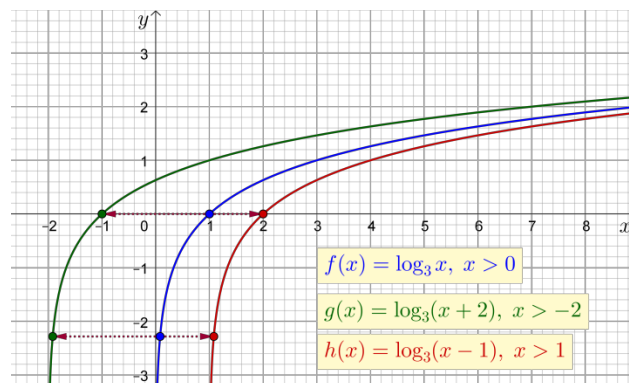
Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \log_3(x + 2)$ και $h(x) = \log_3(x - 1)$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $(0, +\infty)$, της g είναι το $(-2, +\infty)$ και της h είναι το $(1, +\infty)$.

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά.

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης h προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά.



Δραστηριότητες

1. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις $f(x) = 3^x$ και $g(x) = \log_3 x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.
2. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις $f(x) = \log x$, $g(x) = \log x - 1$ και $h(x) = \log(x - 1)$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.
3. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω συναρτήσεων, αφού βρείτε πρώτα το πεδίο ορισμού τους:
(α) $y = \ln(x - 2)$ (β) $y = \ln(2 - x)$ (γ) $y = 3 + \ln x$
4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο:
$$f(x) = \log_{x+1}(2 - 5x)$$
5. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$, $h(x) = \log_2 x$ και $g(x) = 3$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.
(α) Να βρείτε το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:
 - i. f και g
 - ii. h και g(β) Να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h δεν έχουν σημεία τομής.

8.2.3 Ιδιότητες λογάριθμων

Οι ιδιότητες που ακολουθούν είναι γνωστές ως ιδιότητες των λογαρίθμων. Οι ιδιότητες αυτές, όπως θα δούμε, προκύπτουν από αντίστοιχες ιδιότητες των δυνάμεων.

Ιδιότητες λογάριθμων

Αν $A > 0$, $B > 0$, $a > 0$ και $a \neq 1$, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$(\alpha) \log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$$

$$(\beta) \log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$

$$(\gamma) \log_a A^v = v \log_a A, \quad v \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη

(α) Έστω $x_1 = \log_a A$ και $x_2 = \log_a B$. Τότε, ως άμεση συνέπεια του ορισμού, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} A = a^{x_1} \quad \text{και} \quad B = a^{x_2} &\Rightarrow AB = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2} \\ &\Rightarrow AB = a^{x_1+x_2} \\ &\Rightarrow \log_a(AB) = x_1 + x_2 \\ &\Rightarrow \log_a(AB) = \log_a A + \log_a B \end{aligned}$$

(β) Ομοίως, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2} &\Rightarrow \log_a\left(\frac{A}{B}\right) = x_1 - x_2 \\ &\Rightarrow \log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B \end{aligned}$$

(γ) Έστω $x = \log_a A$. Έχουμε ότι:

$$x = \log_a A \Rightarrow A = a^x \Rightarrow A^v = (a^x)^v = a^{vx} \Rightarrow \log_a A^v = vx \Rightarrow \log_a A^v = v \log_a A$$

Παρατήρηση

Επειδή για κάθε $A > 0$ ισχύει $\sqrt[v]{A} = A^{\frac{1}{v}}$, έχουμε ότι:

$$\log_a \sqrt[v]{A} = \log_a A^{\frac{1}{v}} = \frac{1}{v} \log_a A$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

$$(\alpha) \log_6 12 - \log_6 2$$

$$(\beta) 3 \log_{12} 2 + \log_{12} 18$$

$$(\gamma) \frac{\log_4 8 + \log_4 27}{\log_4 6}$$

$$(\delta) 5^{\log_5 2021} \cdot \log_3 {}^{2021}\sqrt{3}$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}(\alpha) \quad \log_6 12 - \log_6 2 &= \log_6 \left(\frac{12}{2} \right) \\ &= \log_6 6 = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\beta) \quad 3 \log_{12} 2 + \log_{12} 18 &= \log_{12} 2^3 + \log_{12} (2 \cdot 3^2) \\ &= \log_{12} (2^3 \cdot 2 \cdot 3^2) \\ &= \log_{12} (2^2 \cdot 3)^2 = \log_{12} 12^2 = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\gamma) \quad \frac{\log_4 8 + \log_4 27}{\log_4 6} &= \frac{\log_4 2^3 + \log_4 3^3}{\log_4 6} \\ &= \frac{3 \log_4 2 + 3 \log_4 3}{\log_4 6} \\ &= \frac{3(\log_4 2 + \log_4 3)}{\log_4 6} \\ &= \frac{3 \log_4 (2 \cdot 3)}{\log_4 6} = \frac{3 \log_4 6}{\log_4 6} = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\delta) \quad 5^{\log_5 2021} \cdot \log_3 \sqrt[2021]{3} &= 2021 \cdot \log_3 3^{\frac{1}{2021}} \\ &= 2021 \cdot \frac{1}{2021} = 1\end{aligned}$$

$$\log_a A - \log_a B = \log_a \left(\frac{A}{B} \right)$$

$$\log_a a = 1$$

$$\nu \log_a A = \log_a A^\nu$$

$$\log_a A + \log_a B = \log_a (AB)$$

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_a A^\nu = \nu \log_a A$$

$$\log_a A + \log_a B = \log_a (AB)$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a a^x = x$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

$$\begin{array}{lll}
 (\alpha) \frac{\log 1000}{\log 100} & (\beta) \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} & (\gamma) \log\left(\frac{1}{100}\right) \cdot \log \sqrt{10} \\
 (\delta) \log 40 + \log 25 & (\epsilon) \frac{\log 16}{\log 15 - \log 30} & (\sigma\tau) \frac{\log_3 4 \cdot \log_3 9}{\log_3\left(\frac{1}{4}\right)} \\
 (\zeta) \frac{3 \log 2 - \log 24}{\log 3 + \log 27} & (\eta) \frac{\log 2 + \log 500}{\log_3 3 + \log_3 27} &
 \end{array}$$

2. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	$\log_2(x + y) = \log_2 x + \log_2 y, \quad x, y > 0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$(\log x)^2 = 2 \log x, \quad x > 0, \quad x \neq 1$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\log 2 + \log 5 = 1$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	$\frac{\log_3 x}{\log_3 y} = \log_3 x - \log_3 y, \quad x, y > 0, \quad y \neq 1$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

$$(\alpha) e^{2 \ln x} \qquad (\beta) 2^{1 + \log_2 6} \qquad (\gamma) 3^{2 \log_3 4 - \log_3 \sqrt{2}}$$

4. Να γράψετε ως ένα λογάριθμο τις πιο κάτω παραστάσεις:

$$(\alpha) 2 \log(x + 1) - \log x \qquad (\beta) \frac{1}{2} \ln(x + 3) - \frac{1}{2} \ln x \qquad (\gamma) \log_2 x - \log_2 y + 4$$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha) e^{2 \ln x} + 10^{\log 7} + \ln e = x^2 + 8, \quad x > 0$$

$$(\beta) \ln e^{2x+1} + 10^{2 \log x} + \log 1 > 0, \quad x > 0$$

6. Το σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση (ϵ): $y = 3x + 1$. Αν $a = \log \lambda$ και $\beta = \log \mu$, να αποδείξετε ότι $\mu = 10\lambda^3$, όπου $\mu, \lambda > 0$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$.

8. Να αποδείξετε ότι:

$$\log\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \log\left(1 - \frac{1}{v}\right) = -\log v, \quad v \geq 2$$

8.2.4 Αλλαγή βάσης λογάριθμων

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες για να λυθεί ένα πρόβλημα με λογάριθμους απαιτείται η αλλαγή βάσης του λογαρίθμου. Η διαδικασία αυτή μπορεί να γίνει με τον ακόλουθο τύπο, που είναι γνωστός ως τύπος αλλαγής βάσης των λογαρίθμων.

Αν $a, \beta > 0$, $a, \beta \neq 1$, τότε ισχύει:

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}, \quad \theta > 0$$

Απόδειξη

Έστω $\log_{\beta} \theta = x$. Τότε:

$$\theta = \beta^x \Rightarrow \log_a \theta = \log_a \beta^x \Rightarrow \log_a \theta = x \log_a \beta \Rightarrow \log_a \theta = \log_{\beta} \theta \cdot \log_a \beta \Rightarrow \log_{\beta} \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}$$

Παράδειγμα 1

Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha) \quad \log_4 8 = \frac{3}{2}$$

$$(\beta) \quad \log_a \beta^3 \cdot \log_{\beta} a^5 - \log_{\gamma} \gamma^{10} = 5, \quad a, \beta, \gamma > 0, \quad a, \beta, \gamma \neq 1$$

$$(\gamma) \quad 9^{\log_3 5} + e^{1-\ln 2} - 2^{\log_4 36} = 19 + \frac{e}{2}$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$(\alpha) \quad \log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$$

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}, \quad \log_a A^v = v \log_a A$$

$$(\beta) \quad \log_a \beta^3 \cdot \log_{\beta} a^5 - \log_{\gamma} \gamma^{10} = 3 \log_a \beta \cdot \frac{\log_a a^5}{\log_a \beta} - 10 \\ = 3 \cdot 5 - 10 = 5$$

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}$$

$$\log_a A^v = v \log_a A$$

$$(\gamma) \quad 9^{\log_3 5} + e^{1-\ln 2} - 2^{\log_4 36} = 3^{2 \log_3 5} + \frac{e}{e^{\ln 2}} - 2^{\frac{\log_2 36}{\log_2 4}}$$

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}$$

$$= 3^{\log_3 5^2} + \frac{e}{2} - 2^{\frac{1}{2} \log_2 36}$$

$$v \log_a A = \log_a A^v, \quad \log_a a = 1$$

$$= 3^{\log_3 5^2} + \frac{e}{2} - 2^{\log_2 36^{\frac{1}{2}}}$$

$$v \log_a A = \log_a A^v$$

$$= 3^{\log_3 5^2} + \frac{e}{2} - 2^{\log_2 \sqrt{36}}$$

$$= 5^2 + \frac{e}{2} - 6 = 19 + \frac{e}{2}$$

$$a^{\log_a x} = x$$

Παράδειγμα 2

Αν $a > 0, a \neq 1$ και $\beta > 0, \beta \neq 1$, να δείξετε ότι:

- (α) $\log_a \beta \cdot \log_\beta a = 1$
(β) $\log_a x^\rho = \log_a x, x > 0, \rho \neq 0$
(γ) $\log_a(a\beta) + \log_\beta(a\beta) = \log_a(a\beta) \cdot \log_\beta(a\beta)$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad \log_a \beta \cdot \log_\beta a &= \log_a \beta \cdot \frac{\log_a a}{\log_a \beta} = \log_a a = 1 \\ \text{(β)} \quad \log_a x^\rho &= \frac{\log_a x^\rho}{\log_a a^\rho} = \frac{\rho \log_a x}{\rho \log_a a} = \log_a x \\ \text{(γ)} \quad \log_a(a\beta) + \log_\beta(a\beta) &= \frac{\log_{a\beta}(a\beta)}{\frac{1}{\log_{(a\beta)} a}} + \frac{\log_{a\beta}(a\beta)}{\frac{1}{\log_{(a\beta)} \beta}} \\ &= \frac{1}{\log_{(a\beta)} a} + \frac{1}{\log_{(a\beta)} \beta} \\ &= \frac{\log_{(a\beta)} \beta + \log_{(a\beta)} a}{\log_{(a\beta)} a \cdot \log_{(a\beta)} \beta} \\ &= \frac{\log_{(a\beta)}(a\beta)}{\log_{(a\beta)} a \cdot \log_{(a\beta)} \beta} \\ &= \frac{1}{\log_{(a\beta)} a \cdot \log_{(a\beta)} \beta} \\ &= \frac{1}{\log_{(a\beta)} a} \cdot \frac{1}{\log_{(a\beta)} \beta} \\ &= \frac{\frac{1}{\log_a a}}{\log_a(a\beta)} \cdot \frac{1}{\log_\beta \beta} \\ &= \log_a(a\beta) \cdot \log_\beta(a\beta) \end{aligned}$$

$$\log_\beta \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}, \log_a a = 1$$

$$\log_\beta \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}, \log_a a = 1$$

$$\log_\beta \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a A + \log_a B = \log_a(AB)$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_\beta \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}$$

$$\log_a a = 1$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε, χωρίς υπολογιστική μηχανή, τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $(\log_5 4) \cdot (\log_4 5)$

(β) $\frac{\log_3 4}{\log_9 16}$

2. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x > 0$, ισχύει:

(α) $\log\left(\frac{1}{a}\right)x = -\log_a x, \quad 0 < a \neq 1$

(β) $\log_a b \cdot \log_b \gamma \cdot \log_\gamma a = 1, \quad a, \beta, \gamma > 0, \quad a, \beta, \gamma \neq 1$

3. Να υπολογίσετε την τιμή του x , ώστε να ισχύει η σχέση:

$$(\log_3 a)(\log_a 2a)(\log_{2a} x) = \log_a a^2, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

4. Αν $\log 2 = a$ και $\log 5 = \beta$, να βρείτε συναρτήσεις των a και β τους λογάριθμους:

(α) $\log 20$

(β) $\log_{25} 4$

(γ) $\log\left(\frac{4}{125}\right)$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\log_a N}{\log_{ak} N} = 1 + \log_a k, \quad N > 0, \quad k > 0, \quad a > 0, \quad ak \neq 1$$

6. Αν $\log_8 x = \frac{1}{2}a$ και $\log_2(2x) = a + 4$, να υπολογίσετε την τιμή του x .

7. Αν a, β, γ είναι οι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $a + \beta \neq 1$, $a - \beta \neq 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\log_{(a+\beta)} \gamma + \log_{(a-\beta)} \gamma = 2 \log_{(a+\beta)} \gamma \cdot \log_{(a-\beta)} \gamma$$

8.2.5 Λογαριθμικές εξισώσεις

Λογαριθμική εξίσωση λέγεται κάθε εξίσωση που περιέχει τουλάχιστον έναν όρο της μορφής $\log_a f(x)$, όπου f συνάρτηση του x .

Για παράδειγμα, οι πιο κάτω εξισώσεις λέγονται λογαριθμικές:

$$\log_3(2-x) = 4, \quad \log_4(3x+4) = \log_2 x, \quad \ln(1-\log x) = 1$$

Η λογαριθμική συνάρτηση γνωρίζουμε ότι είναι 1-1. Δηλαδή, ισχύει ότι:

$$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), a > 0, a \neq 1: \log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Γενικότερα, ισχύει η ισοδυναμία

$$\log_a f(x_1) = \log_a f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2),$$

όπου $f(x_1) > 0, f(x_2) > 0, a > 0, a \neq 1$.

Η πιο πάνω ισοδυναμία, μαζί με τον ορισμό της λογαριθμικής εξίσωσης και τις ιδιότητες των λογαρίθμων, μας βοηθούν στην επίλυση των λογαριθμικών εξισώσεων. Είναι απαραίτητο να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στους περιορισμούς που πρέπει να ικανοποιεί η μεταβλητή της εξίσωσης, ώστε οι παραστάσεις στο λογάριθμο να είναι θετικές.

Παράδειγμα 1

Να λύσετε τις πιο κάτω λογαριθμικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \log x + \log(x-1) &= \log 2 & (\beta) \quad \log(3x-1) - \log(x+2) &= 1 \\ (\gamma) \quad 2 \ln(x-2) &= \ln(x+1) + \ln(x-4) & (\delta) \quad \log_4(\log 10^{x+7} + 1) &= 2 \end{aligned}$$

Λύση

(α) Περιορισμοί: $\left. \begin{matrix} x > 0 \\ x-1 > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow x > 1$. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \log x + \log(x-1) &= \log 2 \Rightarrow \log[x(x-1)] = \log 2 & \log_a A + \log_a B &= \log_a(AB) \\ &\Rightarrow x(x-1) = 2 & \text{Η } f(x) = \log x &\text{ είναι } 1-1 \\ &\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\ &\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1 \end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει λύσεις τις $x = 2$ ή $x = -1$, από τις οποίες μόνο η $x = 2$ είναι δεκτή, αφού είναι η μοναδική που ικανοποιεί τον περιορισμό $x > 1$.

(β) Περιορισμοί: $\left. \begin{matrix} 3x-1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x > \frac{1}{3} \\ x > -2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x > \frac{1}{3}$. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \log(3x-1) - \log(x+2) &= 1 \Rightarrow \log\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) = \log 10 & \log_a A - \log_a B &= \log_a\left(\frac{A}{B}\right) \\ &\Rightarrow \frac{3x-1}{x+2} = 10 & \text{Η } f(x) = \log x &\text{ είναι } 1-1 \\ &\Rightarrow 3x-1 = 10x+20 \\ &\Rightarrow 7x = -21 \Rightarrow x = -3 \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή έχει λύση την $x = -3$, η οποία απορρίπτεται, αφού δεν ανήκει στο διάστημα $(\frac{1}{3}, +\infty)$. Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

$$(γ) \text{ Περιορισμοί: } \left. \begin{array}{l} x - 2 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ x - 4 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x > 4. \text{ Έχουμε ότι:}$$

$$\begin{aligned} 2 \ln(x - 2) &= \ln(x + 1) + \ln(x - 4) \Rightarrow \ln(x - 2)^2 = \ln(x + 1)(x - 4) \\ &\Rightarrow (x - 2)^2 = (x + 1)(x - 4) \\ &\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 - 3x - 4 \\ &\Rightarrow -4x + 4 = -3x - 4 \Rightarrow -x = -8 \Rightarrow x = 8 \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή έχει λύση την $x = 8$, η οποία είναι δεκτή, αφού ανήκει στο διάστημα $(4, +\infty)$.

$$(δ) \text{ Περιορισμοί: } \left. \begin{array}{l} \log 10^{x+7} + 1 > 0 \\ 10^{x+7} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 7 > -1 \\ \text{αληθής } \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow x > -8. \text{ Έχουμε ότι:}$$

$$\begin{aligned} \log_4(\log 10^{x+7} + 1) = 2 &\Rightarrow \log_4(\log 10^{x+7} + 1) = \log_4 4^2 \\ &\Rightarrow \log 10^{x+7} + \log 10 = 4^2 \\ &\Rightarrow \log(10^{x+7} \cdot 10) = 16 \Rightarrow \log 10^{x+8} = 16 \\ &\Rightarrow (x + 8) \log 10 = 16 \Rightarrow x = 16 - 8 = 8 \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή έχει λύση την $x = 8$, η οποία είναι δεκτή, αφού ανήκει στο διάστημα $(-8, +\infty)$.

Παράδειγμα 2

Να λύσετε την εξίσωση:

$$2x - \log(5^{2x} + 4x - 6) = \log 4^x$$

Λύση

Οι περιορισμοί, για να ορίζονται οι λογάριθμοι αυτής της εξίσωσης, είναι:

$$\left. \begin{array}{l} 5^{2x} + 4x - 6 > 0 \\ 4^x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 5^{2x} + 4x - 6 > 0$$

Η δεύτερη ανίσωση είναι αληθής $\forall x \in \mathbb{R}$, ενώ η πρώτη είναι δύσκολο να επιλυθεί. Επομένως, θα λύσουμε την εξίσωση και μετά θα ελέγξουμε αν η λύση ικανοποιεί την πρώτη ανίσωση. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 2x - \log(5^{2x} + 4x - 6) &= \log 4^x \Rightarrow \log 10^{2x} - \log(5^{2x} + 4x - 6) = \log 2^{2x} \\ &\Rightarrow \log 10^{2x} - \log 2^{2x} = \log(5^{2x} + 4x - 6) \\ &\Rightarrow \log \left(\frac{10^{2x}}{2^{2x}} \right) = \log(5^{2x} + 4x - 6) \\ &\Rightarrow \log 5^{2x} = \log(5^{2x} + 4x - 6) \\ &\Rightarrow 5^{2x} = 5^{2x} + 4x - 6 \\ &\Rightarrow 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Πρέπει να ελέγξουμε αν η τιμή αυτή ικανοποιεί τον περιορισμό. Έχουμε ότι:

$$5^{2 \cdot \frac{3}{2}} + 4 \cdot \frac{3}{2} - 6 = 5^3 + 6 - 6 = 5^3 = 125 > 0$$

Ο περιορισμός ικανοποιείται. Άρα, η λύση $x = \frac{3}{2}$ είναι δεκτή.

Παράδειγμα 3

Να λύσετε την εκθετική εξίσωση:

$$3^x = 4$$

Λύση

1^{ος} τρόπος

Από τον ορισμό του λογάριθμου, έχουμε ότι:

$$3^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_3 4$$

2^{ος} τρόπος

Το δεύτερο μέλος της εκθετικής εξίσωσης, δηλαδή ο αριθμός 4, δεν μπορεί να γραφεί ως δύναμη του 3 με εκθέτη ρητό. Έτσι, «εφαρμόζουμε λογάριθμο» και στα δύο μέλη. Προτιμούμε φυσικό ή δεκαδικό λογάριθμο.

Έχουμε ότι:

$$3^x = 4 \Rightarrow \ln 3^x = \ln 4 \Rightarrow x \ln 3 = \ln 4 \Rightarrow x = \frac{\ln 4}{\ln 3} = \log_3 4$$

Παράδειγμα 4

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\ln(4e^{3x} + 3e^x) = -x$$

Λύση

Περιορισμός: $4e^{3x} + 3e^x > 0$, το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\ln(4e^{3x} + 3e^x) = -x \Rightarrow \ln(4e^{3x} + 3e^x) = \ln e^{-x}$$

$$\Rightarrow 4e^{3x} + 3e^x = e^{-x}$$

$$\Rightarrow 4e^{4x} + 3e^{2x} = 1$$

$$\Rightarrow 4\omega^2 + 3\omega - 1 = 0$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 4(-1)}}{2 \cdot 4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{8} = \frac{-3 \pm 5}{8}$$

$$\omega_1 = -1 < 0 \text{ (απορρίπτεται)}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow 2x = -\ln 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \ln 2^2 \Leftrightarrow x = -\ln 2$$

Η λύση $x = -\ln 2$ είναι δεκτή, αφού ικανοποιεί τον περιορισμό $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\log_x 10 = \log_5(2x)$

(β) $\log_{\eta\mu x} 2 + \log_{\sigma\upsilon\nu x} 2 + \log_{\eta\mu x} 2 \cdot \log_{\sigma\upsilon\nu x} 2 = 0$, στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Λύση

(α) Περιορισμός: $x > 0$, $x \neq 1$. Έχουμε ότι:

$$\log_x 10 = \log_5(2x) \Leftrightarrow \frac{\log 10}{\log x} = \frac{\log 2x}{\log 5}$$

Αλλαγή βάσης σε δεκαδική

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log x} = \frac{\log 2 + \log x}{\log 5}$$

$$\log_a a = 1$$
$$\log_a A + \log_a B = \log_a(AB)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\omega} = \frac{\log 2 + \omega}{\log 5}$$

Θέτουμε $\log x = \omega$

$$\Leftrightarrow \omega(\log 2 + \omega) = \log 5$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 + \omega \log 2 - (1 - \log 2) = 0$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-\log 2 \pm (2 - \log 2)}{2} \Leftrightarrow \omega_1 = -1 \text{ ή } \omega_2 = 1 + \log 2$$

- $\log x = \omega \Rightarrow \log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1}$

- $\log x = \omega \Rightarrow \log x = 1 - \log 2 = \log 10 - \log 2 = \log 5 \Rightarrow x = 5$

Οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν τον περιορισμό $x > 0$, $x \neq 1$.

(β) Για να ορίζονται οι λογάριθμοι, πρέπει η βάση να είναι θετικός αριθμός, διαφορετικός της μονάδας. Έτσι, έχουμε τους πιο κάτω περιορισμούς:

$$\eta\mu x > 0, \quad \eta\mu x \neq 1, \quad \sigma\upsilon\nu x > 0, \quad \sigma\upsilon\nu x \neq 1$$

Έχουμε ότι:

$$\log_{\eta\mu x} 2 + \log_{\sigma\upsilon\nu x} 2 + \log_{\eta\mu x} 2 \cdot \log_{\sigma\upsilon\nu x} 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 2}{\log_2 \eta\mu x} + \frac{\log_2 2}{\log_2 \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\log_2 2}{\log_2 \eta\mu x} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 \sigma\upsilon\nu x} = 0$$

Αλλαγή βάσης

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_2 \eta\mu x} + \frac{1}{\log_2 \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1}{\log_2 \eta\mu x} \cdot \frac{1}{\log_2 \sigma\upsilon\nu x} = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\Rightarrow \log_2 \sigma\upsilon\nu x + \log_2 \eta\mu x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \log_2 (\sigma\upsilon\nu x \eta\mu x) = -1$$

$$\log_a A + \log_a B = \log_a(AB)$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x \eta\mu x = 2^{-1} \Rightarrow \frac{1}{2} \eta\mu 2x = \frac{1}{2}$$

$$\eta\mu 2x = 2 \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$$

$$\Rightarrow \eta\mu 2x = 1$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Η λύση $x = \frac{\pi}{4}$ είναι δεκτή, αφού ικανοποιεί τον περιορισμό.

Παράδειγμα 6

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια να ορίσετε την αντίστροφή της.

Λύση

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{e^{x_1} - 1}{e^{x_1} + 1} = \frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_2} + 1} \\ &\Rightarrow e^{x_1}e^{x_2} + e^{x_1} - e^{x_2} - 1 = e^{x_1}e^{x_2} - e^{x_1} + e^{x_2} - 1 \\ &\Rightarrow 2e^{x_1} = 2e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι 1-1.

Θέτουμε $y = f(x)$ και παίρνουμε:

$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow ye^x + y = e^x - 1 \Leftrightarrow (y - 1)e^x = -y - 1$$

Αν $y \neq 1$, τότε:

$$e^x = \frac{-y - 1}{y - 1} \Rightarrow e^x = \frac{y + 1}{1 - y} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{y + 1}{1 - y}\right)$$

Για να ισχύει η τελευταία σχέση, πρέπει:

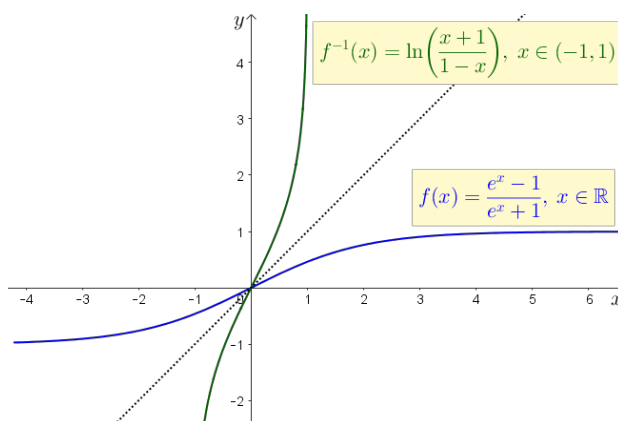
$$\frac{y + 1}{1 - y} > 0 \Rightarrow y \in (-1, 1)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι «επί».

Η συνάρτηση f είναι «1-1 και επί». Άρα, είναι αντιστρέψιμη. Δηλαδή, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x + 1}{1 - x}\right)$$

Οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων του πιο πάνω παραδείγματος φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα.



Παράδειγμα 7

Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{aligned}\log_4(xy) &= 2 \\ \log_2x \cdot \log_2y &= 3\end{aligned}$$

Λύση

Για $x > 0, y > 0$, έχουμε ότι:

$$\left. \begin{aligned}\log_4(xy) = 2 \\ \log_2x \cdot \log_2y = 3\end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned}xy = 4^2 \\ \log_2x \cdot \log_2y = 3\end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned}y = \frac{16}{x} \\ \log_2x \cdot \log_2y = 3\end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

Αντικαθιστούμε την εξίσωση (1) στην (2) και παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}\log_2x \cdot \log_2\left(\frac{16}{x}\right) = 3 &\Leftrightarrow \log_2x(\log_22^4 - \log_2x) = 3 \Leftrightarrow \log_2x(4 - \log_2x) = 3 \\ &\Leftrightarrow 4\log_2x - (\log_2x)^2 = 3 \Leftrightarrow (\log_2x)^2 - 4\log_2x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\log_2x - 1)(\log_2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \log_2x = 1 \text{ ή } \log_2x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = 2^1 \text{ ή } x = 2^3\end{aligned}$$

Άρα, έχουμε ότι:

$$\left. \begin{aligned}x = 2 \\ y = \frac{16}{2}\end{aligned} \right\} \text{ ή } \left. \begin{aligned}x = 8 \\ y = \frac{16}{8}\end{aligned} \right\} \Leftrightarrow (x, y) = (2, 8) \text{ ή } (x, y) = (8, 2)$$

8.2.6 Λογαριθμικές ανισώσεις

Λογαριθμική ανίσωση λέγεται κάθε ανίσωση που περιέχει τουλάχιστον έναν όρο της μορφής $\log_a f(x)$, όπου f συνάρτηση του x .

Για παράδειγμα, οι πιο κάτω ανισώσεις λέγονται λογαριθμικές:

$$\log_3(3+x) > 1, \quad \log_4(2x-1) < \log_2 x$$

Επειδή οι λογαριθμικές συναρτήσεις είναι 1-1, ισχύουν οι πιο κάτω ισοδυναμίες:

$$\log_a f(x_1) < \log_a f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad 0 < f(x_1) < f(x_2), \quad \text{όταν } a > 1$$

$$\log_a f(x_1) < \log_a f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad 0 < f(x_1) < f(x_2), \quad \text{όταν } 0 < a < 1$$

Παράδειγμα 1

Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

$$(\alpha) \quad \log x \geq \ln x \quad (\beta) \quad \log_{0,8}(x^2 - 4) \geq \log_{0,8} 21 \quad (\gamma) \quad \ln(1 - \log x) < 1$$

Λύση

(α) Περιορισμοί: $x > 0$

Έχουμε ότι:

$$\log x \geq \ln x \Rightarrow \frac{\ln x}{\ln 10} \geq \ln x$$

$$\Rightarrow \ln x \geq \ln 10 \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow (1 - \ln 10) \ln x \geq 0$$

$$\Rightarrow \ln x \leq 0$$

$$\Rightarrow x \leq e^0 \Rightarrow x \leq 1$$

Αλλαγή βάσης

Πολλαπλασιάζουμε με $\ln 10 > 0$

$$e < 10 \Leftrightarrow \ln e < \ln 10 \Leftrightarrow 1 - \ln 10 < 0$$

$$\text{Συναλήθευση ανισώσεων: } \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in (0, 1]$$

(β) Περιορισμοί: $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Έχουμε ότι:

$$\log_{0,8}(x^2 - 4) \geq \log_{0,8} 21 \Rightarrow x^2 - 4 \leq 21$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 25 \Rightarrow |x| \leq 5$$

$$\Rightarrow -5 \leq x \leq 5$$

Βάση λογαρίθμου $0 < 0,8 < 1$

$$\text{Συναλήθευση ανισώσεων: } \left. \begin{array}{l} x < -2 \text{ ή } x > 2 \\ -5 \leq x \leq 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in [-5, -2) \cup (2, 5]$$

(γ) Περιορισμοί: $\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ 1 - \log x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ \log x < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x < 10 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in (0, 10)$

Έχουμε ότι:

$$\ln(1 - \log x) < 1 \Rightarrow \ln(1 - \log x) < \ln e$$

$$\Rightarrow 1 - \log x < e$$

$$\Rightarrow \log x > 1 - e \Rightarrow x > 10^{1-e}$$

Βάση λογαρίθμου $e > 1$

$$\text{Συναλήθευση ανισώσεων: } \left. \begin{array}{l} 0 < x < 10 \\ x > 10^{1-e} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in (10^{1-e}, 10)$$

Δραστηριότητες

1. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\log(x + 1) = 2$

(β) $2 \log(x - 2) = \log(x + 1) + \log(x - 4)$

(γ) $\log_2(3x - 2) - \log_2 x = 1$

(δ) $\log[\log(2x^2 + x - 11)] = 0$

(ε) $\log_4 x + \log_2 x = 6$

(στ) $\log\sqrt{x} = \sqrt{\log x}$

2. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\log_5 x - 4 \log_x 5 = 3$

(β) $\log_3\left(\frac{3}{x}\right) + (\log_3 x)^2 = 1$

(γ) $9^{\log x} - 12 \cdot 3^{\log x} + 27 = 0$

(δ) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

(ε) $e^{5x-1} = 4$

(στ) $x^{\log x} = 10$

3. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα:

(α) $\begin{cases} xy = 8 \\ 2 \log x = \log y \end{cases}$

(β) $\begin{cases} x + \log y = 3 \\ 10^x = y - 90 \end{cases}$

4. Να βρείτε για ποιες τιμές του t η εξίσωση $x^2 - x \log t + 3 \log t - 8 = 0$ έχει διπλή λύση.

5. (α) Να αποδείξετε ότι $\log 2 = 1 - \log 5$.

(β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $y = (1 - \log 5)x$ και της καμπύλης $y = \log(2^x + x - 41)$.

6. Να αποδείξετε ότι $5^{\log x} = x^{\log 5}$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $5^{\log x} = 5 - 4x^{\log 5}$.

7. Αν ισχύει η σχέση

$$\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right)^2 - 4 \cdot \frac{\log y}{\log x} + 4 = 0,$$

να βρείτε τη σχέση που συνδέει τις μεταβλητές x, y .

8. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

(α) $\log(x^2 - 4) < \log 3$

(β) $x^{\ln 81} \geq 6 + x^{\ln 9}$

8.2.7 Εφαρμογές λογαριθμικής συνάρτησης

Υπολογισμός χρόνου στον ανατοκισμό

Όπως είδαμε σε προηγούμενη υποενότητα, ο ανατοκισμός δίνεται από τον τύπο

$$a_n = a_0(1 + \tau)^n$$

όπου a_0 το αρχικό κεφάλαιο, ε το επιτόκιο, $\tau = \frac{\varepsilon}{100}$ το επιτόκιο της περιόδου και n ο αριθμός των χρονικών περιόδων.

Παράδειγμα 1

Ο Μιχάλης επενδύει €1000 στον τραπεζικό του λογαριασμό, ο οποίος του αποδίδει επιτόκιο 1,15% με ετήσιο ανατοκισμό. Πόσο είναι το χρονικό διάστημα που απαιτείται, ώστε οι καταθέσεις στον λογαριασμό του να ανέλθουν στο ποσό των €1350;

Λύση

Παρατηρούμε ότι μετά από n χρόνια ανατοκισμού, το αρχικό κεφάλαιο $a_0 = 1000$ γίνεται:

$$a_n = 1000(1 + 0,0115)^n = 1000(1,0115)^n = 1350$$

Έτσι, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 1000(1,0115)^n = 1350 &\Rightarrow (1,0115)^n = \frac{1350}{1000} = 1,35 \Rightarrow \ln(1,0115)^n = \ln 1,35 \\ &\Rightarrow n \ln 1,0115 = \ln 1,35 \Rightarrow n = \frac{\ln 1,35}{\ln 1,0115} \approx 26,25 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το αρχικό κεφάλαιο των €1000 μαζί με τους τόκους θα ανέρχεται στο ποσό των €1350 μετά από παρέλευση περίπου 26,25 ετών, δηλαδή μετά από παρέλευση περίπου 26 χρόνων και 3 μηνών από την κατάθεση του αρχικού κεφαλαίου.

Μέγεθος Σεισμού

Σύμφωνα με την κλίμακα Richter, το μέγεθος M ενός σεισμού εντάσεως I , δίνεται από τον τύπο

$$M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

όπου I_0 μια ορισμένη ελάχιστη ένταση.



Παράδειγμα 2

- (α) Να βρείτε το μέγεθος M ενός σεισμού σε Richter που έχει ένταση $I = 1000I_0$.
(β) Να εκφράσετε το I ως συνάρτηση του M και του I_0 .
(γ) Πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η ένταση ενός σεισμού από την ένταση ενός άλλου σεισμού που είναι μικρότερος κατά 3 μονάδες Richter.

Λύση

- (α) Επειδή $I = 1000I_0$, από τον τύπο $M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, βρίσκουμε ότι:

$$M = \log\left(\frac{1000I_0}{I_0}\right) = \log 1000 = 3$$

- (β) Από τον ορισμό του δεκαδικού λογάριθμου, προκύπτει ότι:

$$M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 10^M \Rightarrow I = I_0 \cdot 10^M$$

- (γ) Έστω δύο σεισμοί με εντάσεις I, I' και μεγέθη M, M' αντίστοιχα. Αν $M' = M + 3$, τότε, λόγω του πιο πάνω τύπου, έχουμε:

$$\frac{I'}{I} = \frac{I_0 \cdot 10^{M'}}{I_0 \cdot 10^M} = \frac{10^{M+3}}{10^M} = 10^3 = 1000 \Rightarrow I' = 1000I$$

Επομένως, η ένταση I' ενός σεισμού είναι χίλιες φορές μεγαλύτερη της έντασης I ενός άλλου σεισμού μικρότερου κατά 3 μονάδες Richter. Επομένως, μπορούμε τώρα να καταλάβουμε τη διαφορά στην ένταση ενός σεισμού 4R (**ασθενής σεισμός**) και ενός σεισμού 7R (**καταστροφικός σεισμός**).

Η Ένταση του Ήχου

Το ανθρώπινο αυτί αντιλαμβάνεται ήχους μέσα από ένα απίστευτο εύρος εντάσεων. Η ένταση του ήχου δίνεται από τη σχέση

$$D = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

όπου D είναι η ένταση του ήχου σε ντεσιμπέλ (dB) και I είναι η ένταση του ήχου σε Watt/m^2 .



Παράδειγμα 3

Αν γνωρίζουμε ότι $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ είναι η ελάχιστη ένταση ήχου που αντιλαμβάνεται ένα υγιές άτομο, να υπολογίσετε:

- (α) πόσα ντεσιμπέλ είναι η ένταση ενός ψιθύρου με $I = 5,2 \cdot 10^{-10} \text{ W/m}^2$
(β) πόσα ντεσιμπέλ είναι η ένταση θορύβου πυκνής τροχαίας κίνησης, αν γνωρίζουμε ότι $I = 8,5 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$
(γ) πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η ένταση του θορύβου τροχαίας κίνησης από την ένταση ενός ψιθύρου.

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

$$D = 10 \log\left(\frac{5,2 \cdot 10^{-10}}{10^{-12}}\right) = 10 \log 520 = 27,16 \text{ dB}$$

(β) Έχουμε ότι:

$$D = 10 \log\left(\frac{8,5 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}}\right) = 10 \log(850\,000\,000) = 89,29 \text{ dB}$$

(γ) Για να υπολογίσουμε πόσες φορές είναι πιο ισχυρός ο θόρυβος της τροχαίας κίνησης από ένα ψίθυρο, διαιρούμε τη μεγαλύτερη ένταση προς τη μικρότερη. Έτσι, έχουμε

$$\frac{8,5 \cdot 10^{-4}}{5,2 \cdot 10^{-10}} \simeq 1\,634\,615,39,$$

δηλαδή είναι πάνω από 1 634 615 φορές μεγαλύτερη η ένταση του θορύβου της τροχαίας κίνησης από την ένταση ενός ψίθυρου.

Δραστηριότητες

1. Το κόστος παραγωγής x μονάδων την ημέρα ενός προϊόντος δίνονται σε χιλιάδες ευρώ από τον τύπο

$$K(x) = \log(2^x + 2 \cdot 3^x) - \log 178 + \log 81$$

ενώ οι εισπράξεις $E(x)$ από την πώληση των μονάδων του προϊόντος αυτού δίνονται σε χιλιάδες ευρώ από τον τύπο:

$$E(x) = x \log 3$$

Αν όλες οι μονάδες του προϊόντος που παράγονται είναι προπωλημένες, να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παραχθούν, ώστε το κόστος παραγωγής να ισούται με τις εισπράξεις.

2. Ο πληθυσμός των ακρίδων $P(t)$ στις καλλιέργειες μιας αγροτικής περιοχής t ημέρες μετά τον ψεκασμό δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = \kappa - \ln(t + \lambda), \quad \kappa, \lambda > 0$$

με τον πληθυσμό να μετριέται σε χιλιάδες ακρίδες.

Ο πληθυσμός των ακρίδων στην περιοχή κατά τη στιγμή του ψεκασμού ήταν 2 χιλιάδες, ενώ δύο ημέρες αργότερα ήταν $(2 - \ln 3)$ χιλιάδες.

- (α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ .
- (β) Να υπολογίσετε τον πληθυσμό των ακρίδων στην περιοχή $(e - 1)$ ημέρες (περίπου μία ημέρα και 18 ώρες) μετά τον ψεκασμό.
- (γ) Να βρείτε πόσες ημέρες μετά τον ψεκασμό θα εξαλειφθούν οι ακρίδες της περιοχής.
3. Οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με τη (φαινόμενη) λαμπρότητά τους σε κατηγορίες που καλούνται μεγέθη. Οι ασθενέστεροι αστέρες με λαμπρότητα L_0 λέμε ότι έχουν μέγεθος 6. Κάθε άλλος αστέρας με λαμπρότητας L έχει μέγεθος m που καθορίζεται από τον τύπο:

$$m = 6 - 2,5 \log \frac{L}{L_0}$$

- (α) Να βρείτε το μέγεθος m του αστέρα που έχει λαμπρότητα $L = \sqrt[5]{100} \cdot L_0$.
- (β) Να βρείτε πόσες φορές λαμπρότερος είναι ένας αστέρας $1^{\text{ου}}$ μεγέθους από ένα αστέρα $6^{\text{ου}}$ μεγέθους.

Περίληψη

1. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ ονομάζεται **εκθετική συνάρτηση με βάση a** .

2. Για κάθε συνάρτηση f της μορφής $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 1$, αποδεικνύεται ότι:

- Έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$. Έτσι, γράφουμε συμβολικά:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

- Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $a^{x_1} < a^{x_2}$. Δηλαδή:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

- Το σημείο τομής με τον άξονα των τεταγμένων είναι το σημείο $(0, 1)$.

3. Για κάθε συνάρτηση της μορφής $g(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, αποδεικνύεται ότι:

- Έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$. Έτσι, γράφουμε συμβολικά:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

- Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $a^{x_1} > a^{x_2}$. Δηλαδή:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- Ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty.$$

- Το σημείο τομής με τον άξονα των τεταγμένων είναι το σημείο $(0, 1)$.

4. Για τις συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$, με $a > 1$, παρατηρούμε ότι:

$$g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} = f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$, αφού τα σημεία (x, y) και $(-x, y)$ είναι συμμετρικά ως προς τον $y'y$ άξονα.

5. Η εκθετική συνάρτηση είναι 1 – 1 συνάρτηση.

- Για τη συνάρτηση f της μορφής $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, με $a > 1$, ισχύει ότι:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

- Για τη συνάρτηση g της μορφής $g(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, με $0 < a < 1$, ισχύει ότι:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

Άρα, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Επομένως, η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ είναι 1 – 1.

6. Εκθετική εξίσωση λέγεται κάθε εξίσωση που περιέχει τουλάχιστον έναν όρο της μορφής $a^{f(x)}$, όπου $a > 0$, $a \neq 1$ και f συνάρτηση του x .

7. Η επίλυση εκθετικών εξισώσεων βασίζεται στις πιο κάτω ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1: a^{x_1} = a^{x_2} &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \\ a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1 &\Leftrightarrow f(x) = g(x), \quad \forall x \in D_f \cap D_g \end{aligned}$$

8. Εκθετική ανίσωση λέγεται κάθε ανίσωση που περιέχει τουλάχιστον έναν όρο της μορφής $a^{f(x)}$, όπου $a > 0$, $a \neq 1$ και f συνάρτηση του x .

9. Για την επίλυση εκθετικών ανισώσεων χρησιμοποιούμε τις ισοδυναμίες:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x), \text{ όταν } a > 1$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x), \text{ όταν } 0 < a < 1$$

10. Αν $\theta > 0$ και $a > 0$, $a \neq 1$ ονομάζουμε **λογάριθμο του θ με βάση a** , συμβολικά $\log_a \theta$, τον εκθέτη στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον a για να πάρουμε τον αριθμό θ .

Συμβολικά, έχουμε:

$$\log_a \theta = x \Leftrightarrow a^x = \theta$$

11. Ιδιότητες

(α) $\log_a 1 = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

(β) $\log_a a = 1$, $a > 0$, $a \neq 1$

12. Οι λογάριθμοι που έχουν βάση τον αριθμό 10 λέγονται **δεκαδικοί ή κοινοί λογάριθμοι**. Ο δεκαδικός λογάριθμος του αριθμού θ συμβολίζεται απλά $\log \theta$ αντί $\log_{10} \theta$. Έτσι, έχουμε:

$$\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta, \theta > 0$$

13. Οι λογάριθμοι που έχουν βάση τον αριθμό e λέγονται **φυσικοί ή Νεπέριοι λογάριθμοι**. Ο λογάριθμος του θ με βάση το e συμβολίζεται με $\ln \theta$ και ισχύει:

$$\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta, \theta > 0$$

14. Αν σε κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x αντιστοιχίσουμε τον λογάριθμό του $\log_a x$, ορίζουμε τη λογαριθμική συνάρτηση με βάση a ,

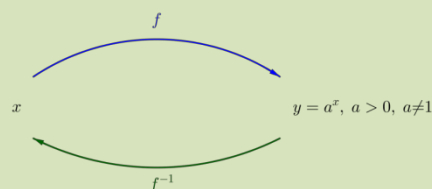
$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1,$$

την οποία ορίσαμε αρχικά ως αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης.

Ισχύει η βασική ισοδυναμία:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y, \text{ με } x \in (0, +\infty), y \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$$

15. Η εκθετική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$ είναι 1-1 και επί. Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη. Δηλαδή, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Η αντίστροφη αυτή συνάρτηση ονομάζεται **λογαριθμική** συνάρτηση με βάση a και συμβολίζεται με $f^{-1}(x) = \log_a x$. Ο αριθμός a είναι θετικός ακέραιος διαφορετικός της μονάδας ($a > 0$, $a \neq 1$).



Από τον ορισμό της λογαριθμικής συνάρτησης, είναι προφανής η σχέση που συνδέει τις δύο αυτές αντίστροφες συναρτήσεις:

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x, \text{ όταν } x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1 \text{ και } y \in (0, +\infty)$$

16. Η σύνθεση δύο αντιστρόφων συναρτήσεων μας δίνει την ταυτοτική συνάρτηση. Δηλαδή:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ και } (f \circ f^{-1})(x) = x$$

17. Ιδιότητες

(α) $\log_a a^x = x, \forall x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$

(β) $a^{\log_a x} = x, x > 0, a > 0, a \neq 1$

18. Η λογαριθμική συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \log_a x, a > 1$ έχει:

- πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- σύνολο τιμών το \mathbb{R}
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$, από όπου:

$$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0$$

$$x = 1 \Rightarrow \log_a x = 0$$

$$x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$$
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν τέμνει τον άξονα των τεταγμένων, ενώ τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο $(1, 0)$, ανεξάρτητα της τιμής του a , αφού $\log_a 1 = 0$, για κάθε $a > 1$.
- Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$.

19. Η λογαριθμική συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \log_a x, 0 < a < 1$ έχει:

- πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- σύνολο τιμών το \mathbb{R}
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$, από όπου:

$$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0$$

$$x = 1 \Rightarrow \log_a x = 0$$

$$x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$$
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν τέμνει τον άξονα των τεταγμένων, ενώ τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο $(1, 0)$, ανεξάρτητα της τιμής του a , αφού $\log_a 1 = 0$, για κάθε $0 < a < 1$.
- Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$.

20. Η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x, x > 0, a > 0, a \neq 1$ είναι 1-1 συνάρτηση.

Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), a > 0, a \neq 1 : \log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

21. **Ιδιότητες λογάριθμων**

Αν $A > 0, B > 0, a > 0$ και $a \neq 1$, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(α) $\log_a (AB) = \log_a A + \log_a B$

(β) $\log_a \left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$

(γ) $\log_a A^v = v \log_a A, v \in \mathbb{R}$

22. **Αλλαγή βάσης λογαρίθμων**

Αν $a, \beta > 0, a, \beta \neq 1$, τότε ισχύει:

$$\log_\beta \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a \beta}, \forall \theta > 0$$

23. **Λογαριθμική εξίσωση** λέγεται κάθε εξίσωση που περιέχει τουλάχιστον έναν όρο της μορφής $\log_a f(x)$, όπου f συνάρτηση του x .

Ισχύει η ισοδυναμία

$$\log_a f(x_1) = \log_a f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2),$$

όπου $f(x_1) > 0, f(x_2) > 0, a > 0, a \neq 1$.

24. **Λογαριθμική ανίσωση** λέγεται κάθε ανίσωση που περιέχει τουλάχιστον έναν όρο της μορφής $\log_a f(x)$, όπου f συνάρτηση του x . Για την επίλυση λογαριθμικών ανισώσεων, χρησιμοποιούμε τις ισοδυναμίες:

$$\log_a f(x_1) < \log_a f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad 0 < f(x_1) < f(x_2), \quad \text{όταν } a > 1$$

$$\log_a f(x_1) < \log_a f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad 0 < f(x_1) < f(x_2), \quad \text{όταν } 0 < a < 1$$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

$$(\alpha) \quad 100 \cdot 10^x = \sqrt{x} \sqrt{1000^5}$$

$$(\beta) \quad \frac{1}{125^x} = 25^{2x-7}$$

$$(\gamma) \quad 4^{x-1} = 7$$

$$(\delta) \quad e^{-3 \ln 2x} = \frac{1}{27}$$

$$(\epsilon) \quad 2^{x-2} - 3^{x-3} = 2^{x-3} - 3^{x-4}$$

$$(\sigma\tau) \quad 49^x - 6 \cdot 4^x + 5 \cdot 14^x = 0$$

$$(\zeta) \quad 3 \cdot 21^x - 9 \cdot 7^x + 3 = 3^x$$

$$(\eta) \quad 2^x + 16 \cdot 2^{-x} - 10 = 0$$

$$(\theta) \quad e^{3x} + 2e^x - 3e^{-x} = 0$$

$$(\iota) \quad \log(x-6) + \log(x-7) = 1 - \log 5$$

$$(\iota\alpha) \quad \log_2 x = \log_4 \left(\frac{2-x}{3} \right)$$

$$(\iota\beta) \quad \log x + \log_x 1000 = 4$$

$$(\iota\gamma) \quad \ln^2 x - \ln x^2 - 8 = 0$$

$$(\iota\delta) \quad 64^{\ln x} - 9 \cdot 8^{\ln x} + 8 = 0$$

$$(\iota\epsilon) \quad \log_2(9^x + 7) = 3 + \log_2 3^x$$

$$(\iota\sigma\tau) \quad (\eta\mu x)^{\epsilon\varphi x} = (\sigma\upsilon\nu x)^{\epsilon\varphi x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\iota\zeta) \quad 2^{\eta\mu^2 x} + 2^{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 3$$

$$(\iota\eta) \quad 2^{\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu x} = 4^{1-2\eta\mu^2 \frac{x}{2}}$$

2. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

$$(\alpha) \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{2 \log x - 7} \leq \frac{125}{27}$$

$$(\beta) \quad 27^x + 12^x - 2 \cdot 18^x > 0$$

$$(\gamma) \quad x + \log(1 + 2^x) \leq x \log 5 + \log 6$$

$$(\delta) \quad \ln(x+20) (\ln x + 2) \geq 0$$

3. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα:

$$(\alpha) \quad \begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{cases}$$

$$(\beta) \quad \begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ \log \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$$

4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) \quad f(x) = \ln \left(\frac{3x-1}{x+2} \right)$$

$$(\beta) \quad f(x) = \log_{(4-x^2)}(2^x - 1)$$

5. Αν $\log_8 x = \log_4 y$, να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{x} = \sqrt{y}$, $x, y > 0$.

6. Αν $\log(a - \beta y) - \log a = x$, να αποδείξετε ότι $y = \frac{a}{\beta}(1 - 10^x)$.

7. (α) Να αποδείξετε ότι: $\ln \left(\ln \sqrt{\sqrt{e}} \right) = -\ln 8$

(β) Να αποδείξετε ότι: $\ln \left(\underbrace{\ln \sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{e}}}}_{\nu \text{ ριζικά}} \right) = -\nu \ln 2, \quad \nu \geq 3$

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι είναι περιττή.
9. Αν η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ με $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος, να δείξετε ότι η ακολουθία $(\ln a_n), n \in \mathbb{N}$ είναι αριθμητική πρόοδος.
10. Σε αριθμητική πρόοδο $(a_n), n \in \mathbb{N}$ δίνεται ότι $a_1 = \log 2$ και $a_2 = \log 8$. Να δείξετε ότι το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο $S_n = n^2 \log 2$.
11. Να αποδείξετε ότι $\ln \varepsilon\varphi 3^0 + \ln \varepsilon\varphi 6^0 + \ln \varepsilon\varphi 9^0 + \dots + \ln \varepsilon\varphi 87^0 = 0$.
12. Δίνεται η εξίσωση $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$.
Αν x_1, x_2 οι λύσεις της εξίσωσης, με $x_1 > x_2$:
- (α) Να σχηματίσετε γεωμετρική πρόοδο (a_n) , με $a_1 = (x_2)^6, a_5 = x_1$ και λόγο $\lambda > 0$.
- (β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των απείρων όρων της πιο πάνω γεωμετρικής προόδου.
13. (α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2 + \log_a x$ διέρχεται από το σημείο $A(2, 3)$, να βρείτε το a και να την παραστήσετε γραφικά.
- (β) Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να κατασκευάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} .
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x$. Να αποδείξετε ότι:
- (α) Η συνάρτηση f είναι περιττή.
- (β) Ο αριθμός $4\sqrt{6}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f .
15. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:
- $$f(x) = \frac{2^{x+1} + 2^{x+2} - 24}{4^x - 6 \cdot 2^x + 8}$$
- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- (β) Να αποδείξετε ότι:
- $$f(x) = \frac{6}{2^x - 2}$$
16. (α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$.
- (β) Να βρείτε σημείο A της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τεταγμένη $x = 1$ και σημείο B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τεταγμένη $y = 1$.
- (γ) Να βρείτε σημείο Γ της ευθείας $(\delta): y = x$, ώστε το $AOB\Gamma$ να είναι ρόμβος.

17. Ο πληθυσμός της γης το 2009 υπολογίστηκε σε 6,78 δις εκατομμύρια ανθρώπους, με ποσοστό αύξησης 1,14% κάθε χρόνο. Αν θεωρήσουμε ότι θα συνεχίσει να αυξάνεται με τον ίδιο ρυθμό ο πληθυσμός, ο οποίος ορίζεται από τον τύπο $P(t) = 6,78 (1,0114)^{t-2009}$, όπου $P(t)$ είναι ο πληθυσμός την t χρονιά, να βρείτε ποια χρονιά ο πληθυσμός της γης θα φτάσει τα 8,7 δις εκατομμύρια ανθρώπους.
18. Αν αφήσουμε το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου γεμάτο με βενζίνη ανοικτό, η βενζίνη εξατμίζεται με ρυθμό 20% ανά εβδομάδα. Η ποσότητα Q σε λίτρα της βενζίνης που παραμένει στο δοχείο μετά από t εβδομάδες δίνεται από τον τύπο
- $$Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct},$$
- όπου Q_0 η αρχική ποσότητα της βενζίνης και c μία σταθερά.
- (α) Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες.
- (β) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.
- (γ) Να δείξετε ότι μετά από 40 εβδομάδες μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Αν $\log_a b = \log_{\beta\gamma} a$, να αποδείξετε ότι $a = \beta$ ή $a = \frac{1}{\beta}$.
2. Αν $\log_{12} 27 = a$, να βρείτε συναρτήσει του a τον αριθμό $\log_6 16$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}\left(\log a + 2\kappa\pi \cdot \frac{\log x}{\log a}\right)$, $a \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, $a > 0$.
Να δείξετε ότι $f(ax) = f(x)$.
4. (α) Να δείξετε ότι $\log 2 = 1 - \log 5$.
(β) Να εκφράσετε τον $\log\left(\frac{125}{128}\right)$ και $\log\left(\frac{625}{512}\right)$ συναρτήσει του $\log 2$.
(γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{10} < \log 2 < \frac{4}{13}$.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a(\log x)^4 + 8(\log x)^2 \log(100x)$, με $a \in \mathbb{R}$ και $x > 0$.
(α) Αν $f(10) = 25$, να δείξετε ότι $a = 1$.
(β) Αν $a = 1$, να δείξετε ότι $f(x) = ((\log x)^2 + 4 \log x)^2$.
(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα των τετμημένων.
6. Να λύσετε στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση $\frac{1}{\log(1+\text{συν}2x)} = \log_{\eta\mu 2x} 10$.
7. Σε αρχαιολογική ανασκαφή βρέθηκαν ίχνη καμένου δέντρου μαζί με οστά. Τα ίχνη ξύλου περιείχαν κατά προσέγγιση 1,67% της αρχικής ποσότητας άνθρακα 14 (C^{14}). Αν ο χρόνος ημιζωής του C^{14} είναι 5730 χρόνια, να υπολογίσετε πότε το δέντρο κόπηκε και κάηκε, δεδομένου ότι η ζωή t του άνθρακα 14 ακολουθεί τον νόμο της εκθετικής μεταβολής με τύπο $Q(t) = Q_0 \cdot e^{kt}$, όπου Q_0 είναι η αρχική του ποσότητα.
8. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα:
(α) $xy = a^2$
 $\log^2 x + \log^2 y = \frac{5}{2} \log^2 a$
(β) $x + y = 2 + \sqrt{2}$
 $\log_y x + \log_x y = \frac{5}{2}$
9. Στον οργανισμό ενός πειραματόζωου εισάγονται 1000 μικρόβια και παρατηρείται ότι διπλασιάζονται σε μια μέρα.
(α) Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει τον αριθμό μικροβίων μετά από t ώρες.
(β) Να βρείτε τον αριθμό μικροβίων μετά από μία εβδομάδα.
(γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και από αυτή να βρείτε πότε θα υπάρχουν στον οργανισμό 1000000 μικρόβια.

10. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε αριθμούς $a, \beta > 0$, με $a \neq \beta$, ισχύει:

$$a^a \beta^\beta > a^\beta \beta^a$$

11. Να αποδείξετε ότι $\log_2 3 > \log_6 9$.

12. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^{2x^2-5x+3}, \quad x \in [2, 3]$$

Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[e, e^2]$.

13. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

(α) $(x + 1)^{\log(x+1)} \geq 100(x + 1)$

(β) $10x^{\log x} \leq x^2 \sqrt{x}$

(γ) $\frac{1}{\log_{0,5}(x-4)} \leq \frac{1}{\log_{0,5}(x-2)}$

14. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \frac{2^x}{1 + 2^x}$$

Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

15. Έστω η συνάρτηση $f_a(x) = a^{x^2+1}$, $a > 1$.

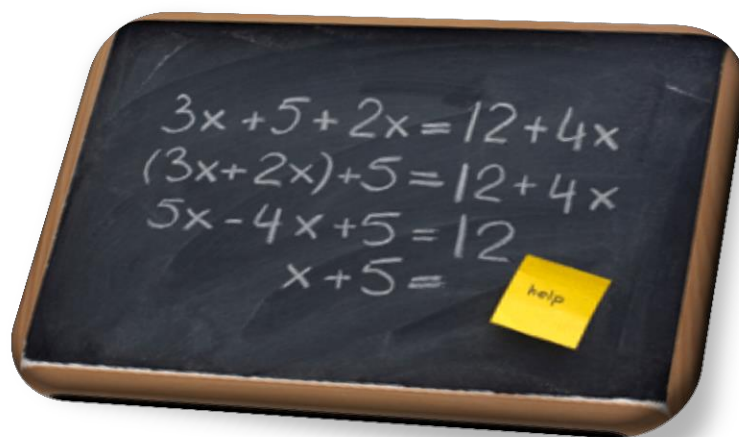
(α) Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f_a και $g = f_a + f_\beta$, με $a, \beta > 1$.

(β) Να επιλύσετε την εξίσωση:

$$f_2(x) + f_5(x) = 7$$

16. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\log_2 3$ είναι άρρητος αριθμός.

Απαντήσεις Δραστηριοτήτων



Ενότητα 05: Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

Σελίδα 16 Έννοια ορίου – Ορισμός ορίου

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) $\delta \leq \varepsilon$ (β) $\delta \leq \varepsilon$ (γ) $\delta \leq \varepsilon$

Σελίδα 22 Πλευρικά όρια της συνάρτησης f

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΛΑΘΟΣ
2. (α) 5 (ε) Δεν υπάρχει
(β) 2 (στ) 2
(γ) 3 (ζ) 2
(δ) Δεν υπάρχει (η) 1
3. (α) Δεν υπάρχει (β) 3
4. $\kappa = \pm 1$

Σελίδα 27 Ιδιότητες ορίων

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) -1 (γ) 2
(β) 3 (δ) 8
2. (α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ
3. (α) 1 (γ) 2
(β) 41 (δ) 2
4. (α) 4 (γ) 3
(β) -2 (δ) 0
5. (α) 2 (β) Δεν υπάρχει
6. (α) 4 (δ) $\frac{1}{2}$
(β) $\frac{9}{2}$ (ε) $\frac{1}{2}$
(γ) Δεν υπάρχει (στ) Δεν υπάρχει
7. $a = -8, \beta = -12$

Σελίδα 36 Μη πεπερασμένο όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Δραστηριότητα Απαντήσεις

1. (α) $-\infty$ (γ) $-\infty$
(β) $+\infty$ (δ) $+\infty$
2. $-\infty$
3. (α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΛΑΘΟΣ
4. (α) $-\infty$ (β) $+\infty$ (γ) Δεν υπάρχει
5. (α) $+\infty$ (β) Δεν υπάρχει
6. (α) $-\infty$ (γ) $+\infty$
(β) Δεν υπάρχει (δ) $+\infty$

Σελίδα 45 Όριο συνάρτησης στο άπειρο

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $+\infty$ (δ) 0 (β) $-\infty$ (ε) 0 (γ) $+\infty$ (στ) 0
2.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΣΩΣΤΟ
3.	(α) 3 (β) 1
4.	(α) $+\infty$ (δ) 0 (β) $-\infty$ (ε) $-\frac{1}{5}$ (γ) 0 (στ) $+\infty$
5.	$a = -4$
6.	(α) $+\infty$ (γ) 3 (β) 0 (δ) 1
7.	$a = 3, \beta = 1$
8.	0

Σελίδα 52 Όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $-\pi^4$ (β) 0 (γ) 1
2.	(α) 3 (δ) $\frac{1}{16}$ (β) $\frac{1}{2}$ (ε) 1 (γ) 2 (στ) 1
3.	(α) 0 (γ) 0 (β) 0 (δ) 0

Σελίδα 61 Συνέχεια συνάρτησης

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) Συνεχής στο \mathbb{R} (γ) Συνεχής στο \mathbb{R} (β) Συνεχής στο $\mathbb{R} - \{-1\}$
2.	Συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, -1), [-1, 0), [0, 3), (3, +\infty)$
3.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΛΑΘΟΣ
4.	(α) Συνεχής στο πεδίο ορισμού της (β) Συνεχής στο πεδίο ορισμού της (γ) Συνεχής στο πεδίο ορισμού της
5.	(α) Ασυνεχής στο 0 (β) Συνεχής στο \mathbb{R}
6.	$a = -3, \beta = 5$

Σελίδα 68 Βασικά θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
2.	(β) 1,4
3.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΣΩΣΤΟ
4.	Υπάρχει
8.	Μέγιστη τιμή: $f(1) = f(5) = 5$, Ελάχιστη τιμή: $f(3) = 1$
9.	(α) $R_{f_1} = [2, 11]$ (β) $R_{f_2} = \left[\frac{3}{4}, 21\right]$ (γ) $R_{f_3} = [0, 1]$

Σελίδα 74 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΣΩΣΤΟ (ε) ΣΩΣΤΟ (στ) ΛΑΘΟΣ (ζ) ΛΑΘΟΣ (η) ΣΩΣΤΟ (θ) ΛΑΘΟΣ (ι) ΣΩΣΤΟ
2.	(α) -3 (β) -3 (γ) $+\infty$ (δ) $-\infty$ (ε) Δεν υπάρχει (στ) 1 (ζ) 1 (η) $+\infty$ (θ) $+2$ (ι) Δεν υπάρχει
3.	(α) 4 (β) 4 (γ) 4
4.	(α) 3 (β) 3 (γ) -54 (δ) 0
5.	(α) $+\infty$ (β) 16 (γ) 3 (δ) $\frac{5}{3}$ (ε) $-\frac{1}{6}$ (στ) $-\frac{1}{4}$ (ζ) 0 (η) 3 (θ) 0 (ι) 108 (ια) -1 (ιβ) 8 (ιγ) 1 (ιδ) 0
6.	(α) 0 (β) Δεν υπάρχει
7.	$a = -1$
8.	$a = 1, \beta = 2, \gamma = -10$
9.	(α) Συνεχής στο πεδίο ορισμού της (β) Συνεχής στο πεδίο ορισμού της (γ) Συνεχής στο πεδίο ορισμού της (δ) Συνεχής στο πεδίο ορισμού της (ε) Συνεχής στο πεδίο ορισμού της (στ) Ασυνεχής στο π
12.	3,3
13.	Υπάρχει
14.	(α) $R_f = [-7, 9]$ (β) $R_f = [1, 2]$

Σελίδα 77 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	0
2.	$2a + \frac{3}{2}\beta$
5.	Δεν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε να υπάρχει το όριο

Ενότητα 06: Ακολουθίες

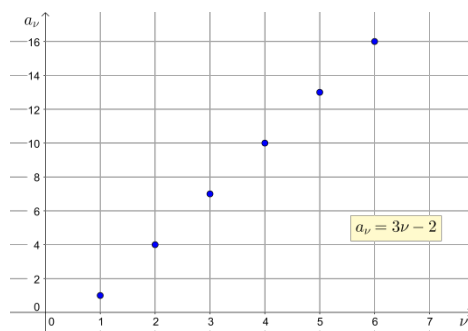
Σελίδα 86 Η έννοια της ακολουθίας

Δραστηριότητα **Απαντήσεις**

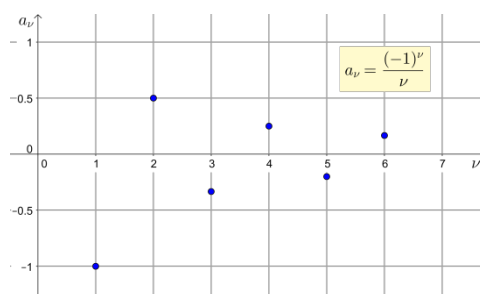
1.

- (α) 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...
- (β) -2, 1, 6, 13, 22, 33, ...
- (γ) 3, 9, 27, 81, 243, 729, ...
- (δ) -4, 16, -64, 256, -1024, 4096, ...
- (ε) 0, 2, 0, 2, 0, 2, ...
- (στ) 1, 0, -1, 0, 1, 0, ...
- (ζ) 2, 0, -2, -4, -6, -8, ...
- (η) -3, -12, -48, -192, -768, -3072, ...
- (θ) -1, -1, -1, -1, -1, -1, ...

(α)

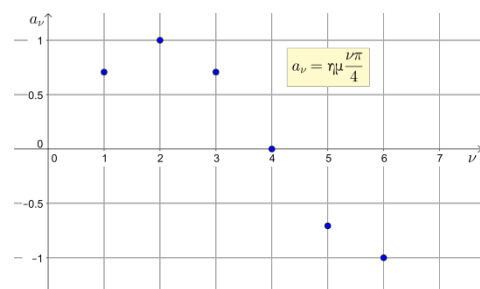


(β)



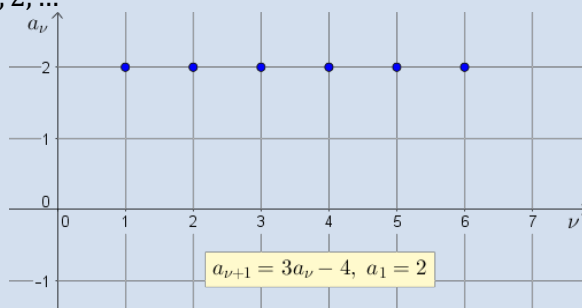
2.

(γ)



3.

2, 2, 2, 2, 2, ...



4. $v = 7$

5. (α) $a_v = (-1)^v \cdot v, v \in \mathbb{N}$ (β) $a_v = \frac{v+2}{v+3}, v \in \mathbb{N}$

6. (α) 1, 4, 9, 16, ... (γ) $a_v = v^2, v \in \mathbb{N}$

Σελίδα 90 Μονότονες ακολουθίες

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ	(γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΣΩΣΤΟ	(ε) ΣΩΣΤΟ
3.	(α) Γνησίως αύξουσα (β) Γνησίως αύξουσα (γ) Δεν είναι μονότονη	(δ) Γνησίως φθίνουσα (ε) Γνησίως αύξουσα	
4.	Γνησίως αύξουσα		

Σελίδα 94 Όριο ακολουθίας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ	(γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΣΩΣΤΟ	
2.	(α) $+\infty$ (β) $\frac{3}{2}$	(γ) $+\infty$ (δ) $+\infty$	(ε) $+\infty$

Σελίδα 101 Ειδικές ακολουθίες – Αριθμητική πρόοδος

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΣΩΣΤΟ	(γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΛΑΘΟΣ	(ε) ΣΩΣΤΟ
2.	(α) $a_{10} = 25$	(β) $\Sigma_{100} = 14650$	
4.	$a_{27} = 85$		
5.	8, 3, -2, -7, -12, ...		
6.	4233		
7.	(α) 50 σειρές	(β) 2500 στρατιώτες	

Σελίδα 110 Ειδικές ακολουθίες – Γεωμετρική πρόοδος

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΛΑΘΟΣ	(γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΣΩΣΤΟ	(ε) ΣΩΣΤΟ
2.	(α) $a_5 = -81$	(β) $\Sigma_{10} = -29524$	
4.	$81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$ ή $-81, 27, -9, 3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$		
5.	15, 30, 60, 120, 240, 480		
6.	$\Sigma_7 = 127$ ή $\Sigma_7 = -129$		
7.	381		

8.	$\frac{40}{3}, \frac{20}{3}, \frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{6}, \dots$
9.	(α) 6 (β) $-\frac{13}{60}$
10.	€24610,45
11.	$a_{64} = 2^{63}$
12.	$\Sigma_{\infty} = 2$

Σελίδα 114 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΣΩΣΤΟ (ε) ΛΑΘΟΣ (θ) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ (στ) ΣΩΣΤΟ (ι) ΣΩΣΤΟ (γ) ΣΩΣΤΟ (ζ) ΣΩΣΤΟ (ια) ΛΑΘΟΣ (δ) ΣΩΣΤΟ (η) ΣΩΣΤΟ (ιβ) ΣΩΣΤΟ
2.	$-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{11}$
3.	3, 6, 30, 870, 756030
5.	(α) Γνησίως αύξουσα (γ) Δεν είναι μονότονη (β) Γνησίως φθίνουσα
6.	(α) ΟΧΙ (β) ΝΑΙ
7.	$a_1 = 5$
8.	$a_{1000} = 7989$
9.	$x = 1$
10.	9, 14, 19, 24, 29, 34
11.	4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, ...
12.	$v = 8$
13.	47 σειρές και 5076 καθίσματα
14.	$x = -1$
15.	(α) $a_{11} = \frac{5}{256}$ (β) $\Sigma_{\infty} = 40$
16.	171
19.	$\frac{13}{4}$
20.	$\lambda = \frac{1}{2}$
21.	(α) 0,524288 m (β) 18 m
22.	(α) Αριθμητική πρόοδος (γ) 1225 (β) $x = \pm 7$
23.	$x = 1$
25.	Α.Π. : 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... , Γ.Π. : $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \dots$
28.	(α) 15 σειρές (γ) Από τη δεύτερη (β) 22 καθίσματα (δ) 2 θεατές

Σελίδα 118 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
3.	(α) $a_{v+1} = \sqrt{2a_v}, a_1 = \sqrt{2}$

Ενότητα 07: Γεωμετρικοί τόποι

Σελίδα 129 Εύρεση γεωμετρικού τόπου

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	Κύκλος $(O, \frac{\rho}{2})$
2.	Διάμετρος του κύκλου (O, ρ) , η οποία είναι κάθετη στην AB .
3.	Κορυφές παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο το O και πλευρές παράλληλες προς τις ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$, που απέχουν 2 cm και 3 cm από αυτές, αντίστοιχα.
4.	Ευθεία (ε_1) που περνά από το M και ισχύει $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon)$.
5.	Κύκλος (M, μ_a) , όπου M το μέσο της $B\Gamma$, εκτός από τα σημεία B και Γ .

Σελίδα 131 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	Μεσοκάθετη του OK .
2.	Κύκλος $(K, \frac{R}{2})$, όπου K το μέσο του OA και $OB = R$.
3.	Κύκλος $(O, 2\rho)$
4.	Το ευθύγραμμο τμήμα που είναι βάση του ισοσκελούς τριγώνου OA_1B_1 με $OA_1 = OB_1 = K$ και A_1, B_1 ανήκουν στις πλευρές Ox, Oy αντίστοιχα.

Σελίδα 132 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	Είναι κύκλος που εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου (O, ρ) και έχει διάμετρο $AN = \frac{4\rho}{3}$, όπου N το σημείο τομής της AB με την παράλληλη από το M προς την $B\Gamma$.
2.	Είναι κύκλος με διάμετρο $\Gamma\Delta$, όπου για τα σημεία Γ, Δ ισχύει: $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\mu}{\nu}$ (Απολλώνιος κύκλος)

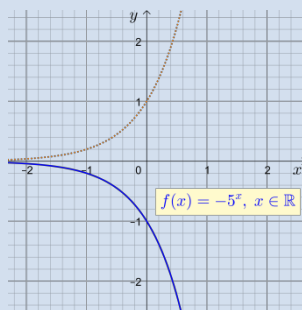
Ενότητα 08: Εκθετική – Λογαριθμική συνάρτηση

Σελίδα 160 Εκθετική συνάρτηση

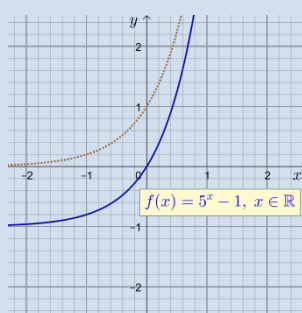
Δραστηριότητα Απαντήσεις

1.

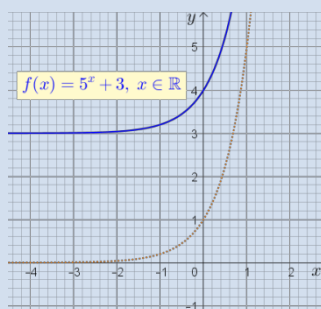
(α)



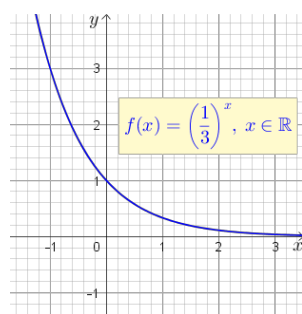
(β)



(γ)

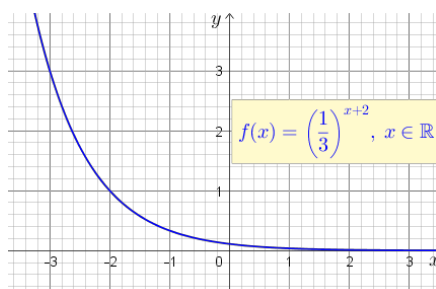


(α)

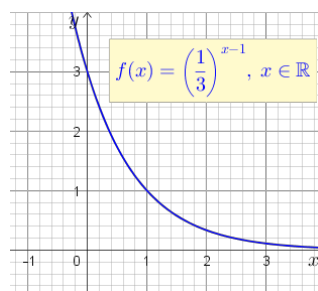


2.

(β)



(γ)



3. (α) $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
(β) Έχουμε ότι:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

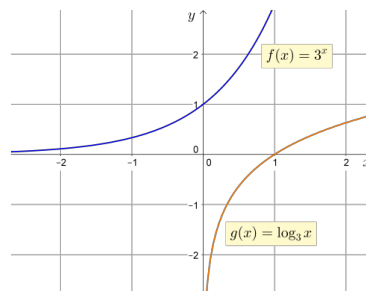
Σελίδα 168 Εκθετικές εξισώσεις – ανισώσεις

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ (ε) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ (δ) ΛΑΘΟΣ
2.	(α) $x = 7$ (ε) $x = 3$ (β) $x = -3$ (στ) $x = -\frac{2}{5}$ (γ) $x = 9$ (ζ) $x = 4, x = -1$ (δ) $x = -1, x = -\frac{1}{3}$ (η) $x = 2κπ \pm \frac{\pi}{3}, κ \in \mathbb{Z}$
3.	(α) $x = 1$ (ε) $x = \frac{1}{2}$ (β) $x = 0$ (στ) $x = 2, x = 0$ (γ) $x = 1$ (ζ) $x = 0$ (δ) $x = 1$ (η) $x = 0, x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$
4.	(α) $x \in \left(-\frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{\sqrt{30}}{6}\right)$ (β) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
5.	$x = 2, y = 1$
6.	Η f δεν είναι 1 – 1 συνάρτηση, η g είναι 1 – 1 συνάρτηση.
7.	(α) \mathbb{R} (γ) $x = \pm 1$
8.	(α) 12 αυτοκίνητα (β) 3000 αυτοκίνητα
9.	(β) 1000 κάτοικοι
10.	(α) 40 °C (γ) 36,25 °C (β) Σε 3 ώρες (δ) Την πρώτη ώρα

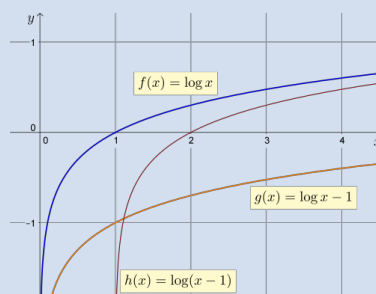
Σελίδα 173 Λογάριθμος θετικού αριθμού και λογαριθμική συνάρτηση

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) 4 (δ) 2 (β) $\frac{1}{2}$ (ε) 3 (γ) -2 (στ) -1
2.	(α) $x = 10$ (δ) $x = -3$ (β) $x = 3$ (ε) $x = \sqrt{e}$ (γ) $x = 81$ (στ) $x = \frac{3}{2}$

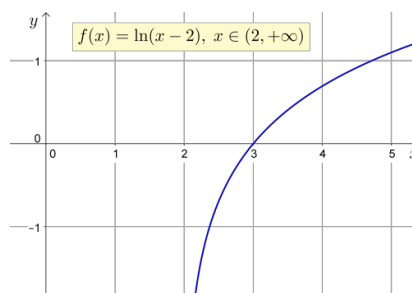
1.



2.

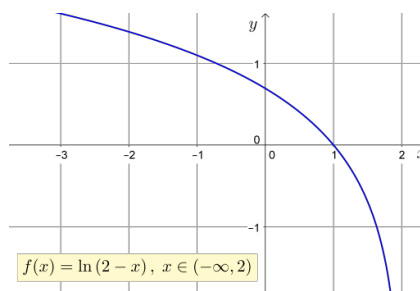


(α)

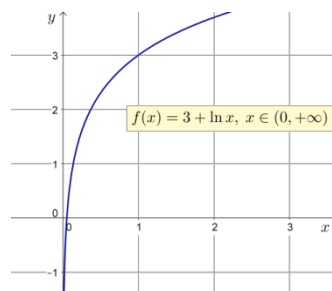


(β)

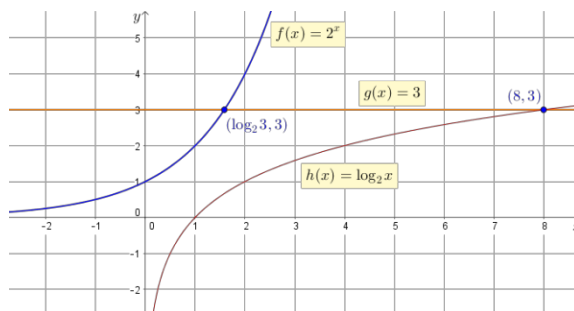
3.



(γ)



4. $x \in (-1, 0) \cup \left(0, \frac{5}{2}\right)$



5.

Σελίδα 180 Ιδιότητες λογάριθμων

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $\frac{3}{2}$ (β) $-\frac{1}{2}$ (γ) -1 (δ) 3 (ε) -4 (στ) -2 (ζ) $-\frac{1}{4}$ (η) $\frac{3}{4}$
2.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΣΩΣΤΟ (ε) ΛΑΘΟΣ
3.	(α) x^2 (β) 12 (γ) $8\sqrt{2}$
4.	(α) $\log \frac{(x+1)^2}{x}$ (β) $\ln \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}$ (γ) $\log_2 \frac{16x}{y}$
7.	$x \in (-1, 1)$

Σελίδα 183 Αλλαγή βάσης λογάριθμων

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) 1 (β) 1
3.	$x = 9$
4.	(α) $2a + \beta$ (β) $\frac{a}{\beta}$ (γ) $\frac{2a}{3\beta}$
6.	$x = 2^9$

Σελίδα 191 Λογαριθμικές εξισώσεις – ανισώσεις

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $x = 99$ (β) $x = 8$ (γ) $x = 2$ (δ) $x = -\frac{7}{2}, x = 3$ (ε) $x = 16$ (στ) $x = 10, x = 1000$
2.	(α) $x = 625, x = \frac{1}{5}$ (β) $x = 1, x = 3$ (γ) $x = 10, x = 100$ (δ) $x = 2, x = 1$ (ε) $x = \frac{1+\ln 4}{5}$ (στ) $x = 10, x = \frac{1}{10}$
3.	(α) $x = 2, y = 4$ (β) $x = 1, y = 100$
4.	$t = 10^4$ ή $t = 10^8$
5.	(β) $(41, 41 \log 2)$
6.	$x = 1$

7. $y = x^2, x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

8. (α) $x \in [0, \sqrt{e}]$ (β) $x \in (-\sqrt{7}, -2) \cup (2, \sqrt{7})$

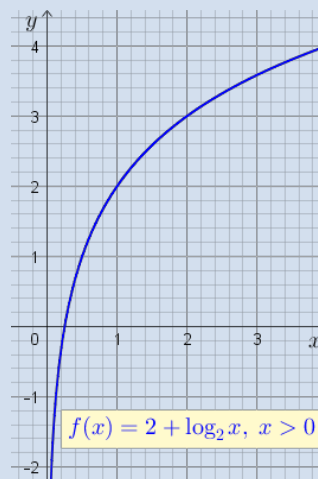
Σελίδα 195 Εφαρμογές λογαριθμικής συνάρτησης

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$x = 4$
2.	(α) $\kappa = 2, \lambda = 1$ (γ) $(e^2 - 1)$ ημέρες (β) 1000 ακρίδες
3.	(α) $m = 5$ (β) 100 φορές λαμπρότερος

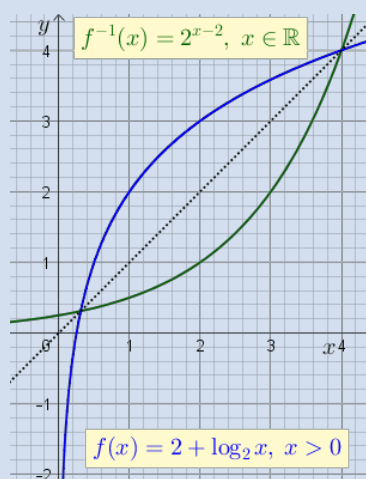
Σελίδα 200 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) $x = 3$ (θ) $x = 0$	
	(β) $x = 2$ (ι) $x = 8$	
	(γ) $x = \frac{\ln 4 + \ln 7}{\ln 4}$ (ια) $x = \frac{2}{3}$	
	(δ) $x = \frac{3}{2}$ (ιβ) $x = 1000, x = 10$	
	(ε) $x = 4$ (ιγ) $x = e^4, x = e^{-2}$	
	(στ) $x = 0$ (ιδ) $x = e, x = 1$	
	(ζ) $x = 0, x = -\frac{\ln 3}{\ln 7}$ (ιε) $x = \frac{\ln 7}{\ln 3}, x = 0$	
	(η) $x = 3, x = 1$ (ιστ) $x = \frac{\pi}{4}$	
	(ιζ) $x = \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$	
	(ιη) $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$	
	2.	(α) $x \in [100, +\infty)$ (γ) $x \in (-\infty, 1]$ (β) $x \in \mathbb{R}$ (δ) $x \in \left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$
	3.	(α) $x = 2, y = 1$ ή $x = 1, y = 2$ (β) $x = 10, y = 10$
	4.	(α) $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ (β) $x \in (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$
8.	\mathbb{R}	
12.	(α) 64, 32, 16, 8, 4, ... (β) $\Sigma_{\infty} = 128$ (α) $a = 2$	

13.

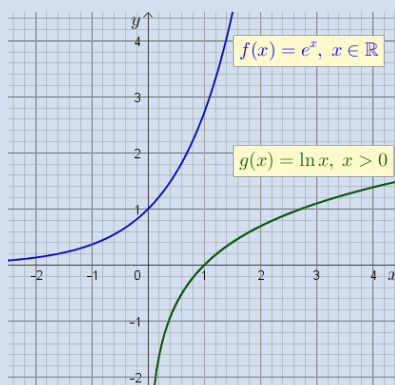


(β) $f^{-1}(x) = 2^{x-2}, x \in \mathbb{R}$



15. (α) $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$

(α)



16.

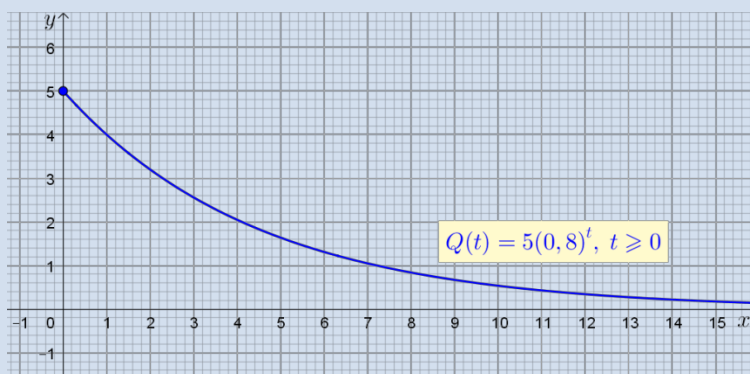
(β) $A(1, e), B(e, 1)$

(γ) $\Gamma(e + 1, e + 1)$

17. 2031

(α) $Q(t) = 5 \cdot (0,8)^t, t \geq 0$

(β)



18.

Σελίδα 203 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα Απαντήσεις

2.

$$\frac{4(3 - a)}{a + 3}$$

4.	(β) $\log \frac{125}{128} = 3 - 10 \log 2, \log \frac{625}{512} = 4 - 13 \log 2$
5.	(γ) $(1, 0)$ και $(\frac{1}{10000}, 0)$
6.	Αδύνατη στο $(0, \frac{\pi}{2})$
7.	Περίπου 33830 χρόνια
8.	(α) $(x, y) \in \{(a\sqrt{a}, \sqrt{a}), (\sqrt{a}, a\sqrt{a})\}$ (β) $(x, y) \in \{(2, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, 2)\}$
9.	(α) $f(t) = 1000 \cdot 2^{\frac{t}{24}}, t$ σε ώρες (β) 128000 (γ) Περίπου 10 μέρες
13.	(α) $x \in (-1, -\frac{9}{10}] \cup [99, +\infty)$ (β) $x \in [\sqrt{10}, 100]$ (γ) $x \in (5, +\infty)$
14.	$f^{-1}: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = \log_2 \frac{x}{1-x}$
15.	(α) $R(f_a) = [a, +\infty), R(g) = [a + \beta, +\infty)$ (β) $x = 0$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

\in	ανήκει
\notin	δεν ανήκει
\forall	για κάθε
\exists	υπάρχει
\cup	ένωση συνόλων
\cap	τομή συνόλων
\subset	γνήσιο υποσύνολο
\subseteq	υποσύνολο
\emptyset ή $\{ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
\neq	άνισο
\equiv	ταυτοτικά ίσο
\cong	κατά προσέγγιση ίσο
\mathbb{N}	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4, \dots\}$
\mathbb{N}_0	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4, \dots\}$
\mathbb{Z}	ακέραιοι αριθμοί $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
\mathbb{Z}^+	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4, \dots\}$
\mathbb{Z}^-	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$
\mathbb{Q}	ρητοί αριθμοί $\{\alpha/\beta: \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \text{ και } \beta \neq 0\}$
\mathbb{Q}^+	θετικοί ρητοί αριθμοί
\mathbb{Q}_0^+	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
\mathbb{Q}^-	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
\mathbb{R}	πραγματικοί αριθμοί
\Rightarrow	απλή συνεπαγωγή
\Leftrightarrow	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
\perp	κάθετες
\parallel	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή



Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)



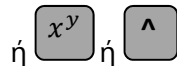
Υποδιαστολή



Εκθέτης δύναμης με βάση το 10



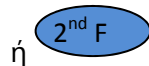
Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος



Δύναμη



Ποντίκι (Mouse)



Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί



Επανεκκίνηση υπολογιστικής



Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή



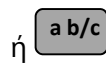
Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)



Εισαγωγή Προσήμου –



Κλάσμα



Μετατροπή Κλάσματος ⇔ Δεκαδικό



Σβήσιμο μνήμης






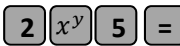


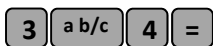



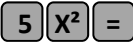

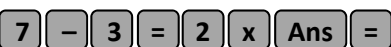


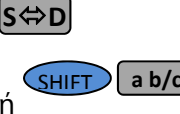


Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη



Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη



Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3 + 4$		3+4 7
$2,34 - 1,1$		2.34 - 1.1 1.24
$3 \cdot 2$		3X2 6
2^5		2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$		5E3 ή 5X103 5000
$\frac{3}{4}$	 ή 	$\frac{3}{4}$ 3∟4
$2\frac{3}{4}$	 ή 	$2\frac{3}{4}$ 2 ∟ 3 ∟ 4
$\sqrt{4}$		$\sqrt{4}$ 2
5^2		5^2 25
$2 \cdot (7 - 3)$		2X(7 - 3) 8
$2 \cdot (7 - 3)$		2XAns 8
$2 - (-3)$		$2 - (-3)$ 5
$ -3 $		$ -3 $ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	 ή	$\frac{1}{4}$
$9 - 6 : 2$	Υπολογισμός και αποθήκευση 	$9 - 6 : 2 M +$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9 - 6 : 2) - 6 : (9 - 6 : 2)$		$3 X M - 6 : M$ 17

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ 1°-89°

Γωνία	ημω	συνω	εφω
1°	0,017	0,999	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,995	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,384
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
28°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
38°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Γωνία	ημω	συνω	εφω
46°	0,720	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,470	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,748
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,333
78°	0,978	0,203	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	0,999	0,018	57,290