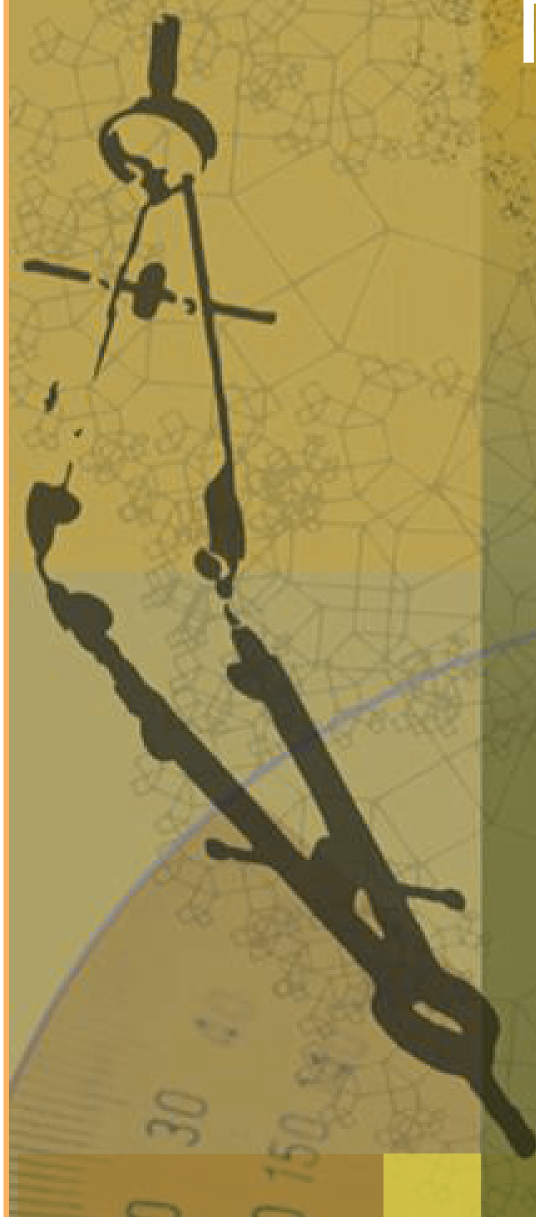
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γ΄ Τεύχος



ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ Λυκείου
Κατεύθυνσης

Γ΄ τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Β΄ Λυκείου Κατεύθυνσης, Γ΄ Τεύχος

Συγγραφή Α΄ έκδοσης: Δημητρίου – Καραντάνου Τέρψα, Ιωάννου Ιωάννης, Καραντάνος Δημήτρης, Κωνσταντινίδης Κυριάκος, Λοϊζιάς Σωτήρης, Ματθαίου Κυριάκος, Παπαγιάννης Κωνσταντίνος, Παραγυίου Θεόκλητος, Σεργίδης Μάριος, Στυλιανού Ανδρέας, Τιμοθέου Σάββας, Χατζηγεωργίου Έλενα

Συγγραφή Β΄ έκδοσης: Κωνσταντίνου Παναγιώτα, Λοϊζιάς Σωτήρης

Επιμέλεια: Πίκας Μάριος, Πίτσιλλου–Τσαγγαρίδη Νεοφύτα

Συντονισμός: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*
Βίδρας Αλέκος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*

Εποπτεία: Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*
Χατζηχρίστου Χρυσούλα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*
Ιωάννου Ιωάννης, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Μεγάλεμος Ιωάννης, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*

Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ Έκδοση 2017
Β΄ Έκδοση 2021

Εκτύπωση: Κώνος Λτδ

ISBN: 978-9963-54-305-2

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε τρία τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Κατεύθυνσης», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Το βιβλίο έχει έναν διττό ρόλο να εκπληρώσει, να μυηθεί ο μαθητής στη συλλογιστική την οποία εκφράζει το αξεπέραστο λογικό-επαγωγικό σύστημα των Μαθηματικών και παράλληλα να ανταποκριθεί στις σύγχρονες εκπαιδευτικές επιταγές.

Όλο το υλικό που περιλαμβάνεται στο παρόν βιβλίο, σύμφωνο με τα Νέα Αναλυτικά Προγράμματα και τους Δείκτες Επιτυχίας και Επάρκειας που τίθενται από την εκπαιδευτική μεταρρύθμιση, αποσκοπεί αφενός στη βοήθεια των μαθητών/τριών να κατανοήσουν τη μαθηματική λογική και σκέψη και αφετέρου στη συνεισφορά της μαθηματικής παιδείας του τόπου.

Το βιβλίο «Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Κατεύθυνσης» περιλαμβάνει την ύλη των Μαθηματικών που προβλέπεται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Β΄ τάξης Λυκείου, του οποίου η εφαρμογή άρχισε από το σχολικό έτος 2016 – 2017 και είναι εμπλουτισμένο με αυστηρούς ορισμούς και αποδείξεις όπως επίσης με πολλές εφαρμογές και παραδείγματα, που ανταποκρίνονται στις δυνατότητες και στα ενδιαφέροντα των μαθητών/τριών. Επιπρόσθετα, καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια, ώστε να είναι δυνατή η ολοκλήρωση της διδασκαλίας του στον διδακτικό χρόνο, ο οποίος προβλέπεται από το εγκεκριμένο ωρολόγιο πρόγραμμα.

Το κλειδί της επιτυχίας στο μάθημα των Μαθηματικών είναι η ουσιαστική κατανόηση των εννοιών, η ανάπτυξη αναλυτικής και συνθετικής σκέψης, η μεθοδολογική αντιμετώπιση ομαδοποιημένων προβλημάτων και η αποφυγή της αποστήθισης. Η ορθή χρήση του βιβλίου δημιουργεί στον μαθητή, εκτός από το φιλικό περιβάλλον, όλες εκείνες τις προϋποθέσεις, κυριότερες των οποίων είναι ο προβληματισμός και η αυτενέργεια, για ανάπτυξη μιας κριτικής, διερευνητικής και ορθολογιστικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τους Καθηγητές του Πανεπιστημίου Κύπρου Κωνσταντίνο Χρίστου και Αλέκο Βίδρα.

Δρ Κυπριανός Δ. Λούης
Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 09

ΠΟΛΥΓΩΝΑ – ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

9.1 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Περίκεντρο τριγώνου

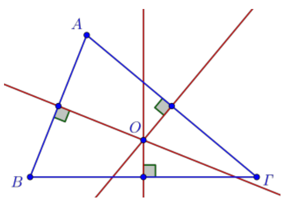
Θεώρημα

Οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου συντρέχουν σε ένα σημείο O, το οποίο ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου.

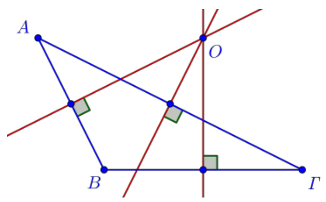
Το σημείο O λέγεται **περίκεντρο** του τριγώνου.

Παρατηρήσεις

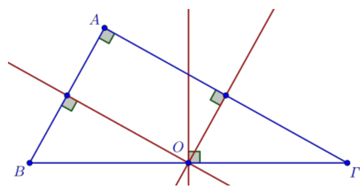
- Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, τότε το περίκεντρό του είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου.
- Αν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο, τότε το περίκεντρό του είναι εξωτερικό σημείο του τριγώνου.
- Αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, τότε το περίκεντρό του είναι το μέσο της υποτείνουσας του τριγώνου.
- Το περίκεντρο του τριγώνου αποτελεί κέντρο του περιγεγραμμένου του κύκλου.



Οξυγώνιο τρίγωνο



Αμβλυγώνιο τρίγωνο



Ορθογώνιο τρίγωνο

Ορθόκεντρο τριγώνου

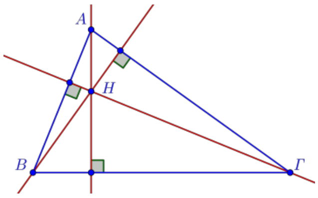
Θεώρημα

Οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται τα ύψη τριγώνου $ΑΒΓ$ διέρχονται από το ίδιο σημείο H.

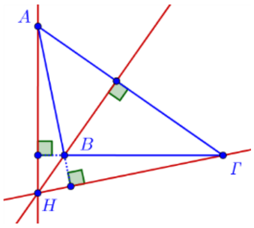
Το σημείο H λέγεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου $ΑΒΓ$.

Παρατηρήσεις

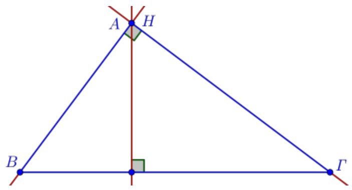
- Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, τότε το ορθόκεντρό του είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου
- Αν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο, τότε το ορθόκεντρό του είναι εξωτερικό σημείο του τριγώνου.
- Αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, τότε το ορθόκεντρό του είναι η κορυφή της ορθής του γωνίας.



Οξυγώνιο τρίγωνο



Αμβλυγώνιο τρίγωνο



Ορθογώνιο τρίγωνο

Βαρύκεντρο (κέντρο βάρους) τριγώνου

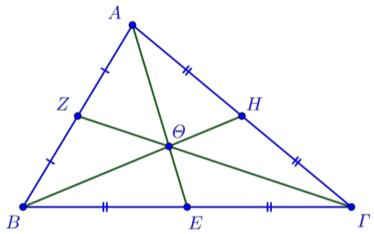
Θεώρημα

Οι διάμεσοι κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο Θ. Το σημείο Θ απέχει από κάθε κορυφή του τριγώνου απόσταση ίση με τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

Το σημείο Θ ονομάζεται **βαρύκεντρο** ή **κέντρο βάρους** του τριγώνου $AB\Gamma$.

Για παράδειγμα, στο διπλανό σχήμα, έχουμε ότι:

$$A\Theta = \frac{2}{3}AE, \;\; B\Theta = \frac{2}{3}BH, \;\; \Gamma\Theta = \frac{2}{3}\Gamma Z$$



Παρατήρηση

Το βαρύκεντρο είναι πάντα εσωτερικό σημείο του τριγώνου.

Έγκεντρο τριγώνου

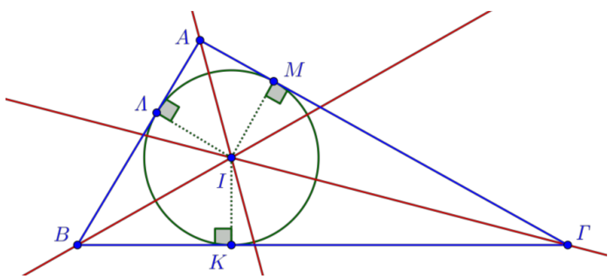
Θεώρημα

Οι διχοτόμοι των εσωτερικών γωνιών τριγώνου $AB\Gamma$ διέρχονται από το ίδιο σημείο I.

Το σημείο I ονομάζεται **έγκεντρο** του τριγώνου.

Παρατηρήσεις

- Το I ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$. Ο κύκλος με κέντρο το I και ακτίνα την απόσταση του από μια πλευρά εφάπτεται στις τρεις πλευρές του τριγώνου και ονομάζεται **εγγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου.
- Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου συμβολίζεται συνήθως με ρ.



9.2 ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ – ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Εξερεύνηση

Στο πιο κάτω σχήμα φαίνονται τέσσερα νομίσματα του €1, τα οποία εφάπτονται σε τέσσερα σημεία επαφής.

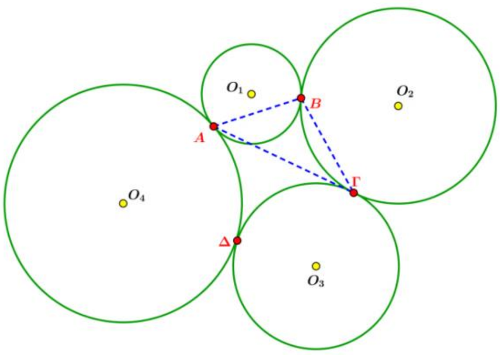
Να διαπιστώσετε πρακτικά αν ένα νόμισμα του €1 μπορεί να τοποθετηθεί πάνω από τα τέσσερα νομίσματα και να διέρχεται από τα τέσσερα σημεία επαφής των νομισμάτων. Αν είναι δυνατόν να γίνει μια τέτοια τοποθέτηση, τότε να εξηγήσετε γιατί μπορεί να συμβεί.

Διερεύνηση

Στο πιο κάτω σχήμα φαίνονται τέσσερις άνισοι κύκλοι εφαπτόμενοι στα σημεία A, B, Γ, Δ.

- Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$ και να διαπιστώσετε ότι αυτός διέρχεται και από το τέταρτο σημείο επαφής Δ.
- Να εξηγήσετε, χρησιμοποιώντας τις γεωμετρικές ιδιότητες του σχήματος, γιατί τα σημεία A, B, Γ, Δ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

(Μπορεί η κατασκευή σας να γίνει με κάποιο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας π.χ Geogebra).

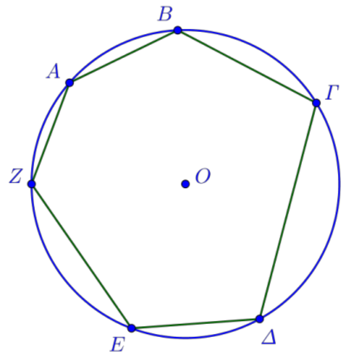


9.2.1 Εγγεγραμμένα τετράπλευρα

Ορισμός

Εγγεγραμμένο πολύγωνο σε κύκλο λέγεται κάθε πολύγωνο, του οποίου οι κορυφές είναι σημεία του κύκλου. Ο κύκλος λέγεται **περιγεγραμμένος** στο πολύγωνο.

Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα, το εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο και ο κύκλος είναι περιγεγραμμένος του εξαγώνου.



Ορισμός

Ομοκυκλικά σημεία ονομάζονται τα σημεία που βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο.

Για παράδειγμα, στο πιο πάνω σχήμα, τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ είναι ομοκυκλικά.

Παρατηρήσεις

- Οποιαδήποτε τρία μη συνευθειακά σημεία είναι πάντοτε ομοκυκλικά, αφού από τρία σημεία διέρχεται πάντοτε ένας μοναδικός κύκλος.
- Τέσσερα μη συνευθειακά σημεία δεν είναι πάντοτε ομοκυκλικά, γιατί θα υπάρχει ένας μοναδικός κύκλος που θα διέρχεται από τα τρία σημεία, ενώ το τέταρτο σημείο δεν ανήκει απαραίτητα στον κύκλο αυτό.

Ιδιότητες εγγεγραμμένων τετραπλεύρων

Σε κάθε εγγεγραμμένο σε κύκλο τετράπλευρο ισχύουν οι πιο κάτω ιδιότητες:

(α) Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του διέρχονται από το κέντρο του κύκλου.

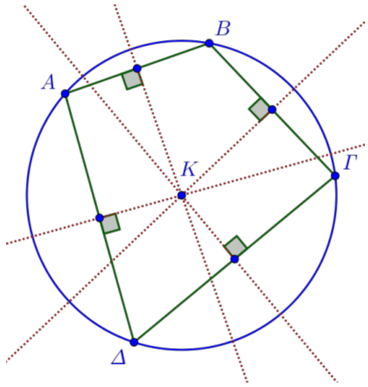
(β) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

(γ) Κάθε εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

(δ) Κάθε πλευρά του τετραπλεύρου φαίνεται από τις δύο απέναντι κορυφές του υπό ίσες γωνίες.

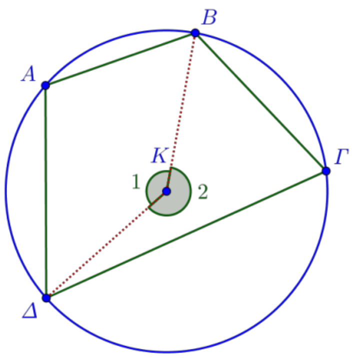
Απόδειξη

(α) Γνωρίζουμε ότι η μεσοκάθετη χορδής κύκλου διέρχεται πάντοτε από το κέντρο του κύκλου.



Επομένως, όπως φαίνεται και στο πιο πάνω σχήμα, οι μεσοκάθετοι των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ διέρχονται από το κέντρο K του κύκλου (K, ρ).

(β) Γνωρίζουμε ότι κάθε εγγεγραμμένη γωνία ενός κύκλου είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας της.



Άρα, στο πιο πάνω σχήμα, έχουμε ότι:

$$\angle A = \frac{\angle K_2}{2} \quad \text{και} \quad \angle \Gamma = \frac{\angle K_1}{2}$$

Επομένως, προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε ότι:

$$\angle A + \angle \Gamma = \frac{\angle K_2}{2} + \frac{\angle K_1}{2} = \frac{\angle K_2 + \angle K_1}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων (γ) και (δ) αφήνονται ως ασκήσεις.

9.2.2 Εγγράψιμα τετράπλευρα

Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, όταν **μία** από τις πιο κάτω προτάσεις είναι **αληθής**:

(α) Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(β) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

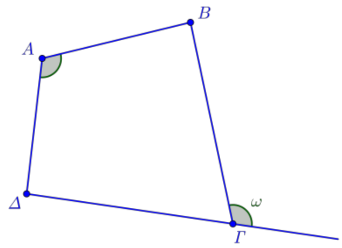
(γ) Μια εξωτερική γωνία του ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

(δ) Μια πλευρά του φαίνεται από τις δύο απέναντι από αυτήν κορυφές υπό ίσες γωνίες.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε τα κριτήρια (γ) και (δ).

(γ) Υποθέτουμε ότι στο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ μια εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική του γωνία. Έστω $\angle\omega = \angle A$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

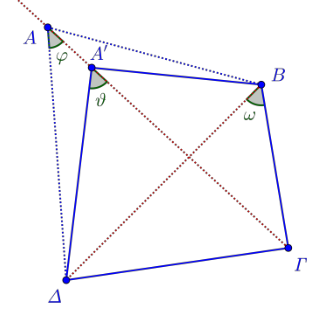


Επειδή όμως $\angle\omega + \angle ΔΓΒ = 180°$, ως παραπληρωματικές γωνίες, συμπεραίνουμε ότι $\angle A + \angle ΔΓΒ = 180°$.

Επομένως, ισχύει το κριτήριο (β) και συνεπώς, το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι εγγράψιμο.

(δ) Στο πιο κάτω σχήμα, υποθέτουμε ότι μια πλευρά του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$, έστω η $ΓΔ$, φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του A και B με ίσες γωνίες. Δηλαδή, ισχύει ότι:

$$\angle\omega = \angle\varphi \qquad (1)$$



Θα αποδείξουμε ότι από τις κορυφές του $ΑΒΓΔ$ διέρχεται ένας κύκλος. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τα σημεία $Β$, $Γ$, $Δ$, αλλά δεν περνά από το σημείο $Α$. Τότε, ο κύκλος αυτός θα τέμνει την ημιευθεία $ΓΑ$ σε ένα σημείο της, έστω $Α'$. Το τετράπλευρο $Α'ΒΓΔ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και:

$$\angle\omega = \angle\theta \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2), παίρνουμε ότι $\angle\varphi = \angle\theta$. Όμως, τότε στο τρίγωνο $ΔΑ'Α$, η εξωτερική γωνία $\angle\theta$ ισούται με μια απέναντι εσωτερική του γωνία (άτοπο). Επομένως, ο κύκλος που περνά από τα σημεία $Β$, $Γ$, $Δ$ περνά και από το σημείο $Α$. Δηλαδή, το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι εγγράψιμο.

Παράδειγμα 1

Να αποδείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένο σε κύκλο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο.

Λύση

Αφού το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε ότι

$$\angle A = \angle \Gamma = \angle\varphi \qquad (1)$$

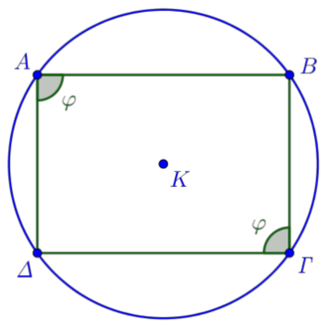
και επειδή είναι εγγεγραμμένο, παίρνουμε ότι:

$$\angle A + \angle \Gamma = 180^\circ \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2), παίρνουμε ότι:

$$\angle\varphi + \angle\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow 2(\angle\varphi) = 180^\circ \Leftrightarrow \angle\varphi = 90^\circ$$

Επομένως, το παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο.



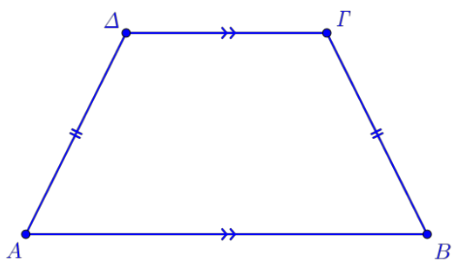
Παράδειγμα 2

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν και μόνο αν είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Λύση

«Θα αποδείξουμε ότι αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε είναι εγγράψιμο σε κύκλο.»

Δίνεται ότι το τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ είναι ισοσκελές.



Τότε, έχουμε ότι:

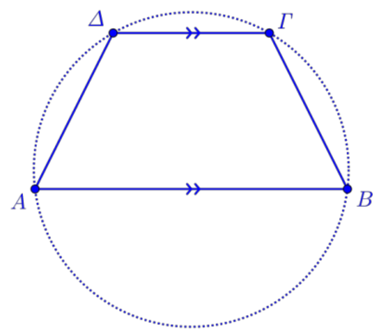
$$\angle B + \angle \Gamma = 180° \qquad (1)$$

Οι παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες. Δηλαδή, έχουμε ότι:

$$\angle B = \angle A \qquad (2)$$

Από (1) και (2), παίρνουμε ότι $\angle A + \angle \Gamma = 180°$. Επομένως, το $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

«Θα αποδείξουμε ότι αν ένα τραπέζιο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, τότε είναι ισοσκελές.»
Δίνεται ότι το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.



Τότε, έχουμε ότι

$$\angle A + \angle \Gamma = 180°, \qquad (3)$$

ως απέναντι γωνίες εγγράψιμου τετραπλεύρου σε κύκλο.

Όμως, $AB \parallel \Gamma\Delta$. Άρα, έχουμε ότι

$$\angle B + \angle \Gamma = 180° \qquad (4)$$

ως εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες.

Από (3) και (4), παίρνουμε ότι:

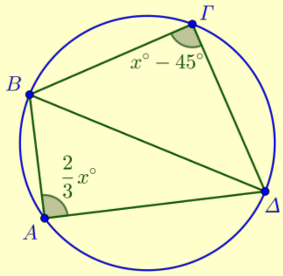
$$\angle A + \angle \Gamma = \angle B + \angle \Gamma \Rightarrow \angle A = \angle B$$

Επομένως, το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

Δραστηριότητες

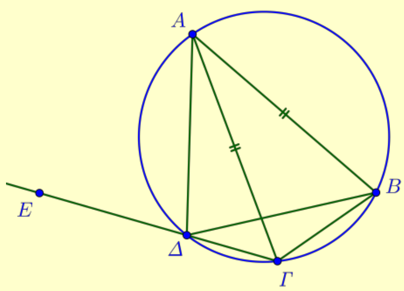
1. Σε εγγράψιμο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ δίνεται $\angle A = 120°$ και $\angle B_{\varepsilon\xi} = 80°$. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$.

2. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται ότι $\angle BA\Delta = \frac{2}{3}x°$ και $\angle B\Gamma\Delta = x° - 45°$.

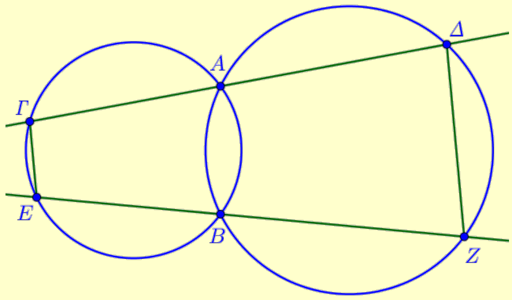


(α) Να υπολογίσετε την τιμή του x.
(β) Αν η ακτίνα του κύκλου έχει μήκος $2\,\mathrm{cm}$, να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου $Β\Delta$ του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$.

3. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ με $AB = A\Gamma$ και E τυχαίο σημείο στην προέκταση της $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle B\Delta E$.

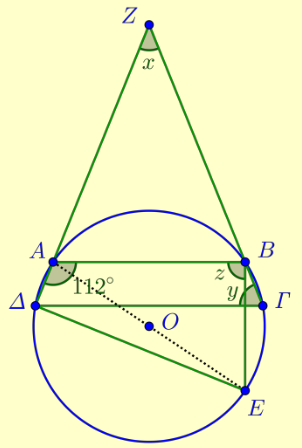


4. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A, B και οι $\Gamma A\Delta$, EBZ είναι τέμνουσες των δύο κύκλων, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι $\Gamma E \parallel \Delta Z$.



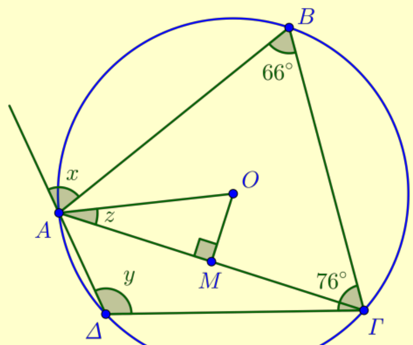
5. Να υπολογίσετε το μέτρο των άγνωστων γωνιών στα πιο κάτω σχήματα:

(α)

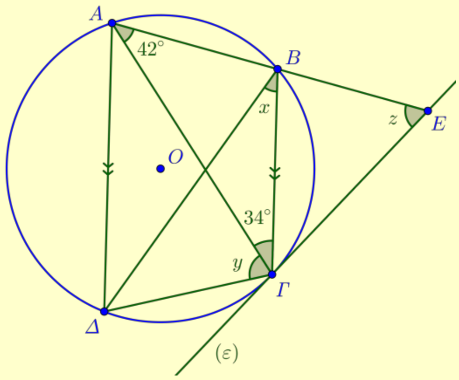


$AB \parallel \varDelta\varGamma$, $y = \angle B\varGamma\varDelta$, $\angle BA\varDelta = 112°$

(β)

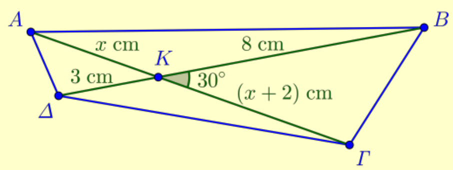


(γ)



$B\varGamma \parallel A\varDelta$, (ε) εφαπτομένη του κύκλου

6. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται τετράπλευρο $AB\varGamma\varDelta$ με $AK = x$ cm, $K\varGamma = (x + 2)$ cm, $\varDelta K = 3$ cm και $KB = 8$ cm.



(α) Να υπολογίσετε την τιμή του x, έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\varGamma\varDelta$ να είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

(β) Αν $\angle BK\varGamma = 30°$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\varGamma\varDelta$.

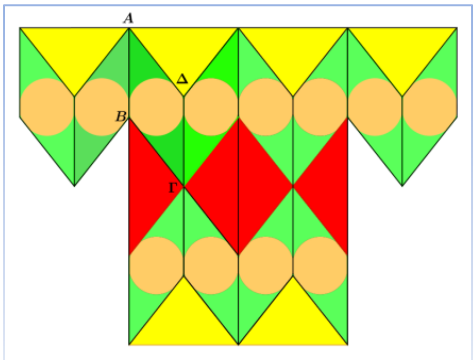
7. Δίνεται τρίγωνο $AB\varGamma$, και έστω $\varDelta, E, Z$ τα ίχνη των υψών του τριγώνου από τα σημεία $A, B, \varGamma$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZB\varGamma$ είναι εγγράψιμο.

9.3 ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ – ΠΕΡΙΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

9.3.1 Περιγεγραμμένα τετράπλευρα

Διερεύνηση

Η πιο κάτω εικόνα παρουσιάζει γεωμετρική σύνθεση, στην οποία οι κύκλοι του σχήματος είναι εγγεγραμμένοι στα πράσινα παραλληλόγραμμα.



- Αν γνωρίζετε ότι όλα τα παραλληλόγραμμα είναι ίσα, να βρείτε τι είδους παραλληλόγραμμα είναι αυτά και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Κάποιος θέλει να ονομάσει το κέντρο του κάθε κύκλου με τα γράμματα της περίφημης φράσης του φιλόσοφου Διογένη:

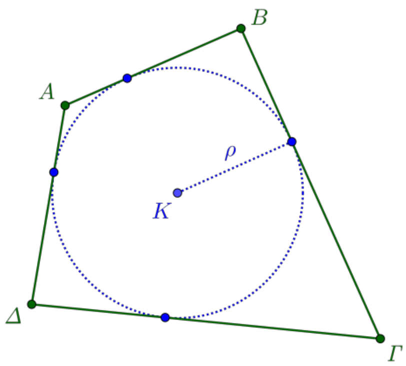
«ΑΝΘΡΩΠΟΝ ΖΗΤΩ»

- Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη τα κέντρα των κύκλων και να εξηγήσετε γεωμετρικά γιατί η κατασκευή σας είναι πράγματι ακριβής.

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγεγραμμένο σε κύκλο**, όταν οι πλευρές του είναι εφαπτόμενες του κύκλου.

Ο κύκλος σε αυτή την περίπτωση λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος** στο τετράπλευρο.



Ιδιότητες περιγεγραμμένων τετραπλεύρων

Θεώρημα

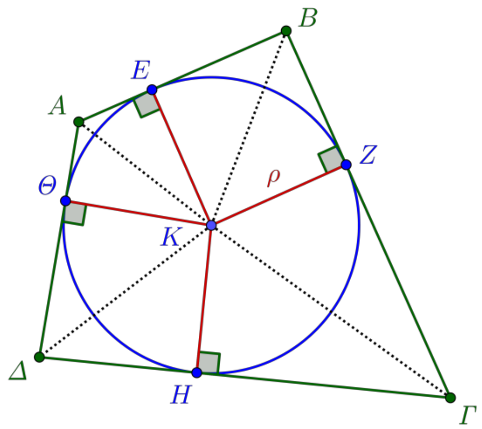
Κάθε τετράπλευρο περιγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις πιο κάτω ιδιότητες:

(α) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του τετραπλεύρου είναι ίσα.

(β) Οι διχοτόμοι των γωνιών του τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο, που είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

Απόδειξη

(α) Από τον ορισμό του περιγεγραμμένου τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$, οι πλευρές του $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ$ και $ΔΑ$ είναι εφαπτόμενες του εγγεγραμμένου κύκλου $Κ$ και έστω $Ε, Ζ, Η$ και $Θ$, αντίστοιχα, τα σημεία επαφής.



Επομένως,

$$ΑΕ = ΑΘ,\ \ ΒΕ = ΒΖ,\ \ ΔΗ = ΔΘ\ ,\ \ \ ΓΗ = ΓΖ,$$

ως εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου.

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$ΑΕ + ΒΕ + ΔΗ + ΓΗ = ΑΘ + ΒΖ + ΔΘ + ΓΖ \Leftrightarrow ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ$$

(β) Από την ισότητα των τριγώνων $ΑΕΚ = ΑΚΘ$, $ΒΕΚ = ΒΚΖ$, $ΓΖΚ = ΓΚΒ$ και $ΔΗΚ = ΔΘΚ$, παίρνουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ$ και $ΚΔ$ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\angle Α, \angle Β, \angle Γ$ και $\angle Δ$, αντίστοιχα, του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$.

9.3.2 Περιγράψιμα τετράπλευρα

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγράψιμο σε κύκλο**, όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να εφάπτεται στις πλευρές του.

Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο περιγράψιμο σε κύκλο

Θεώρημα

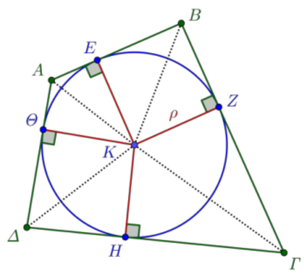
Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο, όταν μία από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθής:

(α) Οι διχοτόμοι των γωνιών του τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(β) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του τετραπλεύρου είναι ίσα.

Απόδειξη

(α) Έστω ότι οι διχοτόμοι των γωνιών του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$, διέρχονται από το σημείο $Κ$.

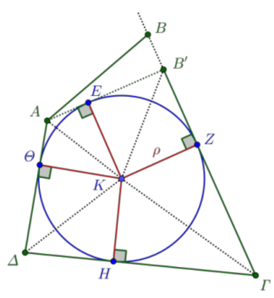


Από το σημείο $Κ$ φέρουμε τις κάθετες $ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ$ και $ΚΘ$ προς τις πλευρές $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ$ και $ΑΔ$, αντίστοιχα. Επειδή το $Κ$ ανήκει στις διχοτόμους των γωνιών $\angle Α, \angle Β, \angle Γ$ και $\angle Δ$, έχουμε ότι $ΚΕ = ΚΘ, ΚΕ = ΚΖ, ΚΖ = ΚΗ$ και $ΚΗ = ΚΘ$. Επομένως, το σημείο $Κ$ ισαπέχει από όλες τις πλευρές του $ΑΒΓΔ$. Δηλαδή, ο κύκλος $(Κ, ρ)$ θα εφάπτεται των πλευρών $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ$ και $ΑΔ$.

(β) Υποθέτουμε ότι

$$ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ \qquad (1)$$

και ονομάζουμε $Κ$ το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\angle Δ$ και $\angle Γ$ και $ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ$ τις αποστάσεις του από τις $ΓΒ, ΓΔ, ΔΑ$, αντίστοιχα.



Επειδή $KZ = KH = K\Theta$, ο κύκλος (K, ρ) εφάπτεται στις τρείς πλευρές $\Gamma B, \Gamma\Delta, \Delta A$ του $AB\Gamma\Delta$.

Έστω ότι ο κύκλος (K, ρ) δεν εφάπτεται στην πλευρά AB του $AB\Gamma\Delta$. Φέρουμε την εφαπτομένη AB' του κύκλου (K, ρ). Τότε, το τετράπλευρο $AB'\Gamma\Delta$ είναι περιγεγραμμένο στον κύκλο. Επομένως, παίρνουμε ότι:

$$AB' + \Gamma\Delta = A\Delta + \Gamma B' \qquad (2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2), παίρνουμε ότι

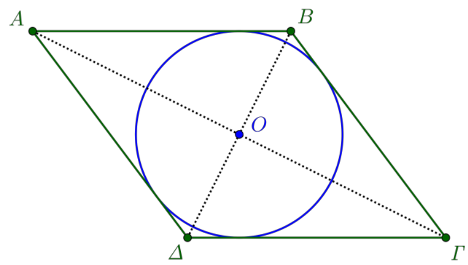
$$AB - AB' = B\Gamma - \Gamma B' \Rightarrow AB - AB' = BB' \Rightarrow AB = AB' + BB',$$

άτοπο. Επομένως, ο κύκλος (K, ρ) εφάπτεται και στην πλευρά AB του $AB\Gamma\Delta$.

Παράδειγμα 1

Να αποδείξετε ότι κάθε περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο σε κύκλο είναι ρόμβος και ότι οι διαγώνιοί του διέρχονται από το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

Λύση



Έστω $AB\Gamma\Delta$ ένα περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο σε κύκλο. Τότε, έχουμε ότι

$$AB = \Gamma\Delta, \;\; B\Gamma = A\Delta$$

και:

$$AB + \Gamma\Delta = B\Gamma + A\Delta \Rightarrow 2\Gamma\Delta = 2B\Gamma$$
$$\Rightarrow \Gamma\Delta = B\Gamma$$

Επομένως, το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ του ρόμβου διχοτομούν τις γωνιές του.

Επομένως, αφού ο ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ είναι περιγεγραμμένος στον κύκλο με κέντρο το σημείο O, τότε οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το κέντρο O του εγγεγραμμένου κύκλου (ό.έ.δ.).

Σημείωση

Η συντομογραφία ό.έ.δ. είναι στην Αρχαία Ελληνική γλώσσα τα αρχικά γράμματα της φράσης **«ὅπερ ἔδει δεῖξαι».**

Η ερμηνεία της φράσης αυτής στην Νέα Ελληνική γλώσσα είναι:

«Αυτό ακριβώς που έπρεπε να αποδείξουμε.»

Τη φράση αυτή χρησιμοποιούσε ο Ευκλείδης όταν ολοκλήρωνε μια μαθηματική απόδειξη. Τη συντομογραφία της φράσης τη χρησιμοποιούμε στο τέλος μιας μαθηματικής ή λογικής απόδειξης, για να δηλώσουμε ότι το αποτέλεσμα είναι αυτό που μας είχε ζητηθεί να αποδείξουμε.

Δραστηριότητες

1. Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ\,(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ περιγεγραμμένο σε κύκλο $(Κ, ρ)$. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο $ΒΓ$ εφάπτεται σε μια διάμετρο του κύκλου $(Κ, ρ)$.

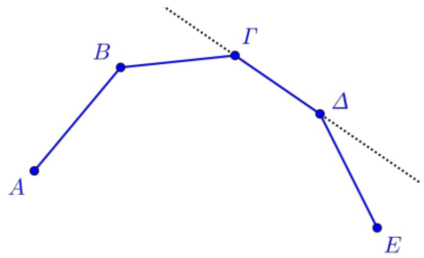
2. Αν ένα τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο $(Κ, ρ)$, να αποδείξετε ότι:
$$\angle ΑΚΒ + \angle ΓΚΔ = 180°$$

3. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ\,(ΑΒ \parallel ΓΔ,\ ΑΒ < ΓΔ)$ και $ΑΗ$ το ύψος του ($Η$ το ίχνος του ύψους πάνω στην $ΓΔ$). Αν για το τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ ισχύει $ΑΗ^2 = ΑΒ \cdot ΓΔ$, να αποδείξετε ότι το τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ είναι περιγράψιμο σε κύκλο.

9.4 ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

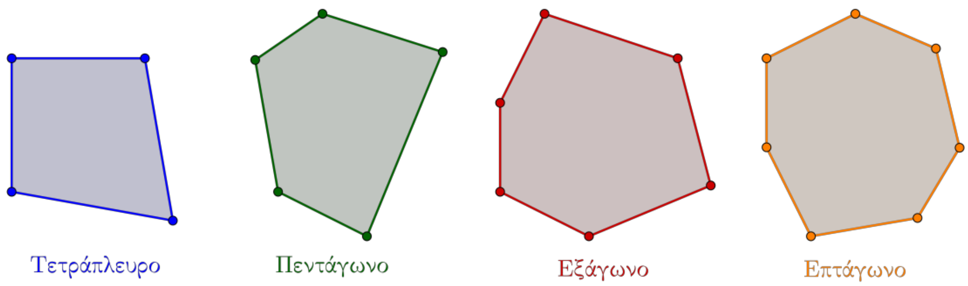
9.4.1 Εισαγωγή

Μια πολυγωνική γραμμή χαρακτηρίζεται ως **κυρτή**, όταν όλες οι κορυφές της βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο από τα δύο που ορίζει κάθε πλευρά της.



Μια κυρτή πολυγωνική γραμμή, με τουλάχιστον τρεις πλευρές, στην οποία η πρώτη και η τελευταία κορυφή ταυτίζονται, χαρακτηρίζεται ως **κλειστή**. Το πολύγωνο που περικλείεται από μια κυρτή, κλειστή, πολυγωνική γραμμή ονομάζεται **κυρτό πολύγωνο**.

- Όλες οι γωνίες ενός κυρτού πολυγώνου είναι κυρτές. Δηλαδή, έχουν μέτρο μικρότερο από $2L$ (2 ορθές).
- Σε κάθε κυρτό πολύγωνο, το πλήθος των πλευρών είναι το ίδιο με το πλήθος των κορυφών του και με το πλήθος των γωνιών του.
- Το όνομα ενός κυρτού πολυγώνου προκύπτει από το πλήθος των γωνιών του ή των πλευρών του. Ένα πολύγωνο με ν κορυφές θα το λέμε ν –γωνο (π.χ. τρίγωνο, πεντάγωνο, εξάγωνο κ.ο.κ). Εξαίρεση αποτελεί το πολύγωνο με 4 κορυφές που λέγεται τετράπλευρο.



Πρόταση

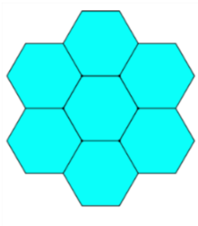
Το άθροισμα των (εσωτερικών) γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου ισούται με $(2\nu - 4)L$ ή $(\nu - 2)180°$, όπου ν το πλήθος των πλευρών του

Η απόδειξη της πιο πάνω πρότασης αφήνεται ως άσκηση για τους μαθητές.

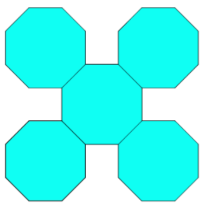
9.4.2 Ορισμός κανονικού πολυγώνου

Διερεύνηση

(α) Πρόκειται να στρώσουμε με πλακάκια, σχήματος εξαγώνου, το δάπεδο ενός δωματίου, όπως φαίνεται στο μοτίβο του πιο κάτω σχήματος. Να διερευνήσετε τις προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν, ώστε αυτό να μπορεί να πραγματοποιηθεί.

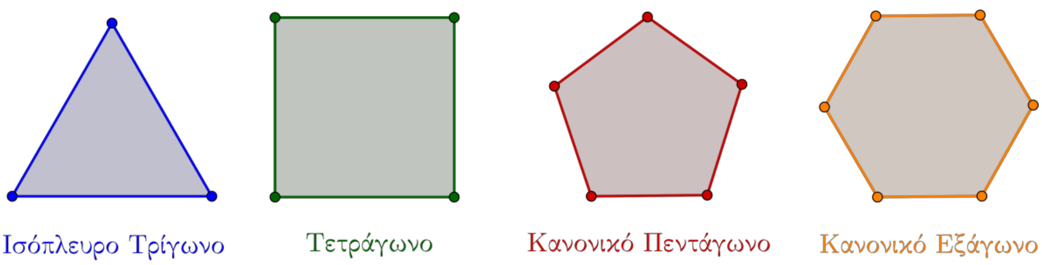


(β) Να εξηγήσετε, γιατί δεν μπορούμε να στρώσουμε το δάπεδο του δωματίου με πλακάκια, σχήματος κανονικού οκταγώνου.



(γ) Να διερευνήσετε, επίσης, αν αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με πλακάκια, σχήματος τετραγώνου ή ισοπλεύρου τριγώνου.

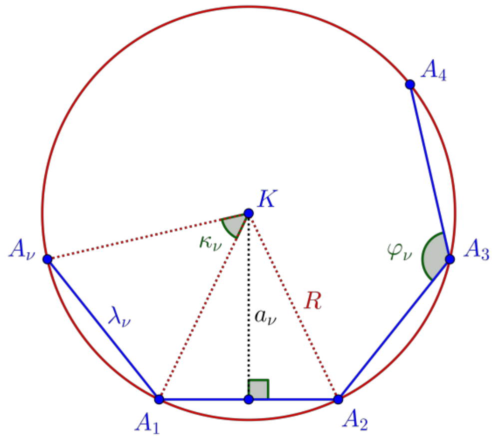
Ορισμός
Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, όταν έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους.



Παρατηρήσεις
- Το κανονικό τρίγωνο λέγεται ισόπλευρο τρίγωνο.
- Το κανονικό τετράπλευρο λέγεται τετράγωνο.
- Το κανονικό πολύγωνο με $\nu \geq 3$ κορυφές τα σημεία $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{\nu-1}, A_\nu$ λέγεται κανονικό ν–γωνο $A_1A_2A_3 \dots A_{\nu-1}A_\nu$.

Στοιχεία κανονικού πολυγώνου – συμβολισμοί

Αν $A_1A_2A_3 \dots A_{\nu-1}A_\nu$ είναι κανονικό ν −γωνο, τότε συμβολίζουμε:

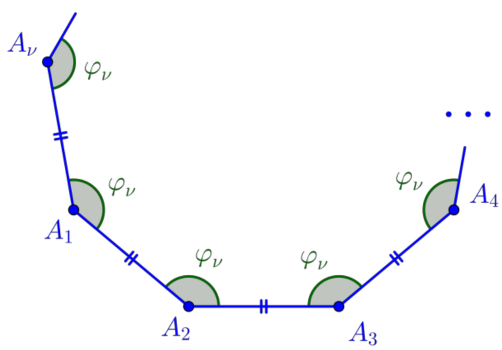


- λ_ν : Την πλευρά του ν −γώνου.
- φ_ν : Τη γωνία του ν −γώνου, δηλαδή τη γωνία που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές πλευρές του.
- κ_ν : Την κεντρική γωνία, δηλαδή, την επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί σε τόξο χορδής ίσης με λ_ν.
- a_ν : Το απόστημα, δηλαδή την απόσταση του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου από κάθε πλευρά του.
- Π_ν : Την περίμετρο του ν −γώνου.
- E_ν : Το εμβαδόν του ν −γώνου.

Ονομάζουμε, επίσης, ακτίνα και κέντρο του πολυγώνου την ακτίνα R και το κέντρο K του περιγεγραμμένου στο πολύγωνο κύκλου.

Υπολογισμός γωνίας κανονικού πολυγώνου

Συμβολίζουμε με φ_ν καθεμιά από τις ίσες γωνίες ενός κανονικού ν −γώνου. Δηλαδή, $\angle A_1 = \angle A_2 = \cdots = \angle A_\nu = \varphi_\nu$, $\nu \geq 3$.



Αν από μια κορυφή ενός κυρτού πολυγώνου φέρουμε τις διαγωνίους του, αυτό χωρίζεται σε $\nu - 2$ τρίγωνα. Έτσι, το άθροισμα των ν ίσων γωνιών του είναι $(\nu - 2)180°$.

Άρα, έχουμε

$$\nu\varphi_\nu = (\nu - 2)\,180°,$$

απ' όπου παίρνουμε:

$$\varphi_\nu = 180° - \frac{360°}{\nu}\,,\ \ \nu \geq 3 \qquad \text{ή} \qquad \varphi_\nu = \left(2 - \frac{4}{\nu}\right)L,\ \ \nu \geq 3$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας:
(α) ισόπλευρου τριγώνου
(β) τετραγώνου
(γ) κανονικού πενταγώνου.

Λύση

Έχουμε ότι:

(α) $\varphi_\nu = 180° - \dfrac{360°}{\nu} \Rightarrow \varphi_3 = 180° - \dfrac{360°}{3} = 180° - 120° = 60°$

(β) $\varphi_\nu = 180° - \dfrac{360°}{\nu} \Rightarrow \varphi_4 = 180° - \dfrac{360°}{4} = 180° - 90° = 90°$

(γ) $\varphi_\nu = 180° - \dfrac{360°}{\nu} \Rightarrow \varphi_5 = 180° - \dfrac{360°}{5} = 180° - 72° = 108°$

Θεώρημα 1

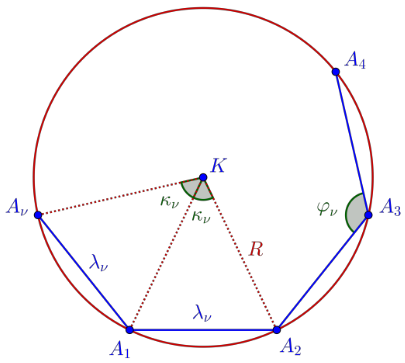
Αν χωρίσουμε τον κύκλο σε ν ίσα τόξα, με $\nu \geq 3$, τότε τα άκρα αυτών των τόξων είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου.

Απόδειξη

Στον κύκλο (K, R) παίρνουμε τα ίσα τόξα

$$\overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_2A_3} = \cdots = \overset{\frown}{A_\nu A_1}$$

όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Έχουμε ότι

$A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_\nu A_1$ $\quad$ $\overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_2A_3} = \cdots = \overset{\frown}{A_\nu A_1}$

ως χορδές ίσων τόξων του κύκλου (K, R).

Επίσης, έχουμε ότι

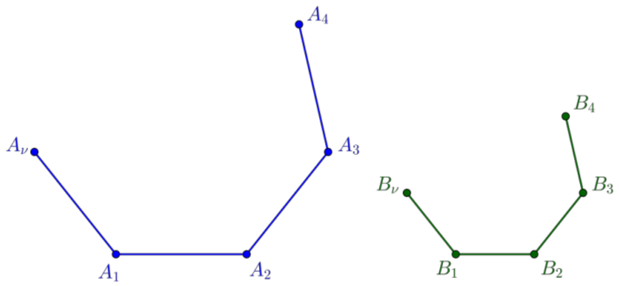
$A_1\widehat{A_2}A_3 = A_2\widehat{A_3}A_4 = \cdots = A_{\nu-1}\widehat{A_\nu}A_1$ $\quad$ $\overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_2A_3} = \cdots = \overset{\frown}{A_\nu A_1}$

ως εγγεγραμμένες γωνίες στον κύκλο που βαίνουν σε τόξα του κύκλου (K, R), τα οποία είναι το άθροισμα $\nu - 2$ ίσων τόξων.

Επομένως, το $A_1A_2A_3 \ldots A_{\nu-1}A_\nu$ είναι κανονικό πολύγωνο.

Θεώρημα 2
Δύο κανονικά πολύγωνα με το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια.

Απόδειξη
Θεωρούμε τα κανονικά ν −γωνα $A_1A_2A_3 \dots A_{\nu-1}A_\nu$ και $B_1B_2B_3 \dots B_{\nu-1}B_\nu$.



Η γωνία του κάθε ν −γώνου είναι $180° - \frac{360°}{\nu}$, οπότε:

$$\angle A_1 = \angle B_1\,,\ \ \angle A_2 = \angle B_2\,,\ \ \angle A_3 = \angle B_3\,, \dots,\ \ \angle A_{\nu-1} = \angle B_{\nu-1}\,,\ \ \angle A_\nu = \angle B_\nu \qquad (1)$$

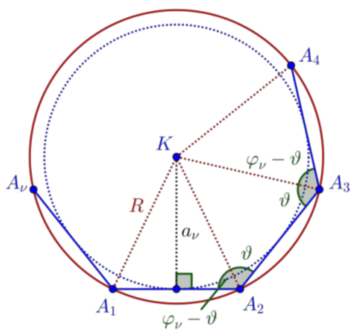
Επειδή $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_\nu A_1$ και $B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots = B_\nu B_1$, προφανώς ισχύει ότι:

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \cdots = \frac{A_\nu A_1}{B_\nu B_1} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2), συμπεραίνουμε ότι τα κανονικά ν −γωνα $A_1A_2A_3 \dots A_{\nu-1}A_\nu$ και $B_1B_2B_3 \dots B_{\nu-1}B_\nu$ είναι όμοια.

Θεώρημα 3
Κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο και περιγράψιμο σε άλλο κύκλο. Οι δυο αυτοί κύκλοι είναι ομόκεντροι.

Απόδειξη
Έστω $A_1A_2A_3 \dots A_{\nu-1}A_\nu$ ένα κανονικό ν −γωνο. Φέρουμε τον κύκλο (K, R), που περνά από τις κορυφές A_1, A_2, A_3 του πολυγώνου. Θα αποδείξουμε ότι ο κύκλος διέρχεται και από την κορυφή A_4. Δηλαδή, $KA_4 = R$.



Έχουμε ότι:

$$\angle KA_2A_3 = \angle KA_3A_2 = \theta$$

Παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου KA_2A_3

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα KA_1A_2 και KA_3A_4. Έχουμε ότι:

(α)	$KA_2 = KA_3$	*Ακτίνες κύκλου (K, R)*
(β)	$A_1A_2 = A_3A_4$	*Πλευρές κανονικού ν −γώνου*
(γ)	$\angle A_1A_2K = \angle KA_3A_4 = \varphi_\nu - \theta$	*$\angle KA_2A_3 = \angle KA_3A_2 = \theta$* *$\angle A_1A_2A_3 = \angle A_2A_3A_4 = \varphi_\nu$*

Έτσι, από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$, συμπεραίνουμε ότι:

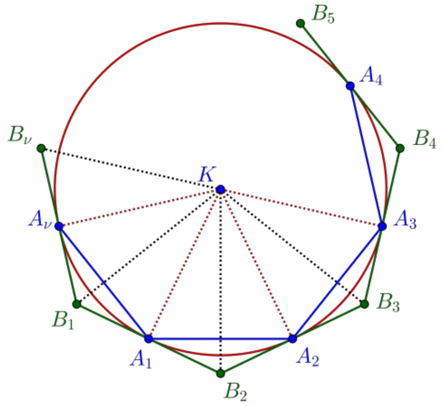
$$K\overset{\triangle}{A_1}A_2 = K\overset{\triangle}{A_3}A_4 \Rightarrow KA_4 = KA_1 = R$$

Με παρόμοιο τρόπο, αποδεικνύουμε ότι ο κύκλος (K, R) περνά και από τις υπόλοιπες κορυφές $A_5, A_6, \dots, A_\nu$ του κανονικού πολυγώνου. Συνεπώς, το πολύγωνο $A_1A_2A_3 \dots A_{\nu-1}A_\nu$ είναι εγγράψιμο.

Επιπλέον, οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες χορδές του κύκλου (K, R). Επομένως, τα αποστήματά τους a_ν είναι ίσα. Άρα, ο κύκλος (K, a_ν) εφάπτεται στις πλευρές του πολυγώνου. Δηλαδή, το κανονικό πολύγωνο $A_1A_2A_3 \dots A_{\nu-1}A_\nu$ είναι περιγράψιμο στον κύκλο (K, a_ν), που είναι ομόκεντρος του (K, R).

Παρατήρηση

Αποδεικνύεται ότι, αν τα σημεία $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{\nu-1}, A_\nu$ διαιρούν έναν κύκλο σε ν ίσα τόξα, τότε, εκτός από το ν −γωνο $A_1A_2A_3 \dots A_{\nu-1}A_\nu$ που είναι κανονικό, το ν −γωνο $B_1B_2B_3 \dots B_{\nu-1}B_\nu$ που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες του κύκλου στα $A_1,\ A_2,\ A_3, \dots,\ A_{\nu-1},\ A_\nu$ είναι επίσης κανονικό.



Βασικές σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία κανονικών πολυγώνων

Σε κάθε κανονικό ν −γωνο ακτίνας R, ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις:

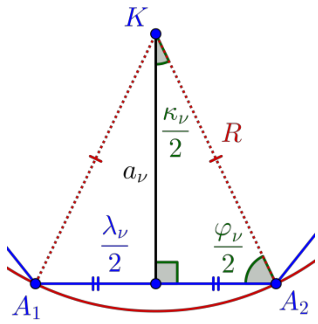
(α) $\kappa_\nu = \dfrac{360°}{\nu}$

(β) $\varphi_\nu + \kappa_\nu = 180°$

(γ) $a_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$

(δ) $\Pi_\nu = \nu\, \lambda_\nu$

(ε) $E_\nu = \dfrac{1}{2} \Pi_\nu\, a_\nu$



Η απόδειξη των πιο πάνω σχέσεων αφήνεται ως άσκηση για τους μαθητές.

Παράδειγμα 2

Ποιου κανονικού πολυγώνου η κεντρική γωνία είναι ίση με:

(α) $40°$

(β) $120°$

Λύση

(α) $\kappa_\nu = \dfrac{360°}{\nu} \Rightarrow 40° = \dfrac{360°}{\nu} \Rightarrow \nu = \dfrac{360°}{40°} = 9$

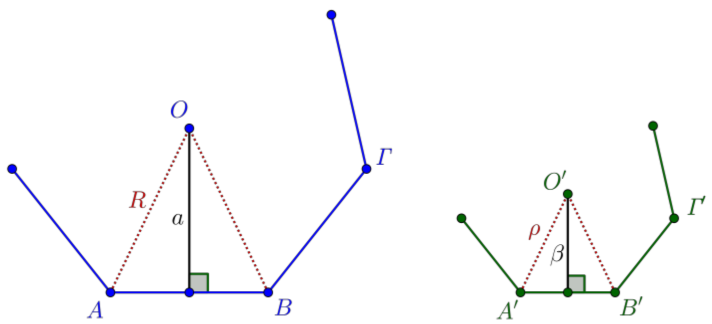
(β) $\kappa_\nu = \dfrac{360°}{\nu} \Rightarrow 120° = \dfrac{360°}{\nu} \Rightarrow \nu = \dfrac{360°}{120°} = 3$

Παράδειγμα 3

Να αποδείξετε ότι ο λόγος των πλευρών δυο κανονικών ν −γώνων ισούται με τον λόγο των αποστημάτων τους, τον λόγο των ακτίνων τους και τον λόγο των περιμέτρων τους.

Λύση

Έστω $ΑΒΓ$ ... και $Α'Β'Γ'$ ... δύο κανονικά ν −γωνα με κέντρα O, O', ακτίνες R, ρ και αποστήματα a, β, αντίστοιχα.



Έχουμε ότι:

$AB\Gamma \ldots \approx A'B'\Gamma' \ldots$ *Θεώρημα 2*

Άρα, ο λόγος των πλευρών των όμοιων ν –γώνων $AB\Gamma \ldots$ και $A'B'\Gamma'$ …είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους. Δηλαδή:

$$\lambda = \frac{AB}{A'B'}$$

Συγκρίνουμε τα ισοσκελή τρίγωνα AOB και $A'O'B'$. Έχουμε ότι:

(α) $\angle AOB = \angle A'O'B' = \kappa_\nu$ *Κεντρικές γωνίες κανονικών ν –γώνων*

(β) $\angle OAB = \angle O'A'B'$ *Παρά τη βάση γωνίες ισοσκελών τριγώνων με ίσες γωνίες κορυφής*

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι:

$$AOB \approx A'O'B' \Rightarrow \lambda = \frac{AB}{A'B'} = \frac{R}{\rho} = \frac{a}{\beta}$$

Τέλος, έχουμε ότι:

$$\frac{\Pi_\nu}{\Pi_\nu{}'} = \frac{\nu\, AB}{\nu\, A'B'} = \frac{AB}{A'B'} = \lambda$$

Επομένως, ο λόγος των περιμέτρων των δυο ομοίων κανονικών ν –γώνων ισούται με τον λόγο ομοιότητας λ.

Παράδειγμα 4

Να αποδείξετε ότι σε κάθε κανονικό ν –γωνο ισχύουν τα πιο κάτω:

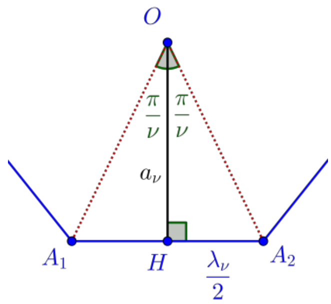
(α) $\lambda_\nu = 2R\text{ημ}\left(\frac{\pi}{\nu}\right)$ (β) $a_\nu = R\text{συν}\left(\frac{\pi}{\nu}\right)$

(γ) $\Pi_\nu = 2\nu R\text{ημ}\left(\frac{\pi}{\nu}\right)$ (δ) $E_\nu = \frac{\nu}{2}R^2\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)$

(Με R συμβολίζουμε την ακτίνα του κανονικού ν –γώνου.)

Λύση

Έστω κανονικό πολύγωνο $A_1A_2A_3 \ldots A_{\nu-1}A_\nu$ και O το κέντρο του κανονικού ν –γωνου. Τότε, το ύψος του OH είναι το απόστημα a_ν του πολυγώνου. Η κεντρική γωνία του είναι $\kappa_\nu = \frac{2\pi}{\nu}$ rad και στο ορθογώνιο τρίγωνο OHA_2 είναι $HA_2 = \frac{\lambda_\nu}{2}$.



Έχουμε ότι:

(α) $$\text{ημ}\left(\frac{\pi}{\nu}\right) = \frac{\frac{\lambda_\nu}{2}}{R} = \frac{\lambda_\nu}{2R} \Longrightarrow \lambda_\nu = 2R\text{ημ}\left(\frac{\pi}{\nu}\right)$$

(β) $$\text{συν}\left(\frac{\pi}{\nu}\right) = \frac{a_\nu}{R} \Rightarrow a_\nu = R\text{συν}\left(\frac{\pi}{\nu}\right)$$

(γ) $$\Pi_\nu = \nu\lambda_\nu = 2\nu R\text{ημ}\left(\frac{\pi}{\nu}\right)$$

(δ) $$E_\nu = \nu E_{A_1OA_2} = \nu \cdot \frac{1}{2}R^2\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) \Longrightarrow E_\nu = \frac{\nu}{2}R^2\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)$$

Παράδειγμα 5

Να υπολογίσετε τα στοιχεία κανονικού 10 –γώνου και κανονικού 24 –γώνου, όταν $R = 4 \text{ cm}$.

Λύση

«Κανονικό 10 –γωνο»

(α) $\lambda_{10} = 2 \cdot 4\text{ημ}\left(\frac{\pi}{10}\right) = 2{,}47 \text{ cm}$

(β) $\alpha_{10} = 4\text{συν}\left(\frac{\pi}{10}\right) = 3{,}8 \text{ cm}$

(γ) $\Pi_{10} = 2 \cdot 10 \cdot 4\text{ημ}\left(\frac{\pi}{10}\right) = 24{,}7 \text{ cm}$

(δ) $E_{10} = \frac{10}{2} 4^2 \text{ ημ}\left(\frac{2\pi}{10}\right) = 47 \text{ cm}^2$

«Κανονικό 24 –γωνο»

(α) $\lambda_{24} = 2 \cdot 4\text{ημ}\left(\frac{\pi}{24}\right) = 1{,}04 \text{ cm}$

(β) $\alpha_{24} = 4\text{συν}\left(\frac{\pi}{24}\right) = 3{,}97 \text{ cm}$

(γ) $\Pi_{24} = 2 \cdot 24 \cdot 4\text{ημ}\left(\frac{\pi}{24}\right) = 25{,}06 \text{ cm}$

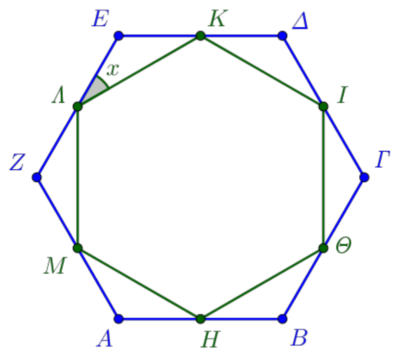
(δ) $E_{24} = \frac{24}{2} \cdot 4^2 \text{ ημ}\left(\frac{2\pi}{24}\right) = 49{,}69 \text{ cm}^2$

Παράδειγμα 6

Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών κανονικού εξαγώνου είναι κορυφές κανονικού εξαγώνου.

Λύση

Υποθέτουμε ότι το $ΑΒΓΔΕΖ$ είναι κανονικό εξάγωνο πλευράς α και H, Θ, I, K, Λ και M τα μέσα των πλευρών του, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AHM, B\Theta H, \Gamma I\Theta, \Delta KI, E\Lambda K, ZM\Lambda$:

(α) $AH = B\Theta = \Gamma I = \Delta K = E\Lambda = ZM = \dfrac{a}{2}$ *Μισά ίσων πλευρών*

(β) $AM = BH = \Gamma\Theta = \Delta I = EK = Z\Lambda = \dfrac{a}{2}$ *Μισά ίσων πλευρών*

(γ) $\angle MAH = \angle HB\Theta = \angle \Theta\Gamma I = \angle I\Delta K = \angle KE\Lambda = \angle \Lambda ZM$ *Γωνίες κανονικού εξαγώνου*

$$= \varphi_6 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Άρα, τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα και ισχύει ότι:

$$MH = H\Theta = \Theta I = IK = K\Lambda = \Lambda M \qquad (1)$$

Επίσης, οι παρά τις βάσεις γωνίες των τριγώνων αυτών είναι μέτρου

$$x = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

η καθεμία.

Έτσι, για τις γωνίες του εξαγώνου $K\Lambda M\Theta HI$ έχουμε ότι:

$$\angle MH\Theta = \angle H\Theta I = \angle \Theta IK = \angle IK\Lambda = \angle K\Lambda M = \angle \Lambda MH$$
$$= 180^\circ - 2x = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ \qquad (2)$$

Από (1) και (2), προκύπτει ότι το εξάγωνο $K\Lambda M\Theta HI$ είναι κανονικό.

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε την κεντρική γωνία και τη γωνία ενός κανονικού πενταγώνου, δεκαγώνου και δωδεκαγώνου.

2. Ποιου κανονικού πολυγώνου η κεντρική γωνία είναι ίση με:
   (α) $60°$ (β) $72°$

3. Ποιου κανονικού πολυγώνου η γωνία είναι ίση με:
   (α) $144°$ (β) $135°$

4. Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με:
   (α) $\varphi_\nu = 144°$ (β) $\varphi_\nu = 110°$
   (γ) $\kappa_\nu = 25°$ (δ) $\kappa_\nu = 36°$

5. Ο λόγος των εμβαδών δυο κανονικών εξαγώνων είναι 4. Να υπολογίσετε τον λόγο των ακτίνων τους, των πλευρών τους, των αποστημάτων τους και των περιμέτρων τους.

6. Αν το $ΑΒΓΔΕΖ$ είναι κανονικό εξάγωνο, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΓΕ$ είναι ισόπλευρο.

7. Σε κανονικό δεκάγωνο $ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ$, προεκτείνουμε την πλευρά $ΑΒ$, που τέμνει την προέκταση της ακτίνας $ΟΓ$ στο σημείο $Μ$. Να αποδείξετε ότι $ΑΜ = ΑΔ$.

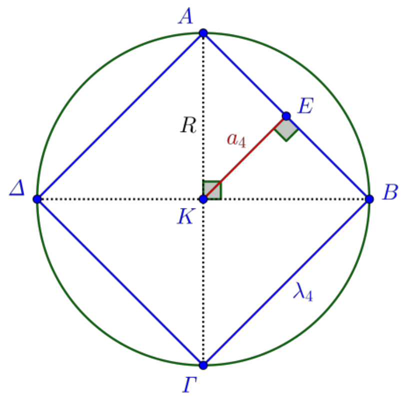
8. Αν E_a, E_β, E_γ είναι τα εμβαδά των κανονικών ν −γώνων που έχουν πλευρές ίσες με τις πλευρές a, β, γ ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$ ($\angle A = 90°$), αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
$$E_a = E_\beta + E_\gamma$$

9.4.3 Στοιχεία κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο ακτίνας R

Στην ενότητα αυτή, θα ασχοληθούμε με την εγγραφή σε κύκλο μερικών βασικών κανονικών πολυγώνων, καθώς και με τον υπολογισμό των στοιχείων τους, συναρτήσει της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου τους.

Τετράγωνο

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R).

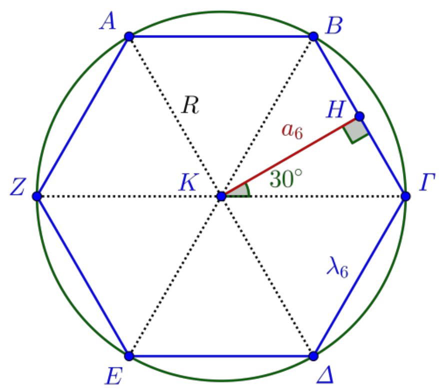


Από το ορθογώνιο τρίγωνο AKB, όπου $AB = \lambda_4$ και $KE = a_4$, έχουμε ότι:

- $\lambda_4^2 = R^2 + R^2 \Longrightarrow \lambda_4 = R\sqrt{2}$ ή $\lambda_4 = 2R\text{ημ}\left(\frac{\pi}{4}\right) = R\sqrt{2}$
- $a_4 = \frac{AB}{2} = \frac{\lambda_4}{2} \Longrightarrow a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ ή $a_4 = R\text{συν}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{R\sqrt{2}}{2}$
- $\Pi_4 = 4\lambda_4 = 4R\sqrt{2}$ ή $\Pi_4 = 2 \cdot 4R\text{ημ}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4R\sqrt{2}$
- $E_4 = 4E_{AKB} = 4 \cdot \frac{R \cdot R}{2} = 2R^2$ ή $E_4 = \frac{4}{2}R^2\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 2R^2$

Κανονικό εξάγωνο

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται κανονικό εξάγωνο $ΑΒΓΔΕΖ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R).

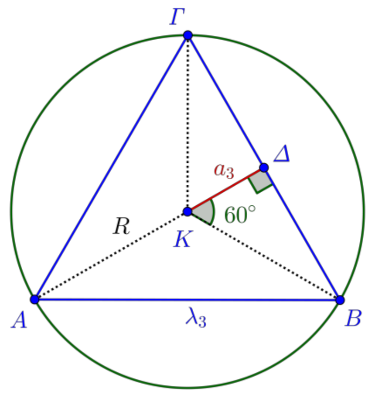


Από το ισόπλευρο τρίγωνο $ΒΚΓ$, όπου $ΒΓ = \lambda_6$ και $ΚΗ = \alpha_6$, έχουμε ότι:

- $\lambda_6 = R$ ή $\lambda_6 = 2R\etaμ\left(\frac{\pi}{6}\right) = R$
- $\alpha_6 = Rσυν30^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ ή $\alpha_6 = Rσυν\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{R\sqrt{3}}{2}$
- $\Pi_6 = 6\lambda_6 = 6R$ ή $\Pi_6 = 2 \cdot 6R\etaμ\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6R$
- $E_6 = 6E_{ΒΚΓ} = 6 \cdot \frac{\lambda_6\,\alpha_6}{2} = 6 \cdot \frac{R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ ή $E_6 = \frac{6}{2}R^2\etaμ\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Ισόπλευρο τρίγωνο

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $(Κ, R)$.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΚΔ$, όπου $ΒΔ = \frac{\lambda_3}{2}$, $ΚΒ = R$, και $ΚΔ = \alpha_3$, έχουμε ότι:

- $\frac{\lambda_3}{2} = R\etaμ60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \lambda_3 = R\sqrt{3}$ ή $\lambda_3 = 2R\etaμ\left(\frac{\pi}{3}\right) = R\sqrt{3}$
- $\alpha_3 = Rσυν60^\circ = \frac{R}{2}$ ή $\alpha_3 = Rσυν\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{R}{2}$
- $\Pi_3 = 3\lambda_3 = 3R\sqrt{3}$ ή $\Pi_3 = 2 \cdot 3R\etaμ\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3R\sqrt{3}$
- $E_3 = 3E_{ΒΚΓ} = 3 \cdot \frac{\lambda_3\,\alpha_3}{2} = 3 \cdot \frac{R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ ή $E_3 = \frac{3}{2}R^2\etaμ\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

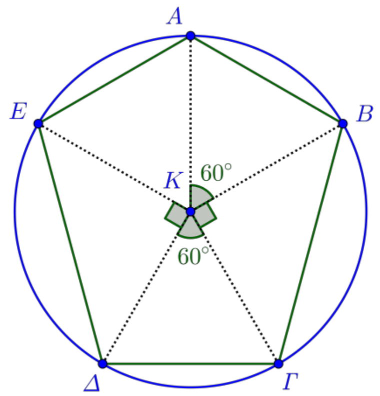
Στοιχεία κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο ακτίνας R			
	Ισόπλευρο τρίγωνο	**Τετράγωνο**	**Κανονικό εξάγωνο**
Πλευρά	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\lambda_6 = R$
Απόστημα	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$
Περίμετρος	$\Pi_3 = 3R\sqrt{3}$	$\Pi_4 = 4R\sqrt{2}$	$\Pi_6 = 6R$
Εμβαδόν	$E_3 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$	$E_4 = 2R^2$	$E_6 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Παράδειγμα 1

Σε κύκλο (K, R), παίρνουμε τα διαδοχικά τόξα $\widehat{AB} = 60°$, $\widehat{B\Gamma} = 90°$, $\widehat{\Gamma\Delta} = 60°$ και $\widehat{\Delta E} = 90°$. Να βρείτε, συναρτήσει του R, την περίμετρο και το εμβαδόν του πενταγώνου $AB\Gamma\Delta E$.

Λύση

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το μέτρο του τόξου $\widehat{EA}$ ισούται με $360° - 60° - 90° - 60° - 90° = 60°$.



Λόγω των αντίστοιχων επικέντρων γωνιών, προκύπτει ότι:

$$AB = \Gamma\Delta = EA = \lambda_6 = R \text{ και } B\Gamma = \Delta E = \lambda_4 = R\sqrt{2}$$

Η περίμετρος Π του πενταγώνου $AB\Gamma\Delta E$ είναι ίση με:

$$\begin{aligned}\Pi &= AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EA = R + R\sqrt{2} + R + R\sqrt{2} + R \\ &= 3R + 2R\sqrt{2} = R\left(3 + 2\sqrt{2}\right) \text{ μονάδες}\end{aligned}$$

Έχουμε ότι

$$E_{KAB} = E_{K\Gamma\Delta} = E_{KEA} = \frac{R \cdot R \cdot \text{ημ}60°}{2} = \frac{R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

και:

$$E_{KB\Gamma} = E_{K\Delta E} = \frac{R \cdot R}{2} = \frac{R^2}{2} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

Άρα, το εμβαδόν E του πενταγώνου $AB\Gamma\Delta E$ είναι ίσο με:

$$E = 3 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4}\left(3\sqrt{3} + 4\right) \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

Δραστηριότητες

1. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $(O, R = 4\ \mathrm{cm})$. Να υπολογίσετε τα $\lambda_3,\ a_3,\ E_3$ και Π_3.

2. Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R), με $\lambda_4 = 3\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$. Να υπολογίσετε τα $a_4,\ E_4$ και Π_4.

3. Δίνεται κανονικό εξάγωνο $ΑΒΓΔΕΖ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R), με $a_6 = 5\sqrt{3}\ \mathrm{cm}$. Να υπολογίσετε τα $\lambda_6,\ E_6$ και Π_6.

4. Ισόπλευρο τρίγωνο και κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο (O, R). Αν τα εμβαδά τους διαφέρουν κατά $12\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$, να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου και το εμβαδόν E_3 του ισόπλευρου τριγώνου.

5. Αν $AB = \lambda_4, ΒΓ = \lambda_6$ και $ΓΔ = \lambda_4$ είναι τρεις διαδοχικές χορδές ενός κύκλου (O, R), να υπολογίσετε, συναρτήσει του R, την περίμετρο και το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$.

6. Σε κύκλο (O, R) παίρνουμε τα διαδοχικά τόξα $\widehat{AB} = 60°,\ \widehat{ΒΓ} = 90°,\ \widehat{ΓΔ} = 120°$. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του R, την περίμετρο και το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$.

7. Σε κύκλο (O, R) παίρνουμε παράλληλες χορδές $AB = R$ και $ΓΔ = R\sqrt{3}$, ώστε το κέντρο O να βρίσκεται εντός της ζώνης των παραλλήλων χορδών. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του R, τα μήκη των μη παράλληλων πλευρών, το ύψος και το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τραπεζίου.

9.5 ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

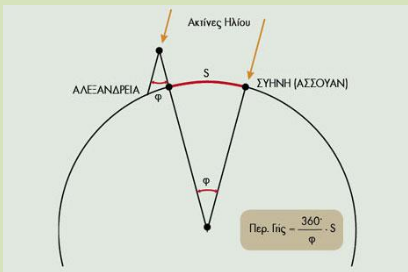
9.5.1 Εισαγωγή

Η μέτρηση κύκλου, δηλαδή ο υπολογισμός του μήκους του και του εμβαδού του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου συναρτήσει της ακτίνας του, αποτελεί ένα από τα αρχαιότερα γεωμετρικά προβλήματα. Το πρόβλημα συνδέεται άμεσα με τον αριθμό π, ο οποίος δεν είναι αλγεβρικός αλλά υπερβατικός. Δηλαδή, ο αριθμός π δεν αποτελεί ρίζα μη μηδενικού πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές. Αυτό σημαίνει ότι είναι αδύνατη η κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος μήκους π με κανόνα και διαβήτη. Μια προσεγγιστική τιμή του π είναι το $\frac{22}{7}$, που δόθηκε από τον Αρχιμήδη.

Ιστορικό σημείωμα

Πολλοί αρχαίοι λαοί ασχολήθηκαν με τη μέτρηση του κύκλου από τον $17^{ο}$ π.Χ. αιώνα! Στην αρχαία Ελλάδα, το πρόβλημα απέκτησε και θεωρητικό ενδιαφέρον, αφού συνδέθηκε με την αυστηρή απόδειξη γεωμετρικών προτάσεων. Ο Ευκλείδης $(350 - 270$ π.Χ.), με μαθηματική αυστηρότητα και χωρίς καμιά αναφορά σε αριθμητικούς υπολογισμούς, αποδεικνύει την πρόταση: *«Ο λόγος των εμβαδών δυο κυκλικών δίσκων ισούται με το τετράγωνο του λόγου των διαμέτρων τους.»*

Ο Αρχιμήδης $(287 - 212$ π.Χ.) στο έργο του «Κύκλου μέτρησις» αποδεικνύει, χρησιμοποιώντας εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα $(6-$γωνο, $12-$γωνο, $24-$γωνο, $48-$γωνο και $96-$γωνο), ότι το μήκος του κύκλου είναι μεγαλύτερο από τα $3\frac{10}{71}$ της διαμέτρου του και μικρότερο από τα $3\frac{10}{70}$ αυτής.

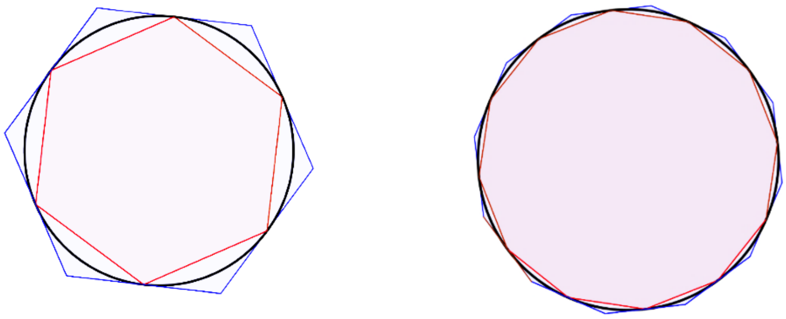


9.5.2 Μήκος κύκλου – Μήκος τόξου

Μήκος κύκλου

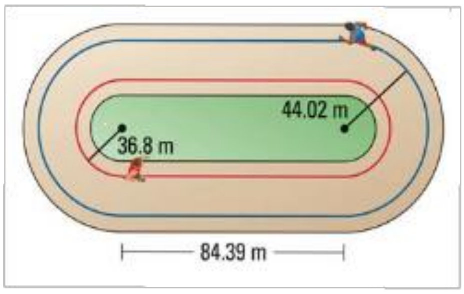
Διερεύνηση 1

Με τη βοήθεια του αρχείου *«BLyk_Kat_En09_MikosKyklou.ggb»*, να προσεγγίσετε το μήκος κύκλου, που είναι εγγεγραμμένος και περιγεγραμμένος σε κανονικά πολύγωνα με το ίδιο πλήθος πλευρών, που συνεχώς αυξάνεται (μέθοδος Αρχιμήδη), χρησιμοποιώντας τον δρομέα (στα πιο κάτω σχήματα φαίνονται οι περιπτώσεις κανονικών $6-$γώνων και $12-$γώνων).



Διερεύνηση 2

Όπως είναι γνωστό, ο στίβος του κλασσικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δυο ημικύκλια, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Να υπολογίσετε την απόσταση που θα διανύσει ο αθλητής στον κόκκινο (εσωτερικό) διάδρομο, για να τον διατρέξει μια φορά.

Θεωρούμε κύκλο (K, R) και την ακολουθία των κανονικών πολυγώνων που είναι εγγεγραμμένα σε αυτόν και έχουν $3, 4, 5, 6, \dots, \nu, \dots$ πλευρές. Θεωρούμε ακόμα την ακολουθία των περιμέτρων των πιο πάνω πολυγώνων

$$\Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \dots, \Pi_\nu, \dots, \quad (1)$$

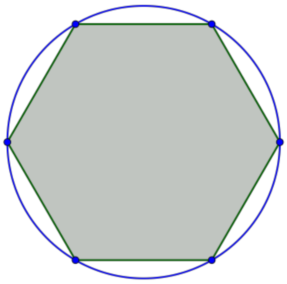
η οποία είναι μια αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών, με:

$$\Pi_3 < \Pi_4 < \Pi_5 < \Pi_6 < \cdots < \Pi_\nu < \cdots < \Gamma,$$

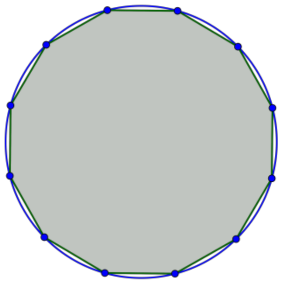
όπου Γ η περίμετρος του κύκλου (K, R).

Το όριο Γ της ακολουθίας (1) ισούται με το μήκος του κύκλου (K, R). Δηλαδή:

$$\lim \Pi_\nu = \Gamma$$



$\nu = 6$



$\nu = 12$

Σχόλιο

Αποδεικνύεται ότι και στην περίπτωση που τα εγγεγραμμένα πολύγωνα στον κύκλο δεν είναι κανονικά, η ακολουθία των περιμέτρων τους τείνει στο ίδιο όριο με το όριο στο οποίο τείνει η ακολουθία των κανονικών, καθώς οι πλευρές τους αυξάνονται απεριόριστα, δηλαδή στο μήκος Γ του κύκλου.

Θεώρημα (Ιπποκράτη του Χίου)

Ο λόγος του μήκους κύκλου προς τη διάμετρό του είναι ο ίδιος σε όλους τους κύκλους.

Απόδειξη

Θεωρούμε τυχαίους κύκλους (K, R) και (O, ρ) με αντίστοιχα μήκη Γ και γ. Συμβολίζουμε Π_ν την περίμετρο κανονικού ν −γώνου εγγεγραμμένου στον (K, R) και π_ν την περίμετρο κανονικού ν −γώνου εγγεγραμμένου στον (O, ρ).

Έχουμε:

$$\lim \Pi_\nu = \Gamma, \quad \lim \pi_\nu = \gamma \Longrightarrow \lim \frac{\Pi_\nu}{2R} = \frac{\Gamma}{2R}, \quad \lim \frac{\pi_\nu}{2\rho} = \frac{\gamma}{2\rho}$$

Επειδή τα δυο κανονικά ν −γωνα είναι όμοια, έχουμε ότι:

$$\frac{\Pi_\nu}{2R} = \frac{\pi_\nu}{2\rho}, \qquad \forall \nu \geq 3$$

Δηλαδή, οι ακολουθίες $\left\{\frac{\Pi_\nu}{2R}\right\}_{\nu \in \{3,4,\dots\}}$ και $\left\{\frac{\pi_\nu}{2\rho}\right\}_{\nu \in \{3,4,\dots\}}$ είναι ίσες. Συνεπώς, τα όριά τους είναι ίσα. Άρα, $\frac{\Gamma}{2R} = \frac{\gamma}{2\rho}$.

Όπως προκύπτει από το πιο πάνω θεώρημα, ο λόγος του μήκους του κύκλου προς τη διάμετρό του είναι ο ίδιος για όλους τους κύκλους.

Ο σταθερός αυτός λόγος συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα π.

Δηλαδή, σε κάθε κύκλο, έχουμε ότι:

$$\frac{\Gamma}{2R} = \pi \Leftrightarrow \Gamma = 2\pi R$$

Υπολογισμός του αριθμού π

Για να υπολογίσουμε το π, αρκεί να υπολογίσουμε το μήκος Γ κύκλου ακτίνας $R=\frac{1}{2}$, αφού τότε $\Gamma=2\pi\frac{1}{2}=\pi$. Το Γ όμως είναι το όριο της ακολουθίας των περιμέτρων των κανονικών πολυγώνων, που είναι εγγεγραμμένα στον κύκλο (K,R), δηλαδή της ακολουθίας:

$$\Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \dots, \Pi_\nu, \dots \quad (1)$$

Άρα, το όριο της ακολουθίας (1) είναι ο αριθμός π, όταν $R=\frac{1}{2}$

Ο αριθμός π είναι άρρητος. Μια προσεγγιστική τιμή του είναι ο αριθμός $\frac{22}{7}$ (προσέγγιση του Αρχιμήδη). Ο Αρχιμήδης, στο έργο του *«Κύκλου Μέτρησις»*, για να προσδιορίσει τη σχέση ανάμεσα στην περίμετρο και τη διάμετρο του κύκλου (δηλαδή την τιμή του π), χρησιμοποιεί περιγεγραμμένα και εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα με $6, 12, 24, 48, 96$ πλευρές, υπολογίζοντας διαδοχικά τον λόγο της πλευράς κάθε πολυγώνου προς τη διάμετρο. Έτσι, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι:

$$3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{1}{7}$$

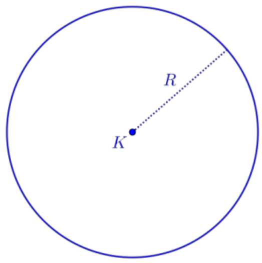
Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε την ακτίνα κύκλου (K,R) που έχει μήκος $\Gamma=\frac{\pi}{4}$ cm.

Λύση

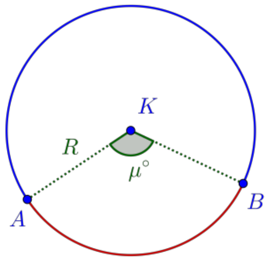
Έχουμε ότι:

$$\Gamma=2\pi R \Longrightarrow \frac{\pi}{4}=2\pi R \Longrightarrow R=\frac{1}{8}\text{ cm}=0{,}125\text{ cm}$$



Μήκος τόξου κύκλου

Ο κύκλος είναι τόξο μέτρου $360°$ με μήκος $\Gamma=2\pi R$. Έτσι, το τόξο μέτρου $1°$ θα έχει μήκος $\frac{\Gamma}{360°}$.



Επομένως, το τόξο μέτρου $\mu°$ έχει μήκος:

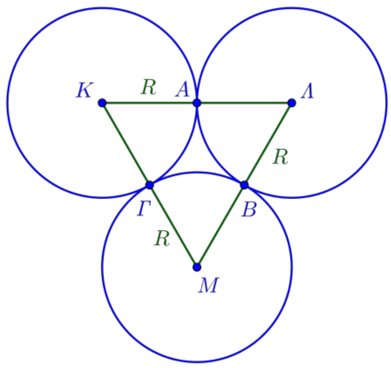
$$\gamma=\frac{\Gamma\mu°}{360°} \Rightarrow \gamma=\frac{2\pi R\mu°}{360°}$$

Παράδειγμα 2

Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας R εφάπτονται ανά δύο εξωτερικά στα σημεία A, B, Γ. Να βρείτε, συναρτήσει του R, την περίμετρο του καμπυλόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

Τα κέντρα K, Λ, M των τριών ίσων κύκλων ακτίνας R είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς $2R$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Τα μικρά τόξα $\widehat{AB}, \widehat{B\Gamma}, \widehat{\Gamma A}$ είναι ίσα, αφού έχουν μέτρο $60°$ το καθένα. Επομένως, το μήκος τους είναι ίσο με:

$$\gamma = \frac{2\pi R\mu°}{360°} = \frac{2\pi R 60°}{360°} = \frac{\pi R}{3}$$

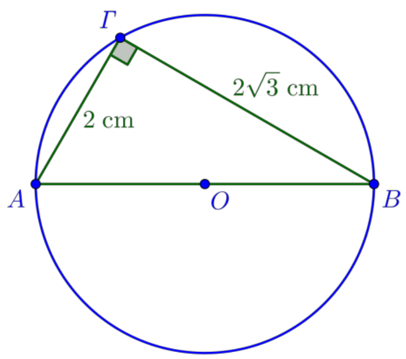
Άρα, η περίμετρος του καμπυλόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με $3\gamma = \pi R$.

Παράδειγμα 3

Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε διάμετρο AB και τις χορδές $A\Gamma$ και $B\Gamma$, ώστε $A\Gamma = 2\text{ cm}$ και $B\Gamma = 2\sqrt{3}\text{ cm}$. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου και τα μήκη των τόξων $\widehat{A\Gamma}$ και $\widehat{B\Gamma}$, που είναι μικρότερα του ημικυκλίου.

Λύση

Επειδή το AB είναι διάμετρος του κύκλου (K, R), τότε το τρίγωνο $A\Gamma B$ είναι ορθογώνιο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $ΑΒΓ$, έχουμε ότι:

$$AB^2 = AΓ^2 + BΓ^2 \Rightarrow (2R)^2 = 2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow 4R^2 = 16 \Rightarrow R = 2 \text{ cm}$$

Το μήκος του κύκλου είναι ίσο με $Γ = 2\pi R = 4\pi$ cm. Επειδή $AΓ = \frac{1}{2}AB$, τότε $\angle B = 30°$. Οπότε, $\widehat{AΓ} = 60°$ και το μήκος του τόξου $\widehat{AΓ}$ είναι ίσο με:

$$\gamma_1 = \frac{2\pi R 60°}{360°} = \frac{2\pi 2 \cdot 60°}{360°} \text{ cm} = \frac{2\pi}{3} \text{ cm}$$

Τέλος, έχουμε ότι $\angle A = 60°$. Οπότε, $\widehat{BΓ} = 120°$ και το μήκος του τόξου $\widehat{BΓ}$ είναι ίσο με:

$$\gamma_2 = \frac{2\pi R 120°}{360°} = \frac{2\pi 2 \cdot 120°}{360°} \text{ cm} = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε το μέτρο ενός τόξου (σε μοίρες), το οποίο ανήκει σε κύκλο ακτίνας $R = 12 \text{ cm}$ και έχει μήκος $\gamma = 3\pi \text{ cm}$.

2. Σε ευθεία παίρνουμε 3 διαδοχικά σημεία K, Λ, M. Συμβολίζουμε με $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$ τα μήκη των κύκλων διαμέτρων $K\Lambda, \Lambda M, MK$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$$

3. Ο ένας τροχός ποδηλάτου έχει ακτίνα R και ο άλλος έχει ακτίνα $\rho < R$. Για μια απόσταση S που διανύει το ποδήλατο, ο μεγάλος τροχός κάνει ν στροφές και ο μικρός 2ν στροφές. Να δείξετε ότι $R = 2\rho$.

4. Σε κύκλο (O, R) παίρνουμε τις διαδοχικές χορδές $AB = R\sqrt{2}$ και $B\Delta = R\sqrt{3}$. Να βρείτε, συναρτήσει του R, τα μήκη των τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Delta}$, $\widehat{\Delta A}$.

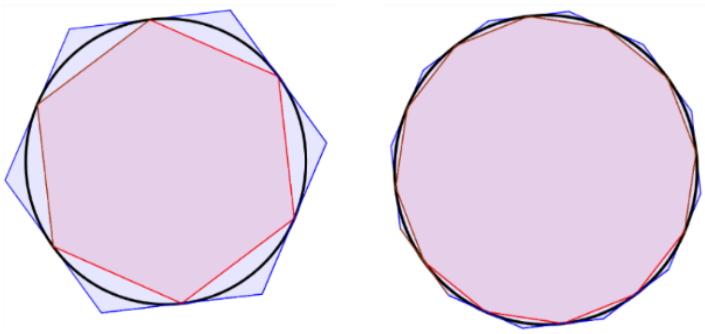
5. Με διάμετρο την ακτίνα OA κύκλου (O, R) γράφουμε κύκλο (K) και από το O φέρουμε ημιευθεία, που τέμνει τον κύκλο (O) στο E και τον κύκλο (K) στο Δ. Να αποδείξετε ότι τα τόξα $\widehat{AE}$ και $\widehat{A\Delta}$ έχουν ίσα μήκη.

9.5.3 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου, κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

Διερεύνηση

Με τη βοήθεια του αρχείου *«BLyk_Kat_En09_EmbadonKyklikouDiskou.ggb»*, να προσεγγίσετε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου, που ο αντίστοιχος κύκλος του είναι εγγεγραμμένος και περιγεγραμμένος σε κανονικά πολύγωνα με το ίδιο πλήθος πλευρών, που συνεχώς αυξάνεται, χρησιμοποιώντας τον δρομέα (στα πιο κάτω σχήματα φαίνονται οι περιπτώσεις κανονικών $6-$γώνων και $12-$γώνων).



Υπενθύμιση

Κυκλικός δίσκος λέγεται το σύνολο των σημείων του κύκλου και των εσωτερικών του σημείων.

Θεωρούμε κύκλο (K, R) και την ακολουθία των κανονικών πολυγώνων που είναι εγγεγραμμένα σε αυτόν και έχουν $3, 4, 5, 6, \dots, \nu, \dots$ πλευρές. Θεωρούμε ακόμα την ακολουθία των εμβαδών των πιο πάνω πολυγώνων:

$$E_3, E_4, E_5, E_6, \dots, E_\nu, \dots, \qquad (2)$$

η οποία είναι μια αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών, αφού:

$$E_3 < E_4 < E_5 < E_6 < \cdots < E_\nu < \cdots$$

Το εμβαδόν οποιουδήποτε εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου στον κύκλο (K, R) είναι μικρότερο από το εμβαδόν οποιουδήποτε περιγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου στον ίδιο κύκλο.

Έτσι, η ακολουθία (2) συγκλίνει.

Το όριο E της ακολουθίας (2) ισούται με το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (K, R). Δηλαδή:

$$\lim E_\nu = E$$

Το εμβαδόν E_ν κανονικού $\nu-$γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (K,R) είναι $E_\nu = \frac{1}{2}\Pi_\nu a_\nu$, όπου Π_ν η περίμετρος και a_ν το απόστημά του, έχουμε:

$$E = \lim E_\nu = \frac{1}{2}\lim\Pi_\nu \cdot \lim a_\nu = \frac{1}{2}\Gamma R = \frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot R = \pi R^2,$$

αφού το απόστημα a_ν τείνει στην ακτίνα R και η περίμετρος Π_ν τείνει στο μήκος Γ, καθώς το ν αυξάνεται απεριόριστα.

Άρα:

Το εμβαδόν E του κυκλικού δίσκου (K,R) είναι ίσο με $E = \pi R^2$.

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το εμβαδόν κυκλικού δίσκου (K, R), στον οποίον τόξο έχει μέτρο $25°$ και μήκος $\frac{5\pi}{4}$ cm.

Λύση

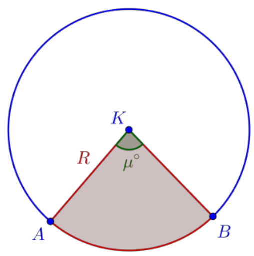
Είναι:

$$\gamma = \frac{2\pi R\mu°}{360°} \Longrightarrow \frac{5\pi}{4} = \frac{2\pi R 25°}{360°} \Longrightarrow R = 9 \text{ cm}$$

Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι $E = \pi R^2 = 81\pi \text{ cm}^2$.

Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Σε κύκλο (K,R) θεωρούμε επίκεντρη γωνία $\angle AKB$ που έχει μέτρο $\mu°$.



Το σύνολο των κοινών σημείων της επίκεντρης γωνίας $\angle AKB$ και του κυκλικού δίσκου (K,R) λέγεται **κυκλικός τομέας** κέντρου O και ακτίνας R. Ο κυκλικός τομέας KAB λέμε ότι είναι κυκλικός τομέας $\mu°$. Επειδή ο κυκλικός δίσκος είναι κυκλικός τομέας $360°$ με εμβαδόν πR^2, ο κυκλικός τομέας $1°$ έχει εμβαδόν $\frac{\pi R^2}{360}$. Οπότε, το εμβαδόν κυκλικού τομέα $\mu°$ έχει εμβαδόν $\frac{\pi R^2\mu°}{360°}$.

Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα KAB το συμβολίζουμε με $E_{\tau o\mu}$. Έτσι, έχουμε:

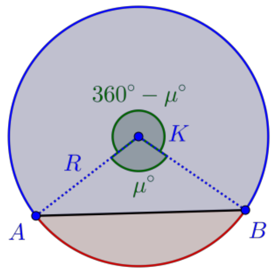
$$E_{\tau o\mu} = \frac{\pi R^2 \mu°}{360°}$$

Αν τώρα ο κυκλικός τομέας είναι a rad και επειδή $\mu° = \frac{180° a}{\pi}$, παίρνουμε ότι:

$$E_{\tau o\mu} = \frac{1}{2}aR^2$$

Εμβαδόν κυκλικού τμήματος

Μια χορδή χωρίζει έναν κυκλικό δίσκο (K, R) σε δύο μέρη, το καθένα από τα οποία λέγεται **κυκλικό τμήμα**. Το ένα αντιστοιχεί στην κυρτή επίκεντρη γωνία και το άλλο στη μη κυρτή επίκεντρη γωνία, οπως φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα.



Το εμβαδόν $E_{\kappa.\tau\mu}$ του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία $\angle AKB$ είναι ίσο με:

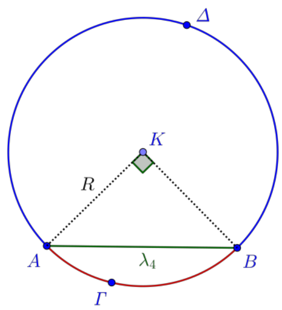
$$E_{\kappa.\tau\mu} = E_{\tau o\mu(KAB)} - E_{\overset{\triangle}{KAB}}$$

Παράδειγμα 1

Κυκλικός δίσκος ακτίνας R χωρίζεται σε δυο κυκλικά τμήματα από χορδή $AB = \lambda_4$. Να βρείτε τον λόγο των εμβαδών των δυο αυτών κυκλικών τμημάτων.

Λύση

Επειδή $AB = \lambda_4 = R\sqrt{2}$, είναι $\angle AKB = 90°$. Έστω E_κ το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου, $E_{\kappa.\tau\mu.1}$ το εμβαδόν του μικρού κυκλικού τμήματος $A\Gamma BA$ και $E_{\kappa.\tau\mu.2}$ το εμβαδόν του μεγάλου κυκλικού τμήματος $A\Delta BA$.



Τότε

$$E_{\kappa.\tau\mu.1} = E_{\tau o\mu(KA\Gamma B)} - E_{\overset{\triangle}{KAB}} = \frac{\pi R^2 90°}{360°} - \frac{R^2}{2} = \frac{(\pi - 2)R^2}{4}$$

και:

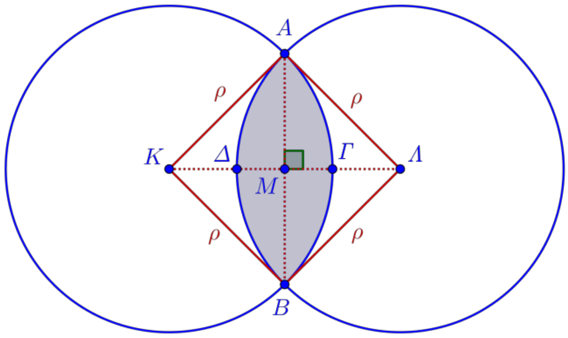
$$E_{\kappa.\tau\mu.2} = E_\kappa - E_{\kappa.\tau\mu.1} = \pi R^2 - E_{\kappa.\tau\mu.1} = \pi R^2 - \frac{(\pi - 2)R^2}{4} = \frac{(3\pi + 2)R^2}{4}$$

Άρα:

$$\frac{E_{\kappa.\tau\mu.1}}{E_{\kappa.\tau\mu.2}} = \frac{\pi - 2}{3\pi + 2}$$

Παράδειγμα 2

Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (K, ρ) και (Λ, ρ) με διάκεντρο $K\Lambda = \rho\sqrt{2}$. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι τέμνονται. Στη συνέχεια, να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από αυτούς, συναρτήσει του ρ.



Λύση

Γνωρίζουμε ότι δύο κύκλοι $(K, R), (\Lambda, \rho)$ τέμνονται, αν και μόνον αν ισχύει ότι $|R-\rho| < K\Lambda < R+\rho$.

Είναι $0 < K\Lambda = \rho\sqrt{2} < 2\rho$. Άρα, οι κύκλοι $(K, R), (\Lambda, \rho)$ τέμνονται.

Έστω A, B τα κοινά τους σημεία. Το τετράπλευρο $AKB\Lambda$ είναι τετράγωνο, αφού έχει τις πλευρές του ίσες.

Στο τρίγωνο $KA\Lambda$, έχουμε ότι:

$$(K\Lambda)^2 = \left(\rho\sqrt{2}\right)^2 = \rho^2 + \rho^2 = (KA)^2 + (\Lambda A)^2$$

Ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Επομένως, $\angle KA\Lambda = 90°$.

Τα τόξα $\widehat{A\Delta B}, \widehat{A\Gamma B}$ των δύο ίσων κύκλων είναι ίσα, διότι έχουν κοινή χορδή την AB.

Αν γ το μήκος των ίσων τόξων, τότε η περίμετρος Π του κοινού μέρους των κύκλων είναι ίση με:

$$\Pi = 2\gamma = 2 \cdot \frac{2\pi\rho 90°}{360°} = \pi\rho$$

Τα κυκλικά τμήματα $A\Delta BA, A\Gamma BA$ είναι ισοδύναμα. Έστω $E_{\kappa.\tau\mu}$ το εμβαδόν του καθενός.

Τότε, το εμβαδόν E του κοινού μέρους των δύο κύκλων είναι ίσο με:

$$E = 2E_{\kappa.\tau\mu} = 2\left[E_{\tau o\mu(KA\Gamma B)} - E_{\overset{\triangle}{KAB}}\right] = 2\left(\frac{\pi\rho^2 90°}{360°} - \frac{\rho^2}{2}\right) = \frac{(\pi-2)\rho^2}{2}$$

Σημείωση

Δύο κλειστά επίπεδα σχήματα που έχουν ίσα εμβαδά λέγονται **ισοδύναμα**.

Δραστηριότητες

1. Σε κύκλο $(K, R\,)$ παίρνουμε τόξο $\widehat{AB} = 60°$, το οποίο έχει μήκος $\gamma = 4\pi$ cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου $(K, R\,)$.

2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του κυκλικού δίσκου ενός κύκλου (O, ρ) που έχει μήκος Γ και διάμετρο δ, δίνεται από τους τύπους:

   (α) $E = \dfrac{\pi\delta^2}{4}$

   (β) $E = \dfrac{\Gamma^2}{4\pi}$

3. Το χωρίο που περικλείεται μεταξύ δυο ομόκεντρων κύκλων (O, R) και (O, ρ) με $R > \rho$ ονομάζεται **κυκλικός δακτύλιος**. Να αποδείξετε ότι:

   (α) Το εμβαδόν E του κυκλικού δακτυλίου είναι $E = \pi(R + \rho)(R - \rho)$.

   (β) Ο κυκλικός δακτύλιος είναι ισοδύναμος με κυκλικό δίσκο διαμέτρου μιας χορδής του κύκλου (O, R) που εφάπτεται του κύκλου (O, ρ).

4. Σε τεταρτοκύκλιο KAB κέντρου K, είναι $KA = KB = \left(\sqrt{2} + 1\right)$ cm. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου του κύκλου που είναι εγγεγραμμένος στο τεταρτοκύκλιο είναι π cm^2.

5. Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των δυο κυκλικών τμημάτων, στα οποία χωρίζεται κυκλικός δίσκος από χορδή του κύκλου που είναι μεσοκάθετη μιας ακτίνας.

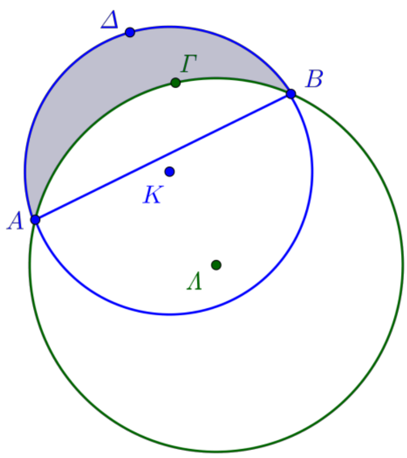
6. Δυο ίσοι κύκλοι, ακτίνας R έχουν διάκεντρο $R\sqrt{3}$. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι τέμνονται και να υπολογίσετε, συναρτήσει του R, το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.

9.5.4 Καμπυλόγραμμα και μικτόγραμμα επίπεδα σχήματα

Κάθε επίπεδο κλειστό σχήμα που περικλείεται μεταξύ καμπύλων γραμμών ορίζεται ως **καμπυλόγραμμο** (στην παρούσα ενότητα οι καμπύλες γραμμές είναι τόξα κύκλων).
Κάθε επίπεδο κλειστό σχήμα που περικλείεται μεταξύ καμπύλων γραμμών και ευθυγράμμων τμημάτων ορίζεται ως **μικτόγραμμο**.

Μηνίσκος είναι το καμπυλόγραμμο σχήμα που περικλείεται μεταξύ δύο τόξων κύκλων που έχουν κοινή χορδή και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της χορδής. Η λέξη «μηνίσκος» είναι υποκοριστικό της αρχαίας λέξης «μήνη», που σημαίνει «σελήνη».
Αν στο διπλανό σχήμα με $E_{μηνίσκου}$ συμβολίσουμε το εμβαδόν του μηνίσκου $ΑΔΒΓΑ$ και με $E_{κ.τμ.1}$, $E_{κ.τμ.2}$ τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων $ΑΔΒΑ, ΑΓΒΑ$ των κύκλων $(Κ),(Λ)$ αντίστοιχα, τότε προφανώς έχουμε ότι:

$$E_{μηνίσκου} = E_{κ.τμ.1} - E_{κ.τμ.2}$$



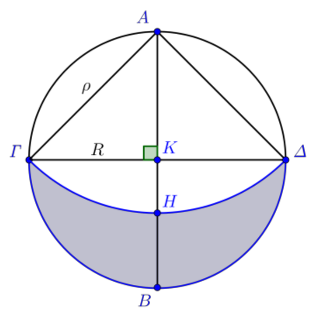
Παράδειγμα 1

Σε κύκλο $(Κ,R)$ θεωρούμε δύο κάθετες διαμέτρους $ΑΒ,ΓΔ$. Με κέντρο το $Α$ και ακτίνα $ΑΓ = ρ$, γράφουμε το τόξο $\overset{\frown}{ΓΗΔ}$, που τέμνει την $ΑΒ$ στο $Η$. Να βρείτε, συναρτήσει του R, το εμβαδόν του μηνίσκου $ΓΗΔΒΓ$ που σχηματίζεται.

Λύση

Το εμβαδόν του μηνίσκου είναι διαφορά του εμβαδού του κυκλικού τμήματος $ΓΗΔΓ$ από το εμβαδόν του ημικυκλίου διαμέτρου $ΓΔ$. Δηλαδή:

$$E_{μην} = E_{κ.τμ.1} - E_{κ.τμ.2} \qquad (1)$$



Η ακτίνα του κύκλου $(Α,ρ)$ είναι

$$ρ = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$$

και η γωνία $\angle ΓΑΔ = 90°$.
Είναι:

$$E_{κ.τμ.2} = E_{τομ(ΑΓΗΔ)} - E_{ΓΑΔ} = \frac{πρ^2 90°}{360°} - \frac{2R \cdot R}{2} = \frac{πR^2}{2} - R^2$$

Έτσι, από την (1), παίρνουμε ότι:

$$E_{μην} = E_{κ.τμ.1} - E_{κ.τμ.2} = \frac{πR^2}{2} - \left(\frac{πR^2}{2} - R^2\right) = R^2$$

Σχόλιο

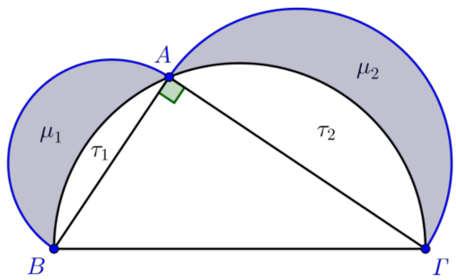
Από το αποτέλεσμα, βλέπουμε ότι ο μηνίσκος είναι ισοδύναμος με τετράγωνο πλευράς R. Σε τέτοιες περιπτώσεις, όπου ένα καμπυλόγραμμο ή μικτόγραμμο κλειστό χωρίο είναι ισοδύναμο με ευθύγραμμο κλειστό σχήμα, λέμε ότι το καμπυλόγραμμο ή μικτόγραμμο χωρίο *«τετραγωνίζεται»*.

Παράδειγμα 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με υποτείνουσα $ΒΓ$. Με διαμέτρους τις πλευρές του τριγώνου, γράφουμε τα ημικύκλια που βρίσκονται στο ημιεπίπεδο $(ΒΓ, Α)$. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των μηνίσκων που σχηματίζονται είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$.

Λύση

Συμβολίζουμε με μ_1, μ_2 τα εμβαδά των μηνίσκων και τ_1, τ_2 τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων χορδών $ΑΒ, ΑΓ$ αντίστοιχα, στο ημικύκλιο διαμέτρου $ΒΓ$.



Τότε

$$\mu_1 = (\mu_1 + \tau_1) - \tau_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{ΑΒ}{2}\right)^2 - \tau_1$$

και:

$$\mu_2 = (\mu_2 + \tau_2) - \tau_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{ΑΓ}{2}\right)^2 - \tau_2$$

Προσθέτουμε τις τελευταίες κατά μέλη και έχουμε:

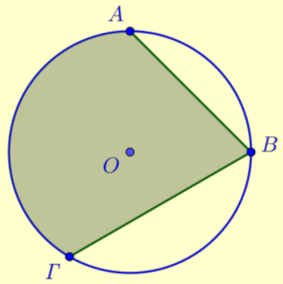
$$\begin{aligned}\mu_1 + \mu_2 &= \frac{1}{8}\pi(ΑΒ^2 + ΑΓ^2) - (\tau_1 + \tau_2) = \frac{1}{8}\pi(ΒΓ)^2 - (\tau_1 + \tau_2)\\ &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{ΒΓ}{2}\right)^2 - (\tau_1 + \tau_2) = E_{ΑΒΓ}\end{aligned}$$

Ιστορικό σημείωμα

Οι δυο παραπάνω μηνίσκοι είναι γνωστοί ως **μηνίσκοι του Ιπποκράτη**. Οι μηνίσκοι αυτοί αποτελούν το πρώτο μη ευθύγραμμο επίπεδο σχήμα που τετραγωνίστηκε από τον Ιπποκράτη το Χίο (470 – 400 π. Χ.).

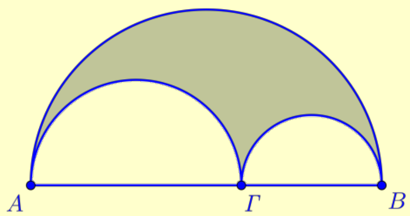
Δραστηριότητες

1. Στο πιο κάτω σχήμα, $AB = \lambda_4$ και $B\Gamma = \lambda_3$ είναι δύο διαδοχικές χορδές ενός κύκλου (O, R). Να βρείτε, συναρτήσει του R, την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου που ορίζεται από τις χορδές $AB, B\Gamma$ και το μικρό τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$.



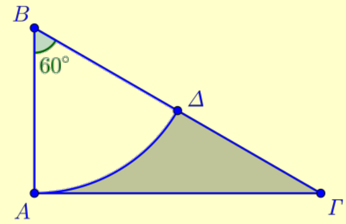
2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου στα πιο κάτω σχήματα:

(α)



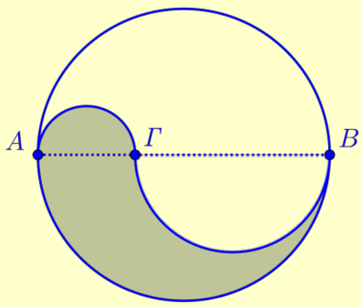
$A\Gamma = 12$ cm, $\Gamma B = 8$ cm

(β)



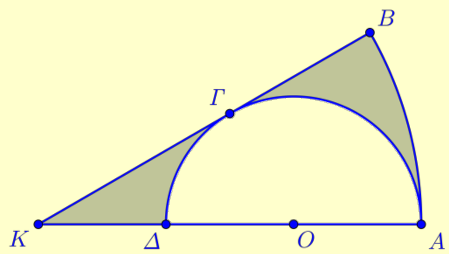
Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\angle A = 90°$), $B\Gamma = 8$ cm.
Το τόξο $\overset{\frown}{A\Delta}$ γράφτηκε με κέντρο το σημείο B.

3. Στη διάμετρο AB ενός κύκλου παίρνουμε σημείο Γ, ώστε $A\Gamma = 2$ cm και $\Gamma B = 4$ cm. Γράφουμε τα ημικύκλια διαμέτρων $A\Gamma$ και ΓB, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



4. Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε την ακτίνα OA και στην προέκτασή της, προς το μέρος του A, παίρνουμε σημείο B, ώστε $OA = AB$. Αν $B\Gamma$ είναι το εφαπτόμενο τμήμα από το B προς τον κύκλο, να βρείτε, συναρτήσει του R, την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

5. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται κυκλικός τομέας KAB με γωνία $\angle K = 30°$ και ακτίνα 6α. Το ημικύκλιο με κέντρο το O εφάπτεται της KB στο σημείο Γ.



Να υπολογίσετε:

(α) την ακτίνα του ημικυκλίου

(β) το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

6. Δίνεται κύκλος (O, R) και χορδή του $AB = \lambda_3$. Με διάμετρο την AB γράφουμε ημικύκλιο έξω από τον κύκλο (O, R). Να βρείτε, συναρτήσει του R, το εμβαδόν του μηνίσκου που ορίζεται από το μικρότερο ημικυκλίου τόξο $\overset{\frown}{AB}$ και το ημικύκλιο με διάμετρο την AB.

7. Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας ρ εφάπτονται εξωτερικά ανά δυο στα σημεία A, B, Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$, συναρτήσει του ρ.

8. Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A. Αν $B\Gamma$ είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη τους, να βρείτε, συναρτήσει του ρ, την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

9. Δίνεται κύκλος (O, R) και μια διάμετρός του AB. Με κέντρο το μέσο Γ του ενός ημικυκλίου και ακτίνα ΓA γράφουμε κύκλο που ορίζει με το άλλο ημικύκλιο μηνίσκο. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του μηνίσκου ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

10. Δύο ίσοι κύκλοι ακτίνας R έχουν διάκεντρο ίση με $R\sqrt{2}$. Να βρείτε, συναρτήσει του R, το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.

Περίληψη

1. Οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου συντρέχουν σε ένα σημείο O, το οποίο ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου. Το σημείο O λέγεται περίκεντρο του τριγώνου.
2. Οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται τα ύψη τριγώνου $ΑΒΓ$ διέρχονται από το ίδιο σημείο H. Το σημείο Η λέγεται ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.
3. Οι διάμεσοι κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο Θ. Το Θ απέχει από κάθε κορυφή του τριγώνου απόσταση ίση με τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου. Το σημείο Θ ονομάζεται βαρύκεντρο ή κέντρο βάρους του τριγώνου $ΑΒΓ$.
4. Οι διχοτόμοι των εσωτερικών γωνιών τριγώνου $ΑΒΓ$ διέρχονται από το ίδιο σημείο I. Το σημείο I ονομάζεται έγκεντρο του τριγώνου.
5. Εγγεγραμμένο πολύγωνο στον κύκλο, λέγεται κάθε πολύγωνο του οποίου οι κορυφές είναι σημεία του κύκλου. Ο κύκλος λέγεται περιγεγραμμένος στο πολύγωνο.
6. Ομοκυκλικά σημεία ονομάζονται τα σημεία που βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο.
7. Σε κάθε εγγεγραμμένο σε κύκλο τετράπλευρο ισχύουν οι πιο κάτω ιδιότητες:
   - Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του διέρχονται από το κέντρο του κύκλου.
   - Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
   - Κάθε εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.
   - Κάθε πλευρά του τετραπλεύρου φαίνεται από τις δύο απέναντι κορυφές του υπό ίσες γωνίες.
8. Ένα τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, όταν μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:
   - Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
   - Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
   - Μια εξωτερική γωνία του ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.
   - Μια πλευρά του φαίνεται από τις δύο απέναντι από αυτήν κορυφές υπό ίσες γωνίες.
9. Ένα τετράπλευρο λέγεται περιγεγραμμένο σε κύκλο, όταν οι πλευρές του είναι εφαπτόμενες του κύκλου.
10. Κάθε τετράπλευρο περιγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις πιο κάτω ιδιότητες:
    - Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του τετραπλεύρου είναι ίσα.
    - Οι διχοτόμοι των γωνιών του τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο, που είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

11. Ένα τετράπλευρο λέγεται περιγράψιμο σε κύκλο, όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να εφάπτεται στις πλευρές του.

12. Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο, όταν μία από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθής:
    - Οι διχοτόμοι των γωνιών του τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο.
    - Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του τετραπλεύρου είναι ίσα.

13. Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό, όταν έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους.

14. Στοιχεία κανονικού πολυγώνου – συμβολισμοί
    - λ_ν : Πλευρά ν −γώνου
    - φ_ν : Γωνία ν −γώνου
    - κ_ν : Κεντρική γωνία ν −γώνου
    - a_ν : Απόστημα ν −γώνου
    - Π_ν : Περίμετρος ν −γώνου.
    - E_ν : Εμβαδόν ν −γώνου.

15. Αν χωρίσουμε τον κύκλο σε ν ίσα τόξα, με $\nu \geq 3$, τότε τα άκρα αυτών των τόξων είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου.

16. Δύο κανονικά πολύγωνα με το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια.

17. Κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο και περιγράψιμο σε άλλο κύκλο. Οι δυο αυτοί κύκλοι είναι ομόκεντροι.

18. Βασικές σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία κανονικών ν −γώνων
    - $\kappa_\nu = \dfrac{360°}{\nu}$
    - $\varphi_\nu + \kappa_\nu = 180°$
    - $a_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$
    - $\Pi_\nu = \nu\, \lambda_\nu$
    - $E_\nu = \dfrac{1}{2}\Pi_\nu\, a_\nu$

19. Στοιχεία κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο ακτίνας R

    Τετράγωνο
    - $\lambda_4 = R\sqrt{2}$
    - $a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$
    - $\Pi_4 = 4R\sqrt{2}$
    - $E_4 = 2R^2$

    Κανονικό εξάγωνο
    - $\lambda_6 = R$
    - $a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$
    - $\Pi_6 = 6R$
    - $E_6 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Ισόπλευρο τρίγωνο

- $\lambda_3 = R\sqrt{3}$
- $\alpha_3 = \dfrac{R}{2}$
- $\Pi_3 = 3R\sqrt{3}$
- $E_3 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

20. Το όριο Γ της ακολουθίας $\Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \dots, \Pi_\nu, \dots$, δηλαδή των περιμέτρων των κανονικών πολυγώνων που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο (K, R) και έχουν $3, 4, 5, 6, \dots, \nu, \dots$ πλευρές, αντίστοιχα, ισούται με το μήκος του κύκλου (K, R). Δηλαδή, $\lim \Pi_\nu = \Gamma$.

21. Ο λόγος του μήκους κύκλου προς τη διάμετρό του είναι ο ίδιος σε όλους τους κύκλους. Δηλαδή, σε κάθε κύκλο, έχουμε ότι:
$$\frac{\Gamma}{2R} = \pi \Leftrightarrow \Gamma = 2\pi R$$

22. Ένα τόξο μέτρου μ° έχει μήκος:
$$\gamma = \frac{\Gamma\mu^\circ}{360^\circ} \Rightarrow \gamma = \frac{2\pi R\mu^\circ}{360^\circ}$$

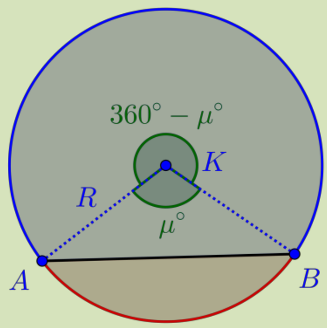
23. Το όριο E της ακολουθίας $E_3, E_4, E_5, E_6, \dots, E_\nu, \dots$, δηλαδή των εμβαδών των κανονικών πολυγώνων που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο (K, R) και έχουν $3, 4, 5, 6, \dots, \nu, \dots$ πλευρές, αντίστοιχα, ισούται με το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (K, R). Δηλαδή, $\lim E_\nu = E$.

24. Το εμβαδόν E του κυκλικού δίσκου (K, R) είναι ίσο με $E = \pi R^2$.

25. Σε κύκλο (K, R) θεωρούμε επίκεντρη γωνία $\angle AKB$ που έχει μέτρο μ°. Το σύνολο των κοινών σημείων της επίκεντρης γωνίας $\angle AKB$ και του κυκλικού δίσκου (K, R) λέγεται κυκλικός τομέας κέντρου O και ακτίνας R. Ο κυκλικός τομέας KAB λέμε ότι είναι κυκλικός τομέας μ°.

26. Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα KAB το συμβολίζουμε με $E_{\tau o\mu}$. Έτσι, έχουμε:
$$E_{\tau o\mu} = \frac{\pi R^2 \mu^\circ}{360^\circ}$$
Αν τώρα ο κυκλικός τομέας είναι α rad και επειδή $\mu^\circ = \frac{180^\circ \alpha}{\pi}$, παίρνουμε ότι:
$$E_{\tau o\mu} = \tfrac{1}{2}\alpha R^2$$

27. Μια χορδή χωριζει έναν κυκλικό δίσκο (K, R) σε δύο μέρη, που το καθένα από αυτά λέγεται **κυκλικό τμήμα**.
Το ένα αντιστοιχεί στην κυρτή επίκεντρη γωνία και το άλλο στη μη κυρτή επίκεντρη γωνία, οπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



28. Το εμβαδόν $E_{κ.τμ}$ του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία $\angle AKB$ είναι ίσο με:

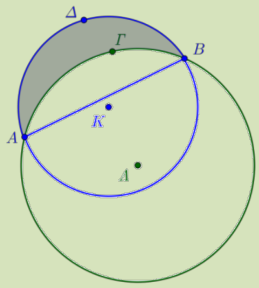
$$E_{κ.τμ} = E_{τομ(KAB)} - E_{\overset{\triangle}{KAB}}$$

29. Κάθε επίπεδο κλειστό σχήμα που περικλείεται μεταξύ καμπύλων γραμμών ορίζεται ως καμπυλόγραμμο.

30. Κάθε επίπεδο κλειστό σχήμα που περικλείεται μεταξύ καμπύλων γραμμών και ευθυγράμμων τμημάτων ορίζεται ως μικτόγραμμο.

31. Μηνίσκο ονομάζουμε το καμπυλόγραμμο σχήμα που περικλείεται μεταξύ δύο τόξων κύκλων που έχουν κοινή χορδή και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της χορδής.

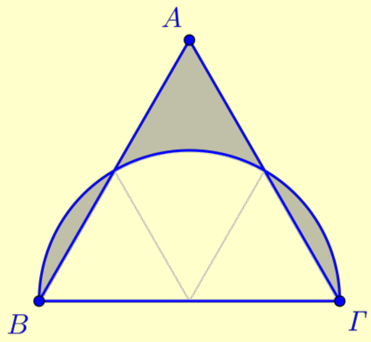
32. Αν στο διπλανό σχήμα με $E_{μηνίσκου}$ συμβολίσουμε το εμβαδόν του μηνίσκου $AΔBΓA$ και με $E_{κ.τμ.1}$, $E_{κ.τμ.2}$ τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων $AΔBA, AΓBA$ των κύκλων $(K), (Λ)$ αντίστοιχα, τότε προφανώς έχουμε ότι:



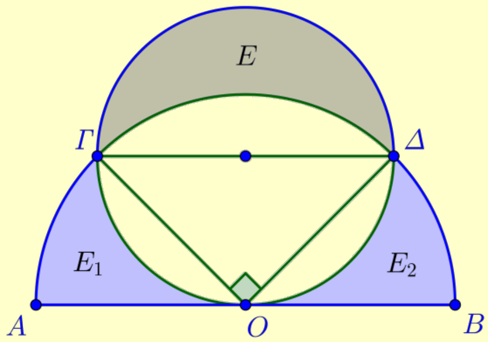
$$E_{μηνίσκου} = E_{κ.τμ.1} - E_{κ.τμ.2}$$

Δραστηριότητες Ενότητας

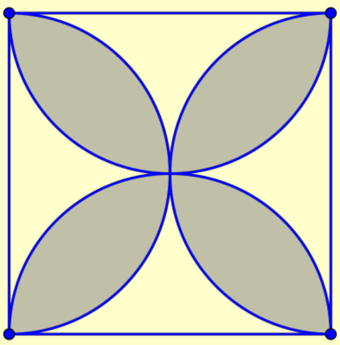
1. Στο πιο κάτω σχήμα, το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισόπλευρο με πλευρά μήκους $α$ και το ημικύκλιο γράφτηκε με διάμετρο την $ΒΓ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.



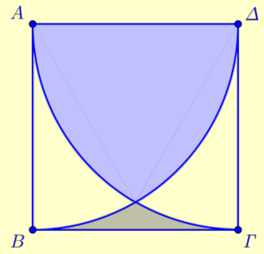
2. Στο πιο κάτω σχήμα, η $ΓΔ$ είναι παράλληλη με την $ΑΒ$ και $\angle ΓΟΔ = 90°$ ($Ο$ είναι το κέντρο του ημικυκλίου $\widehat{AB}$). Να αποδείξετε ότι $Ε = Ε_1 + Ε_2$.



3. Δίνεται τετράγωνο με πλευρά μήκους $2α$. Με διαμέτρους τις πλευρές του τετραγώνου γράφουμε ημικύκλια μέσα στο τετράγωνο, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του $α$, το εμβαδόν των τεσσάρων φύλλων που σχηματίζονται.



4. Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ πλευράς $α$. Στο εσωτερικό του τετραγώνου, γράφουμε τα τόξα $\widehat{ΒΔ}$ και $\widehat{ΑΓ}$ των κύκλων $(Α, α)$ και $(Δ, α)$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του $α$, το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του τετραγώνου.



5. Δίνεται ημικύκλιο, διαμέτρου $ΑΒ$ και έστω $Γ$ τυχαίο σημείο της διαμέτρου. Στο εσωτερικό του ημικυκλίου γράφουμε τα ημικύκλια διαμέτρων $ΑΓ$ και $ΓΒ$. Η κάθετος της διαμέτρου στο $Γ$ τέμνει το αρχικό ημικύκλιο στο σημείο $Δ$. Να αποδείξετε ότι το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων *(άρβηλος του Αρχιμήδη)* είναι ισοδύναμο με τον κυκλικό δίσκο, διαμέτρου $ΓΔ$.

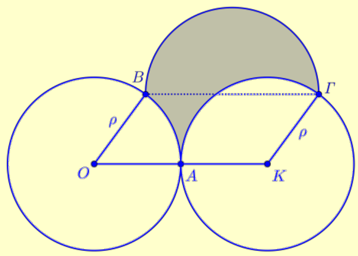
6. Ισόπλευρο τρίγωνο είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο $(O, ρ)$. Θεωρούμε τους τρεις κύκλους που εφάπτονται του $(O, ρ)$ και των δυο πλευρών του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:

   (α) το άθροισμα των μηκών αυτών των τριών κύκλων ισούται με το μήκος του κύκλου $(O, ρ)$

   (β) το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών δίσκων αυτών των τριών αυτών κύκλων ισούται με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του κυκλικού δίσκου του κύκλου $(O, ρ)$.

7. Δύο παράλληλες χορδές κύκλου ακτίνας R έχουν μήκη R και $R\sqrt{3}$. Αν το κέντρο του κύκλου βρίσκεται εκτός της ζώνης των παραλλήλων χορδών, να βρείτε το λόγο του εμβαδού του μέρους του κυκλικού δίσκου μεταξύ των χορδών προς το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

8. Δυο ίσοι κύκλοι $(O, ρ)$ και $(K, ρ)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A. Φέρουμε δυο ακτίνες OB και $KΓ$ παράλληλες και προς το ίδιο μέρος της διακέντρου OK. Γράφουμε το ημικύκλιο διαμέτρου $BΓ$, που βρίσκεται εκτός των δύο κύκλων. Να αποδείξετε ότι το σκιασμένο χωρίο είναι ισοδύναμο με το παραλληλόγραμμο $OBΓK$.



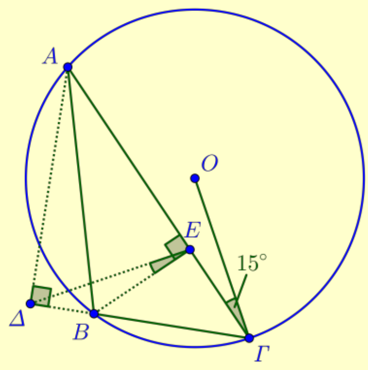
9. Αν $ΑΒΓΔΕΖ$ είναι κανονικό εξάγωνο, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι $ΑΓ, ΒΔ, ΓΕ, ΔΖ, ΕΑ, ΖΒ$ σχηματίζουν κανονικό εξάγωνο και να βρείτε τον λόγο των εμβαδών των δυο αυτών εξαγώνων.

10. Αν ένα πολύγωνο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο σε δυο ομόκεντρους κύκλους, να αποδείξετε ότι είναι κανονικό.

11. Δίνεται κύκλος (O, R) και μια χορδή του AB ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου. Στην προέκταση της AB παίρνουμε σημείο $Γ$, τέτοιο ώστε $ΑΓ = 2R$. Να αποδείξετε ότι το εφαπτόμενο τμήμα από το $Γ$ προς τον κύκλο είναι ίσο με την πλευρά τετραγώνου, εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R).

12. Θεωρούμε ημικύκλιο διαμέτρου $AB = 2R$ με κέντρο το O και ημικύκλια διαμέτρων AO, OB, στο εσωτερικό του πρώτου ημικυκλίου. Να βρείτε, συναρτήσει του R, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και μήκος του κύκλου, ο οποίος εφάπτεται των τριών ημικυκλίων.

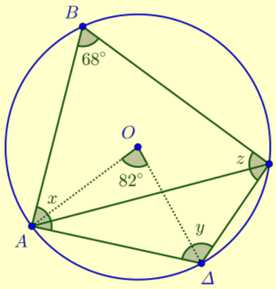
13. Στο πιο κάτω σχήμα, το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O, $\angle ΟΓΑ = 15°$ και τα $ΑΔ, ΒΕ$ είναι ύψη του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΔΕ$ είναι εγγράψιμο και $\angle ΔΕΒ = 15°$.



14. Τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Οι πλευρές AB και $ΒΓ$ είναι αντίστοιχα πλευρές κανονικού εξαγώνου και ισοπλεύρου τριγώνου, εγγεγραμμένων στο κύκλο (O, R). Αν $R = 1$ cm, να υπολογίσετε:
   (α) το μήκος της πλευράς $ΑΓ$
   (β) τον λόγο των εμβαδών του τριγώνου και του κυκλικού δίσκου (O, R)
   (γ) τα εμβαδά των τριών κυκλικών τμημάτων που ορίζονται από τις πλευρές του τριγώνου και περιέχονται στις γωνίες του.

15. Να υπολογίσετε το μέτρο των άγνωστων γωνιών στα πιο κάτω σχήματα:

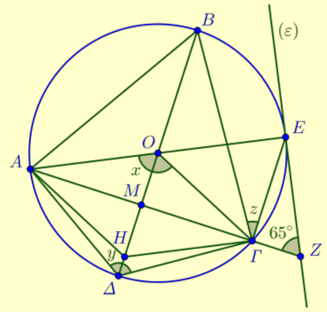
(α)



$x = \angle BA\Delta,\ \ y = \angle A\Delta\Gamma,\ \ z = \angle \Delta\Gamma B$

$\angle BA\Gamma - \angle B\Gamma A = 10°$

(β)



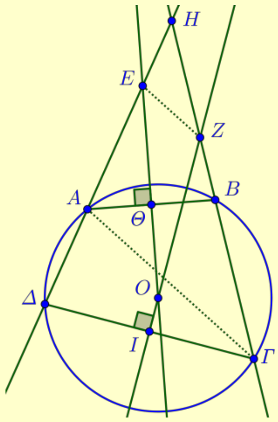
(ε) εφαπτομένη κύκλου στο E

$AO \parallel \Gamma H,\ \ O\Gamma \parallel AH$

$x = \angle AO\Gamma,\ \ y = \angle A\Delta\Gamma,\ \ z = \angle B\Gamma E$

16. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,ρ). Η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο P. Να αποδείξετε ότι τα σημεία B,Γ,O,P είναι ομοκυκλικά.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού



1. Δίνεται εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Έστω $Θ, Ι$ τα μέσα των πλευρών $ΑΒ, ΓΔ$ αντίστοιχα. Οι μεσοκάθετες των τμημάτων $ΑΒ, ΓΔ$ τέμνουν τις ευθείες $ΑΔ, ΓΒ$ στα σημεία $Ε$ και $Ζ$, αντίστοιχα. Αν $Η$ το σημείο τομής των $ΑΔ, ΒΓ$, να αποδείξετε ότι:
   (α) τα ζεύγη των τριγώνων $ΗΑΒ$, $ΗΔΓ$ και $ΕΑΘ$, $ΖΓΙ$ είναι όμοια
   (β) η $ΕΖ$ είναι παράλληλη με την $ΑΓ$.

2. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $(Ο, ρ)$, το ύψος του $ΒΔ$ και το μέσο $Μ$ του $ΒΓ$. Αν $Ρ$ το σημείο τομής των ευθειών $ΔΜ$ και $ΑΟ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΒΡΟΜ$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\angle Α = 90°)$. Φέρουμε τον κύκλο διαμέτρου $ΑΓ$ και ονομάζουμε $Θ$ το σημείο τομής του με την υποτείνουσα $ΒΓ$. Έστω $Κ$ τυχαίο σημείο του ημικυκλίου $ΑΓ$, στο οποίο δεν ανήκει το $Θ$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\angle ΓΚΘ$ τέμνει ξανά τον κύκλο στο σημείο $Λ$ και η προέκταση της $ΓΚ$ τέμνει την ευθεία $ΑΒ$ στο σημείο $Τ$, να αποδείξετε ότι:
   (α) τα σημεία $Κ, Τ, Β, Θ$ είναι ομοκυκλικά
   (β) η ευθεία $ΓΛ$ είναι παράλληλη με την διχοτόμο της γωνίας $\angle ΓΒΑ$.

4. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου $ΑΒ$ και δύο σημεία του $Γ$ και $Δ$. Αν $Ε$ και $Ζ$ οι προβολές των $Γ$ και $Δ$ πάνω στην $ΑΒ$ και $Η$ η προβολή του $Α$ πάνω στην ευθεία $ΔΓ$, να αποδείξετε ότι $ΑΗ^2 = ΑΕ \cdot ΑΖ$.

5. Έστω $Μ$ το μέσο του ημικυκλίου διαμέτρου $ΑΒ$. Παίρνουμε το $Θ$ να είναι ένα τυχαίο σημείο του τμήματος $ΜΒ$. Η προέκταση της $ΑΘ$ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο $Κ$. Αν $Ι$ είναι η προβολή του $Μ$ πάνω στην $ΑΘ$, να αποδείξετε ότι:
   (α) $\angle ΜΚΒ = 135°$
   (β) $ΑΙ = ΙΚ + ΚΒ$

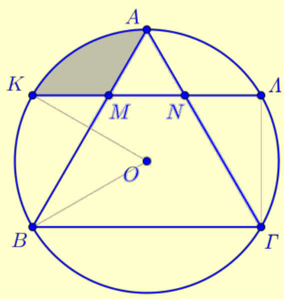
6. Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ > ΑΔ)$.Ο κύκλος $(Α, ΑΔ)$ τέμνει την πλευρά $ΑΒ$ στο σημείο $Ε$ και την προέκτασή της στο σημείο $Ζ$. Φέρουμε την εφαπτομένη από το σημείο $Γ$ του κύκλου $(Α, ΑΔ)$ και έστω $Η$ το σημείο επαφής. Αν $Θ$ το σημείο τομής των ευθειών $ΖΗ$ και $ΓΒ$, να αποδείξετε ότι τα σημεία $Δ, Ε, Θ$ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

7. Κανονικό εξάγωνο $ΑΒΓΔΕΖ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και έστω $K, Λ, M, N, P, Σ$ τα μέσα των πλευρών του.
   (α) Να αποδείξετε ότι το $ΚΛΜΝΡΣ$ είναι κανονικό εξάγωνο με κέντρο το O.
   (β) Να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δυο κανονικών εξαγώνων είναι $\frac{3}{4}$.
   (γ) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του R, το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου στο εξάγωνο $ΚΛΜΝΡΣ$.

8. Έστω AB πλευρά κανονικού ν −γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (K, R). Φέρουμε ακτίνα $ΚΓ \parallel AB$ και από το μέσο $Δ$ του τόξου $\widehat{AB}$ φέρουμε παράλληλη ευθεία (ε) προς τη χορδή $ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι το μέρος του κυκλικού δίσκου που περιέχεται μεταξύ των παράλληλων (ε) και $ΒΓ$ έχει εμβαδόν ίσο προς το $\frac{1}{\nu}$ του εμβαδού του κυκλικού δίσκου.

9. Θεωρούμε ημικύκλιο διαμέτρου AB και μεταβλητό σημείο $Γ$ που διατρέχει το AB. Ημιευθεία $Γx$ είναι κάθετη στην AB και τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο $Σ$. Στην $Γx$ παίρνουμε σημείο M, τέτοιο ώστε $AM = AΣ\sqrt{2}$. Φέρουμε ευθεία κάθετη στην AM στο σημείο M που τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο $Δ$.
   (α) Να αποδείξετε ότι $AΔ = 2AB$.
   (β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου M, καθώς το σημείο $Γ$ μεταβάλλεται.
   (γ) Να αποδείξετε ότι το μήκος της γραμμής που γράφει το M ισούται με το μήκος του ημικυκλίου διαμέτρου AB.

10. Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισόπλευρο εγγεγραμμένο στον κύκλο (O, R), τα σημεία $K, Λ$ είναι τα μέσα των τόξων $\widehat{AB}, \widehat{AΓ}$, αντίστοιχα, και η ευθεία $KΛ$ τέμνει τις πλευρές $AB, AΓ$ στα σημεία M, N, αντίστοιχα.



   (α) Να αποδείξετε ότι $\angle AMK = 120°$.
   (β) Να αποδείξετε ότι $KM = MN = NΛ = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.
   (γ) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του R το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου μικτόγραμμου τριγώνου AMK.

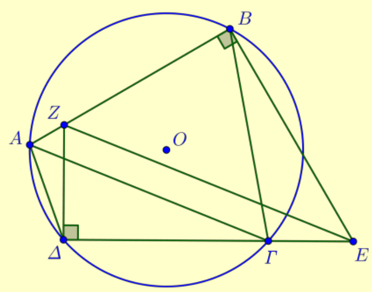
11. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\angle A = 90°)$ και $Δ, E, Z$ τα μέσα των πλευρών $AB, AΓ, ΒΓ$, αντίστοιχα. Έστω P σημείο της υποτείνουσας $(P \neq Z)$. Αν η μεσοκάθετη του AP τέμνει τις ευθείες $ZΔ, ZE$ στα σημεία $Λ, K$, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
   (α) τα σημεία $P, K, Λ, Z$ είναι ομοκυκλικά
   (β) $\angle PKΛ = \angle ΛΔE$.

12. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και P τυχαίο εσωτερικό σημείο του ύψους $ΑΔ$ του τριγώνου ($Δ \in ΒΓ$). Από το σημείο P φέρουμε $PE \perp AB$ και $PZ \perp AΓ$ (E, Z τα ίχνη των καθέτων πάνω στις πλευρές $AB, AΓ$ αντίστοιχα).
   (α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AEPZ$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
   (β) Αν (ε) είναι η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του $AEPZ$ στο σημείο A, να αποδείξετε ότι $(\varepsilon) \parallel BΓ$.
   (γ) Αν BI το ύψος του τριγώνου $ABΓ$ ($I \in AΓ$), να αποδείξετε ότι $\angle ABI = \angle AΔI$.
   (δ) Αν H το μέσο του AB, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου EHZ διέρχεται και από το μέσο $Θ$ του $AΓ$.

13. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ABΓ$ και έστω $BΔ$ η διχοτόμος της γωνίας $\angle ABΓ$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AΔB$ τέμνει την πλευρά $BΓ$ στο σημείο Z. Η διχοτόμος της γωνίας $\angle AΔZ$ τέμνει την AZ στο σημείο $Θ$ και η κάθετη από το σημείο $Δ$ προς την $BΓ$ τέμνει την $BΓ$ στο σημείο I. Να αποδείξετε ότι $\angle AΔΘ = \angle ΘIZ$.

14. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ABΓ$. Ο κύκλος διαμέτρου AB τέμνει το ύψος $ΓΓ'$ και την προέκτασή του στα σημεία M και N και ο κύκλος διαμέτρου $AΓ$ τέμνει το ύψος BB' και την προέκτασή του στα σημεία P και K. Αν A' το ίχνος του ύψους από την κορυφή A του τριγώνου πάνω στην $BΓ$ και H το ορθόκεντρο του τριγώνου, να αποδείξετε ότι:
   (α) τα τρίγωνα ANH, HMA' είναι όμοια και ισχύει $HM \cdot HN = HA \cdot HA'$.
   (β) τα σημεία M, N, P, K είναι ομοκυκλικά.

15. Στο διπλανό σχήμα, το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι κατασκευασμένο έτσι, ώστε οι κάθετες στις ευθείες AB στο B και στην $ΓΔ$ στο $Δ$ τέμνουν την προέκταση της $ΔΓ$ στο E και την AB στο Z. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $AΓ, ZE$ είναι παράλληλες.



16. Δίνεται τετράγωνο $ABΓΔ$ και μια τυχαία ευθεία που τέμνει τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, ΓΔ$ στα σημεία $K, Λ$, αντίστοιχα. Έστω M τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος $KΛ$. Φέρουμε τους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων AMK, $ΛMΓ$ και ονομάζουμε N το δεύτερο σημείο τομής τους. Να αποδείξετε ότι το σημείο βρίσκεται πάνω στην διαγώνιο $AΓ$ του τετραγώνου.

17. Σε ένα τετράπλευρο $ABΓΔ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο, η διαγώνιος $AΓ$ περνά από το μέσο της διαγωνίου $BΔ$. Αν $AB = 10$, $AΔ = 12$ και $ΔΓ = 11$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $BΓ$.

18. (α) Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και (I,ρ) ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου. Έστω $Δ, Ε, Ζ$ τα σημεία επαφής του κύκλου (I,ρ) με τις πλευρές $ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ$ του τριγώνου, αντίστοιχα. Αν συμβολίσουμε με $\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ την ημιπερίμετρο του τριγώνου $ΑΒΓ$,να αποδείξετε ότι $ΒΔ = ΒΖ = \tau - \beta$.

    (β) Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ περιγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Να αποδείξετε ότι οι εγγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΑΒΔ, ΓΒΔ$ εφάπτονται πάνω στη $ΒΔ$ στο ίδιο σημείο.

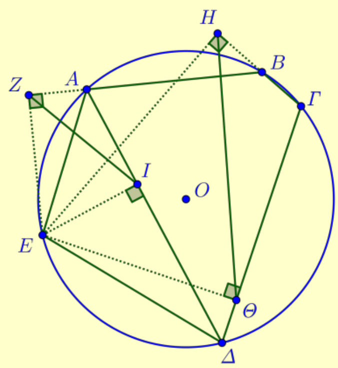
19. Τα πλήθη ν_1, ν_2 των πλευρών δυο κανονικών πολυγώνων είναι ρίζες των εξισώσεων $\nu^3 - 5\nu^2 - \nu + 5 = 0$, $2\nu - 9 = \sqrt{\nu - 4}$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα πολύγωνα είναι όμοια.

20. Ένα κανονικό ν –γωνο και ένα κανονικό μ –γωνο, με $\nu > \mu$, είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο. Να αποδείξετε ότι:

    (α) $\lambda_\nu < \lambda_\mu$ (β) $\lambda_\nu^2 - \lambda_\mu^2 = 4\left(a_\mu^2 - a_\nu^2\right)$ (γ) $a_\nu > a_\mu$

21. Πάνω σε κύκλο (O,ρ) παίρνουμε πέντε σημεία $Α, Β, Γ, Δ, Ε$ (μια διάταξη των πέντε σημείων φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα). Φέρουμε $ΕΖ \perp ΑΒ$, $ΕΗ \perp ΒΓ$, $ΕΘ \perp ΓΔ$ και $ΕΙ \perp ΔΑ$. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{ZI}{ZE} = \frac{HE}{H\Theta}$$



ΕΝΟΤΗΤΑ 10

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

10.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

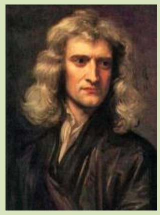
Ιστορικό Σημείωμα

Η έννοια του Διαφορικού Λογισμού, του λογισμού των παραγώγων, έχει τις ρίζες του στη αρχαία Ελλάδα, και ιδιαίτερα στον Αρχιμήδη και στο έργο του «Περι ελίκων». Ως ξεχωριστή έννοια στα Μαθηματικά θεμελιώθηκε τον 17ο αιώνα από τον Gottfried Leibniz $(1646-1716)$ και Isaac Newton $(1642-1727)$. Οι δυο αυτοί Μαθηματικοί ανέπτυξαν τη θεωρία του Διαφορικού λογισμού στην προσπάθειά τους να επιλύσουν αλγεβρικά δύο διαφορετικά προβλήματα:

(α) Ο υπολογισμός της κλίσης της εφαπτομένης μιας καμπύλης σε τυχαίο σημείο της.

(β) Ο ρυθμός μεταβολής μιας μεταβλητής ως προς μία άλλη μεταβλητή (π.χ. η μεταβολή της απόστασης ως προς τον χρόνο σε μια συνάρτηση κίνησης).

Gottfried Leibniz
$(1646-1716)$



Isaac Newton
$(1642-1727)$

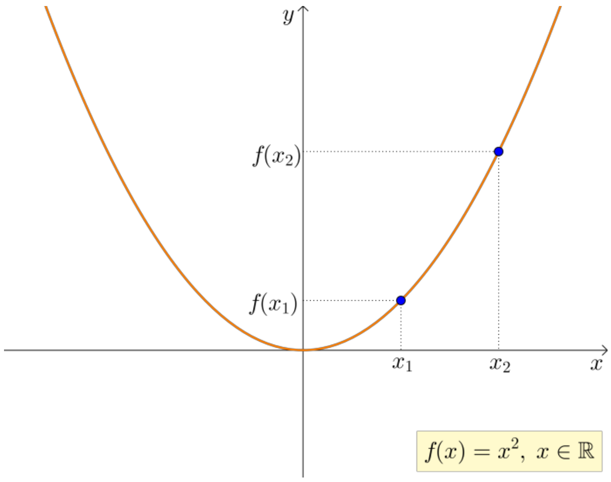
Η ανάπτυξη του Διαφορικού Λογισμού δεν σταμάτησε τον $17^{\text{ο}}$ αιώνα, αλλά συνεχίστηκε τον $18^{\text{ο}}$ αιώνα, με τη σημαντική συμβολή των αδερφών Jacob Bernoulli $(1654-1705)$ και Johann Bernoulli $(1667-1748)$, του Leonhard Euler $(1707-1783)$, του Joseph – Louis Lagrange $(1736-1813)$ και πολλών άλλων. Τέλος, η αυστηρή θεμελίωση του Διαφορικού Λογισμού έγινε από τους μαθηματικούς του $19^{\text{ου}}$ αιώνα, όπως ο Bernard Bolzano $(1781-1848)$, ο Augustin - Louis Cauchy $(1789-1857)$ και ο Karl Weierstrass $(1815-1897)$.

10.2 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ ΤΗΣ– Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΩΣ ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

10.2.1 Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο της

Διερεύνηση

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$.



Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

$x \in [x_1, x_2]$	Δx	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
$[3, 5]$	$5 - 3 = 2$	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(5) - f(3)}{2} = \dfrac{5^2 - 3^2}{2} = \dfrac{25 - 9}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$
$[3, 4]$		
$[3, 3{,}5]$		
$[3, 3{,}1]$		
$[3, 3{,}01]$		
$[3, 3{,}001]$		

Τι παρατηρείτε για τις τιμές του Δx και τις αντίστοιχες τιμές του πηλίκου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

Ορισμός

Παράγωγος μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ορίζεται το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Παρατηρήσεις

- Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν το όριο

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

  υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

- Η διαδικασία εύρεσης της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της ονομάζεται **παραγώγιση**.
- Ισχύει ότι $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ και $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$. Από τον ορισμό, έχουμε ότι:

  $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Εκτός από το συμβολισμό $f'(x_0)$, υπάρχουν και άλλοι τρόποι να συμβολίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0. Μερικοί από αυτούς είναι:

  $$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}, \qquad \frac{df(x_0)}{dx}, \qquad y'|_{x=x_0}, \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

- Από τον ορισμό του ορίου προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν ισχύει ότι:

  $$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 2x - 1,\ x \in \mathbb{R}$ στο $x_0 = 1$.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον ορισμό της παραγώγου της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$. Είναι:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης με τύπο $y = f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ στο $x_0 = 2$.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης στο $x_0 = 2$. Είναι:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4$$

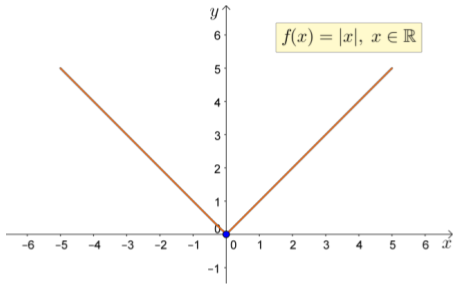
Παράδειγμα 3

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

Λύση

Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια του πηλίκου $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, καθώς το x τείνει στο 0. Έχουμε:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$



Επομένως, από τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης f σε σημείο του πεδίου ορισμού της, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

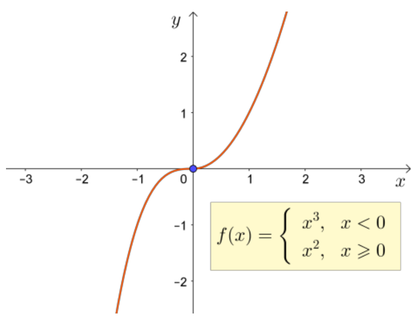
Παράδειγμα 4

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Λύση

Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια του πηλίκου $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, καθώς το x τείνει στο 0. Έχουμε:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$$



Επομένως, από τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης f σε σημείο του πεδίου ορισμού της, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Θεώρημα
Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη
Για $x \neq x_0$, έχουμε:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Οπότε:

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)\right] = \lim_{x \to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0}(x - x_0)$$
$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Δηλαδή, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0.

Παρατηρήσεις

- Το αντίστροφο του πιο πάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή, αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι κατ' ανάγκην παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα 5
Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h με τύπο:

(α) $f(x) = x^2$

(β) $g(x) = |x - 1|$

(γ) $h(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ x - 3, & x < 1 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν οι πιο πάνω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 1$. Σε περίπτωση που δεν είναι παραγωγίσιμες, να εξετάσετε αν είναι συνεχείς στο $x_0 = 1$.

Λύση

(α) Εξετάζουμε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \to 1}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1}\frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2$$

Επομένως, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, και κατ΄ επέκταση συνεχής, στο $x_0 = 1$.

(β) Εξετάζουμε αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

Επομένως, η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Εξετάζουμε αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} |x-1| = \lim_{x\to 1^+} (x-1) = 0$$
$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} |x-1| = \lim_{x\to 1^+} (1-x) = 0$$
$$g(1) = 0$$

Επομένως, η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

(γ) Εξετάζουμε αν η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+1) = 2$$
$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} (x-3) = -2$$
$$h(1) = 2$$

Επομένως, η συνάρτηση h δεν είναι συνεχής, και κατ΄ επέκταση ούτε παραγωγίσιμη, στο $x_0 = 1$.

Παράδειγμα 6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + a, & x \le 0 \\ \beta ημx, & x > 0 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Λύση

Για να είναι η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, πρέπει να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

Όμως,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 + x + a) = a$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\beta ημx) = 0$$

και $f(0) = a$.

Συνεπώς, για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 0$, πρέπει να ισχύει $a = 0$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, όταν:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+1)}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\beta ημx}{x}=\beta\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{ημx}{x}=\beta\cdot 1=\beta$$

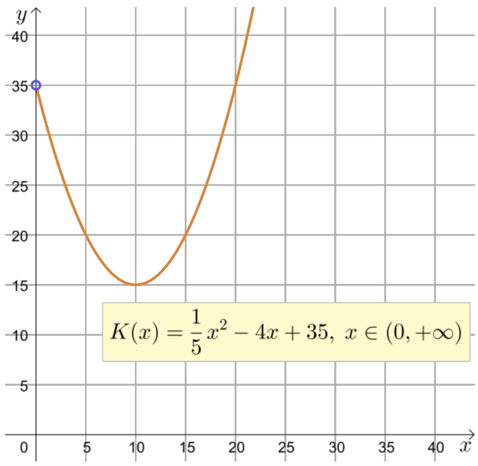
Άρα, $\beta=1$.

10.2.2 Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής

Διερεύνηση

Το κόστος παραγωγής (σε ευρώ) x μονάδων ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση K με τύπο:

$$K(x)=\frac{1}{5}x^2-4x+35,\ \ x\in(0,+\infty)$$



(α) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής του κόστους σε σχέση με τις μονάδες προϊόντος που θα παραχθούν $\left(\frac{\Delta K}{\Delta x}\right)$ στο διάστημα $[10,20]$ και να τον ερμηνεύσετε.

(β) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης K στο $x_1=15$.

Ορισμός

Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο x_0 ονομάζεται η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο x_0.

Παράδειγμα 7

Μία μπάλα ρίχνεται προς τα πάνω από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $12\ \mathrm{m/sec}$. Το ύψος h (σε μέτρα) μετά από t δευτερόλεπτα δίνεται από τον τύπο:

$$h(t) = 12t - 4t^2, t \in [0, +\infty)$$

(α) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα της μπάλας στο χρονικό διάστημα $[0, 2]$.

(β) Να υπολογίσετε τη στιγμιαία ταχύτητα της μπάλας τη χρονική στιγμή $t = 2\ \mathrm{sec}$.

Λύση

(α) Η μέση ταχύτητα της μπάλας στο χρονικό διάστημα $[0, 2]$ είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής του ύψους h ως προς τον χρόνο t στο χρονικό διάστημα $[0, 2]$. Δηλαδή:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{12 \cdot 2 - 4 \cdot 2^2 - 0}{2} = \frac{24 - 16}{2} = 4\ \mathrm{m/sec}$$

(β) Η στιγμιαία ταχύτητα της μπάλας τη χρονική στιγμή $t = 2\ \mathrm{sec}$ είναι ίση με την παράγωγο της συνάρτησης h για $t = 2\ \mathrm{sec}$. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} h'(2) &= \lim_{t \to 2} \frac{h(t) - h(2)}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{12t - 4t^2 - 8}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{-4(t - 2)(t - 1)}{t - 2} \\ &= \lim_{t \to 2} (4 - 4t) = 4 - 4 \cdot 2 = -4\ \mathrm{m/sec} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8

Τα έσοδα (σε ευρώ) από την πώληση x αντικειμένων ενός προϊόντος δίνεται από τον τύπο $E(x) = 500x - x^2,\ x \in [0, +\infty)$ και το συνολικό κόστος δίνεται από τον τύπο $K(x) = 150 + 10x,\ x \in [0, +\infty)$.

(α) Να βρείτε τη συνάρτηση $P = P(x)$ που εκφράζει το κέρδος που προκύπτει από την πώληση x αντικειμένων.

(β) Να υπολογίσετε τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής του κέρδους από την πώληση 10 αντικειμένων του προϊόντος αυτού.

Λύση

(α) Το κέρδος που προκύπτει από την πώληση x αντικειμένων δίνεται από τη διαφορά του κόστους από τα έσοδα. Δηλαδή:

$$P(x) = E(x) - K(x) = (500x - x^2) - (150 + 10x) = -x^2 + 490x - 150, x \in [0, +\infty)$$

(β) Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του κέρδους από την πώληση 10 αντικειμένων του προϊόντος αυτού είναι:

$$\begin{aligned} P'(x) &= \lim_{x \to 10} \frac{P(x) - P(10)}{x - 10} = \lim_{x \to 10} \frac{-x^2 + 490x - 150 - (-10^2 + 490 \cdot 10 - 150)}{x - 10} \\ &= \lim_{x \to 10} \frac{-x^2 + 490x - 4800}{x - 10} = \lim_{x \to 10} \frac{-(x - 480)(x - 10)}{x - 10} = \lim_{x \to 10} (480 - x) = 470 \end{aligned}$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τον παράγωγο αριθμό της συνάρτησης f με τύπο:
   (α) $f(x) = -2$ στο σημείο $x_0 = 4$
   (β) $f(x) = -3x + 1$ στο σημείο $x_0 = -1$
   (γ) $f(x) = x^2 - x + 5$ στο σημείο $x_0 = 0$
   (δ) $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο $x_0 = 1$

2. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = |x^2 - 4|$ στο σημείο με $x_0 = 2$.

3. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α)	Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x+1, & x<0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ Τότε, $f'(0) = 1$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όπου f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 τον παράγωγο αριθμό $f'(x_0)$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 5x$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε, ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της f ως προς x, όταν $x = 1$, ισούται με 7.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν $f'(x_0) < 0$, τότε ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του μεγέθους f ως προς μέγεθος x είναι θετικός όταν $x = x_0$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

4. Να υπολογίσετε τον παράγωγο αριθμό στο σημείο $x_0 = 0$ (αν υπάρχει) της συνάρτησης f με τύπο:

(α) $$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0 \\ x + \text{ημ}x, & x > 0 \end{cases}$$

(β) $$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

(γ) $$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2 \,\text{συν}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + a, & x < 2 \\ \dfrac{\beta}{x}, & x \geq 2 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

6. Η θέση ενός υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση εκφράζεται από τη συνάρτηση $S = x(t) = t^2 - 4t$, όπου ο χρόνος t μετριέται σε δευτερόλεπτα.
(α) Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του υλικού σημείου στο χρονικό διάστημα $[0, 2]$.
(β) Πόση είναι η στιγμιαία ταχύτητα του υλικού σημείου όταν $t = 2$ sec;

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 4x}{x - 2}, & x < 2 \\ -x^2 + \kappa, & x \geq 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της f στο x_0=4.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x \geq 0$. Αν ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της f στο σημείο x_0 είναι διπλάσιος από τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της f στο σημείο 4, να βρείτε την τιμή του x_0.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x + |x|$.
(α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
(β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
(γ) Ποιο συμπέρασμα προκύπτει από τα (α) και (β);

10. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

10.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αν έχουμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, μπορούμε να σκεφτούμε το σύμβολο f' ως μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού όλα εκείνα τα $x \in \Delta$, για τα οποία ισχύει $f'(x) \in \mathbb{R}$.

Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη στο $\boldsymbol{\Delta}$**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in \Delta$.

Ορισμός

Ειδικότερα:

- Η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη στο $\boldsymbol{A \subseteq \Delta}$**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.
- Η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $\boldsymbol{(\alpha, \beta) \subseteq \Delta}$**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.
- Η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $\boldsymbol{[\alpha, \beta] \subseteq \Delta}$**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και επιπλέον ισχύει:
$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

- Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και έστω A το σύνολο των σημείων του Δ, στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται με μοναδικό τρόπο στο $f'(x) \in \mathbb{R}$. Έτσι, ορίζεται η συνάρτηση
$$f' \colon A \to \mathbb{R},$$
η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της $\boldsymbol{f}$ (ή απλά παράγωγος της $\boldsymbol{f}$)**.
Δηλαδή:
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ (συμβολισμός Leibniz).

- Αν το A είναι διάστημα ή σύνολο διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f' (αν υπάρχει) λέγεται **δεύτερη παράγωγος της $\boldsymbol{f}$**. Μερικοί συμβολισμοί που χρησιμοποιούμε για τη δεύτερη παράγωγο της f είναι:
$$f''(x), \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}, \qquad f^{(2)}(x)$$

- Μπορούμε να ορίσουμε επαγωγικά τη νιοστή παράγωγο μιας συνάρτησης f ως:
$$f^{(\nu)}(x) = \left[f^{(\nu-1)}(x)\right]', \ \ \nu \in \mathbb{N}, \ \ \nu \geq 2$$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της f με τύπο $f(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Από τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης, έπεται ότι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της f με τύπο $f(x)=x^3-x,\ x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Από τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης, έπεται ότι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)]-(x^3-x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x-\Delta x)-(x^3-x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2-1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2-1) = 3x^2-1 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο συνάρτηση της f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in(-\infty,1) \\ \sqrt{x}, & x\in[1,+\infty) \end{cases}$$

Λύση

Αρχικά, θα βρούμε την παράγωγο συνάρτηση της f στα ανοικτά διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$. Ακολούθως, θα βρούμε (αν ορίζεται) την παράγωγο της συνάρτησης f στο $x_0=1$.

- Από τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης στο ανοικτό διάστημα $(-\infty,1)$, έπεται ότι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x \end{aligned}$$

- Από τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης στο ανοικτό διάστημα $(1,+\infty)$, έπεται ότι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

- Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια του πηλίκου $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, καθώς το x τείνει στο 1. Έχουμε:

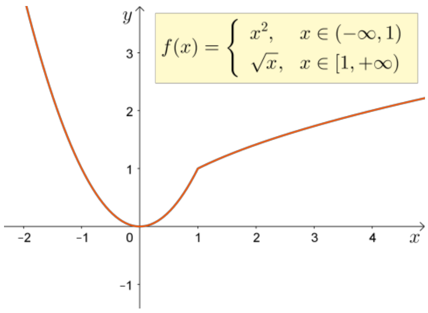
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

Επομένως, από τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης f σε σημείο του πεδίου ορισμού της, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Έτσι, έχουμε τελικά ότι:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x\in(-\infty,1) \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x\in(1,+\infty) \end{cases}$$



Δραστηριότητες

1. (α) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της f με τύπο $f(x)=3x^2-5,\ x\in\mathbb{R}$.
   (β) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f.

2. (α) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της f με τύπο $f(x)=\frac{2}{x},\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$.
   (β) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f.

3. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο συνάρτηση της f με τύπο:
   $$f(x)=x^3,\ \ x\in[-1,3)$$

10.4 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ – ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Διερεύνηση

- Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση για τις πιο κάτω συναρτήσεις:
  (α) $f(x) = 4x^2,\ \ x \in \mathbb{R}$
  (β) $f(x) = x^2 + 3x,\ \ x \in \mathbb{R}$
- Με βάση τα πιο πάνω αποτελέσματα, να προβλέψετε την παράγωγο συνάρτηση για τις πιο κάτω συναρτήσεις:
  (α) $f(x) = 5x^4,\ \ x \in \mathbb{R}$
  (β) $f(x) = x^3 + 2x,\ \ x \in \mathbb{R}$

Σε προηγούμενη υποενότητα ορίσαμε την παράγωγο συνάρτηση της f με τη βοήθεια της έννοιας του ορίου και χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό αυτό για την εύρεση των παραγώγων μερικών «απλών» συναρτήσεων. Η εύρεση της παραγώγου συνάρτησης με βάση τον ορισμό δεν είναι πάντα εύκολη διαδικασία. Ως εκ τούτου, σε αυτή την υποενότητα θα παρουσιάσουμε μερικά σημαντικά θεωρήματα, τα οποία θα μας επιτρέψουν να βρίσκουμε την παράγωγο συνάρτηση χωρίς τη χρήση του ορισμού.

Θεώρημα

Έστω $c \in \mathbb{R}$ και η σταθερή συνάρτηση f με τύπο $f(x) = c,\ \ x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Επομένως,

$$f'(x) = 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση για τις πιο κάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = 3,\ x \in \mathbb{R}$ (β) $f(x) = \pi,\ x \in \mathbb{R}$ (γ) $f(x) = -\sqrt{2},\ x \in \mathbb{R}$

Λύση

(α) $f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$
(β) $f(x) = \pi \Rightarrow f'(x) = 0$
(γ) $f(x) = -\sqrt{2} \Rightarrow f'(x) = 0$

Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = 1,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Επομένως,

$$f'(x) = 1,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^\nu,\ \nu \in \mathbb{N}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = \nu x^{\nu-1},\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη

Για την απόδειξη του θεωρήματος, θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα:

$$a^\nu - \beta^\nu = (a-\beta)(a^{\nu-1} + a^{\nu-2}\beta + \cdots + \beta^{\nu-1})$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\nu - x^\nu}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x - x)[(x+\Delta x)^{\nu-1} + (x+\Delta x)^{\nu-2}x + \cdots + x^{\nu-1}]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} [(x+\Delta x)^{\nu-1} + (x+\Delta x)^{\nu-2}x + \cdots + x^{\nu-1}] \\
&= \underbrace{x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x + \cdots + x^{\nu-1}}_{\nu-\text{προσθετέοι}} = \nu x^{\nu-1}
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$f'(x) = \nu x^{\nu-1},\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρήσεις

- Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^\nu$, όπου ν αρνητικός ακέραιος, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{0\}$ και ισχύει:
$$f'(x) = \nu x^{\nu-1},\ \ \forall x \neq 0$$
- Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:
$$f'(x) = r x^{r-1},\ \ \forall x \in (0, +\infty)$$

Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0, +\infty)$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ \ \forall x \in (0, +\infty)$$

Απόδειξη

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\right)$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Επομένως,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad \forall x\in(0,+\infty).$$

Παρατηρήσεις

- Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού:
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty\notin\mathbb{R}$$
- Για την εύρεση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$ μπορούμε να εργαστούμε και ως ακολούθως:
$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad \forall x\in(0,+\infty)$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση για τις πιο κάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x)=x^4,\ x\in\mathbb{R}$ (β) $f(x)=x^e,\ x\in\mathbb{R}$ (γ) $f(x)=\frac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$

Λύση

(α) $f(x)=x^4\Rightarrow f'(x)=4x^3$
(β) $f(x)=x^e\Rightarrow f'(x)=ex^{e-1}$
(γ) $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}\Rightarrow f'(x)=-1x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

Θεώρημα
Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:
$$f'(x)=e^x,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Απόδειξη

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x\cdot e^{\Delta x}-e^x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$e^x=\lim_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{\nu}$$

Ανισότητα Bernoulli
Για κάθε πραγματικό αριθμό $a > -1$ ισχύει: $(1+a)^\nu \geq 1 + \nu a, \forall \nu \in \mathbb{N}$

Από την ανισότητα Bernoulli έχουμε:

$$e^x = \lim_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^\nu \geq \lim_{\nu\to+\infty}\left(1+\nu\frac{x}{\nu}\right) = \lim_{\nu\to+\infty}(1+x) = 1 + x \Rightarrow e^x \geq 1 + x, \quad x > -1 \qquad (1)$$

Θέτοντας στην (1) όπου $x = -x$, προκύπτει ότι:

$$e^x \leq \frac{1}{1-x}, \qquad x < 1$$

Επομένως,

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{1-x}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

Επιπλέον,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} \leq \dfrac{e^x-1}{x} \leq 1, & x \in (-1,0) \\ 1 \leq \dfrac{e^x-1}{x} \leq \dfrac{1}{1-x}, & x \in (0,1) \end{cases}$$

Από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Έτσι:

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = e^x\lim_{\Delta x\to0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x$$

Επομένως, $f'(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Γενικά, η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = a^x \ln a, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Θεώρημα (Παράγωγος Αθροίσματος)
Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{\Delta x\to0}\frac{(f+g)(x_0+\Delta x)-(f+g)(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)+g(x_0+\Delta x)-f(x_0)-g(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)+g'(x_0)\end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

- Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, τότε ισχύει:
$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \;\; \forall x \in \Delta$$
- Το πιο πάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν οι συναρτήσεις $f_1, f_2, \dots, f_\nu$ είναι παραγωγίσιμες στο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\forall x \in \Delta$ ισχύει:
$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_\nu)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_\nu'(x)$$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^5 + x^2 - 1,\; x \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = \sqrt{x} + e^x,\; x \in (0, +\infty)$

(γ) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x} + \pi,\; x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(δ) $f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x},\; x \in (0, +\infty)$

Λύση

(α) $f(x) = x^5 + x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 + 2x$

(β) $f(x) = \sqrt{x} + e^x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^x$

(γ) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x} + \pi = x^3 - x^{-1} + \pi \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + x^{-2} = 3x^2 + \frac{1}{x^2}$

(δ) $f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x} = x^2 + x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = 2x + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 2x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Θεώρημα (Παράγωγος Γινομένου)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Απόδειξη

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \cdot g)(x_0 + \Delta x) - (f \cdot g)(x_0)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) + f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0) - f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x}$$
$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$
$$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Παρατηρήσεις

- Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, τότε ισχύει:
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \ \ \forall x \in \Delta$$
- Το πιο πάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν οι συναρτήσεις $f_1, f_2, \dots, f_\nu$ είναι παραγωγίσιμες στο $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\forall x \in \Delta$ ισχύει:
$$(f_1 f_2 \cdots f_\nu)'(x) = f_1'(x) f_2(x) \cdots f_\nu(x) + f_1(x) f_2'(x) \cdots f_\nu(x) + \cdots + f_1(x) f_2(x) \cdots f_\nu'(x)$$

Πόρισμα

Έστω f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$.
Τότε, από το πιο πάνω θεώρημα ισχύει:
$$(c \cdot f)'(x) = (c)' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x), \ \ \forall x \in \Delta$$

Παράδειγμα 4

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = 7x^5, \ x \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = xe^x, \ x \in \mathbb{R}$

(γ) $f(x) = \sqrt{x}(2e^x - 5), \ x \in (0, +\infty)$

(δ) $f(x) = x^2 e^x (x+1), \ x \in \mathbb{R}$

Λύση

(α) $f(x) = 7x^5 \Rightarrow f'(x) = 7 \cdot 5x^4 = 35x^4$

(β) $f(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

(γ) $$f(x) = \sqrt{x}(2e^x - 5) \Rightarrow f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)'(2e^x - 5) + \sqrt{x}(2e^x - 5)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2e^x - 5) + \sqrt{x}2e^x = \frac{4xe^x + 2e^x - 5}{2\sqrt{x}}$$

(δ) $$f(x) = x^2 e^x (x+1) \Rightarrow f'(x) = (x^2 e^x)'(x+1) + x^2 e^x (x+1)' = (2xe^x + x^2 e^x)(x+1) + x^2 e^x = e^x(x^3 + 4x^2 + 2x)$$

Θεώρημα (Παράγωγος Πηλίκου)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Απόδειξη

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0+\Delta x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}{\Delta x\cdot g(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)+f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x\cdot g(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot g(x_0)\right]-\left[f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\right]}{g(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x_0)-\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x_0)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x_0+\Delta x)}$$

$$= \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Παρατήρηση

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα $\Delta\subseteq\mathbb{R}$ και $g(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in\Delta$, τότε ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2},\quad \forall x\in\Delta$$

Παράδειγμα 5

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x)=\frac{x}{x-2},\ x\in\mathbb{R}-\{2\}$

(β) $f(x)=\frac{x-3}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$

Λύση

(α) $f(x)=\frac{x}{x-2}$

$$f'(x)=\frac{(x)'(x-2)-x(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{x-2-x}{(x-2)^2}=-\frac{2}{(x-2)^2}$$

(β) $f(x)=\frac{x-3}{x^2+1}$

$$f'(x)=\frac{(x-3)'(x^2+1)-(x-3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-(x-3)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+1-2x^2+6x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+6x+1}{(x^2+1)^2}$$

Παράγωγος Βασικών Συναρτήσεων	
Συνάρτηση	**Παράγωγος**
$f(x) = c,\ \ c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^{\nu}$	$f'(x) = \nu x^{\nu-1}$
$f(x) = \sqrt{x},\ \ x > 0$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^{x}$	$f'(x) = e^{x}$
$f(x) = a^{x},\ \ a > 0,\ \ a \neq 1$	$f'(x) = a^{x} \ln a$
Κανόνες Παραγώγισης	
Συνάρτηση	**Παράγωγος**
$f + g$	$(f + g)' = f' + g'$
$cf,\ \ c \in \mathbb{R}$	$(cf)' = cf'$
fg	$(fg)' = f'g + fg'$
$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^{2}}$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α)	Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0)$$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 + t^2,\ x \in \mathbb{R}$, είναι η: $$f'(x) = 2x + 2t$$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x\sqrt{x},\ x \geq 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν οι συναρτήσεις f και g δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε η $f + g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ε)	Η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 3e^x$, $x \in \mathbb{R}$ στο σημείο $x_0 = \ln 2$ ισούται με 2.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = 9,\ x \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = x^7,\ x \in \mathbb{R}$

(γ) $f(x) = e^8,\ x \in \mathbb{R}$

(δ) $f(x) = \dfrac{1}{x^4},\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(ε) $f(x) = 5^x,\ x \in \mathbb{R}$

(στ) $f(x) = -3e^x,\ x \in \mathbb{R}$

(ζ) $f(x) = \dfrac{7}{5x},\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(η) $f(x) = \dfrac{3\sqrt[4]{x^3}}{5},\ x \in (0, +\infty)$

(θ) $f(x) = 4x^2 - 6x + 7,\ x \in \mathbb{R}$

(ι) $f(x) = 2x^3 + \dfrac{8}{x} - \sqrt{5},\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(ια) $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2},\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(ιβ) $f(x) = (x+3)(4 - 2x^3)$

(ιγ) $f(x) = \dfrac{x^5}{e^{-x}},\ x \in \mathbb{R}$

(ιδ) $f(x) = e^x(2e^x - 3),\ x \in \mathbb{R}$

(ιε) $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{x^2 + 1},\ x \in \mathbb{R}$

(ιστ) $f(x) = \dfrac{(x+4)^2}{x+3},\ x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

3. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, με $a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.
   (α) Να βρείτε τις συναρτήσεις f', f'' και f'''.
   (β) Να βρείτε τη συνάρτηση f, ώστε να είναι $f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 2$.

4. Έστω δύο συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = 1$ και:

$$g(1) \neq 0, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(1) = 1$$

(α) Να δείξετε ότι $f'(1)g(1) > f(1)g'(1)$.

(β) Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις $f'(1) = g'(1) = 1$, να δείξετε ότι $f(1) \leq \frac{1}{4}$.

10.5 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{ημ}x,\ x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = \text{συν}x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη

$$\text{ημ}(A+B) = \text{ημ}A \cdot \text{συν}B + \text{συν}A \cdot \text{ημ}B$$
$$\text{συν}A = 1 - 2\text{ημ}^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

Είναι:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{ημ}(x+\Delta x) - \text{ημ}x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{ημ}x \cdot \text{συν}\Delta x + \text{συν}x \cdot \text{ημ}\Delta x - \text{ημ}x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{ημ}x \cdot \text{συν}\Delta x - \text{ημ}x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{συν}x \cdot \text{ημ}\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{ημ}x \cdot (\text{συν}\Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{συν}x \cdot \text{ημ}\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \text{ημ}x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - 2\text{ημ}^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - 1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \text{συν}x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{ημ}\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \text{ημ}x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\text{ημ}^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} + \lim_{\Delta x \to 0} \text{συν}x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{ημ}\Delta x}{\Delta x} \\
&= -\lim_{\Delta x \to 0} \text{ημ}x \cdot \lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \frac{\text{ημ}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \text{ημ}\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \text{συν}x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{ημ}\Delta x}{\Delta x} \\
&= -\text{ημ}x \cdot 1 \cdot 0 + \text{συν}x \cdot 1 = \text{συν}x
\end{aligned}$$

Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{συν}x,\ x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = -\text{ημ}x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη

$$\text{συν}(A+B) = \text{συν}A \cdot \text{συν}B - \text{ημ}A \cdot \text{ημ}B$$

Είναι:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{συν}(x+\Delta x) - \text{συν}x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{συν}x \cdot \text{συν}\Delta x - \text{ημ}x \cdot \text{ημ}\Delta x - \text{συν}x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{συν}x \cdot \text{συν}\Delta x - \text{συν}x}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{ημ}x \cdot \text{ημ}\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{συν}x \cdot (\text{συν}\Delta x - 1)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{ημ}x \cdot \text{ημ}\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \text{συν}x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{συν}\Delta x - 1}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \text{ημ}x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{ημ}\Delta x}{\Delta x} \\
&= \text{συν}x \cdot 0 - \text{ημ}x \cdot 1 = -\text{ημ}x
\end{aligned}$$

Όπως αποδείχθηκε πριν:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{συν}\Delta x - 1}{\Delta x} = 0$$

Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{εφ}x,\ x \in A = \mathbb{R} - \{x \mid \text{συν}x = 0\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει:

$$f'(x) = \text{τεμ}^2 x,\ \ \forall x \in A$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι:

$$f(x) = \text{εφ}x = \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x},\ \ \forall x \in A = \mathbb{R} - \{x \mid \text{συν}x = 0\}$$

Επομένως:

$$f'(x) = \frac{(\text{ημ}x)' \cdot \text{συν}x - \text{ημ}x \cdot (\text{συν}x)'}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}x \cdot \text{συν}x - \text{ημ}x \cdot (-\text{ημ}x)}{\text{συν}^2 x}$$
$$= \frac{\text{συν}^2 x + \text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x} = \frac{1}{\text{συν}^2 x} = \text{τεμ}^2 x$$

Θεωρήματα

- Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{σφ}x,\ x \in A = \mathbb{R} - \{x \mid \text{ημ}x = 0\}$.
  Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει:
  $$f'(x) = -\text{στεμ}^2 x,\ \ \forall x \in A$$

- Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{τεμ}x,\ x \in A = \mathbb{R} - \{x \mid \text{συν}x = 0\}$.
  Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει:
  $$f'(x) = \text{τεμ}x\ \text{εφ}x,\ \ \forall x \in A$$

- Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{στεμ}x,\ x \in A = \mathbb{R} - \{x \mid \text{ημ}x = 0\}$.
  Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει:
  $$f'(x) = -\text{στεμ}x\ \text{σφ}x,\ \ \forall x \in A$$

Οι αποδείξεις των πιο πάνω θεωρημάτων να γίνουν από τους μαθητές.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω:

(α) $f(x) = \text{στεμ}x - \sqrt{3}\text{σφ}x$ (β) $f(x) = \frac{x}{3}\text{συν}x$

(γ) $y = \frac{\text{ημ}x}{1 + \text{συν}x}$ (δ) $y = x^2 e^x \text{συν}x$

Λύση

(α) $f(x) = \text{στεμ}x - \sqrt{3}\text{σφ}x$

$$f'(x) = -\text{στεμ}x\ \text{σφ}x - \sqrt{3}(-\text{στεμ}^2 x) = -\text{στεμ}x\left(\text{σφ}x - \sqrt{3}\text{στεμ}x\right)$$

(β) $f(x) = \frac{x}{3}\text{συν}x$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\text{συν}x + \frac{x}{3}(-\text{ημ}x) = \frac{\text{συν}x - x\text{ημ}x}{3}$$

(γ) $y = \frac{\text{ημ}x}{1+\text{συν}x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{συν}x(1+\text{συν}x) - \text{ημ}x(-\text{ημ}x)}{(1+\text{συν}x)^2} = \frac{\text{συν}x + \text{συν}^2x + \text{ημ}^2x}{(1+\text{συν}x)^2}$$
$$= \frac{\text{συν}x + 1}{(1+\text{συν}x)^2} = \frac{1}{1+\text{συν}x}$$

(δ) $y = x^2e^x\text{συν}x$

1^ος^ τρόπος

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2e^x)\cdot\text{συν}x + x^2e^x\cdot\frac{d}{dx}(\text{συν}x)$$
$$= (2xe^x + x^2e^x)\text{συν}x + x^2e^x(-\text{ημ}x)$$
$$= 2xe^x\text{συν}x + x^2e^x\text{συν}x - x^2e^x\text{ημ}x$$
$$= xe^x(2\text{συν}x + x\,\text{συν}x - x\,\text{ημ}x)$$

2^ος^ τρόπος

Έχουμε δει ότι οι συναρτήσεις $f_1, f_2, \dots, f_\nu$ είναι παραγωγίσιμες στο $\varDelta \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\forall x \in \varDelta$ ισχύει:

$$(f_1f_2\cdots f_\nu)'(x) = f_1'(x)f_2(x)\cdots f_\nu(x) + f_1(x)f_2'(x)\cdots f_\nu(x) + \cdots + f_1(x)f_2(x)\cdots f_\nu'(x)$$

Επομένως, αν $f_1(x) = x^2, f_2(x) = e^x$ και $f_3(x) = \text{συν}x$, όπου $x \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\frac{dy}{dx} = (x^2)'e^x\text{συν}x + x^2(e^x)'\text{συν}x + x^2e^x(\text{συν}x)'$$
$$= 2xe^x\text{συν}x + x^2e^x\text{συν}x - x^2e^x\text{ημ}x$$
$$= xe^x(2\text{συν}x + x\,\text{συν}x - x\,\text{ημ}x)$$

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{τεμ}x,\ x \in \mathbb{R} - \{x \mid \text{συν}x = 0\}$. Να βρείτε την τιμή της f'' στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Λύση

Είναι:

$$f'(x) = \text{τεμ}x\ \text{εφ}x$$
$$f''(x) = (\text{τεμ}x\ \text{εφ}x)\text{εφ}x + \text{τεμ}x\ \text{τεμ}^2x = \text{τεμ}x\ \text{εφ}^2x + \text{τεμ}^3x$$

Συνεπώς, στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{4}$, έχουμε:

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{τεμ}\left(\frac{\pi}{4}\right)\ \text{εφ}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{τεμ}^3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}1 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+\eta\mu x, & x\leq 0\\ x\quad\quad\quad , & x>0\end{cases}$$

Λύση

- Για κάθε $x<0$ ισχύει:

$$f'(x)=2x+\sigma\upsilon\nu x$$

- Για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f'(x)=1$$

- Εξετάζουμε κατά πόσο η f παραγωγίζεται στο σημείο $x_0=0$.

  Είναι:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}&=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}+\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x}{x}\\&=\lim_{x\to 0^-}x+\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x}{x}=0+1=1\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

  Επομένως, η f παραγωγίζεται στο σημείο $x_0=0$ με $f'(0)=1$. Έτσι:

$$f'(x)=\begin{cases}2x+\sigma\upsilon\nu x, & x\leq 0\\ 1\quad\quad\quad\quad , & x>0\end{cases}$$

Παράδειγμα 4

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

$$f(x)g(x)=\eta\mu x, \forall x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f(0)=1$, τότε η συνάρτηση g είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $g'(0)=1$.

(β) αν ισχύει $f(0)=g(0)=0$, τότε μία τουλάχιστον από τις συναρτήσεις f,g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Λύση

(α) Η συνάρτηση g γράφεται ως:

$$g(x)=\frac{\eta\mu x}{f(x)},\quad \forall x\in\mathbb{R}-\{x\mid f(x)=0\}$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, για όλα τα $x\in\mathbb{R}-\{x\mid f(x)=0\}$, με:

$$g'(x)=\frac{f(x)\sigma\upsilon\nu x-f'(x)\eta\mu x}{[f(x)]^2}$$

Από την υπόθεση, έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f(0) = 1$.
Άρα, η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με:

$$g'(0) = \frac{f(0)\text{συν}0 - f'(0)\text{ημ}0}{[f(0)]^2} = \frac{1-0}{1} = 1$$

(β) Για τα x, για τα οποία οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, ισχύει:

$$f(x)g(x) = \text{ημ}x \Rightarrow f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \text{συν}x$$

Αν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$, τότε από την πιο πάνω σχέση έχουμε

$$f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 1 \Rightarrow 0 + 0 = 1,$$

που είναι αδύνατον.

Άρα, μία τουλάχιστον από τις συναρτήσεις f, g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Παράγωγος Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων	
Συνάρτηση	**Παράγωγος**
$f(x) = \text{ημ}x$	$f'(x) = \text{συν}x$
$f(x) = \text{συν}x$	$f'(x) = -\text{ημ}x$
$f(x) = \text{εφ}x$	$f'(x) = \text{τεμ}^2 x$
$f(x) = \text{σφ}x$	$f'(x) = -\text{στεμ}^2 x$
$f(x) = \text{τεμ}x$	$f'(x) = \text{τεμ}x\ \text{εφ}x$
$f(x) = \text{στεμ}x$	$f'(x) = -\text{στεμ}x\ \text{σφ}x$

Δραστηριότητες

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{τεμ}x,\ x \in A = \mathbb{R} - \{x \mid \text{συν}x = 0\}$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \text{τεμ}x\text{εφ}x$, για κάθε $x \in A$.

2. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = 2\text{ημ}x - \text{συν}x,\ x \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = x\text{εφ}x,\ x \in \mathbb{R} - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$

(γ) $f(x) = e^x\text{ημ}x,\ x \in \mathbb{R}$

(δ) $f(x) = \frac{x^4}{4}\text{τεμ}x,\ x \in \mathbb{R} - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$

(ε) $y = \frac{\text{στεμ}x}{1 + \text{σφ}x},\ x \in \mathbb{R} - \left\{\kappa\pi - \frac{\pi}{4}\right\}$

(στ) $y = \frac{1 - \text{συν}x}{1 + \eta\mu x},\ x \in \mathbb{R} - \left\{2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}\right\}$

(ζ) $y = \frac{x\text{ημ}x}{x + 1},\ x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

(η) $y = \frac{1}{\text{ημ}x\text{συν}x},\ x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\kappa\pi}{2}\right\}$

(θ) $y = x^2e^x\text{συν}x,\ x \in \mathbb{R}$

(ι) $y = \frac{x\text{ημ}x + \text{συν}x}{e^x},\ x \in \mathbb{R}$

3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{συν}x + \text{ημ}x$, $x \in \mathbb{R}$.
   (α) Να δείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$.
   (β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x\,, & x \leq 0 \\ \text{ημ}x\,, & x > 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f'.

5. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\text{ημ}x + \text{συν}x, & x < 0 \\ x^2 + x + 1\,, & x \geq 0 \end{cases}$$

6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x(\text{συν}x + \text{ημ}x)$, $x \in \mathbb{R}$.
   (α) Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

   (β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x)$$

   (γ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'''(x)}{x}$$

10.6 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Διερεύνηση

Γνωρίζουμε ότι αν $y = x^{\nu}$, τότε $\frac{dy}{dx} = \nu x^{\nu-1}$.

Για παράδειγμα, αν $y = x^2$, τότε $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Ακολουθώντας τον ίδιο κανόνα, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η παράγωγος της $y = (3x-1)^2$ είναι η $\frac{dy}{dx} = 2(3x-1)$;

(α) Έστω $y = (3x-1)^2$. Αφού αναπτύξετε το τέλειο τετράγωνο, να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$.

(β) Έστω $y = (5x+2)^2$. Αφου αναπτύξετε το τέλειο τετράγωνο, να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$.

(γ) Έστω $y = \left(u(x)\right)^2$. Ποια νομίζετε οτι θα είναι η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$;

Έστω ότι έχουμε ένα σημείο A που κινείται κατά μήκος της ευθείας με εξίσωση $y = 3x+1$, έτσι ώστε η τετμημένη του x, τη χρονική στιγμή t, να είναι $x = 2t$. Ζητάμε να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y του σημείου A ως προς το χρόνο t.

Παρατηρούμε ότι η τεταγμένη του σημείου A ως συνάρτηση του χρόνου t είναι:

$$\begin{cases} y = 3x+1 \\ x = 2t \end{cases} \Rightarrow y = 3(2t)+1 \Rightarrow y = 6t+1$$

Συνεπώς, ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του σημείου A ως προς το χρόνο t είναι:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(6t+1) = 6$$

Ένας άλλος τρόπος να αντιμετωπίσουμε το πιο πάνω πρόβλημα είναι ο ακόλουθος:

- Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του σημείου A ως προς την τετμημένη του x είναι:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x+1) = 3$$
- Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του σημείου A ως προς το χρόνο t είναι:
$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t) = 2$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{dy}{dt} = 6 = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Με τον συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς u και $u = g(x)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς x, έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $h(x) = (2x+1)^3,\ x \in \mathbb{R}$

(β) $h(x) = \text{ημ}(3x^2),\ x \in \mathbb{R}$

(γ) $h(x) = \sqrt{x^2+2x+5},\ x \in \mathbb{R}$

(δ) $h(x) = \text{συν}(\text{ημ}x),\ x \in \mathbb{R}$

Λύση

(α) Θέτουμε $u = 2x+1$. Τότε, η συνάρτηση $y = h(x)$ γράφεται $y = u^3$. Έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot u' = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτούμε τη συνάρτηση h ως τη σύνθεση $f \circ g$ δύο συναρτήσεων f και g με τύπους $f(x) = x^3$ και $g(x) = 2x+1$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = f'(2x+1) \cdot (2x+1)' = f'(2x+1) \cdot 2 \\ &= 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2 \end{aligned}$$

(β) Θέτουμε $u = 3x^2$. Τότε, η συνάρτηση $y = h(x)$ γράφεται $y = \text{ημ}u$. Έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \text{συν}u \cdot u' = \text{συν}(3x^2) \cdot (3x^2)' = \text{συν}(3x^2) \cdot 6x = 6x \cdot \text{συν}(3x^2)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτούμε τη συνάρτηση h ως τη σύνθεση $f \circ g$ δύο συναρτήσεων f και g με τύπους $f(x) = \text{ημ}x$ και $g(x) = 3x^2$. Έχουμε:

$$h'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = f'(3x^2) \cdot (3x^2)' = f'(3x^2) \cdot 6x = 6x \cdot \text{συν}(3x^2)$$

(γ) Θέτουμε $u = x^2+2x+5$. Τότε, η συνάρτηση $y = h(x)$ γράφεται $y = \sqrt{u}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+5}} \cdot (x^2+2x+5)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+5}} \cdot (2x+2) = \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτούμε τη συνάρτηση h ως τη σύνθεση $f \circ g$ δύο συναρτήσεων f και g με τύπους $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x^2 + 2x + 5$. Έχουμε:

$$h'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = f'(x^2 + 2x + 5) \cdot (x^2 + 2x + 5)'$$
$$= f'(x^2 + 2x + 5) \cdot (2x + 2) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x + 5}} \cdot (2x + 2) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$$

(δ) Θέτουμε $u = \text{ημ}x$. Τότε, η συνάρτηση $y = h(x)$ γράφεται $y = \text{συν}u$. Έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\text{ημ}u \cdot u' = -\text{ημ}(\text{ημ}x) \cdot (\text{ημ}x)' = -\text{ημ}(\text{ημ}x) \cdot \text{συν}x = -\text{συν}x \cdot \text{ημ}(\text{ημ}x)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτούμε τη συνάρτηση h ως τη σύνθεση $f \circ g$ δύο συναρτήσεων f και g με τύπους $f(x) = \text{συν}x$ και $g(x) = \text{ημ}x$. Έχουμε:

$$h'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = f'(\text{ημ}x) \cdot (\text{ημ}x)' = f'(\text{ημ}x) \cdot \text{συν}x$$
$$= -\text{ημ}(\text{ημ}x) \cdot \text{συν}x = -\text{συν}x \cdot \text{ημ}(\text{ημ}x)$$

Παράδειγμα 2

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0,\ f'(0) = 2$. Αν

$$g(x) = \frac{f(x) - x}{[f(x)]^2 + 1}, x \in \mathbb{R},$$

να υπολογίσετε την τιμή $g'(0)$.

Λύση

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$g'(x) = \frac{(f'(x) - 1)([f(x)]^2 + 1) - (f(x) - x)2f(x)f'(x)}{([f(x)]^2 + 1)^2}$$

Επομένως, από την πιο πάνω σχέση και από τις $f(0) = 2, f'(0) = 2$, έχουμε:

$$g'(0) = \frac{(f'(0) - 1)([f(0)]^2 + 1) - (f(0) - 0)2f(0)f'(0)}{([f(0)]^2 + 1)^2} = 1$$

Παράδειγμα 3

Αν η ακτίνα ενός κύκλου μεγαλώνει με ρυθμό $2\,\text{cm/min}$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής ως προς τον χρόνο:

(α) του μήκους του κύκλου

(β) του εμβαδού του κυκλικού δίσκου, όταν η ακτίνα του κύκλου είναι $10\,\text{cm}$

Λύση

(α) Αν R είναι η ακτίνα του κύκλου, τότε το μήκος του δίνεται από τη σχέση

$$\Gamma(t) = 2\pi R(t),$$

όπου t ο χρόνος σε min.

Για να βρούμε τον ρυθμό μεταβολής του μήκους του κύκλου ως προς τον χρόνο, παραγωγίζουμε την πιο πάνω σχέση ως προς t. Έχουμε:

$$\Gamma'(t) = 2\pi R'(t)$$

Γνωρίζουμε ότι η ακτίνα του κύκλου μεγαλώνει με ρυθμό $2\,\mathrm{cm/min}$, δηλαδή $R'(t) = 2\,\mathrm{cm/min}$. Άρα,

$$\Gamma'(t) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi\,\mathrm{cm/min}$$

Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του Γ παραμένει ο ίδιος οποιαδήποτε χρονική στιγμή t, δηλαδή είναι ανεξάρτητος του χρόνου.

Εναλλακτικά, με τον συμβολισμό του Leibniz, αφού $\Gamma = f(R)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς R και $R = g(t)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς t, έχουμε ότι:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d\Gamma}{dR} \cdot \frac{dR}{dt} = 2\pi \cdot 2 = 4\pi\,\mathrm{cm/min}$$

(β) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου δίνεται από τη σχέση

$$E(t) = \pi[R(t)]^2,$$

όπου t ο χρόνος σε min. Για να βρούμε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του κυκλικού δίσκου ως προς τον χρόνο, παραγωγίζουμε την πιο πάνω σχέση ως προς t. Έχουμε:

$$E'(t) = \pi 2R(t) \cdot R'(t)$$

Τη χρονική στιγμή t_1, κατά την οποία η ακτίνα είναι ίση με $10\,\mathrm{cm}$, έχουμε:

$$E'(t_1) = 2\pi R(t_1) \cdot R'(t_1) = 2\pi 10 \cdot 2 = 40\pi\,\mathrm{cm^2/min}$$

Εναλλακτικά, με τον συμβολισμό του Leibniz, αφού $E = f(R)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς R και $R = g(t)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς t, έχουμε ότι:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dR} \cdot \frac{dR}{dt} = 2\pi R \cdot 2 = 4\pi R$$

Τη χρονική στιγμή t_1, κατά την οποία η ακτίνα είναι ίση με $10\,\mathrm{cm}$, έχουμε:

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{t=t_1} = 2\pi 10 \cdot 2 = 40\pi\,\mathrm{cm^2/min}$$

Παράγωγος Σύνθετων Συναρτήσεων	
Συνάρτηση	**Παράγωγος**
$y = f^{\nu}(x)$	$\frac{dy}{dx} = \nu \cdot f^{\nu-1}(x) \cdot f'(x)$
$y = \sqrt{f(x)},\ \ f(x) > 0$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \text{ημ}f(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)\ \text{συν}f(x)$
$y = \text{συν}f(x)$	$\frac{dy}{dx} = -f'(x)\ \text{ημ}f(x)$
$y = \text{εφ}f(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)\ \text{τεμ}^2 f(x)$
$y = \text{σφ}f(x)$	$\frac{dy}{dx} = -f'(x)\ \text{στεμ}^2 f(x)$
$y = \text{τεμ}f(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)\ \text{τεμ}f(x)\ \text{εφ}f(x)$
$y = \text{στεμ}f(x)$	$\frac{dy}{dx} = -f'(x)\ \text{στεμ}f(x)\ \text{σφ}f(x)$
$y = e^{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)\ e^{f(x)}$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α)	Ισχύει $(\eta\mu 2x)' = \sigma\upsilon\nu 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{x^2}, x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f'(0) = 0$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει: $$\big(f(\eta\mu x)\big)' = f'(\eta\mu x) \cdot (\eta\mu x)'$$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(δ)	Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \eta\mu^2 x, x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) = \eta\mu 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ε)	Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E ενός τετραγώνου πλευράς a ως προς την πλευρά του ισούται με $2a$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(στ)	Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε: $$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}, \qquad f(x) > 0$$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ζ)	Ο τύπος $\big(f\big(g(x_0)\big)\big)' = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0)$ ισχύει όταν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $g(x_0)$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $y = \eta\mu 3x$

(β) $y = \sigma\upsilon\nu(x^2+1)$

(γ) $y = e^{-x}$

(δ) $y = \sigma\upsilon\nu^2 4x$

(ε) $y = e^{x^3}$

(στ) $y = e^{\eta\mu x}$

(ζ) $y = (x^3 - 2x + 6)^5$

(η) $y = \sqrt{x^2+1}$

(θ) $y = \dfrac{2}{(3x+1)^2}$

(ι) $y = \eta\mu(e^x + \sigma\upsilon\nu x)$

(ια) $y = \sigma\tau\epsilon\mu\left(\sqrt{x^3-5}\right)$

(ιβ) $y = \eta\mu 5x + e^{-4x}$

(ιγ) $y = 5^{2x}$

(ιδ) $y = 4^{-x}\, \tau\epsilon\mu 7x$

(ιε) $y = \sigma\varphi^5(x^2+1)$

(ιστ) $y = (x\, \sigma\varphi x)^4$

(ιζ) $y = x^4\, \tau\epsilon\mu^2 3x$

(ιη) $y = \dfrac{e^x}{e^x + e^{-x}}$

(ιθ) $y = \epsilon\varphi e^{3x^2}$

(κ) $y = \sqrt[7]{(x-2)^5}$

3. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f'(3) = 5$.

4. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$.

5. Η πλευρά a (σε cm) ενός τετραγώνου δίνεται συναρτήσει του χρόνου t (σε sec) από τη σχέση $a(t) = t^2 + 1, t > 0$.
   (α) Να αποδείξετε ότι τη χρονική στιγμή t το εμβαδόν $E(t)$ του τετραγώνου μεταβάλλεται με ρυθμό $E'(t) = 4t\,(t^2 + 1)$.
   (β) Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται το εμβαδόν του τετραγώνου τη στιγμή $t_0 = 1\ \mathrm{sec}$.

6. Ο όγκος ενός κύβου πλευράς a αυξάνεται με ρυθμό $7\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$. Να γράψετε τις σχέσεις που δίνουν την επιφάνεια και τον όγκο του κύβου ως συνάρτηση της πλευράς του a και να βρείτε:
   (α) τον ρυθμό μεταβολής της πλευράς του κύβου ως προς το χρόνο
   (β) τον ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας του κύβου ως προς το χρόνο
   (γ) τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η επιφάνεια του κύβου, όταν ο όγκος είναι $8\ \mathrm{cm}^3$.

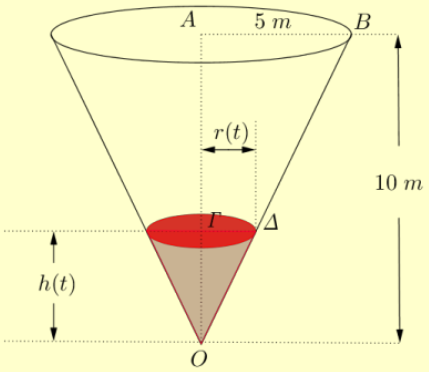
7. Σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και η τετμημένη του κάθε χρονική στιγμή t (σε λεπτά) δίνεται από τον τύπο $x(t) = 2t^2 - t,\ \ t \in [0, 10]$ ($x(t)$ σε μέτρα). Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή, πριν συμπληρωθεί το πρώτο λεπτό της κίνησης, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M γίνεται ίσος με $5\ \mathrm{m/min}$.

8. Ένα σώμα κινείται πάνω σε άξονα και η θέση του τη χρονική στιγμή t (σε sec) δίνεται από τον τύπο

$$x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 5,$$

   με $t \in [0, 6]$. Να βρείτε:
   (α) τον ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης του σώματος (την ταχύτητα) τη στιγμή $t_1 = 5\ \mathrm{sec}$
   (β) τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του σώματος (την επιτάχυνση) τη στιγμή $t_2 = 4\ \mathrm{sec}$
   (γ) ποιες χρονικές στιγμές το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο.

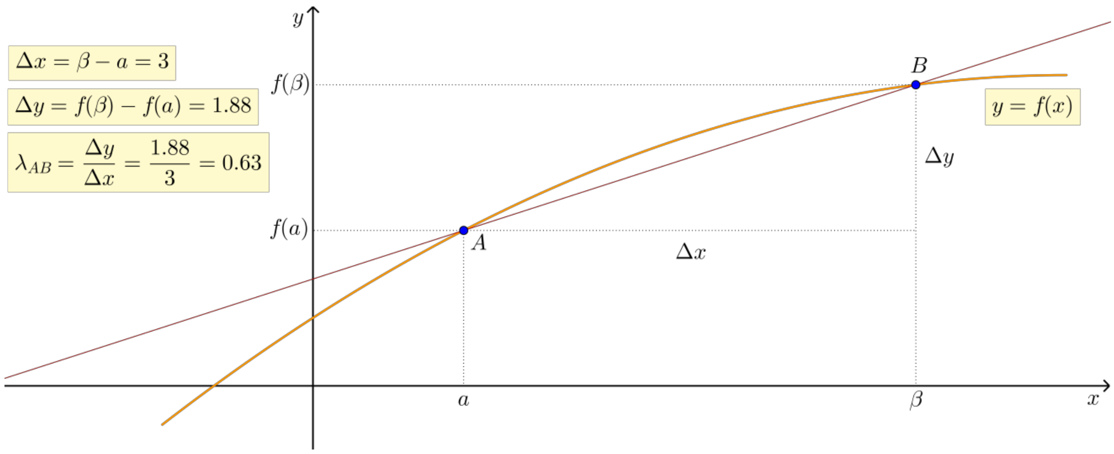
9. Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται μια κωνική δεξαμενή ύψους $10\ \mathrm{m}$ με ακτίνα βάσης $5\ \mathrm{m}$. Η δεξαμενή γεμίζει με νερό με ρυθμό $2\ \mathrm{m}^3/\mathrm{min}$. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο ανεβαίνει η στάθμη του νερού τη χρονική στιγμή που βρίσκεται σε ύψος $4\ \mathrm{m}$.



10.7 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«BLyk_En10_Efaptomeni.ggb»*.

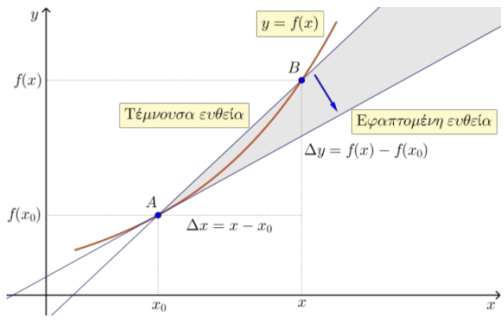


- Να μετακινείτε το σημείο B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f προς το μέρος του σταθερού σημείου A της γραφικής παράστασης της f. Τι παρατηρείτε για τις τιμές της κλίσης (λ_{AB}) της ευθείας που διέρχεται από τα A και B, καθώς το β «πλησιάζει» το a είτε από δεξιά είτε από αριστερά;

- Τι παρατηρείτε για τη θέση της πιο πάνω ευθείας, όταν το σημείο B συμπέσει με το σημείο A;

- Ποια είναι η τιμή της κλίσης της ευθείας στη θέση αυτή;

Στο πιο κάτω σχήμα, τα σημεία της γραφικής παράστασης $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x, f(x))$ είναι διαφορετικά.



Καθώς το x τείνει στο x_0, το σημείο B τείνει να ταυτιστεί με το σημείο A και η ευθεία AB τείνει να γίνει εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A.

Ορισμός

Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, το οποίο περιέχει το x_0. Αν το όριο

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ και έχει κλίση λ ονομάζεται **εφαπτομένη ευθεία** της συνάρτησης f στο σημείο A.

Σχόλιο

Από τον πιο πάνω ορισμό, προκύπτει ότι η τιμή της παραγώγου της συνάρτησης f στο x_0 είναι ίση με την κλίση λ της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$.

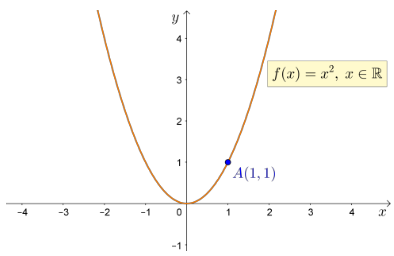
Δηλαδή:

$$\lambda = f'(x_0)$$

Παράδειγμα 1

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε την κλίση λ της εφαπτόμενης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1, 1)$.



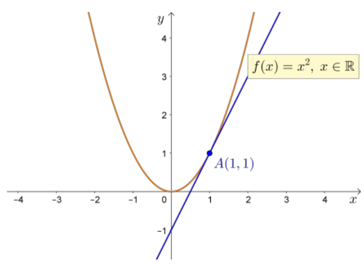
Λύση

Έχουμε:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

Επομένως:

$$\lambda = f'(1) = 2$$



Παράδειγμα 2

Να βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0, +\infty)$ στο σημείο της με $x_0 = 4$.

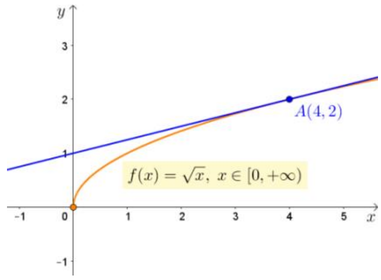
Λύση

Έχουμε:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Επομένως:

$$\lambda = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$



Παράδειγμα 3

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ στο σημείο $A(1,1)$.

Λύση

Έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

Επομένως, $\lambda = f'(1) = -\frac{2}{1} = -2$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1,1)$ είναι η:

$$y - 1 = -2(x - 1) \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$$

Παράδειγμα 4

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $A(4,5)$ διέρχεται από το σημείο $B(7,0)$. Να υπολογίσετε την τιμή $f'(4)$.

Λύση

Υπολογίζουμε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(4,5)$, αφού γνωρίζουμε ότι διέρχεται και από το σημείο $B(7,0)$. Είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{5-0}{4-7} = -\frac{5}{3}$$

Από τον ορισμό της παραγώγου της f στο $x_0 = 4$, έχουμε ότι $f'(4) = \lambda_{AB} = -\frac{5}{3}$.

Ορισμός

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και ισχύει μία από τις πιο κάτω συνθήκες

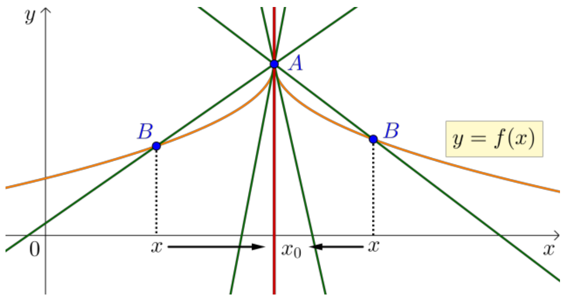
(α) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \ \ (\text{ή} - \infty)$

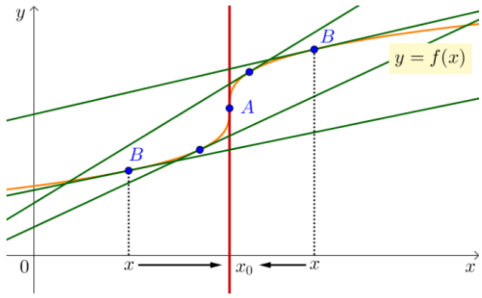
(β) $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$

(γ) $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$

τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη ευθεία** της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ την κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$.

Στα πιο κάτω σχήματα, παρουσιάζονται δύο περιπτώσεις, στις οποίες οι συναρτήσεις f είναι συνεχείς, δεν είναι παραγωγίσιμες, αλλα έχουν κατακόρυφη εφαπτομένη στο x_0.





Παράδειγμα 5

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 0\\ \sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f (αν αυτή ορίζεται) στο σημείο της $A(0,0)$.

Λύση

Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f (αν ορίζεται) στο σημείο της $A(0,0)$, πρέπει να υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια του πηλίκου

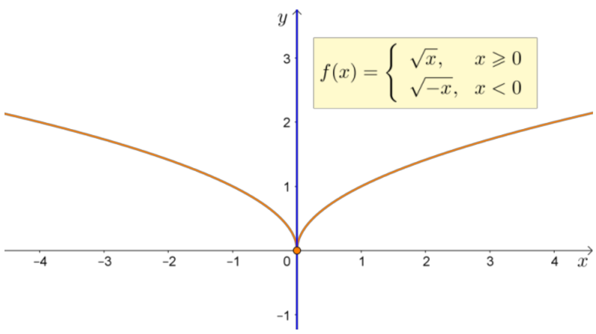
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0},$$

καθώς το $x\to 0$. Έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

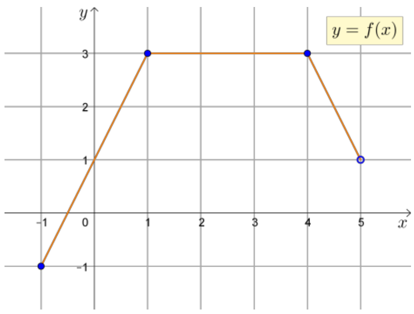
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}}{\left(\sqrt{-x}\right)^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{-x}}=+\infty$$

Επομένως, η εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0,0)$ είναι η κατακόρυφη ευθεία $x=0$.



Παράδειγμα 6

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της f'.



Λύση

Από τον ορισμό, προκύπτει ότι η τιμή της παραγώγου της συνάρτησης f στο x_0 είναι ίση με την κλίση λ της συνάρτησης f στο σημείο της $A\big(x_0, f(x_0)\big)$.

- Για $x_0 \in [-1, 1)$, έχουμε ότι:

$$f'(x_0) = \frac{3-(-1)}{1-(-1)} = \frac{4}{2} = 2$$

- Για $x_0 \in (1, 4)$, έχουμε ότι:

$$f'(x_0) = \frac{3-3}{4-1} = \frac{0}{3} = 0$$

- Για $x_0 \in (4, 5)$, έχουμε ότι:

$$f'(x_0) = \frac{1-3}{5-4} = \frac{-2}{1} = -2$$

- Για $x_0 = 1$, έχουμε ότι:

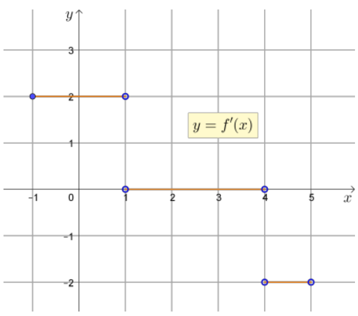
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0 \end{cases}$$

  Επομένως, η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

- Για $x_0 = 4$, έχουμε ότι:

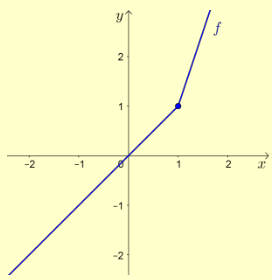
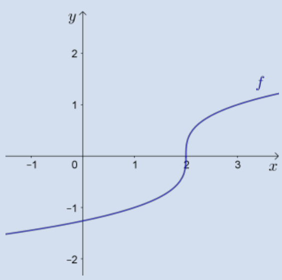
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -2 \end{cases}$$

  Επομένως, η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 4$.



Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α)	Η παράσταση $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},\ \ h\neq 0,$$ εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big)$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Έστω: $$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=0$$ Η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη στο $x_0=2$, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2,$$ τότε $f'(2)=0$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(δ)	Δίνεται συνάρτηση f με τύπο: $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 0\\ \sqrt{-x}+1, & x<0\end{cases}$$ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κατακόρυφη εφαπτομένη την ευθεία $x=0$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ε)	Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $(1,1)$. 	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(στ)	Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(2,0)$. 	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Να βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=x^2+4$ στο σημείο της $A(2,8)$.

3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f (αν αυτή ορίζεται) στο σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ για καθεμιά από τις πιο κάτω συναρτήσεις:

   (α) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ στο $A\big(1, f(1)\big)$

   (β) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 3, & x < 0 \\ 3x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$ στο $A\big(0, f(0)\big)$

   (γ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x - 1}\,, & x \geq 1 \\ -\sqrt[3]{1 - x}, & x < 1 \end{cases}$ στο $A(1, 0)$

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,, & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

   Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $A(1,1)$.

5. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{x+1},\ \ x > -1$$

   στο σημείο της A σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

   Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A και την εξίσωση της κάθετης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο αυτό.

6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2ax + \beta + a\,, & x \geq 2 \\ \dfrac{\gamma}{x+1}, & x < 2 \end{cases}$$

   Να υπολογίσετε τις τιμές των $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A\big(2\,, f(2)\big)$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $2x + y - 1 = 0$.

10.8 ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

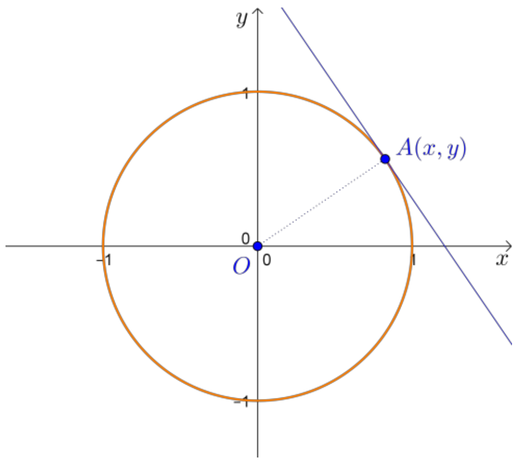
Διερεύνηση

- Μια συνάρτηση $y = f(x)$ επαληθεύει την εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$.

  (α) Λύνοντας τον τύπο $x^2 + y^2 = 1$ ως προς y (δύο περιπτώσεις), να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της κάθε περίπτωσης ξεχωριστά.

  (β) Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ μπορεί να γραφεί και ως $x^2 + f(x)^2 = 1$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης, να βρείτε την παράγωγο f'.

- Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ παριστάνει κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με μία μονάδα.



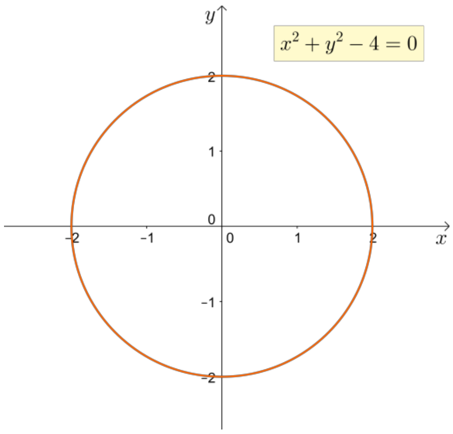
Αν $A(x, y)$ είναι τυχαίο σημείο στον κύκλο, να υπολογίσετε:

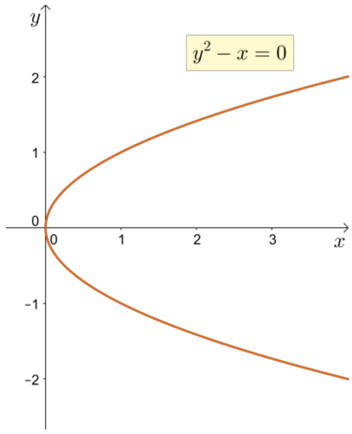
(γ) την κλίση της ακτίνας OA

(δ) την κλίση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο A

Πώς συνδέονται οι απαντήσεις σας στα (α) και (β) με το (δ);

Οι περισσότερες συναρτήσεις με τις οποίες ασχοληθήκαμε στις προηγούμενες υποενότητες περιγράφονταν με εξισώσεις της μορφής $y = f(x)$. Πολλές φορές ερχόμαστε αντιμέτωποι με εξισώσεις οι οποίες δεν δίνονται από μια σχέση της μορφής $y = f(x)$, αλλά από μια εξίσωση της μορφής $F(x, y) = 0$, όπως για παράδειγμα οι $x^2 + y^2 - 4 = 0$ και $y^2 - x = 0$. Καθεμιά από αυτές ορίζει μια σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές x και y, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται πιο κάτω.

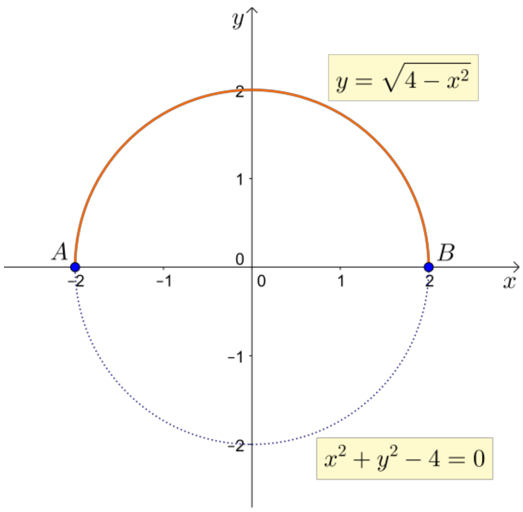




Οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων $x^2 + y^2 - 4 = 0$ και $y^2 - x = 0$ δεν αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

Για παράδειγμα, το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ της γραφικής παράστασης της $x^2 + y^2 - 4 = 0$ στο πιο κάτω διάγραμμα είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με τύπο $y = f(x)$ με πεδίο ορισμού το $[-2, 2]$. Πράγματι:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2} \Rightarrow y = \sqrt{4 - x^2},\ \ x \in [-2, 2],\ \ y \geq 0$$

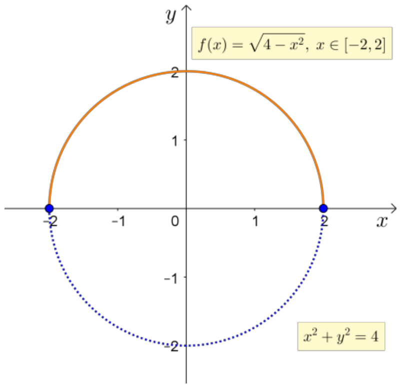


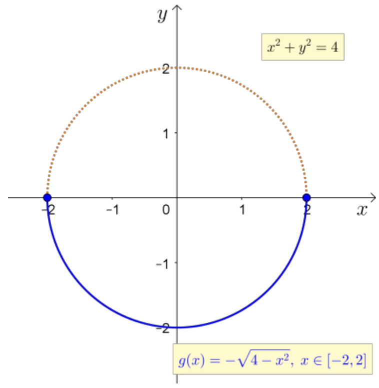
Ορισμός

Κάθε εξίσωση της μορφής $F(x,y)=0$ **ορίζει πεπλεγμένα** τη συνάρτηση f σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, όταν το ζεύγος $\big(x,f(x)\big)$ επαληθεύει την εξίσωση αυτή για κάθε $x \in \Delta$.

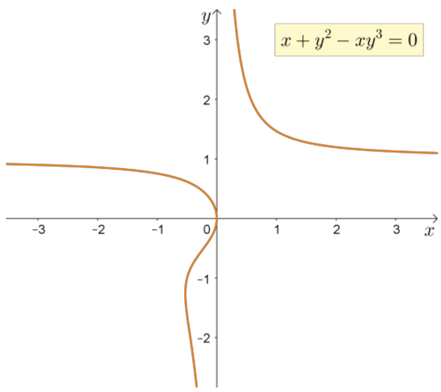
Για παράδειγμα:

(α) Η εξίσωση $x^2+y^2=4$ ορίζει πεπλεγμένα τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4-x^2}, x \in [-2,2]$ και τη συνάρτηση $g(x)=-\sqrt{4-x^2},\ x \in [-2,2]$.





(β) Η εξίσωση $x+y^2-xy^3=0$ ορίζει πεπλεγμένα συναρτήσεις με κατάλληλους περιορισμούς, αλλά δεν μπορεί να λυθεί ως προς y.



Για να βρούμε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ μιας συνάρτησης που ορίζεται από εξίσωση της μορφής $F(x,y)=0$, ακολουθούμε την πιο κάτω διαδικασία:

- Θεωρούμε τη μεταβλητή y παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς τη μεταβλητή x.
- Παραγωγίζουμε τον κάθε όρο της εξίσωσης ως προς x.
- Λύνουμε ως προς $\frac{dy}{dx}$.

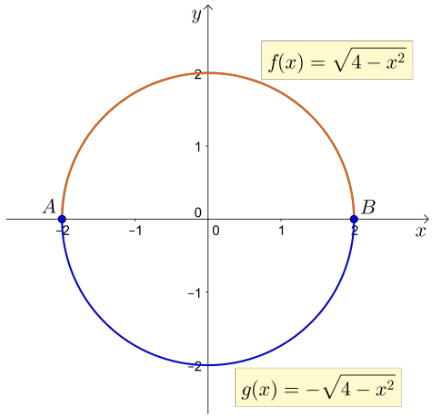
Παράδειγμα 1

Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης που ορίζεται από την εξίσωση $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Λύση

1ος τρόπος

Η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4 = 0$ ορίζει πεπλεγμένα τις συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ και $g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$, αντίστοιχα, στο διάστημα $[-2, 2]$.



Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες για κάθε $x \in (-2, 2)$. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κατακόρυφες εφαπτομένες στα σημεία $x = \pm 2$, συνεπώς δεν είναι παραγωγίσιμες στα σημεία αυτά.

Είναι:

$$y = f(x) = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{y}, \quad \forall x \in (-2, 2)$$

$$y = g(x) = -\sqrt{4 - x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{y}, \quad \forall x \in (-2, 2)$$

Συνεπώς, η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης που ορίζεται από την $x^2 + y^2 - 4 = 0$ είναι:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Η πιο πάνω σχέση ισχύει αν $y \neq 0$ ή ισοδύναμα $x \neq \pm 2$.

2ος τρόπος

Είναι:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 4) = \frac{d}{dx}(0) \Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

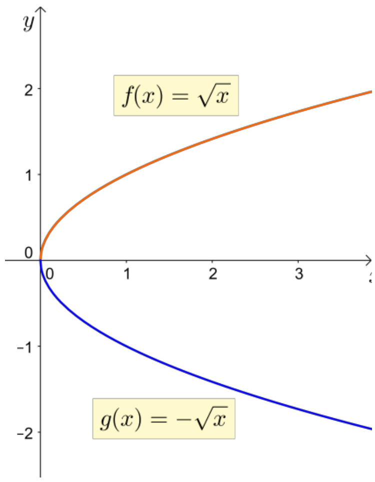
Παράδειγμα 2

Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης που ορίζεται από την εξίσωση $y^2 - x = 0$.

Λύση

1ος τρόπος

Η εξίσωση $y^2 - x = 0$ ορίζει πεπλεγμένα τις συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = -\sqrt{x}$, αντίστοιχα, στο διάστημα $[0, +\infty)$.



Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κατακόρυφη εφαπτομένη στο σημείο $x = 0$, συνεπώς δεν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο αυτό.

Είναι:

$$y = f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y}, \quad \forall x \in (0, +\infty)$$
$$y = g(x) = -\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y}, \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

Συνεπώς, η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ είναι:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

Η πιο πάνω σχέση ισχύει αν $y \neq 0$ ή ισοδύναμα $x \neq 0$.

2ος τρόπος

Είναι:

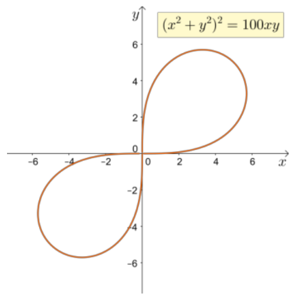
$$y^2 - x = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(y^2 - x) = \frac{d}{dx}(0) \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}, \quad y \neq 0$$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης που ορίζεται από την εξίσωση $3(x^2+y^2)^2=100xy$.

Λύση

Στο παράδειγμα αυτό, είναι δύσκολο να μετασχηματίσουμε την εξίσωση $F(x,y)=0$ σε εξίσωση της μορφής $y=f(x)$.



Επομένως:

$$\begin{aligned} 3(x^2+y^2)^2=100xy &\Rightarrow \frac{d}{dx}(3(x^2+y^2)^2)=\frac{d}{dx}(100xy) \\ &\Rightarrow 6(x^2+y^2)\cdot(2x+2yy')=100y+100xy' \\ &\Rightarrow 3(x^2+y^2)yy'-25xy'=25y-3x(x^2+y^2) \\ &\Rightarrow y'=\frac{25y-3x(x^2+y^2)}{3(x^2+y^2)y-25x} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4

Αν η συνάρτηση $y=g(x)$ επαληθεύει την εξίσωση $x^3+y^3=6xy$, να υπολογίσετε την κλίση λ της εφαπτομένης της g στο σημείο $A(3,3)$.

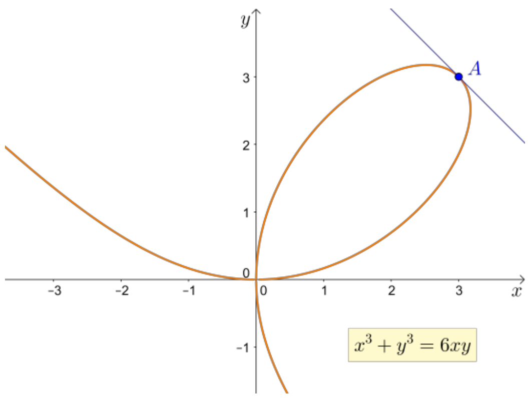
Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} x^3+y^3=6xy &\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^3+y^3)=\frac{d}{dx}(6xy)\Rightarrow 3x^2+3y^2y'=6y+6xy' \\ &\Rightarrow 3y^2y'-6xy'=6y-3x^2\Rightarrow 3y'(y^2-2x)=3(2y-x^2) \\ &\Rightarrow y'=\frac{2y-x^2}{y^2-2x},\quad y^2\neq 2x \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\lambda=y'|_{A(3,3)}=\frac{2\cdot 3-3^2}{3^2-2\cdot 3}=\frac{-3}{3}=-1$$



Παράδειγμα 5

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της καμπύλης με εξίσωση $y^2 - 6x^2 + 4y + 19 = 0$ στο σημείο της $A(2,1)$.

Λύση

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης της καμπύλης ως προς x. Έχουμε:

$$2y\frac{dy}{dx} - 12x + 4\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow (2y+4)\frac{dy}{dx} = 12x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6x}{y+2}\,, \qquad y \neq -2$$

Η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $A(2,1)$ είναι:

$$\lambda = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{A(2,1)} = \frac{6\cdot 2}{1+2} = 4$$

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $A(2,1)$ είναι:

$$y - 1 = 4(x-2) \Rightarrow y - 1 = 4x - 8 \Rightarrow 4x - y - 7 = 0$$

Παράδειγμα 6

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης με εξίσωση $9x^2 + 16y^2 = 144$, στα οποία η κλίση της γραφικής παράστασης της καμπύλης είναι ίση με $\frac{9}{16}$.

Λύση

Έστω $A(\alpha,\beta)$ ένα τέτοιο σημείο. Το σημείο A ανήκει στην γραφική παράσταση της δοσμένης καμπύλης. Επομένως:

$$9\alpha^2 + 16\beta^2 = 144 \qquad (1)$$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης της καμπύλης ως προς x. Έχουμε:

$$18x + 32y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 32y\frac{dy}{dx} = -18x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{16y}\,, \qquad y \neq 0$$

Η κλίση της γραφικής παράστασης της καμπύλης στο σημείο A είναι ίση με $\frac{9}{16}$. Επομένως:

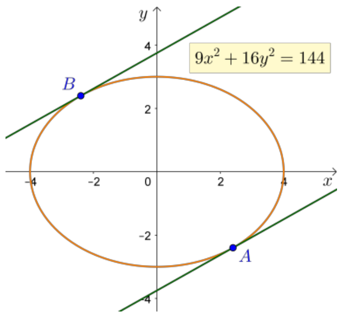
$$\lambda = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\alpha,\beta)} = -\frac{9\alpha}{16\beta} = \frac{9}{16} \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \qquad (2)$$

Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων (1), (2). Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} 9\alpha^2 + 16\beta^2 &= 144 \\ \alpha + \beta &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 9\alpha^2 + 16\beta^2 &= 144 \\ \alpha &= -\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow 9\beta^2 + 16\beta^2 = 144 \Rightarrow 25\beta^2 = 144$$

$$\Rightarrow \beta = \pm\frac{12}{5}\,,\ \ \alpha = \mp\frac{12}{5}$$

Επομένως, τα σημεία στα οποία η κλίση της γραφικής παράστασης της καμπύλης με εξίσωση $9x^2 + 16y^2 = 144$ είναι ίση με $\frac{9}{16}$ είναι τα $A\left(\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}\right), B\left(-\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right)$.



Δραστηριότητες

1. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων που ορίζονται από τις πιο κάτω εξισώσεις:
   (α) $x^2 + 2yx - y^2 = 0$
   (β) $yx^2 = 3x + y$
   (γ) $y = x + xe^y$
   (δ) $y^2 - 2y\sqrt{1 + x^2} + x^2 = 0$
   (ε) $\etaμx + \etaμy = 1$

2. Αν $x^2 y = συν(ax)$, να δείξετε ότι:
$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + (a^2x^2 + 2)y = 0$$

3. Αν $e^y = e^x + e^{-x}$, να δείξετε ότι:
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$$

4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης με εξίσωση $xy = 2^x$ στο σημείο της με $x = 1$.

5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης με εξίσωση $y^2 = 4x$ στο σημείο της με $x = 4$ και τεταγμένη θετική.

6. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ στο σημείο της $A(3συνθ,\ 2ημθ)$.

7. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2y = 1$, στα οποία η κλίση της γραφικής παράστασης της καμπύλης είναι ίση με -1.

8. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της καμπύλης με εξίσωση $xy^5 + x^5y = 1$ δεν δέχεται οριζόντιες εφαπτομένες.

9. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης με εξίσωση $x^2 - xy + y^2$=9, στα οποία η εφαπτόμενη ευθεία είναι κατακόρυφη.

10.9 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΥ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ

Διερεύνηση 1

Οι συντεταγμένες κάθε σημείου $P(x, y)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = f(x)$, δίνονται από τις σχέσεις $x = 2t$ και $y = 4t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τις παραγώγους $\frac{dy}{dt}$ και $\frac{dx}{dt}$.

(β) Πώς συνδέεται η παράγωγος $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4t^2)$ με τις πιο πάνω παραγώγους;

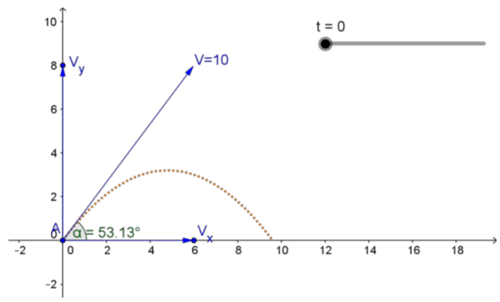
(γ) Να γράψετε την πιο πάνω συνάρτηση στη μορφή $y = f(x)$ (καρτεσιανή μορφή) και να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$.

(δ) Να ελέγξετε αν πόσο τα αποτελέσματα στο (β) και (γ) για την $\frac{dy}{dx}$ είναι τα ίδια.

(ε) Ποια είναι η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο της που δημιουργείται για $t = 2$;

Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«BLyk_En10_Parametrikes.ggb»* και να μεταβάλλετε τον δρομέα t.



Το σημείο $A(6t,\ 8t - 5t^2), 0 \leq t \leq 1{,}6$ περιγράφει την θέση (τις συντεταγμένες) μιας μπάλας που κτυπήθηκε από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $v_0 = 10\ \mathrm{m/s}$ υπό γωνία $\theta = 53{,}1°$ σε κάθε χρονική στιγμή t. Οι συνιστώσες της ταχύτητας σε κάθε χρονική στιγμή δίνονται από τους τύπους $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$ και το αντίστοιχο μέτρο της ταχύτητας είναι $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

(α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας της μπάλας τις χρονικές στιγμές $t = 0{,}5$, $t = 0{,}8$ και $t = 1$.

(β) Να σχολιάσετε το μέτρο της ταχύτητας της μπάλας στην αρχή $(t = 0)$ και στο τέλος $(t = 1{,}6)$ της πτήσης της.

(γ) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ συναρτήσει του t και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμά της για κάθε χρονική στιγμή t.

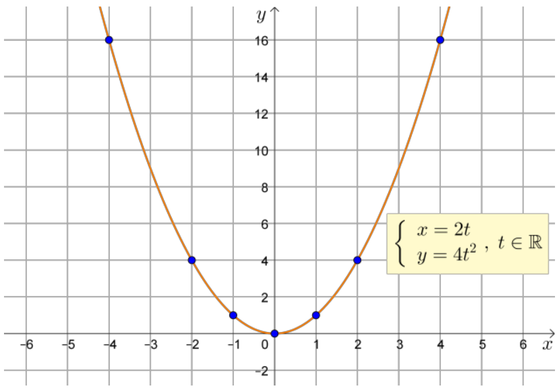
Πολλές φορές εκφράζουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου $A(x, y)$ συναρτήσει μιας τρίτης μεταβλητής, έστω t.

Για παράδειγμα:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Δίνοντας κατάλληλες τιμές στο t, κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της καμπύλης.

t	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	16	4	1	0	1	4	16



Ορισμός

Οι συντεταγμένες ενός σημείου (x, y) μιας καμπύλης περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in \Delta \subseteq \mathbb{R}$$

Οι πιο πάνω εξισώσεις ονομάζονται **παραμετρικές εξισώσεις** της καμπύλης αυτής.

Παρατηρήσεις

- Η μεταβλητή t είναι η παράμετρος της καμπύλης και το Δ είναι το σύνολο στο οποίο παίρνει τιμές η παράμετρος αυτή.
- Σε κάποιες περιπτώσεις μπορούμε τις παραμετρικές εξισώσεις μιας καμπύλης, με κατάλληλη απαλοιφή της παραμέτρου, να τις μετατρέψουμε σε καρτεσιανή εξίσωση.

Παράδειγμα 1

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των παραμετρικών καμπυλών:

(α) $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t \end{cases}, t \in [-1, 2]$ (β) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases}, \; t \in [0, +\infty)$

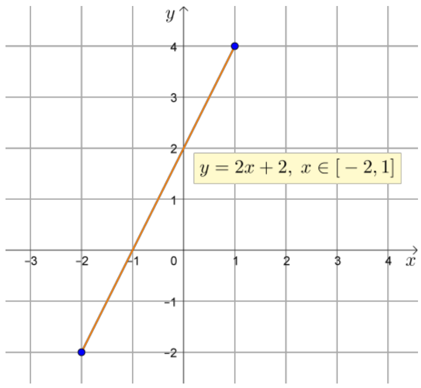
Λύση

(α) Αρχικά, παρατηρούμε ότι:

$$t \in [-1, 2] \Rightarrow \begin{cases} -2 \le t - 1 \le 1 \\ -2 \le 2t \le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-2, 1] \\ y \in [-2, 4] \end{cases}$$

Ακολούθως, απαλείφουμε την παράμετρο t και καταλήγουμε σε μια εξίσωση της μορφής $y = f(x)$. Συγκεκριμένα:

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x + 1 \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow y = 2(x + 1) \Rightarrow y = 2x + 2, \;\; x \in [-2, 1]$$

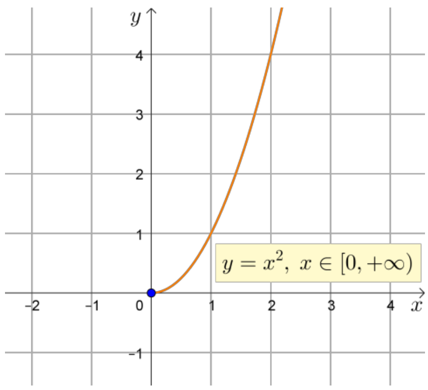


(β) Αρχικά, παρατηρούμε ότι:

$$t \ge 0 \Rightarrow \sqrt{t} \ge 0 \Rightarrow x, y \in [0, +\infty)$$

Ακολούθως, απαλείφουμε την παράμετρο t και καταλήγουμε σε μια εξίσωση της μορφής $y = f(x)$. Συγκεκριμένα:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow y = x^2, \;\; x \in [0, +\infty)$$



Μια καμπύλη, η οποία περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in \Delta \subseteq \mathbb{R},$$

είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in \Delta$, όταν οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο t_0. Σε ένα σημείο μιας καμπύλης, όπου το y είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς x, οι παράγωγοι dy/dt, dx/dt και dy/dx συνδέονται με τον κανόνα:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Αν επιπλέον ισχύει $dx/dt \neq 0$, μπορούμε να διαιρέσουμε και να επιλύσουμε την πιο πάνω σχέση ως προς dy/dx.

Έστω μια καμπύλη, η οποία ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in \Delta \subseteq \mathbb{R}$$

Αν οι παράγωγοι dy/dt, dx/dt και dy/dx ορίζονται στο $t \in \Delta$ και ισχύει $dx/dt \neq 0$, τότε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Παρατήρηση

Αν οι παραμετρικές εξισώσεις μιας καμπύλης ορίζουν το y ως συνάρτηση του x που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον πιο πάνω τύπο στην παράγωγο dy/dx, για να υπολογίσουμε την d^2y/dx^2. Έχουμε:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Έστω μια καμπύλη, η οποία ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in \Delta \subseteq \mathbb{R}$$

Αν οι παράγωγοι dy/dt, dx/dt, dy/dx και d^2y/dx^2 ορίζονται και ισχύει $dx/dt \neq 0$, τότε:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{ή} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

Παράδειγμα 2

Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t^2 - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε την τιμή της $\frac{dy}{dx}$ για $t = 6$.

Λύση

Είναι:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{2}=t$$

Συνεπώς:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=6}=6$$

Παράδειγμα 3

Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x=t-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Να βρείτε την παράγωγο $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\frac{dx}{dt}=1-2t,\qquad \frac{dy}{dt}=1-3t^2$$

1ος τρόπος

Είναι

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-3t^2}{1-2t}$$

και:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{1-3t^2}{1-2t}\right]}{1-2t}=\frac{\frac{-6t(1-2t)-(1-3t^2)(-2)}{(1-2t)^2}}{1-2t}=\frac{6t^2-6t+2}{(1-2t)^3}$$

2ος τρόπος

Είναι

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=(1-3t^2)\cdot\frac{1}{1-2t}=\frac{1-3t^2}{1-2t}$$

και:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left[\frac{1-3t^2}{1-2t}\right]\cdot\frac{1}{1-2t}\\&=\frac{-6t(1-2t)-(1-3t^2)(-2)}{(1-2t)^2}\cdot\frac{1}{1-2t}\\&=\frac{6t^2-6t+2}{(1-2t)^3}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4

Καμπύλη (C) ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(α) Να δείξετε ότι η καμπύλη (C) έχει δύο εφαπτόμενες στο σημείο $(3,0)$ και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης (C), στα οποία η καμπύλη παρουσιάζει οριζόντια εφαπτομένη.

Λύση

(α) Το σημείο $(3,0)$ ανήκει στην καμπύλη (C). Παρατηρούμε ότι για $x = 3$ έχουμε $t = \pm\sqrt{3}$. Αντικαθιστώντας τις τιμές $\pm\sqrt{3}$ του t στη δεύτερη εξίσωση, παίρνουμε $y = 0$. Επομένως, το σημείο $(3,0)$ της (C) λαμβάνεται για δύο διαφορετικές πραγματικές τιμές της παραμέτρου t, τις $\pm\sqrt{3}$.

Έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3(t^2-1)}{2t}, \qquad \forall t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Επομένως, οι κλίσεις των εφαπτομένων της (C) στο $(3,0)$ είναι:

$$\lambda_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{3}} = \frac{3(3-1)}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\lambda_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\sqrt{3}} = \frac{3(3-1)}{-2\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

Άρα, οι εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης (C) στο σημείο της $(3,0)$ είναι οι:

$$(\varepsilon_1): y = \sqrt{3}(x-3) \ \text{ και } \ (\varepsilon_2): y = -\sqrt{3}(x-3)$$

(β) Η καμπύλη (C) παρουσιάζει οριζόντια εφαπτομένη στα σημεία που είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

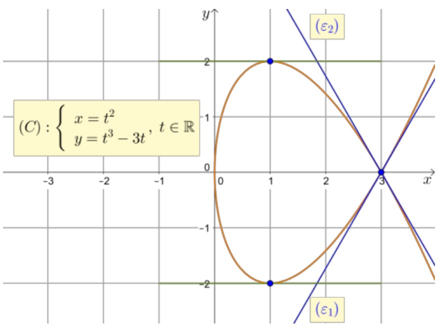
$$\frac{dy}{dx} = 0, \qquad t \neq 0$$

Έχουμε:

$$\frac{3(t^2-1)}{2t} = 0 \Rightarrow t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$$

- Για $t = -1$, έχουμε $x = 1$ και $y = 2$.
- Για $t = 1$, έχουμε $x = 1$ και $y = -2$.

Άρα, τα σημεία στα οποία η καμπύλη (C) παρουσιάζει οριζόντια εφαπτομένη είναι τα $(1,2)$ και $(1,-2)$.



Δραστηριότητες

1. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των καμπυλών:

   (α) $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}, \quad t \in [0, +\infty)$

   (β) $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$

   (γ) $\begin{cases} x = 3t \\ y = 9t^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

   (δ) $\begin{cases} x = \text{τεμ}^2 t - 1 \\ y = \text{εφ}t \end{cases}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

   (ε) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^2 + 7 \end{cases}, \quad t \in [-3, 10]$

2. Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = t - \text{ημ}t \\ y = 2 + \text{συν}t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi]$$

   (α) Να υπολογίσετε την τιμή της $\frac{dy}{dx}$ για $t = \frac{\pi}{3}$.

   (β) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{d^2y}{dx^2}$.

3. Καμπύλη (C) ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-2t} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

   (α) Να εξετάσετε αν το σημείο $A(1, 1)$ ανήκει στην καμπύλη.

   (β) Να δείξετε ότι $y^{-2} \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx} - 2 = 0$.

4. Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2 + t}{1 + 2t} \\ y = \dfrac{3 + 2t}{t} \end{cases}, \quad t \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$$

   (α) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+2t)^2}{t^2}$.

   (β) Να υπολογίσετε την τιμή της $\frac{d^2y}{dx^2}$ για $x = 0$.

5. Καμπύλη (K) ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = t^2 - 2 \\ y = \dfrac{t^3}{3} - t \end{cases} \quad , \quad t \in (0,+\infty)$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης (K) στο σημείο της με $t = 3$.

6. Καμπύλη (K) ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = 2\text{ημ}2t \\ y = 2\text{ημ}t \end{cases} \quad , \quad t \in [0, \pi]$$

Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης (K), στα οποία έχει οριζόντιες και κατακόρυφες εφαπτομένες.

7. Καμπύλη (K) ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

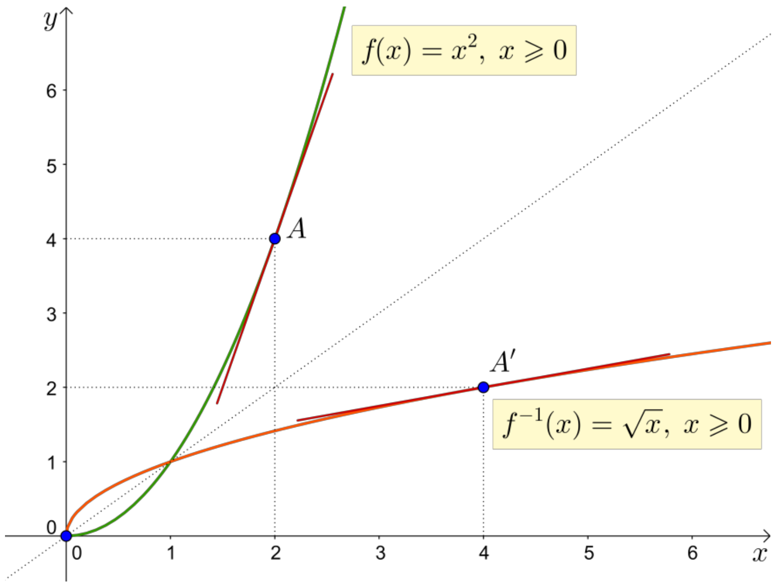
$$\begin{cases} x = 1 + \text{ημ}t \\ y = \text{συν}^2 t \end{cases} \quad , \quad t \in (0, \pi)$$

Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης (K) στο σημείο της με $x = \frac{5}{4}$.

10.10 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Διερεύνηση

Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f' με τύπους $f(x) = x^2, x \geq 0$ και $f^{-1}(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$.



(α) Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι παραγωγίσιμες.

(β) Να υπολογίσετε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

i. f στο σημείο A

ii. f^{-1} στο σημείο A'

Ποια είναι η σχέση που συνδέει τις δύο αυτές τιμές;

(γ) Να επιλέξετε ένα σημείο B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Αφού βρείτε το συμμετρικό του σημείου B (έστω B') ως προς την ευθεία $y = x$, να επαναλάβετε το ερώτημα (β) για τα σημεία B και B'. Τι παρατηρείτε;

(δ) Τι παρατηρείτε στην περίπτωση που το σημείο B του ερωτήματος (γ) είναι το $(0,0)$;

(ε) Αν $\Gamma(a, \beta)$ και $\Gamma'(\beta, a)$ με $a, \beta > 0$, να διατυπώσετε μια σχέση που να συνδέει τις τιμές $f'(a)$ και $(f^{-1})'(\beta)$.

Έστω η συνάρτηση f με τύπο:

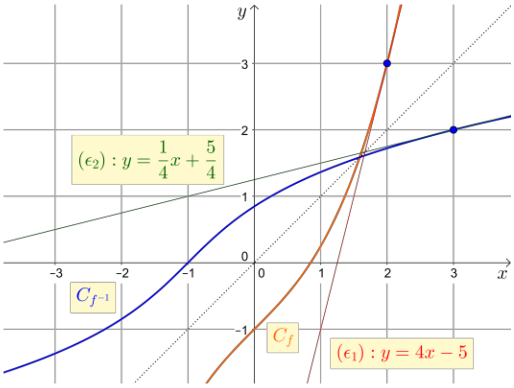
$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 1, x \in \mathbb{R}$$

(α) Ποια είναι η τιμή της αντίστροφης της συνάρτησης f στο σημείο $x = 3$;

(β) Ποια είναι η τιμή της παραγώγου της αντίστροφης της συνάρτησης f στο σημείο $x = 3$;

(γ) Ποια σχέση συνδέει τις τιμές $f'\big(f^{-1}(3)\big)$ και $(f^{-1})'(3)$;

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται ως $1-1$ και επί του $\mathbb{R}$.



(α) Παρατηρούμε ότι $f(2) = 3$, άρα $f^{-1}(3) = 2$.

(β) Η τιμή της παραγώγου της αντίστροφης της συνάρτησης f στο σημείο $x = 3$ ισούται με την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1} στο σημείο της $(3, 2)$. Άρα:

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{4}$$

(γ) Η τιμή της παραγώγου της συνάρτησης f στο σημείο $x = f^{-1}(3) = 2$ ισούται με την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(2, 3)$. Άρα:

$$f'(2) = 4$$

Οι τιμές $f'\big(f^{-1}(3)\big)$ και $(f^{-1})'(3)$ είναι αντίστροφες, αφού:

$$f'\big(f^{-1}(3)\big) \cdot (f^{-1})'(3) = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Παρατήρηση

Οι παράγωγοι f' και $(f^{-1})'$ υπολογισμένες στα σημεία $f^{-1}(3)$ και 3, αντίστοιχα, είναι αντίστροφες. Αυτό δεν αποτελεί ειδική περίπτωση, αλλά ισχύει γενικά.

Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $\varDelta \subseteq \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, τότε ισχύουν τα πιο κάτω:

(α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $\varDelta$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $f(\varDelta)$.

(β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα που περιέχει το x_0, $x_0 \in \varDelta$ με $f'(x_0) \neq 0$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$.

Η απόδειξη είναι εκτός στόχων του βιβλίου γι' αυτό παραλείπεται.

Θεώρημα (Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα $\varDelta \subseteq \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα x για τα οποία ισχύει $f'\big(f^{-1}(x)\big) \neq 0$ και:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$$

Απόδειξη

Στο προηγούμενο θεώρημα έχουμε δει ότι αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f αντιστρέφεται, τότε η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα x για τα οποία ισχύει $f'\big(f^{-1}(x)\big) \neq 0$.

Γνωρίζουμε ότι:

$$f\big(f^{-1}(x)\big) = x \Rightarrow \frac{d}{dx}\Big(f\big(f^{-1}(x)\big)\Big) = 1 \Rightarrow f'\big(f^{-1}(x)\big) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$
$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}, \quad f'\big(f^{-1}(x)\big) \neq 0$$

Παρατήρηση

Ο τύπος $y = f^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμος με τον $x = f(y)$. Παραγωγίζουμε ως προς x και παίρνουμε:

$$x = f(y) \Rightarrow \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\big(f(y)\big) \Rightarrow 1 = f'(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$$

Παραγωγίζουμε ως προς y και παίρνουμε:

$$x = f(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = f'(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Παράδειγμα 1

Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=x^2,\ x\in[0,+\infty)$ είναι η $f^{-1}(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty)$. Να δείξετε ότι:

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,,\quad x\in(0,+\infty)$$

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f'(x)=2x$.
Από το θεώρημα της παραγώγου αντίστροφης συνάρτησης, έχουμε:

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}=\frac{1}{f'\big(\sqrt{x}\big)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,,\quad \forall x\in(0,+\infty)$$

Σημείωση

Η συνάρτηση f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, αφού $f'\big(f^{-1}(0)\big)=2\sqrt{0}=0$.

Παράδειγμα 2

Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $y=f(x)$, η οποία είναι αντιστρέψιμη. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(2,4)$ και η κλίση της στο A ισούται με $1/3$, να υπολογίσετε τη κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1} για $x=4$.

Λύση

Η γραφική παράσταση της αντιστρέψιμης συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(2,4)$. Συνεπώς, $f(2)=4$ και $f^{-1}(4)=2$.
Επιπλέον, η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(2,4)$ είναι $f'(2)=1/3$.
Επομένως, η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1} για $x=4$ είναι:

$$(f^{-1})'(4)=\frac{1}{f'\big(f^{-1}(4)\big)}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

Παράγωγος λογαριθμικής συνάρτησης

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x$ και αντιστρέφεται με $f^{-1}(x)=\ln x\,, x\in(0,+\infty)$.

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},\qquad \forall x\in(0,+\infty)$$

Απόδειξη

Από το θεώρημα της παραγώγου αντίστροφης συνάρτησης, έχουμε:

$$(\ln x)'=(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}=\frac{1}{f'(\ln x)}=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x},\quad \forall x\in(0,+\infty)$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = a^x \ln a$ και αντιστρέφεται με $f^{-1}(x) = \log_a x$, $x \in (0, +\infty), a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad \forall x \in (0, +\infty), \quad a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

Απόδειξη

Από το θεώρημα της παραγώγου αντίστροφης συνάρτησης, έχουμε:

$$(\log_a x)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} = \frac{1}{f'(\log_a x)} = \frac{1}{a^{\log_a x} \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \ln(2x - 5)$, $x > \frac{5}{2}$

(β) $f(x) = 3^{2-x}$, $x \in \mathbb{R}$

(γ) $f(x) = \log(x4^x)$, $x > 0$

(δ) $f(x) = x^x$, $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

Λύση

(α) $f(x) = \ln(2x - 5) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2x - 5} \cdot 2 = \dfrac{2}{2x - 5}$

(β) $f(x) = 3^{2-x} \Rightarrow f'(x) = 3^{2-x} \cdot \ln 3 \cdot (-1) = -3^{2-x} \ln 3$

(γ) $f(x) = \log(x4^x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x4^x \ln 10} \cdot (4^x + x4^x \ln 4)$

$$= \frac{1}{x \ln 10} + \frac{\ln 4}{\ln 10} = \frac{1}{x \ln 10} + \log 4$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ιδιότητες των λογάριθμων, για να γράψουμε πιο απλά τον τύπο της συνάρτησης f, και μετά να παραγωγίσουμε:

$$f(x) = \log x + \log 4^x = \log x + x \log 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln 10} + \log 4$$

(δ) Για να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης f, λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης $y = f(x) = x^x$. Αυτό είναι εφικτό να γίνει, αφού και τα δύο μέλη της έχουν θετικό πρόσημο όταν $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Έχουμε:

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$$

Ακολούθως, παραγωγίζουμε τον κάθε όρο της πιο πάνω εξίσωσης ως προς x:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^x(\ln x + 1)$$

Δραστηριότητες

1. Με τη χρήση του θεωρήματος της παραγώγου αντίστροφης συνάρτησης, να αποδείξετε ότι:
$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \ a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

2. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $y = f(x)$, η οποία αντιστρέφεται. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-1,3)$ και η κλίση της στο A ισούται με $-1/4$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} για $x = 3$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ με τύπο:
$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$
Να υπολογίσετε την τιμή $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.

4. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:
(α) $f(x) = \ln(3x)$, $x \in (0, +\infty)$
(β) $f(x) = \ln^4 x$, $x \in (0, +\infty)$
(γ) $f(x) = \ln(x^2 - 5x)$, $x \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$
(δ) $f(x) = \ln(\eta\mu x)$, $x \in A = \{x \mid \eta\mu x > 0\}$
(ε) $f(x) = \ln(x^3 \sigma\upsilon\nu x)$, $x \in A = \{x \mid x^3 \sigma\upsilon\nu x > 0\}$
(στ) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$, $x > 1$
(ζ) $f(x) = x^2 \ln(x+8)$, $x > -8$
(η) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$
(θ) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x > 0$
(ι) $y = \log\left(\sqrt{4 - x^2}\right)$, $x \in (-2, \ 2)$
(ια) $y = \log_5\left(\sqrt[3]{5x+8}\right)$, $x \in \left(-\frac{8}{5}, +\infty\right)$
(ιβ) $y = \frac{1 + \ln x}{x^2}$, $x > 0$
(ιγ) $y = 2^{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$
(ιδ) $y = x^{\eta\mu x}$, $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

5. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση:
$$\alpha x^2 + \beta x y^2 = \ln(x^2 - 3) + 1, \ x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right), \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
Αν η εφαπτομένη ευθεία της καμπύλης στο σημείο της $A(2, 1)$ είναι παράλληλη με την ευθεία $x + y = 5$, να υπολογίσετε τις τιμές των α και β.

6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία έχει οριζόντιες εφαπτομένες.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στα οποία οι εφαπτομένες της είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

8. Καμπύλη (K) ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = e^t - 1 \\ y = \ln(1-t) \end{cases} \quad , t \in [0, 1)$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης (K) στο σημείο της με $x = 0$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \ln\left(2x + e^{3g(x)}\right), \quad x \in (0, +\infty)$$

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $g(0) = 0$, να δείξετε ότι:

$$f'(0) - 3g'(0) = 2$$

Περίληψη

1. Παράγωγος μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ορίζεται το όριο
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.
Συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

2. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

3. Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο x_0 ονομάζεται η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο x_0.

4. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $\Delta\subseteq\mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο Δ, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0\in\Delta$.
Ειδικότερα:
   - Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $A\subseteq\Delta$, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0\in A$.
   - Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(a,\beta)\subseteq\Delta$, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0\in(a,\beta)$.
   - Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[a,\beta\,]\subseteq\Delta$, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0\in(a,\beta)$ και επιπλέον ισχύει:
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}\quad\text{και}\quad\lim_{x\to \beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$$

5. Παράγωγος βασικών συναρτήσεων

Συνάρτηση	Παράγωγος
$f(x)=c,\ \ c\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^{\nu}$	$f'(x)=\nu x^{\nu-1}$
$f(x)=\sqrt{x},\ \ x>0$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=a^x,\ \ a>0,\ \ a\neq 1$	$f'(x)=a^x\ln a$

6. Κανόνες παραγώγισης

Συνάρτηση	Παράγωγος
$f+g$	$(f+g)' = f' + g'$
$cf,\ \ c \in \mathbb{R}$	$(cf)' = cf'$
fg	$(fg)' = f'g + fg'$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

7. Παράγωγος τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Συνάρτηση	Παράγωγος
$f(x) = \text{ημ}x$	$f'(x) = \text{συν}x$
$f(x) = \text{συν}x$	$f'(x) = -\text{ημ}x$
$f(x) = \text{εφ}x$	$f'(x) = \text{τεμ}^2 x$
$f(x) = \text{σφ}x$	$f'(x) = -\text{στεμ}^2 x$
$f(x) = \text{τεμ}x$	$f'(x) = \text{τεμ}x\ \text{εφ}x$
$f(x) = \text{στεμ}x$	$f'(x) = -\text{στεμ}x\ \text{σφ}x$

8. Αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Με τον συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς u και $u = g(x)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς x, έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

9. Παράγωγος σύνθετων συναρτήσεων

Συνάρτηση	Παράγωγος
$y = f^{\nu}(x)$	$\frac{dy}{dx} = \nu \cdot f^{\nu-1}(x) \cdot f'(x)$
$y = \sqrt{f(x)},\ \ f(x) > 0$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \text{ημ}f(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)\ \text{συν}f(x)$
$y = \text{συν}f(x)$	$\frac{dy}{dx} = -f'(x)\ \text{ημ}f(x)$
$y = \text{εφ}f(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)\ \text{τεμ}^2 f(x)$

$y = \sigma\varphi f(x)$	$\dfrac{dy}{dx} = -f'(x)\,\sigma\tau\varepsilon\mu^2 f(x)$
$y = \tau\varepsilon\mu f(x)$	$\dfrac{dy}{dx} = f'(x)\,\tau\varepsilon\mu f(x)\,\varepsilon\varphi f(x)$
$y = \sigma\tau\varepsilon\mu f(x)$	$\dfrac{dy}{dx} = -f'(x)\,\sigma\tau\varepsilon\mu f(x)\,\sigma\varphi f(x)$
$y = e^{f(x)}$	$\dfrac{dy}{dx} = f'(x)\,e^{f(x)}$

10. Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα $\varDelta \subseteq \mathbb{R}$, το οποίο περιέχει το x_0. Αν το όριο
$$\lambda = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ και έχει κλίση λ ονομάζεται εφαπτομένη ευθεία της συνάρτησης f στο σημείο A.

11. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και ισχύει μία από τις πιο κάτω συνθήκες

(α) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ (ή $-\infty$)

(β) $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ και $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$

(γ) $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ και $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$

τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ την κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$.

12. Κάθε εξίσωση της μορφής $F(x, y) = 0$ ορίζει πεπλεγμένα τη συνάρτηση f σε ένα διάστημα $\varDelta \subseteq \mathbb{R}$, όταν το ζεύγος $\big(x, f(x)\big)$ επαληθεύει την εξίσωση αυτή για κάθε $x \in \varDelta$.

13. Για να βρούμε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ μιας συνάρτησης που ορίζεται από εξίσωση της μορφής $F(x, y) = 0$, ακολουθούμε την πιο κάτω διαδικασία:

- Θεωρούμε τη μεταβλητή y παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς τη μεταβλητή x.
- Παραγωγίζουμε τον κάθε όρο της εξίσωσης ως προς x.
- Λύνουμε ως προς $\frac{dy}{dx}$.

14. Οι συντεταγμένες ενός σημείου (x, y) μιας καμπύλης περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής:
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \qquad t \in \varDelta \subseteq \mathbb{R},$$
Οι πιο πάνω εξισώσεις ονομάζονται παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης αυτής.

15. Έστω μια καμπύλη, η οποία ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in \Delta \subseteq \mathbb{R}$$

Αν οι παράγωγοι dy/dt, dx/dt και dy/dx ορίζονται στο $t \in \Delta$ και ισχύει $dx/dt \neq 0$, τότε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

16. Έστω μια καμπύλη, η οποία ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in \Delta \subseteq \mathbb{R}$$

Αν οι παράγωγοι dy/dt, dx/dt, dy/dx και d^2y/dx^2 ορίζονται και ισχύει $dx/dt \neq 0$, τότε:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{ή} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

17. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, τότε ισχύουν τα πιο κάτω:

(α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της Δ, τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $f(\Delta)$.

(β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα που περιέχει το x_0, $x_0 \in \Delta$ με $f'(x_0) \neq 0$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$.

18. Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα x για τα οποία ισχύει $f'\big(f^{-1}(x)\big) \neq 0$ και:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$$

19. Παράγωγος λογαριθμικής συνάρτησης

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

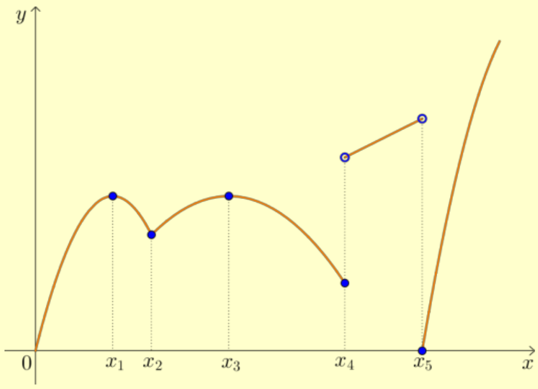
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x \in (0, +\infty), \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(α)	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$, είναι παραγωγίσιμη στο 0.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} 2x, & x>1 \\ x^2, & x\leq 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(δ)	Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\text{συν}x, x\in\ \mathbb{R}$ ισχύει $f''(0)=0$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ε)	Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A, τότε και η παράγωγος f' έχει πεδίο ορισμού το A.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(στ)	Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3+x,\ x\in\ \mathbb{R}$. Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της f ως προς x, όταν $x=1$, ισούται με 3.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ζ)	Ο αριθμός $f'(x_0)$ εκφράζει γεωμετρικά την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M\big(x_0,f(x_0)\big)$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(η)	Αν μια συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η παράγωγος f' είναι συνεχής στο x_0.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(θ)	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει: $$\Big(f\big(f(x)\big)\Big)'=\big(f'(x)\big)^2,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ι)	Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε η παράγωγος f' είναι περιττή.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ια)	Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\Delta$. Τότε η γραφική της παράσταση δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ιβ)	Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\ln x,\ x>0$ στο σημείο $\big(x_0,f(x_0)\big)$ είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y=-\frac{1}{2}x+5$, τότε $x_0=2$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ιγ)	Οι καμπύλες δύο συναρτήσεων f και g τέμνονται στο σημείο με τετμημένη x_0. Αν $f'(x_0)=g'(x_0)$, τότε οι εφαπτομένες στο σημείο αυτό έχουν τις ίδιες εξισώσεις.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



Να βάλετε σε κύκλο τη λανθασμένη πρόταση.

(α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_1.

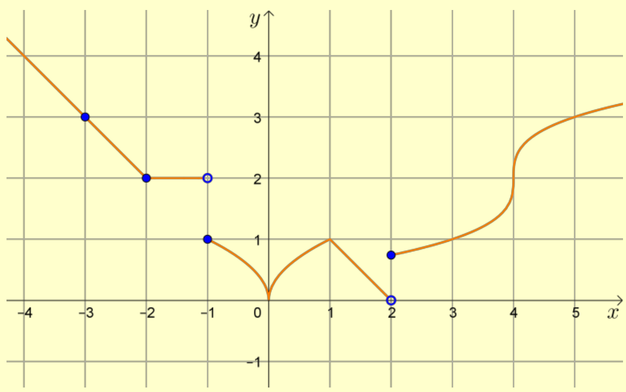
(β) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_2.

(γ) Η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη στο x_3.

(δ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_4.

(ε) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_5.

3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες:

(α) η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη

(β) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν δέχεται εφαπτομένη

(γ) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δέχεται κατακόρυφη εφαπτομένη.

4. (α) Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0;

(β) Έστω η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x\text{συν}|x| - x$. Με τη βοήθεια του ορισμού, να βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $x_0 = 0$.

5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \text{ημ}x, & x \leq 0 \\ xe^x, & x > 0 \end{cases}$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

6. Αν

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$$

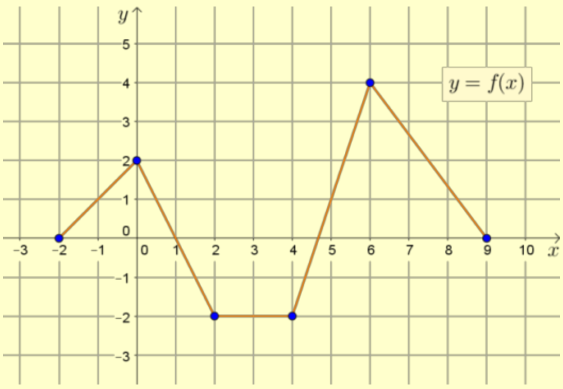
και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

7. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2, & x < 1 \\ \beta\sqrt{x}\,, & x \geq 1 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

8. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της f'.



9. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = xe^x$.

(α) Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις f' και f''.

(β) Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$af(x) + \beta f'(x) + \gamma f''(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

10. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 6$

(β) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{8}{x^2} - \ln 3$

(γ) $f(x) = 3\sqrt{x} - \text{ημ}x + 5\text{τεμ}x$

(δ) $f(x) = \text{συν}5x - \ln 5x - e^5$

(ε) $f(x) = (x+2)\ln x$

(στ) $f(x) = x^4 \text{εφ}x$

(ζ) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

(η) $y = \dfrac{x\text{ημ}x}{e^x+1}$

(θ) $y = (6x^2-5)^{12}$

(ι) $y = \text{εφ}x^2 + \text{σφ}2^x + \ln^3 x$

(ια) $y = \ln(x^3-1)$

(ιβ) $y = \sqrt{\text{ημ}^3 x}$

(ιγ) $y = \text{ημ}\left(\sqrt{x+1}\right)$

(ιδ) $y = \text{σφ}(\text{συν}x)$

(ιε) $y = e^{\text{συν}x} \cdot 3^{7x}$

(ιστ) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(ιζ) $y = \dfrac{\ln \sqrt[3]{x^3+8}}{3}$

(ιη) $y = x^{e^x}, \quad x > 0$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - 4x + 11$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, η οποία να:
   (α) είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$
   (β) είναι παράλληλη με την ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 2017$
   (γ) είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $x + 8y + 1 = 0$
   (δ) έχει σημείο επαφής το σημείο $A(6, -2)$

12. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x) = x\ln x - ax, \quad a \in \mathbb{R}$$
στο σημείο της $A\big(1, f(1)\big)$, διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε τιμή του a.

13. Δίνονται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$ και η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν ισχύει η σχέση
$$g^2(x) + \big(g'(x)\big)^2 = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
και αν $M(a, \beta)$ είναι το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h, όπου $h(x) = f(x) \cdot g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:
   (α) $g'(a) = 1$ και $g(a) + g''(a) = 0$
   (β) $g(a) = 0$

14. Το ύψος (x) της στάθμης του νερού σε ένα κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα βάσης $2\ \mathrm{cm}$ ανεβαίνει με ρυθμό $2/\pi\ \mathrm{cm/sec}$.
    (α) Να βρείτε μια σχέση που να συνδέει τον όγκο (V) του νερού με το ύψος της στάθμης του (x).
    (β) Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος του νερού μέσα στο κυλινδρικό δοχείο.

15. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ η περίμετρος αυξάνεται με ρυθμό $3\ \mathrm{cm/sec}$. Να βρείτε:
    (α) τον ρυθμό μεταβολής της πλευράς του τριγώνου
    (β) τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου, όταν αυτό είναι ίσο με $\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$

16. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων που ορίζονται από τις πιο κάτω εξισώσεις:
    (α) $x^2 + y^2 = 9$
    (β) $x^3 - xy + y^2 = 7$
    (γ) $x^3y^3 - y = x$
    (δ) $\sqrt{xy} = x^2y + 1$
    (ε) $y = \eta\mu(xy)$
    (στ) $\left(\text{ημ}(\pi x) + \text{συν}(\pi y)\right)^2 = 2$

17. Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = a + \text{συν}(\pi x)$ και $g(x) = x^2 + 3\beta x + 1$, αντίστοιχα, να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0 = 1$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ώστε:
$$f(x) + f(-x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
    Να δείξετε ότι $f''(0) = 1$.

19. Να δείξετε ότι η κάθετη ευθεία της καμπύλης με εξίσωση $x^2 + y^2 = r^2, r > 0$, σε οποιοδήποτε σημείο της διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

20. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης με εξίσωση $y^4 = y^2 - x^2$, στα οποία η εφαπτομένη ευθεία είναι οριζόντια.

21. Αν
$$e^{5y} = e^x + e^{-x},$$
    να δείξετε ότι:
$$5\frac{d^2y}{dx^2} + 25\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$$

22. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των παραμετρικών καμπυλών:

(α) $\begin{cases} x = \sigma\upsilon\nu t \\ y = \eta\mu t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi)$ (β) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t + 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

23. Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}, \quad t \neq \frac{1}{2}$$

Να βρείτε την παράγωγο $\frac{d^2y}{dx^2}$.

24. Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = \sigma\upsilon\nu t \end{cases}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

(α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της καμπύλης δεν δέχεται κατακόρυφες εφαπτομένες.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης, στα οποία δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

(γ) Να δείξετε ότι:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \frac{1}{9} y = 0$$

25. Δίνεται η συνάρτηση $f: (2, +\infty) \to (-9, +\infty)$ με τύπο $f(x) = x^2 - 4x - 5$. Να βρείτε την τιμή $(f^{-1})'(0)$.

26. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με τύπο $y = f(x)$, η οποία αντιστρέφεται. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,0)$ και η κλίση της στο A ισούται με 2, να βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} για $x = 0$.

27. Μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $a \in \mathbb{R}$ με $f'(a) = 1 + a$, να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1 + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Η μια διάσταση (x) ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου αυξάνεται με ρυθμό $3\ \mathrm{m/sec}$ και η άλλη (y) μειώνεται με ρυθμό $2\ \mathrm{m/sec}$. Όταν $x = 24\ \mathrm{m}$ και $y = 10\ \mathrm{m}$, να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής:
   (α) του εμβαδού του
   (β) της περιμέτρου του
   (γ) του μήκους της διαγωνίου του

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) + f(x^2) = 3\ln x + 4\ , x > 0$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:
$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$
   Να αποδείξετε ότι $f'(x) + f^2(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:
$$f(x) = xe^x, \quad x \in \mathbb{R}$$
   Να αποδείξετε ότι $f^{(\nu)}(x) = (x + \nu) \cdot e^x$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

5. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει
$$f(x^3) = 5x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
   να υπολογίσετε το $f''(27)$.

6. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
$$f(x^2 + x + 1) = x^3, \forall\, x \in \mathbb{R}$$
   (α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$ είναι οριζόντια.
   (β) Να υπολογίσετε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_1 = 3$.
   (γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $A\big(3, f(3)\big)$.
   (δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $(3,1)$ έχει κλίση ίση με $\frac{4}{9}$.

7. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ικανοποιεί τη σχέση:

$$2x \cdot \eta\mu x \leq x f(x) \leq \eta\mu^2 x + x^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(0) = 0$

(β) $f'(0) = 2$

ΕΝΟΤΗΤΑ 11

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

11.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

Ο γεωμετρικός χώρος έχει τρεις διαστάσεις, μήκος, πλάτος και ύψος και εκτείνεται απεριόριστα σε κάθε κατεύθυνση, ενώ το επίπεδο, που μελετήσαμε ως τώρα, έχει δύο διαστάσεις. Ο χώρος περιλαμβάνει θεμελιώδη γεωμετρικά στοιχεία – σημεία, ευθείες, επίπεδα, αλλά και πιο πολύπλοκα σχήματα, τα οποία σχηματίζονται από αυτά ή τμήματα αυτών και λέγονται στερεά σχήματα, σε αντιδιαστολή με τα επίπεδα σχήματα. Ένα στερεό γεωμετρικό σχήμα μπορεί να είναι πεπερασμένο ή απεριόριστο, να καταλαμβάνει όγκο ή όχι και να σχηματίζεται από τμήματα ευθειών και επιπέδων ή να είναι ακόμα πιο περίπλοκο. Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε σχήματα του χώρου και τις ιδιότητές τους. Το σύνολο αυτών των ιδιοτήτων λέγεται **Γεωμετρία του Χώρου** ή **Στερεομετρία**.

Ιστορικό σημείωμα

Η διαφορά στην προσέγγιση της Γεωμετρίας του χώρου των αρχαίων Ελλήνων έναντι των άλλων αρχαίων λαών εδράζεται στο γεγονός ότι οι αρχαίοι Έλληνες έδιναν σημασία στη θεωρητική διάσταση της Στερεομετρίας και όχι μόνο στην πρακτική.

Οι πρώτες γραπτές αναφορές για την γεωμετρία στο χώρο παρατηρούνται από τον αρχαίο ζωγράφο Αγάθαρχο τον Σάμιο, ο οποίος κατασκεύαζε σκηνικά για τραγωδίες του Αισχύλου με προοπτική. Ο Δημόκριτος και ο Αναξαγόρας τον 5^{ον} αιώνα π.Χ. κατέγραψαν μια γενική θεωρία περί προοπτικής.

Ο πατέρας της Γεωμετρίας στο χώρο είναι ο Ευκλείδης (325 π.Χ. -265 π.Χ.), ο οποίος στο έργο του Στοιχεία θεμελιώνει τη Στερεομετρία.

Αρχαίοι έλληνες που συνέβαλαν στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας στο χώρο είναι ο Αρχιμήδης, ο Αριστοτέλης, ο Πλάτωνας, ο Ήρωνας και πολλοί άλλοι.

Στα χρόνια της Αναγέννησης παρατηρούμε πρακτικές εφαρμογές της Γεωμετρίας στο χώρο στους πίνακες ζωγραφικής. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο πίνακας του Leonardo Da Vinci, ο Μυστικός Δείπνος.

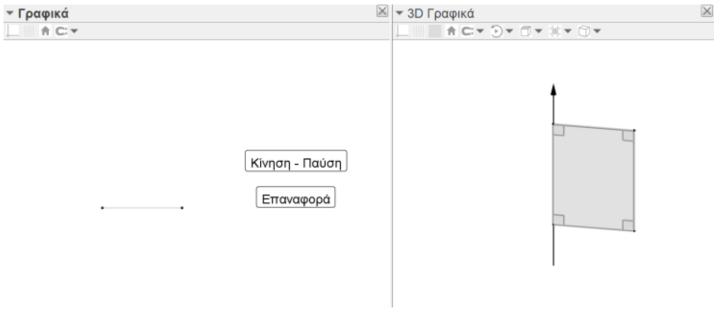
Στη σύγχρονη εποχή, η Γεωμετρία στο χώρο έχει εφαρμογές στο αρχιτεκτονικό σχέδιο, στη μελέτη του ανθρώπινου εγκεφάλου, στη δομή οργανικών χημικών ενώσεων και σε άλλους τομείς.

11.2 ΣΤΕΡΕΑ ΑΠΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

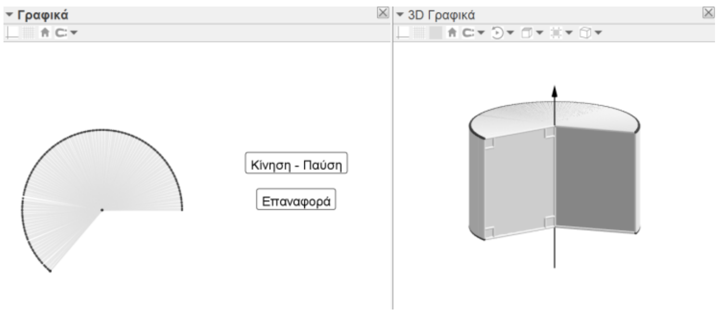
11.2.1 Κύλινδρος

Διερεύνηση 1

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«BLyk_Kat_En11_Kylindros1.ggb»*.

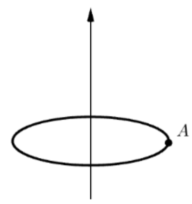


Να επιλέξετε το κουμπί *«Κίνηση - Παύση»*. Τι παρατηρείτε;

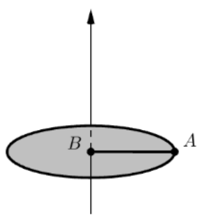


Μπορείτε να επαναλάβετε τη διαδικασία, πατώντας το κουμπί *«Επαναφορά»*.

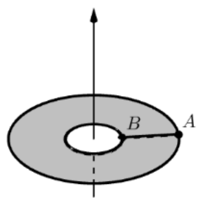
- Ένα σημείο, που δεν ανήκει στον άξονα περιστροφής, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει έναν κύκλο.



- Ένα ευθύγραμμο τμήμα AB, κάθετο στον άξονα περιστροφής, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει έναν κυκλικό δίσκο.

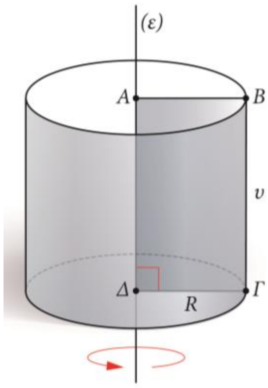


- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο δεν τέμνει τον άξονα περιστροφής και σχηματίζει ορθή γωνία με αυτόν, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει έναν δακτύλιο.



Ορισμός

Ορθός κύλινδρος ή κύλινδρος εκ περιστροφής ή κύλινδρος λέγεται το στερεό που παράγεται, όταν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο περιστραφεί πλήρως στον χώρο γύρω από μία πλευρά του.

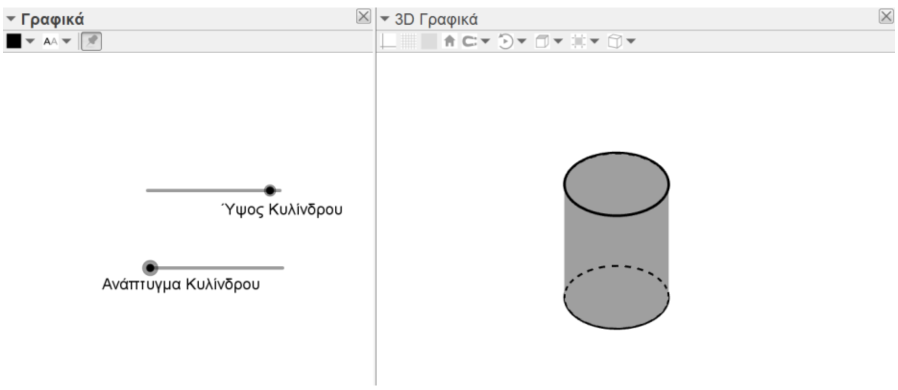


Στοιχεία ορθού κυλίνδρου

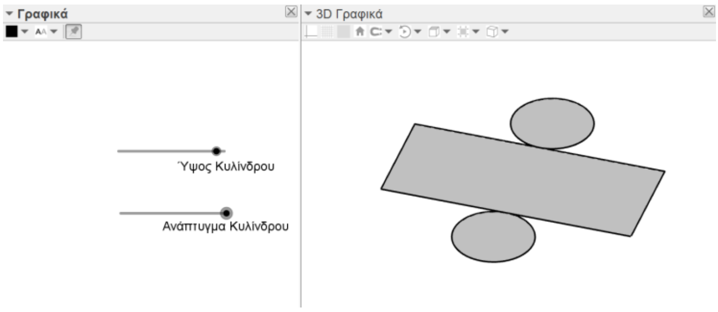
- Η πλευρά γύρω από την οποία περιστρέφεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο λέγεται **άξονας περιστροφής** και η πλευρά του ορθογωνίου που είναι παράλληλη με τον άξονα λέγεται **γενέτειρα** $(ΒΓ)$ του κυλίνδρου.
- Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή της γενέτειρας του κυλίνδρου λέγεται **κυρτή επιφάνεια** του κυλίνδρου.
- Οι κυκλικοί δίσκοι που δημιουργούνται από την περιστροφή των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που είναι κάθετες στον άξονα του κυλίνδρου λέγονται **βάσεις** του κυλίνδρου.
- Η ακτίνα των βάσεων του κυλίνδρου λέγεται **ακτίνα** του κυλίνδρου.
- Η απόσταση των δύο βάσεων του κυλίνδρου λέγεται **ύψος** του κυλίνδρου.

Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«BLyk_Kat_En11_Kylindros2.ggb»*.



- Να σύρετε τον δρομέα *«Ανάπτυγμα Κυλίνδρου»* προς τα δεξιά και να παρατηρείσετε το ανάπτυγμα του κυλίνδρου. Μπορείτε να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία αλλάζοντας το ύψος του κυλίδρου, χρησιμοποιώντας τον δρομέα *«Ύψος Κυλίνδρου»*.



- Με βάση τις παρατηρήσεις σας, να διατυπώσετε μία σχέση που να μας βοηθά να υπολογίσουμε το εμβαδόν της κυρτής και μία σχέση που να μας βοηθά να υπολογίσουμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κυλίνδρου με ακτίνα R και ύψος υ.

Θεώρημα

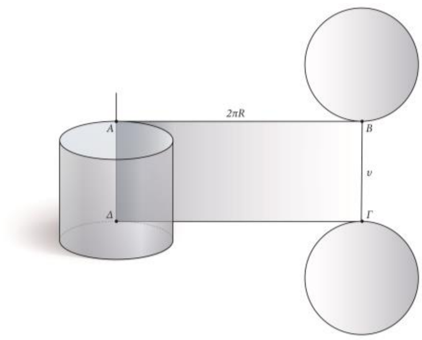
Το εμβαδόν της κυρτής και της ολικής επιφάνειας κυλίνδρου με ακτίνα R και ύψος υ είναι αντίστοιχα:

$$E_\kappa = 2\pi R\upsilon$$

$$E_{o\lambda} = E_\kappa + 2E_\beta = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2$$

Απόδειξη

Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή της γενέτειρας του κυλίνδρου είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές το ύψος και το μήκος της βάσης του κυλίνδρου, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Συνεπώς, το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι:

$$E_\kappa = E_{AB\Gamma\Delta} = (AB)(B\Gamma) = \Gamma\upsilon = 2\pi R\upsilon$$

Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου προκύπτει, όταν προσθέσουμε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας με την επιφάνεια των βάσεων του κυλίνδρου. Δηλαδή:

$$E_{o\lambda} = E_\kappa + 2E_\beta = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας κυλίνδρου με ύψος $\upsilon = 3\ \mathrm{cm}$ και εμβαδόν ολικής επιφάνειας $E_{o\lambda} = 8\pi\ \mathrm{cm}^2$.

Λύση

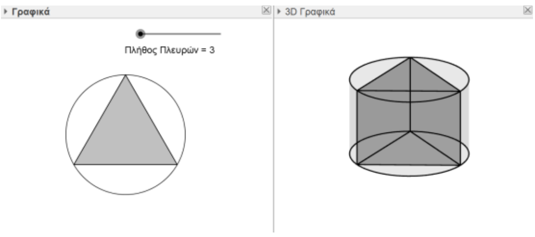
Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας κυλίνδρου είναι $E_{o\lambda} = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2$. Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} 8\pi = 2\pi R3 + 2\pi R^2 &\Rightarrow R^2 + 3R - 4 = 0 \\ &\Rightarrow (R+4)(R-1) = 0 \\ &\Rightarrow R = 1 \text{ ή } R = -4 \end{aligned}$$

Η τιμή $R = -4$ απορρίπτεται, γιατί ισχύει ότι $R > 0$. Συνεπώς, το μήκος της ακτίνας του κυλίνδρου είναι $R = 1\ \mathrm{cm}$.

Διερεύνηση 3

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«BLyk_Kat_En11_Kylindros3.ggb»*.



- Να σύρετε τον δρομέα *«Πλήθος Πλευρών»* προς τα δεξιά και να παρατηρείσετε το πρίσμα που είναι εγγεγραμμένο στον κύλινδρο.
- Με βάση τις παρατηρήσεις σας, να διατυπώσετε μία σχέση που να υπολογίζει τον όγκο του κυλίνδρου.

Θεώρημα

Ο όγκος κυλίνδρου με ακτίνα R και ύψος υ είναι:

$$V = \pi R^2 \upsilon$$

Απόδειξη

Έστω ένα κανονικό πρίσμα με ύψος υ και βάση ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές και ακτίνα R. Όταν το ν αυξάνεται απεριόριστα (τείνει στο άπειρο), το εμβαδόν της βάσης του πρίσματος τείνει στο εμβαδόν του κυκλικού δίσκου. Επομένως, δημιουργείται ένας κύλινδρος με ακτίνα R και ύψος υ. Συνεπώς, ο όγκος του κυλίνδρου είναι:

$$V = \lim_{\nu\to\infty}(E_\beta \cdot \upsilon) = \lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\nu}{2}R^2 \eta\mu\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)\cdot \upsilon\right)$$

$$= \pi R^2\upsilon \cdot \lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\nu}{2\pi}\eta\mu\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)\right) = \pi R^2\upsilon \cdot \lim_{\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)\to 0}\left(\frac{\eta\mu\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)}{\frac{2\pi}{\nu}}\right)$$

$$= \pi R^2 \upsilon$$

Το εμβαδόν κανονικού ν −γώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, είναι:
$$E = \frac{\nu}{2}R^2\eta\mu\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)$$

Παράδειγμα 2

Στο διπλανό σχήμα, δίνεται κυλινδρική σωλήνα νερού μήκους $20\ \mathrm{cm}$. Αν η απόσταση του κέντρου της βάσης του σωλήνα από το εσωτερικό τοίχωμα του σωλήνα είναι ίση με $2\ \mathrm{cm}$, να υπολογίσετε τον όγκο του νερού που μπορεί να χωρέσει ο σωλήνας.

Λύση

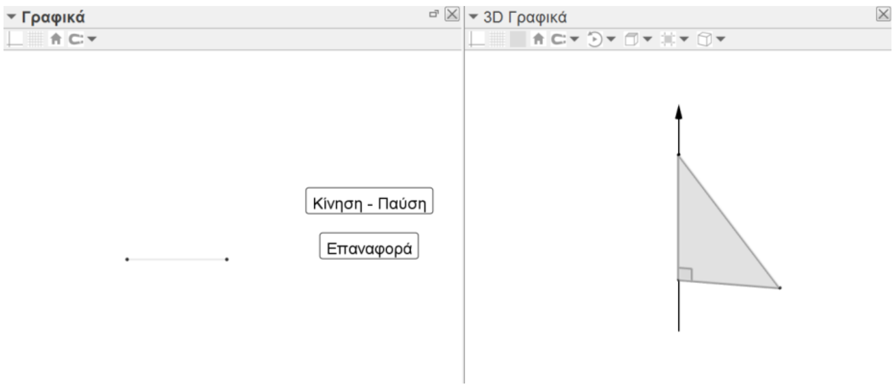
Όταν ο σωλήνας νερού γεμίσει πλήρως, τότε το νερό που θα βρίσκεται σε αυτόν σχηματίζει κύλινδρο με ακτίνα βάσης $R = 2\ \mathrm{cm}$ και ύψος $\upsilon = 20\ \mathrm{cm}$. Έτσι, ο όγκος V του νερού που μπορεί να χωρέσει ο σωλήνας είναι ίσος με:

$$V = \pi 2^2 \cdot 20 = 80\pi\ \mathrm{cm}^3$$

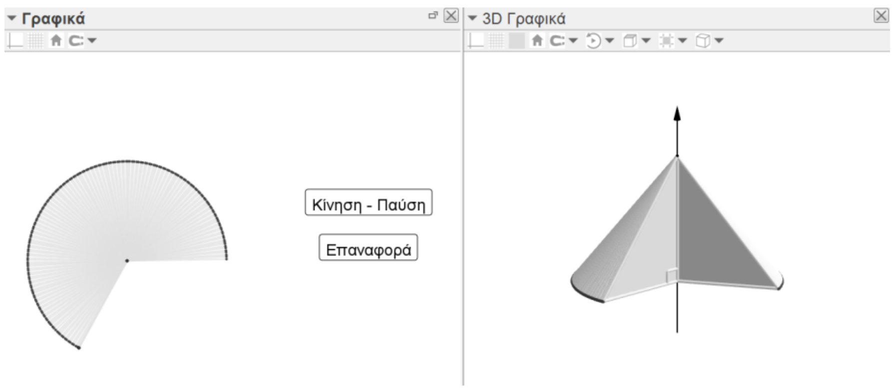
11.2.2 Κώνος

Διερεύνηση 1

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«BLyk_Kat_En11_Konos1.ggb»*.



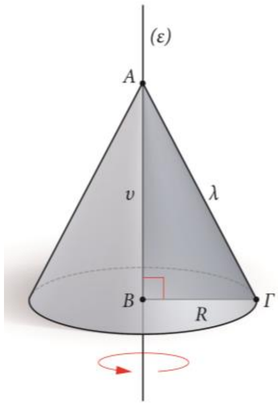
Να επιλέξετε το κουμπί *«Κίνηση - Παύση»*. Τι παρατηρείτε;



Μπορείτε να επαναλάβετε τη διαδικασία, πατώντας το κουμπί *«Επαναφορά»*.

Ορισμός

Ορθός κώνος ή κώνος ονομάζεται το στερεό που παράγεται από την πλήρη περιστροφή στον χώρο ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μία κάθετη πλευρά του.

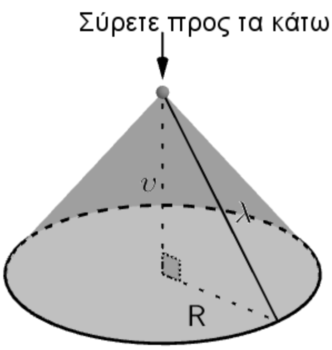


Στοιχεία ορθού κώνου

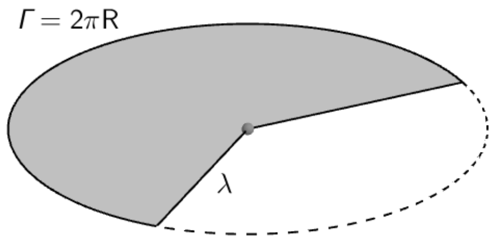
- Η κάθετη πλευρά γύρω από την οποία περιστρέφεται το ορθογώνιο τρίγωνο λέγεται **άξονας περιστροφής** και η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου λέγεται **γενέτειρα** του κώνου και συμβολίζεται με λ.
- Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή της γενέτειρας του κώνου λέγεται **κυρτή επιφάνεια** του κώνου.
- Ο κυκλικός δίσκος που δημιουργείται από την περιστροφή της πλευράς που είναι κάθετη στον άξονα περιστροφής λέγεται **βάση** του κώνου.
- Η ακτίνα της βάσης του κώνου λέγεται **ακτίνα** του κώνου και συμβολίζεται με R.
- Η απόσταση της κορυφής του κώνου από τη βάση του λέγεται **ύψος** του κώνου και συμβολίζεται με υ.

Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«BLyk_Kat_En11_Konos2.ggb»*.



- Να σύρετε την κορυφή του κώνου προς τα κάτω και να παρατηρείσετε το ανάπτυγμα της κυρτής επιφάνειάς του.



- Με βάση τις παρατηρήσεις σας, να διατυπώσετε μία σχέση που να υπολογίζει το εμβαδόν της κυρτής και μία σχέση που να υπολογίζει το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κώνου με ακτίνα R και ύψος υ.

Θεώρημα

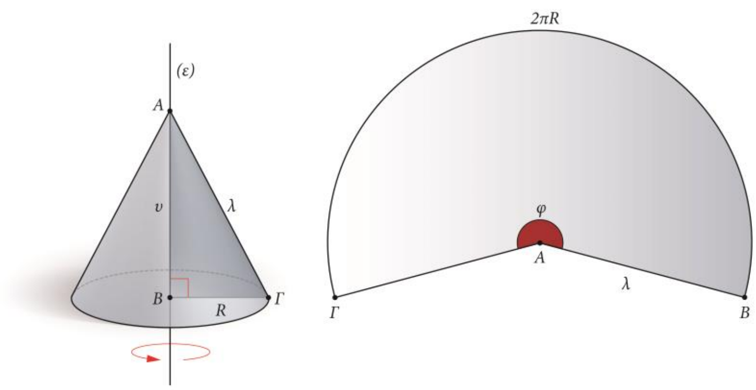
Το εμβαδόν της κυρτής και της ολικής επιφάνειας κώνου με ακτίνα R και ύψος υ είναι αντίστοιχα:

$$E_{\kappa} = \pi R \lambda$$

$$E_{o\lambda} = E_{\kappa} + E_{\beta} = \pi R \lambda + \pi R^2$$

Απόδειξη

Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή της γενέτειρας του κώνου είναι ένας κυκλικός τομέας με ακτίνα την γενέτειρα του κώνου λ και επίκεντρη γωνία φ.



Η γωνία φ του κυκλικού τομέα αντιστοιχεί σε τόξο μήκους $2\pi R$, όπου R είναι η ακτίνα της βάσης του κώνου. Η ακτίνα του κυκλικού τομέα είναι ίση με το μήκος λ της γενέτειρας του κώνου. Συνεπώς:

$$\gamma = 2\pi\lambda \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow 2\pi R = \lambda\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi R}{\lambda}$$

Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι:

$$E = \pi\lambda^2 \frac{\varphi}{2\pi} = \lambda^2 \frac{2\pi R}{2\lambda} = \pi R\lambda$$

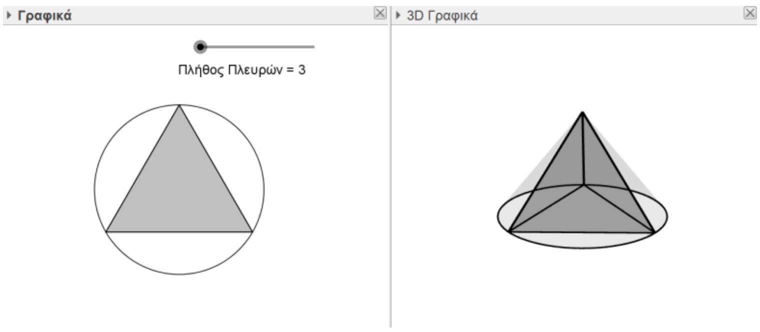
Άρα, το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι $E_\kappa = \pi R\lambda$.

Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι το άθροισμα του εμβαδού της κυρτής επιφάνειας και του εμβαδού της επιφάνειας της βάσης του κώνου. Δηλαδή:

$$E_{o\lambda} = E_\kappa + E_\beta = \pi R\lambda + \pi R^2$$

Διερεύνηση 3

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«BLyk_Kat_En11_Konos3.ggb»*.



- Να σύρετε τον δρομέα *«Πλήθος Πλευρών»* προς τα δεξιά και να παρατηρείσετε την κανονική πυραμίδα που είναι εγγεγραμμένη στον κώνο.
- Με βάση τις παρατηρήσεις σας, να διατυπώσετε μία σχέση που να υπολογίζει τον όγκο του κώνου.

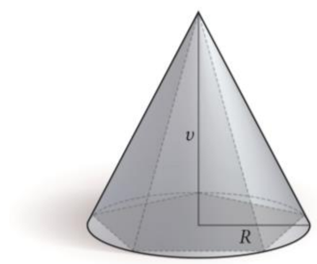
Θεώρημα

Ο όγκος κώνου με ακτίνα R και ύψος υ είναι:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \upsilon$$

Απόδειξη

Έστω μια κανονική πυραμίδα με ύψος υ και βάση ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές και ακτίνα R.



Όταν το ν τείνει στο άπειρο, το εμβαδόν της βάσης της πυραμίδας τείνει στο εμβαδόν του κυκλικού δίσκου. Επομένως, δημιουργείται ένας κώνος με ακτίνα R και ύψος υ. Συνεπώς, ο όγκος του κώνου είναι:

$$V = \lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{1}{3}E_\beta\cdot\upsilon\right) = \frac{1}{3}\cdot\lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\nu}{2}R^2\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)\cdot\upsilon\right)$$
$$= \frac{1}{3}\pi R^2\upsilon\cdot\lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\nu}{2\pi}\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)\right) = \frac{1}{3}\pi R^2\upsilon\cdot\lim_{\frac{2\pi}{\nu}\to 0}\left(\frac{\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)}{\frac{2\pi}{\nu}}\right) = \frac{1}{3}\pi R^2\upsilon$$

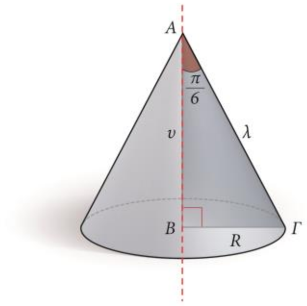
Παράδειγμα 3

Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου είναι $128\pi\ \text{cm}^2$ και το μέτρο της γωνίας που σχηματίζει η γενέτειρα με το ύψος του είναι $\frac{\pi}{6}$. Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου.

Λύση

Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι $128\pi\ \text{cm}^2$. Επομένως:

$$E_\kappa = \pi R\lambda \Rightarrow 128\pi = \pi R\lambda \Rightarrow R\lambda = 128$$



Η γωνία που σχηματίζει η γενέτειρα με το ύψος του κώνου είναι $\frac{\pi}{6}$. Επομένως, η υποτείνουσα του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι διπλάσια από την πλευρά $B\Gamma$. Δηλαδή, $\lambda = 2R$. Συνεπώς:

$$R\lambda = 128 \Rightarrow R(2R) = 128 \Rightarrow R^2 = 64 \Rightarrow R = 8\ \text{cm},\ \ \lambda = 16\ \text{cm}$$

Για το ύψος του κυλίνδρου έχουμε:

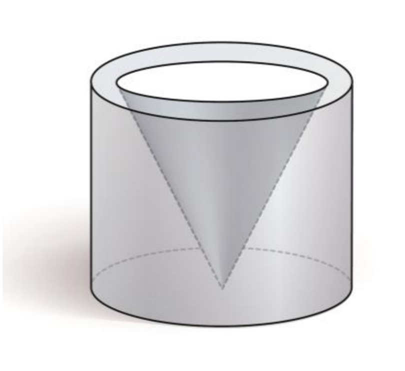
$$\text{συν}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\upsilon}{\lambda} \Rightarrow \upsilon = \lambda\ \text{συν}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}\ \text{cm}$$

Ο όγκος του κώνου είναι:

$$V = \frac{\pi R^2\upsilon}{3} = \frac{\pi 8^2\cdot 8\sqrt{3}}{3} = \frac{512\sqrt{3}\pi}{3}\ \text{cm}^3$$

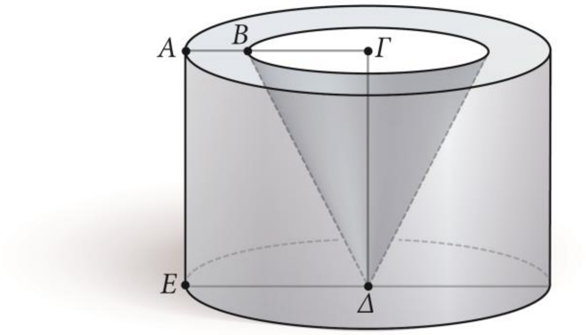
Παράδειγμα 4

Το διπλανό στερεό είναι ένα κυλινδρικό καλούπι που χρησιμοποιείται για την κατασκευή κώνων. Η διάμετρος της βάσης του κυλίνδρου είναι $16\ \text{cm}$ και η διάμετρος της βάσης του κώνου $12\ \text{cm}$. Το ύψος του κυλίνδρου είναι $8\ \text{cm}$. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του καλουπιού.



Λύση

Σημειώνουμε στο σχήμα τα σημεία A, B, Γ, Δ και E και φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$. Το στερεό αποτελείται από έναν κύλινδρο, από τον οποίο έχει αφαιρεθεί ένας κώνος.



Στοιχεία του κυλίνδρου

Ακτίνα: $A\Gamma = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}$

Ύψος: $AE = 8 \text{ cm}$

Στοιχεία του κώνου

Ακτίνα: $B\Gamma = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$

Ύψος: $AE = 8 \text{ cm}$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$, έχουμε:

$$(B\Delta)^2 = (B\Gamma)^2 + (\Gamma\Delta)^2 \Rightarrow (B\Delta)^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow B\Delta = 10 \text{ cm}$$

Γενέτειρα: $B\Delta = 10 \text{ cm}$

Ο όγκος του στερεού είναι ίσος με:

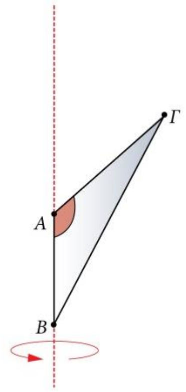
$$\begin{aligned} V_{\text{στερεού}} &= V_{\text{κυλίνδρου}} - V_{\text{κώνου}} \\ &= \pi(A\Gamma)^2(AE) - \frac{\pi(B\Gamma)^2(AE)}{3} \\ &= \pi 8^2 \cdot 8 - \frac{\pi 6^2 \cdot 8}{3} = 416\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} E_{\text{ολ}} &= E_{\text{βάσης κυλίνδρου}} + E_{\text{κυρτής κυλίνδρου}} + E_{\text{κυρτής κώνου}} + E_{\text{δακτυλίου}} \\ &= \pi(E\Delta)^2 + 2\pi(A\Gamma)(AE) + \pi(B\Gamma)(B\Delta) + \pi(A\Gamma)^2 - \pi(B\Gamma)^2 \\ &= \pi 8^2 + 2\pi 8 \cdot 8 + \pi 6 \cdot 10 + \pi 8^2 - \pi 6^2 \\ &= 280\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

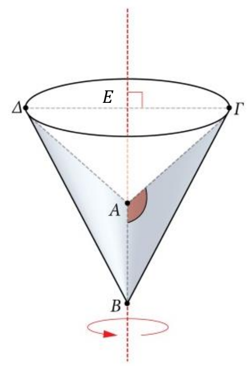
Παράδειγμα 5

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = 7\text{ cm}$, $ΑΓ = 5\sqrt{2}\text{ cm}$ και $Β\hat{Α}Γ = \frac{3\pi}{4}$. Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την πλευρά $ΑΒ$. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από αυτή την περιστροφή.



Λύση

Παρατηρούμε ότι το στερεό που προκύπτει από την περιστροφή είναι ένας κώνος με ακτίνα βάσης την $ΓΕ$ και γενέτειρα την $ΒΓ$, μέσα από τον οποίο έχει «αφαιρεθεί» ένας μικρότερος κώνος με ακτίνα βάσης την $ΓΕ$ και γενέτειρα την $ΑΓ$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Στοιχεία του μικρού κώνου

Γενέτειρα: $ΑΓ = 5\sqrt{2}\text{ cm}$

Αφού $Β\hat{Α}Γ = \frac{3\pi}{4}$, τότε $Γ\hat{Α}Ε = \frac{\pi}{4}$, ως παραπληρωματικές γωνίες. Επιπλέον, έχουμε ότι $Α\hat{Γ}Ε = \frac{\pi}{4}$, ως συμπληρωματική γωνία της $Γ\hat{Α}Ε = \frac{\pi}{4}$. Επομένως, το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΓΕ$ είναι ισοσκελές, με $ΓΕ = ΑΕ$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΕ$, έχουμε ότι:

$$(ΑΓ)^2 = (ΓΕ)^2 + (ΑΕ)^2 \Rightarrow \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 2(ΓΕ)^2 \Rightarrow (ΓΕ)^2 = 25 \Rightarrow ΓΕ = ΑΕ = 5\text{ cm}$$

Άρα, έχουμε ότι:

Ακτίνα βάσης: $ΓΕ = 5\text{ cm}$

Ύψος: $ΑΕ = 5\text{ cm}$

Στοιχεία του μεγάλου κώνου

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΓΕ$, έχουμε ότι:

$$(ΒΓ)^2 = (ΓΕ)^2 + (ΒΕ)^2 \Rightarrow (ΒΓ)^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow (ΒΓ)^2 = 169 \Rightarrow ΒΓ = 13 \text{ cm}$$

Άρα, έχουμε ότι:
Ακτίνα βάσης: $ΓΕ = 5 \text{ cm}$
Ύψος: $ΒΕ = ΑΒ + ΑΕ = 7 + 5 = 12 \text{ cm}$
Γενέτειρα: $ΒΓ = 13 \text{ cm}$

Ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι ίσος με:

$$\begin{aligned} V_{\text{στερεού}} &= V_{\text{μεγάλου κώνου}} - V_{\text{μικρού κώνου}} \\ &= \frac{\pi(ΓΕ)^2(ΒΕ)}{3} - \frac{\pi(ΓΕ)^2(ΑΕ)}{3} \\ &= \frac{\pi 5^2 \cdot 12}{3} - \frac{\pi 5^2 \cdot 5}{3} = \frac{175\pi}{3} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού είναι:

$$\begin{aligned} E_{\text{ολ}} &= E_{\text{κυρτής μικρού κώνου}} + E_{\text{κυρτής μεγάλου κώνου}} \\ &= \pi(ΓΕ)(ΑΓ) + \pi(ΓΕ)(ΒΓ) \\ &= \pi 5 \cdot 5\sqrt{2} + \pi 5 \cdot 13 \\ &= 5\pi\left(5\sqrt{2} + 13\right) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Δραστηριότητες

1. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$, με $AB = 5\,\text{cm}$ και $ΒΓ = 10\,\text{cm}$, περιστρέφεται γύρω από την πλευρά AB. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

2. Δίνεται κώνος με ακτίνα βάσης μήκους $3\,\text{cm}$ και ύψος μήκους $4\,\text{cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του κώνου.

3. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Όταν διπλασιαστεί η ακτίνα του κυλίνδρου, τότε ο όγκος του διπλασιάζεται.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Ο όγκος κυλίνδρου είναι τριπλάσιος από τον όγκο κώνου με την ίδια ακτίνα. Τότε, τα ύψη του κυλίνδρου και του κώνου είναι ίσα.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Το τετράγωνο της γενέτειρας κώνου είναι ίσο με το άθροισμα του τετραγώνου της ακτίνας του κώνου με το τετράγωνο του ύψους του κώνου.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

4. Δίνεται κύλινδρος με εμβαδό ολικής επιφάνειας $E_{ολ} = 216\pi\,\text{cm}^2$ και ύψος ίσο με το διπλάσιο της ακτίνας του. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και τον όγκο του κυλίνδρου.

5. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$, με $AB = 5\,\text{cm}$ και $ΒΓ = 10\,\text{cm}$, περιστρέφεται γύρω από την ευθεία xy παράλληλη προς την $ΑΔ$ και απέχει $2\,\text{cm}$ από αυτήν. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

6. Να υπολογίσετε τον όγκο κώνου με εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $136\pi\,\text{m}^2$ και εμβαδόν ολικής επιφάνειας $200\pi\,\text{m}^2$.

7. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου είναι $36\sqrt{2}\pi\,\text{cm}^2$ και η γενέτειρά του σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τη βάση του. Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου.

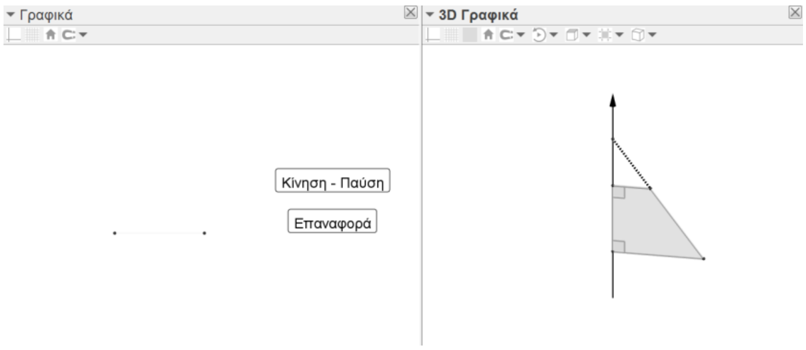
8. Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με $AB = 4\,\text{cm}$. Ο όγκος του στερεού που παράγεται, όταν το ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από την πλευρά AB, είναι διπλάσιος από τον όγκο του στερεού που παράγεται, όταν το ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από την πλευρά $ΒΓ$. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $ΒΓ$ του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$.

9. Ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις $7\,\text{cm}$ και $10\,\text{cm}$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τη μεγάλη βάση του. Αν ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή είναι ίσος με $128\pi\,\text{cm}^3$, να υπολογίσετε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας του στερεού.

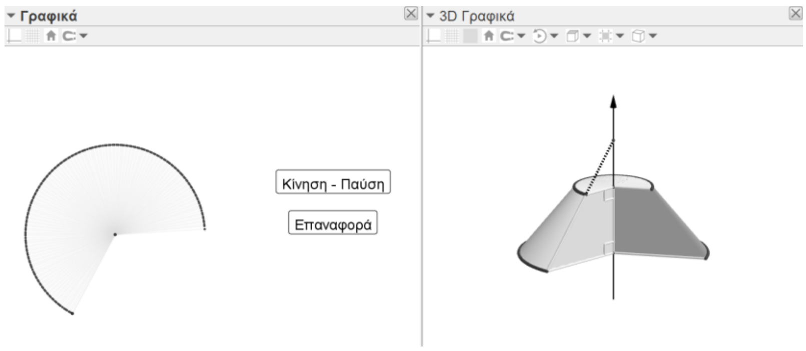
11.2.3 Κόλουρος Κώνος

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«BLyk_Kat_En11_KolourosKonos.ggb»*.



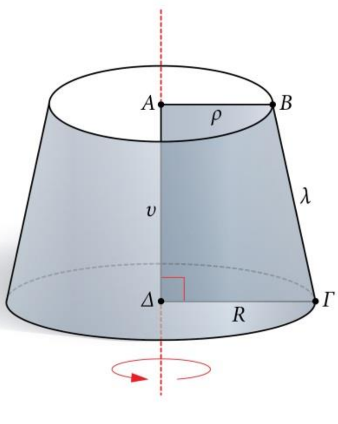
Να επιλέξετε το κουμπί *«Κίνηση - Παύση»*. Τι παρατηρείτε;



Μπορείτε να επαναλάβετε τη διαδικασία, πατώντας το κουμπί *«Επαναφορά»*.

Ορισμός

Κόλουρος κώνος λέγεται το στερεό που παράγεται από μία πλήρη περιστροφή στον χώρο ενός ορθογωνίου τραπεζίου γύρω από την πλευρά που είναι κάθετη στις βάσεις του.



Στοιχεία κόλουρου κώνου

- Η πλευρά γύρω από την οποία περιστρέφεται το ορθογώνιο τραπέζιο λέγεται **άξονας περιστροφής** και η πλευρά που δεν είναι κάθετη στις βάσεις του λέγεται **γενέτειρα** του κόλουρου κώνου.
- Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή της γενέτειρας του κόλουρου κώνου λέγεται **κυρτή επιφάνεια** του κόλουρου κώνου.
- Οι κυκλικοί δίσκοι που δημιουργούνται από την περιστροφή των δύο πλευρών που είναι κάθετες στον άξονα περιστροφής λέγονται **βάσεις** του κόλουρου κώνου.
- Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται **ύψος** του κόλουρου κώνου.

Θεώρημα

Ο όγκος, το εμβαδόν κυρτής επιφάνειας και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας κόλουρου κώνου με ύψος υ, γενέτειρα λ και ακτίνες βάσεων R και ρ είναι αντίστοιχα:

$$V = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)$$

$$E_\kappa = \pi(R+\rho)\lambda$$

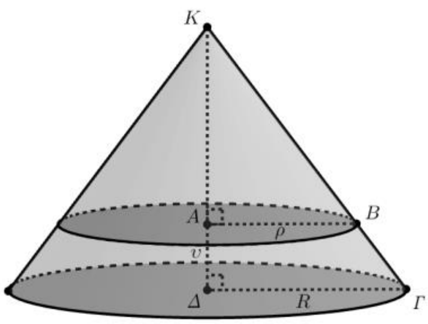
$$E_{o\lambda} = E_\kappa + E_{\beta_1} + E_{\beta_2} = \pi(R+\rho)\lambda + \pi R^2 + \pi\rho^2$$

Απόδειξη

Ο όγκος του κόλουρου κώνου με γενέτειρα την $B\Gamma$ είναι η διαφορά των όγκων των κώνων με γενέτειρες την KB και την $K\Gamma$. Δηλαδή:

$$V = \frac{\pi(\Gamma\Delta)^2(K\Delta)}{3} - \frac{\pi(AB)^2(KA)}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3}\left(R^2(\upsilon + KA) - \rho^2(KA)\right) \qquad (1)$$



Τα τρίγωνα KAB και $K\Delta\Gamma$ είναι όμοια. Επομένως:

$$\frac{KA}{K\Delta} = \frac{AB}{\Gamma\Delta} \Rightarrow \frac{KA}{\upsilon + KA} = \frac{\rho}{R} \Rightarrow KA = \frac{\upsilon\rho}{R-\rho}, \qquad R \neq \rho$$

Από την (1), έχουμε ότι:

$$V = \frac{\pi}{3}\left(R^2\left(\upsilon + \frac{\upsilon\rho}{R-\rho}\right) - \rho^2\left(\frac{\upsilon\rho}{R-\rho}\right)\right) = \frac{\pi\upsilon}{3}\left(R^2\left(\frac{R-\rho+\rho}{R-\rho}\right) - \rho^2\left(\frac{\rho}{R-\rho}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi\upsilon}{3}\left(\frac{R^3-\rho^3}{R-\rho}\right) = \frac{\pi\upsilon}{3}\left(\frac{(R-\rho)(R^2+R\rho+\rho^2)}{R-\rho}\right) = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2+R\rho+\rho^2)$$

Η κυρτή επιφάνεια του κόλουρου κώνου με γενέτειρα την $ΒΓ$ είναι η διαφορά των κυρτών επιφανειών των κώνων με γενέτειρες την $ΚΒ$ και την $ΚΓ$.

$$E_{\kappa} = \pi(ΓΔ)(ΚΓ) - \pi(ΑΒ)(ΚΒ) = \pi R(\lambda + KB) - \pi\rho(KB) \qquad (2)$$

Τα τρίγωνα $ΚΑΒ$ και $ΚΔΓ$ είναι όμοια. Επομένως:

$$\frac{KB}{KΓ} = \frac{AB}{ΓΔ} \Rightarrow \frac{KB}{\lambda + KB} = \frac{\rho}{R} \Rightarrow KB = \frac{\rho\lambda}{R - \rho}, \qquad R \neq \rho$$

Από την (2), έχουμε ότι:

$$E_{\kappa} = \pi R\left(\lambda + \frac{\rho\lambda}{R-\rho}\right) - \pi\rho\left(\frac{\rho\lambda}{R-\rho}\right) = \pi\lambda\left(R\left(\frac{R-\rho+\rho}{R-\rho}\right) - \rho\left(\frac{\rho}{R-\rho}\right)\right)$$

$$= \pi\lambda\left(\frac{R^2-\rho^2}{R-\rho}\right) \quad = \pi\lambda\frac{(R-\rho)(R+\rho)}{R-\rho} = \pi(R+\rho)\lambda$$

Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας κόλουρου κώνου είναι:

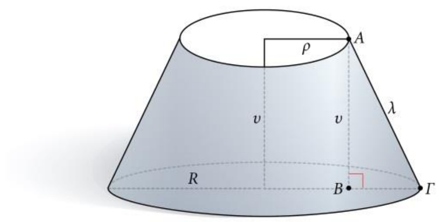
$$E_{o\lambda} = E_{\kappa} + E_{\beta_1} + E_{\beta_2} = \pi(R+\rho)\lambda + \pi R^2 + \pi\rho^2$$

Παράδειγμα 5

Ένας κόλουρος κώνος έχει όγκο $V = 700\pi \text{ cm}^3$ και ύψος $\upsilon = 12 \text{ cm}$. Αν η ακτίνα της μεγάλης βάσης του είναι διπλάσια από την ακτίνα της μικρής βάσης του, να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κόλουρου κώνου.

Λύση

Θεωρούμε R και ρ την ακτίνα της μεγάλης και της μικρής βάσης του κόλουρου κώνου, αντίστοιχα. Έχουμε ότι $R = 2\rho$.



Ο όγκος του κόλουρου κώνου είναι:

$$V = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)$$

Επομένως, έχουμε:

$$700\pi = \frac{\pi 12}{3}(4\rho^2 + 2\rho^2 + \rho^2) \Rightarrow 700 = 4 \cdot 7\rho^2 \Rightarrow \rho^2 = 25 \Rightarrow \rho = 5 \text{ cm}, \;\; R = 10 \text{ cm}$$

Υπολογίζουμε τη γενέτειρα λ του κόλουρου κώνου. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχουμε:

$$(AΓ)^2 = (AB)^2 + (BΓ)^2 \Rightarrow \lambda^2 = \upsilon^2 + (R-\rho)^2 \Rightarrow \lambda^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow \lambda = 13 \text{ cm}$$

Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι:

$$E_{\kappa} = \pi(R+\rho)\lambda$$

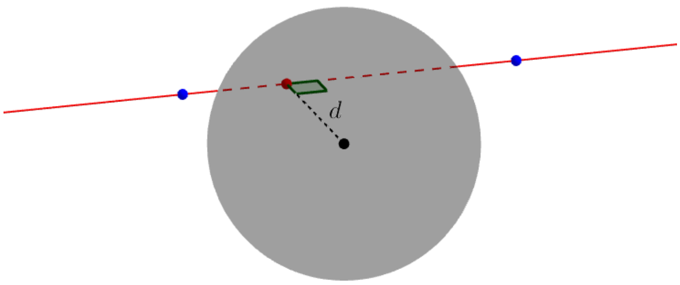
Επομένως, έχουμε ότι:

$$E_{\kappa} = \pi(10+5)13 \Rightarrow E_{\kappa} = 195\pi \text{ cm}^2$$

11.2.4 Σφαίρα

Διερεύνηση

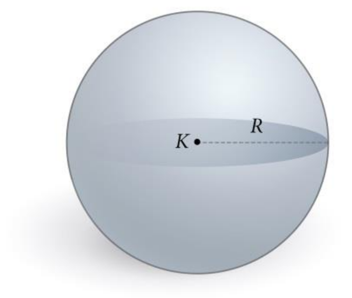
Να ανοίξετε το αρχείο *«BLyk_Kat_En11_SfairaEftheia.ggb»* και να διερευνήσετε τις πιθανές θέσεις της ευθείας σε σχέση με τη σφαίρα.



Ορισμός

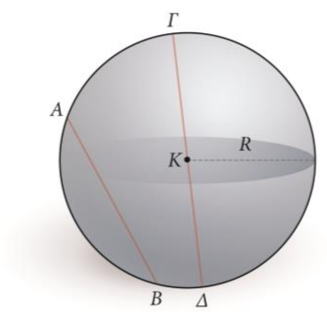
Σφαίρα ονομάζεται το στερεό που παράγεται από μία πλήρη περιστροφή ενός ημικυκλίου γύρω από τη διάμετρό του.

Ως γεωμετρικός τόπος η σφαίρα ορίζεται και ως εξής:
Σφαίρα είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που απέχουν σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο.



Στοιχεία σφαίρας

- Το σταθερό σημείο περιστροφής λέγεται **κέντρο** της σφαίρας και η σταθερή απόσταση **ακτίνα** της σφαίρας και συμβολίζεται με R.
- **Χορδή** της σφαίρας λέγεται κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα δύο σημεία της σφαίρας. Στο πιο κάτω σχήμα, η AB είναι μια χορδή της σφαίρας.
- Κάθε χορδή που διέρχεται από το κέντρο της λέγεται **διάμετρος** της σφαίρας. Στο πιο κάτω σχήμα, η AB είναι μια διάμετρος της σφαίρας.



Θέσεις ευθείας – σφαίρας στον χώρο

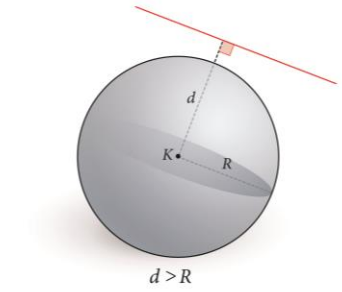
Θεωρούμε σφαίρα με ακτίνα R και ευθεία που απέχει απόσταση d από το κέντρο της σφαίρας.

Τότε:

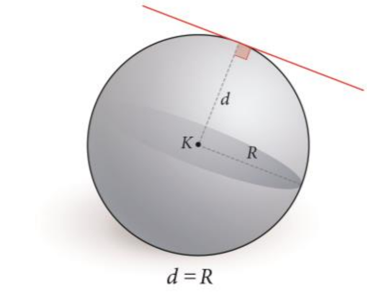
(α) η ευθεία και η σφαίρα δεν έχουν κοινά σημεία, όταν $d > R$

(β) η ευθεία εφάπτεται στην σφαίρα, όταν $d = R$

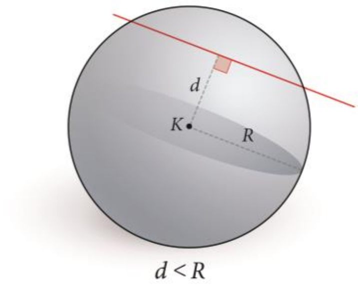
(γ) η ευθεία τέμνει την σφαίρα, όταν $d < R$.



Η ευθεία και η σφαίρα δεν έχουν κοινά σημεία



Η ευθεία εφάπτεται στη σφαίρα



Η ευθεία τέμνει τη σφαίρα

Θέσεις επιπέδου – σφαίρας στον χώρο

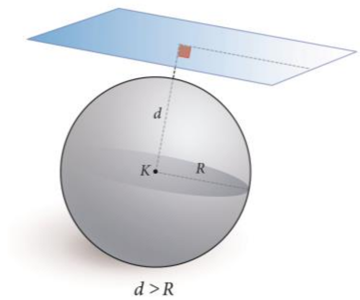
Θεωρούμε σφαίρα με ακτίνα R και επίπεδο (Π) που απέχει απόσταση d από το κέντρο της σφαίρας.

Τότε:

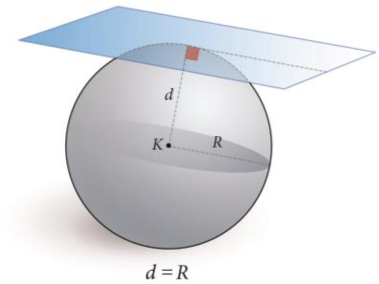
(α) το επίπεδο και η σφαίρα δεν έχουν κοινά σημεία, όταν $d > R$

(β) το επίπεδο εφάπτεται στη σφαίρα, όταν $d = R$

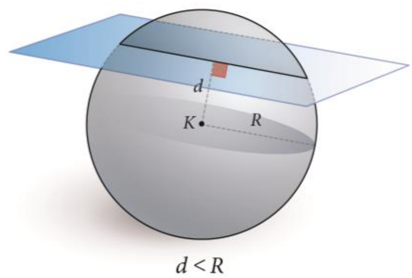
(γ) το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα, όταν $d < R$.



Το επίπεδο και η σφαίρα δεν έχουν κοινά σημεία



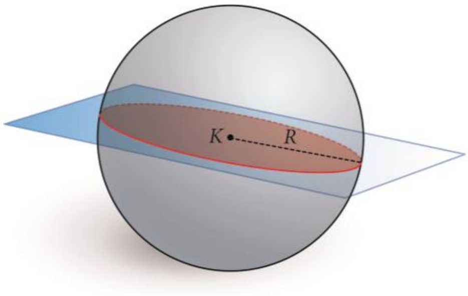
Το επίπεδο εφάπτεται στη σφαίρα



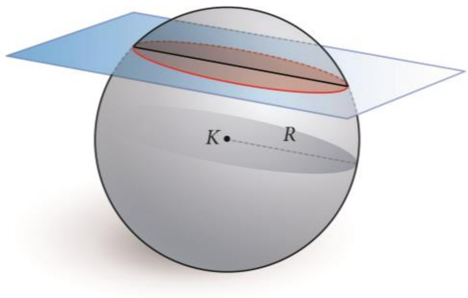
Το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα

Παρατηρήσεις

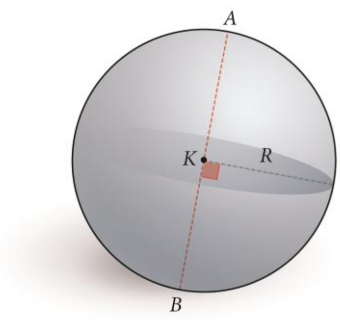
- Η τομή του επιπέδου με την σφαίρα είναι ένας κύκλος και λέγεται **μέγιστος κύκλος**, όταν το επίπεδο περνά από το κέντρο της σφαίρας. Συνεπώς, ένας μέγιστος κύκλος έχει κέντρο το κέντρο της σφαίρας και ακτίνα την ακτίνα της σφαίρας.



- Όταν το επίπεδο δεν περνά από το κέντρο της σφαίρας, ο κύκλος λέγεται **μικρός** κύκλος.



- Τα άκρα της διαμέτρου της σφαίρας που είναι κάθετη σε ένα κύκλο της σφαίρας, λέγονται **πόλοι** του κύκλου αυτού.

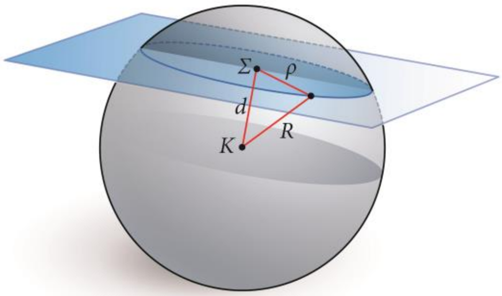


Παράδειγμα 6

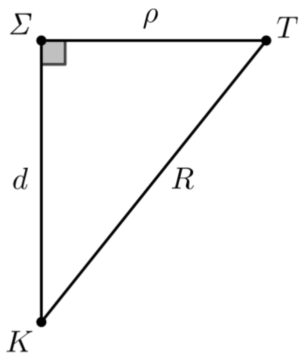
Επίπεδο $(Π)$ τέμνει μια σφαίρα με κέντρο το K και ακτίνα R. Αν $d = KΣ$ είναι η απόσταση του επιπέδου από το κέντρο της σφαίρας, να αποδείξετε ότι η τομή της σφαίρας με το επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο το $Σ$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Λύση

Θεωρούμε τυχαίο σημείο T στην τομή του επιπέδου με τη σφαίρα.



Το τρίγωνο $KΣT$ είναι ορθογώνιο.



Επομένως, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε ότι:

$$(KT)^2 = (KΣ)^2 + (ΣT)^2 \Rightarrow (ΣT)^2 = (KT)^2 - (KΣ)^2 = R^2 - d^2 \Rightarrow (ΣT) = \sqrt{R^2 - d^2}$$

Τα ευθύγραμμα τμήματα R και d είναι σταθερά. Επομένως, το τυχαίο σημείο T απέχει σταθερή απόσταση από το σταθερό σημείο $Σ$. Άρα, η τομή του επίπεδου με την σφαίρα είναι ένας κύκλος με κέντρο το $Σ$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Θεώρημα

Ο όγκος και το εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας με ακτίνα R είναι αντίστοιχα:

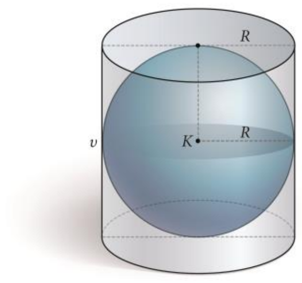
$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$E = 4\pi R^2$$

Παράδειγμα 7

Σφαίρα ακτίνας R είναι εγγεγραμμένη σε κύλινδρο. Αν E_1 και V_1 η επιφάνεια και ο όγκος της σφαίρας, αντίστοιχα, και E_2 και V_2 η επιφάνεια και ο όγκος του κυλίνδρου, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}$$



Λύση

Παρατηρούμε ότι η ακτίνα R του κυλίνδρου είναι ίση με την ακτίνα της σφαίρας και το ύψος υ του κυλίνδρου είναι διπλάσιο από την ακτίνα της σφαίρας. Συνεπώς:

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{4\pi R^2}{2\pi R(2R)+2\pi R^2}=\frac{4\pi R^2}{6\pi R^2}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{\pi R^2(2R)}=\frac{4\pi R^3}{6\pi R^3}=\frac{2}{3}$$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Όταν διπλασιαστεί το ύψος του κόλουρου κώνου, τότε ο όγκος του διπλασιάζεται.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Όταν τετραπλασιαστεί η επιφάνεια σφαίρας, τότε ο όγκος της οκταπλασιάζεται.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

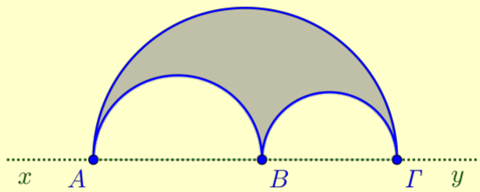
2. Ορθογώνιο τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $\left(\hat{A}=\hat{\Delta}=90°\right)$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την πλευρά $ΑΔ$. Αν $AB=2\text{ cm}$, $ΔΓ=10\text{ cm}$ και $ΑΔ=15\text{ cm}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας, το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

3. Δίνεται κόλουρος κώνος με γενέτειρα $\lambda=5\text{ cm}$ και εμβαδό κυρτής επιφάνειας $E_\kappa=45\pi\text{ cm}^2$. Αν η ακτίνα της μεγάλης του βάσης είναι διπλάσια από την ακτίνα της μικρής του βάσης, να υπολογίσετε το ύψος του.

4. Το εμβαδόν μέγιστου κύκλου μιας σφαίρας είναι $16\pi\text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε την επιφάνεια και τον όγκο της σφαίρας.

5. Επίπεδο π τέμνει μια σφαίρα ακτίνας $R=5\text{ cm}$. Αν η απόσταση του επιπέδου από το κέντρο της σφαίρας είναι $d=4\text{ cm}$, να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου που δημιουργείται από τα κοινά σημεία της σφαίρας και του επιπέδου.

6. Στο πιο κάτω σχήμα τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AΓ}$ και $\overset{\frown}{BΓ}$ είναι ημικύκλια, $AΓ=18\text{ cm}$ και $4AB=5BΓ$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του σκιασμένου χωρίου γύρω από τον άξονα xy.

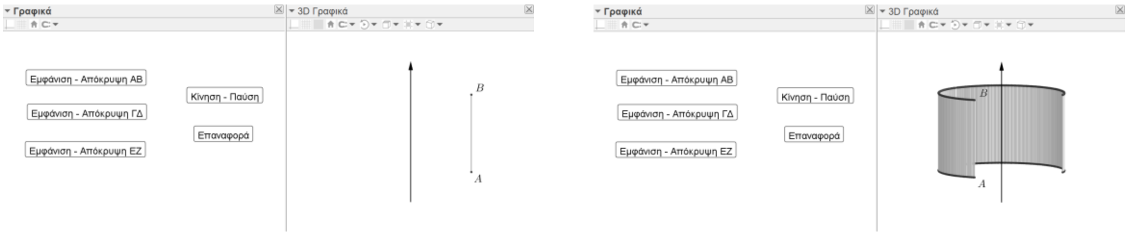


11.2.5. Περιστροφή επίπεδων σχημάτων γύρω από άξονα

Διερεύνηση

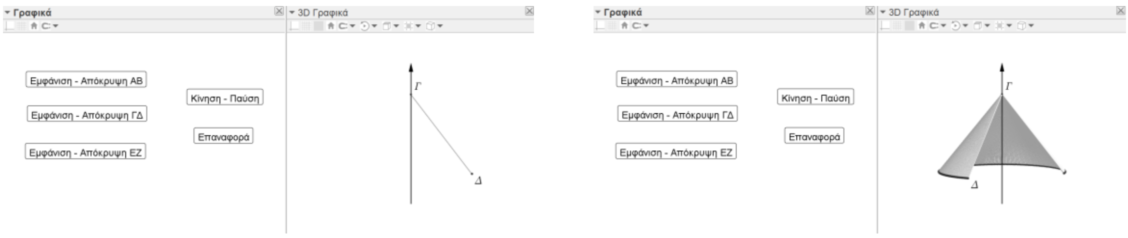
Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«BLyk_Kat_En11_Peristrofi.ggb»*.

- Να επιλέξετε το κουμπί *«Εμφάνιση – Απόκρυψη ΑΒ»* και ακολούθως το κουμπί *«Κίνηση - Παύση»*. Τι παρατηρείτε;



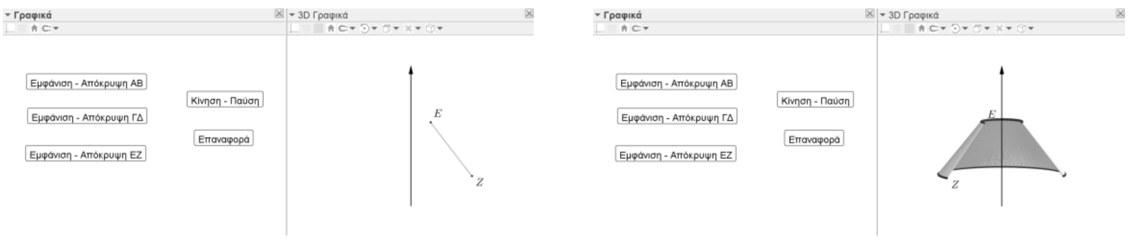
  Ακολούθως, να επιλέξετε τα κουμπιά *«Εμφάνιση – Απόκρυψη ΑΒ»* και *«Επαναφορά»*, για να επιστρέψετε στην αρχική οθόνη.

- Να επιλέξετε το κουμπί *«Εμφάνιση – Απόκρυψη ΓΔ»* και ακολούθως το κουμπί *«Κίνηση - Παύση»*. Τι παρατηρείτε;



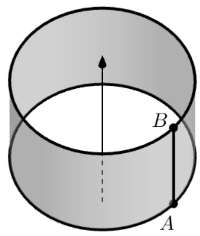
  Ακολούθως, να επιλέξετε τα κουμπιά *«Εμφάνιση – Απόκρυψη ΓΔ»* και *«Επαναφορά»*, για να επιστρέψετε στην αρχική οθόνη.

- Να επιλέξετε το κουμπί *«Εμφάνιση – Απόκρυψη ΕΖ»* και ακολούθως το κουμπί *«Κίνηση - Παύση»*. Τι παρατηρείτε;

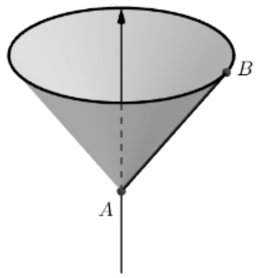


  Ακολούθως, να επιλέξετε τα κουμπιά *«Εμφάνιση – Απόκρυψη ΕΖ»* και *«Επαναφορά»*, για να επιστρέψετε στην αρχική οθόνη.

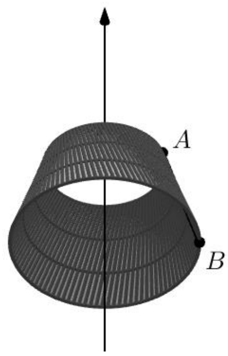
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, παράλληλο με τον άξονα περιστροφής, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει την κυρτή επιφάνεια κυλίνδρου.



- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο τέμνει κατά οξεία γωνία τον άξονα περιστροφής, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω τον άξονα περιστροφής παράγει την κυρτή επιφάνεια κώνου.

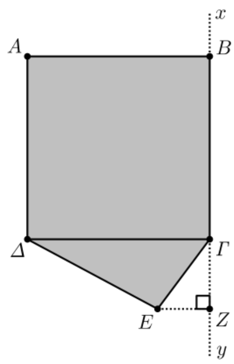


- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο δεν τέμνει τον άξονα περιστροφής και σχηματίζει οξεία γωνία με αυτόν, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει την κυρτή επιφάνεια κόλουρου κώνου.



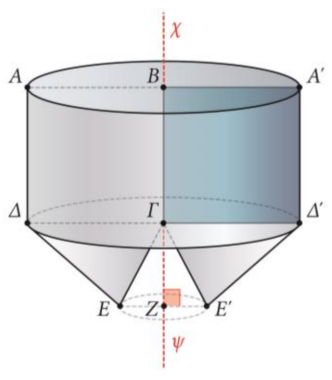
Παράδειγμα 1

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο με πλευρά $AB = 21 \text{ cm}$ και το τρίγωνο $ΓΕΖ$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές $ΓΖ = 8 \text{ cm}$ και $ΕΖ = 6 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σχήματος $ΑΒΓΕΔΑ$ γύρω από τον άξονα $χψ$.



Λύση

Παρατηρούμε ότι το στερεό αποτελείται από έναν κύλινδρο και έναν κόλουρο κώνο, από τον οποίο έχει αφαιρεθεί ένας κώνος.



Στοιχεία του κυλίνδρου
Ακτίνα: $AB = 21 \text{ cm}$
Ύψος: $A\Delta = 21 \text{ cm}$

Στοιχεία του κώνου
Ακτίνα: $EZ = 6 \text{ cm}$
Ύψος: $\Gamma Z = 8 \text{ cm}$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓEZ, έχουμε ότι:
$$(\Gamma E)^2 = (EZ)^2 + (\Gamma Z)^2 \Rightarrow (\Gamma E)^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow \Gamma E = 10 \text{ cm}$$

Γενέτειρα: $\Gamma E = 10 \text{ cm}$

Στοιχεία του κόλουρου κώνου
Ύψος: $\Gamma Z = 8 \text{ cm}$
Ακτίνα μικρής βάσης: $EZ = 6 \text{ cm}$
Ακτίνα μεγάλης βάσης: $\Delta\Gamma = 21 \text{ cm}$

Φέρουμε την EH κάθετη στην $\Delta\Gamma$ (H σημείο της $\Delta\Gamma$) και σχηματίζεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΔEH. Τότε, ισχύει:
$$HE = 8 \text{ cm}, \quad \Delta H = \Delta\Gamma - H\Gamma = 21 - 6 = 15 \text{ cm}$$

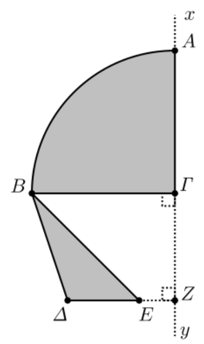
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔEH, έχουμε:
$$(\Delta E)^2 = (HE)^2 + (\Delta H)^2 \Rightarrow (\Delta E)^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \Rightarrow \Delta E = 17 \text{ cm}$$

Γενέτειρα: $\Delta E = 17 \text{ cm}$

Ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι ίσος με:
$$\begin{aligned} V &= V_{\text{κυλίνδρου}} + V_{\text{κόλουρου κώνου}} - V_{\text{κώνου}} \\ &= \pi(AB)^2(A\Delta) + \frac{\pi(\Gamma Z)[(\Delta\Gamma)^2 + (\Delta\Gamma)(EZ) + (EZ)^2]}{3} - \frac{\pi(EZ)^2(\Gamma Z)]}{3} \\ &= \pi 21^2 21 + \frac{\pi 8[21^2 + 21 \cdot 6 + 6^2]}{3} - \frac{\pi 6^2 8}{3} = 10773\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Οι επιφάνειες του στερεού είναι τέσσερις. Συγκεκριμένα, το ευθύγραμμο τμήμα AB παράγει τη βάση του κυλίνδρου, το ευθύγραμμο τμήμα $A\Delta$ παράγει την κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου, το ευθύγραμμο τμήμα ΔE παράγει την κυρτή επιφάνεια του κόλουρου κώνου και το ευθύγραμμο τμήμα ΓE παράγει την κυρτή επιφάνεια του κώνου.
Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού είναι ίσο με:
$$\begin{aligned} E_{\text{ολ}} &= E_{AB} + E_{A\Delta} + E_{\Delta E} + E_{\Gamma E} \\ &= \pi(AB)^2 + 2\pi(AB)(A\Delta) + \pi(\Delta\Gamma + EZ)(\Delta E) + \pi(EZ)(\Gamma E) \\ &= \pi 21^2 + 2\pi 21 \cdot 21 + \pi(21 + 6)17 + \pi 6 \cdot 10 = 1842\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

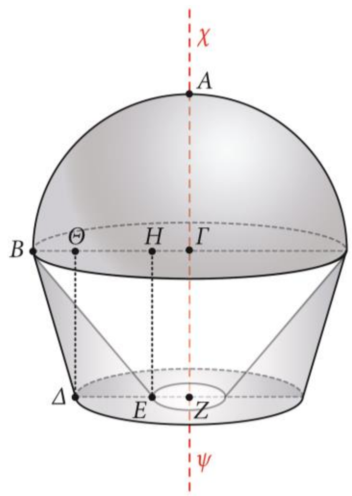
Παράδειγμα 2



Στο διπλανό σχήμα ο κυκλικός τομέας $ΑΒΓ$ είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα $ΑΓ = 4\ \mathrm{cm}$ και το τετράπλευρο $ΒΓΖΕ$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με $ΓΖ = 3\ \mathrm{cm}$ και $ΕΖ = 1\ \mathrm{cm}$. Αν $ΔΕ = 2\ \mathrm{cm}$, να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου σχήματος γύρω από τον άξονα xy.

Λύση

Παρατηρούμε ότι το στερεό αποτελείται από ένα ημισφαίριο και έναν μεγάλο κόλουρο κώνο, από τον οποίο έχει αφαιρεθεί ένας μικρότερος κόλουρος κώνος.



Στοιχεία του μικρού κόλουρου κώνου

Ύψος: $ΓΖ = 3\ \mathrm{cm}$

Ακτίνα της μικρής βάσης: $ΕΖ = 1\ \mathrm{cm}$

Ακτίνα της μεγάλης βάσης: $ΒΓ = 4\ \mathrm{cm}$

Για να υπολογίσουμε τη γενέτειρα $ΒΕ$, φέρουμε την $ΕΗ$ κάθετη στην $ΒΓ$ ($Η$ σημείο της $ΒΓ$) και σχηματίζεται το ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΕΗ$.

Έχουμε $ΗΕ = 3\ \mathrm{cm}$ και $ΒΗ = ΒΓ - ΗΓ = 4 - 1 = 3\ \mathrm{cm}$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $ΒΕΗ$, έχουμε:

$$(ΒΕ)^2 = (ΗΕ)^2 + (ΒΗ)^2 \Rightarrow (ΒΕ)^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18 \Rightarrow ΒΕ = 3\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$$

Γενέτειρα: $ΒΕ = 3\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$

Στοιχεία του μεγάλου κόλουρου κώνου

Ύψος: $ΓΖ = 3\ \mathrm{cm}$

Ακτίνα της μικρής βάσης: $ΔΖ = ΔΕ + ΕΖ = 2 + 1 = 3\ \mathrm{cm}$

Ακτίνα της μεγάλης βάσης: $ΒΓ = 4\ \mathrm{cm}$

Για να υπολογίσουμε τη γενέτειρα $ΒΔ$, φέρουμε την $ΔΘ$ κάθετη στην $ΒΓ$ ($Θ$ σημείο της $ΒΓ$) και σχηματίζεται το ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΔΘ$.
Έχουμε $ΘΔ = 3 \text{ cm}$ και $ΒΘ = ΒΓ - ΘΓ = 4 - 3 = 1 \text{ cm}$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $ΒΘΔ$, έχουμε ότι:

$$(ΒΔ)^2 = (ΒΘ)^2 + (ΘΔ)^2 \Rightarrow (ΒΔ)^2 = 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10 \Rightarrow ΒΔ = \sqrt{10} \text{ cm}$$

Γενέτειρα: $ΒΔ = \sqrt{10} \text{ cm}$

Στοιχεία του ημισφαιρίου
Ακτίνα: $ΑΓ = 4 \text{ cm}$

Ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι ίσος με:

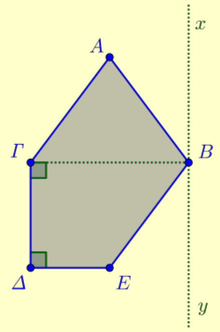
$$\begin{aligned}V &= V_{\text{ημισφαιρίου}} + V_{\text{μεγάλου κόλουρου κώνου}} - V_{\text{μικρού κόλουρου κώνου}}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi(ΑΓ)^3}{3} + \frac{\pi(ΓΖ)[(ΒΓ)^2 + (ΒΓ)(ΔΖ) + (ΔΖ)^2]}{3}\\ &\quad - \frac{\pi(ΓΖ)[(ΒΓ)^2 + (ΒΓ)(ΕΖ) + (ΕΖ)^2]}{3}\\ &= \frac{4\pi 4^3}{6} + \frac{\pi 3[4^2 + 4\cdot 3 + 3^2]}{3} - \frac{\pi 3[4^2 + 4\cdot 1 + 1^2]}{3} = \frac{176\pi}{3} \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Οι επιφάνειες του παραγόμενου στερεού είναι πέντε. Συγκεκριμένα, το τεταρτοκύκλιο $\widehat{ΑΒ}$ παράγει την επιφάνεια ημισφαιρίου, το ευθύγραμμο τμήμα $ΒΔ$ παράγει την κυρτή επιφάνεια του μεγάλου κόλουρου κώνου, το ευθύγραμμο τμήμα $ΔΕ$ παράγει έναν δακτύλιο, το ευθύγραμμο τμήμα $ΒΕ$ παράγει την κυρτή επιφάνεια του μικρού κόλουρου κώνου και το ευθύγραμμο τμήμα $ΒΓ$ παράγει τη μεγάλη βάση του μικρού κόλουρου κώνου.
Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού είναι ίσο με:

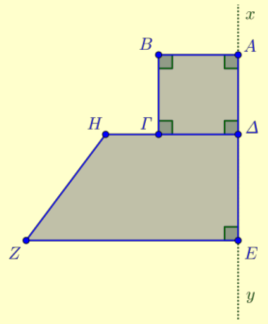
$$\begin{aligned}E_{\text{ολ}} &= E_{\widehat{ΑΒ}} + E_{ΒΔ} + E_{ΔΕ} + E_{ΒΕ} + E_{ΒΓ}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 4\pi(ΑΓ)^2 + \pi(ΒΓ + ΔΖ)(ΒΔ) + \pi(ΔΖ)^2 - \pi(ΕΖ)^2 + \pi(ΒΓ + ΕΖ)(ΒΕ) + \pi(ΒΓ)^2\\ &= 2\pi 4^2 + \pi(4+3)\sqrt{10} + \pi 3^2 - \pi 1^2 + \pi(4+1)3\sqrt{2} + \pi 4^2\\ &= \left(56 + 15\sqrt{2} + 7\sqrt{10}\right)\pi \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Δραστηριότητες

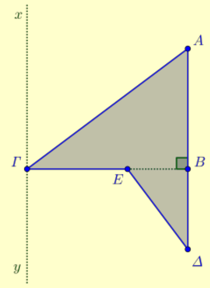
1. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΒΓ = 6$ cm και $ΑΒ = ΑΓ = 5$ cm. Το $ΒΕΓΔ$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις $ΒΓ$ και $ΔΕ$, ύψος $ΓΔ = 4$ cm και πλευρά $ΒΕ = 5$ cm. Το σκιασμένο πολύγωνο $ΑΒΕΔΓ$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $xΒy$, που είναι κάθετος στη $ΒΓ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



2. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο πλευράς 3 cm και το τετράπλευρο $ΔΗΖΕ$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο $\left(\hat{Δ} = \hat{Ε} = \frac{\pi}{2}\right)$ με $ΔΗ = 5$ cm, $ΕΖ = 8$ cm και $ΗΖ = 5$ cm. Το σκιασμένο μέρος του σχήματος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

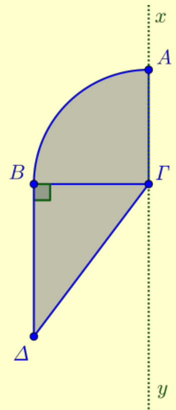


3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται $ΒΓ \perp ΑΔ$, $ΑΒ = 6$ cm, $ΒΓ = 8$ cm, $ΒΕ = 3$ cm και $ΕΔ = 5$ cm. Το σκιασμένο τετράπλευρο $ΑΔΕΓ$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy που περνά από το σημείο $Γ$ και είναι παράλληλος προς την $ΑΔ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



4. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με βάσεις $ΑΒ = 5α$ cm, $ΓΔ = 3α$ cm και $\hat{Β} = \frac{\pi}{3}$. Το τραπέζιο περιστρέφεται γύρω από ευθεία $xΒy$, που είναι κάθετη στην $ΑΒ$ στο σημείο $Β$. Αν ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή αυτή είναι $160\sqrt{3}\pi$ cm^3, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.

5. Στο διπλανό σχήμα ο κυκλικός τομέας $ΑΒΓ$ είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα $ΑΓ = 3$ cm και το τρίγωνο $ΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο με $ΒΔ = 4$ cm. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου σχήματος γύρω από τον άξονα xy.



Περίληψη

1. Περιστροφή επίπεδων σχημάτων γύρω από άξονα
   - Ένα σημείο, που δεν ανήκει στον άξονα περιστροφής, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει έναν κύκλο.
   - Ένα ευθύγραμμο τμήμα, κάθετο στον άξονα περιστροφής, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω τον άξονα περιστροφής παράγει έναν κυκλικό δίσκο.
   - Ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο δεν τέμνει τον άξονα περιστροφής και σχηματίζει ορθή γωνία με αυτόν, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω τον άξονα περιστροφής παράγει έναν δακτύλιο.
2. Ορθός κύλινδρος ή κύλινδρος εκ περιστροφής ή κύλινδρος λέγεται το στερεό που παράγεται, όταν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο περιστραφεί πλήρως στον χώρο γύρω από μία πλευρά του.
3. Το εμβαδόν της κυρτής και της ολικής επιφάνειας κυλίνδρου με ακτίνα R και ύψος υ είναι αντίστοιχα:
$$E_\kappa = 2\pi R\upsilon$$
$$E_{o\lambda} = E_\kappa + 2E_\beta = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2$$
4. Ο όγκος κυλίνδρου με ακτίνα R και ύψος υ είναι:
$$V = \pi R^2\upsilon$$
5. Ορθός κώνος ή κώνος ονομάζεται το στερεό που παράγεται από την πλήρη περιστροφή στον χώρο ενός ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μία κάθετη πλευρά του.
6. Το εμβαδόν της κυρτής και της ολικής επιφάνειας κώνου με ακτίνα R και ύψος υ είναι αντίστοιχα:
$$E_\kappa = \pi R\lambda$$
$$E_{o\lambda} = E_\kappa + E_\beta = \pi R\lambda + \pi R^2$$
7. Ο όγκος κώνου με ακτίνα R και ύψος υ είναι:
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2\,\upsilon$$
8. Κόλουρος κώνος λέγεται το στερεό που παράγεται από μία πλήρη περιστροφή στον χώρο ενός ορθογωνίου τραπεζίου γύρω από την πλευρά που είναι κάθετη στις βάσεις του.
9. Ο όγκος, το εμβαδόν κυρτής επιφάνειας και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας κόλουρου κώνου με ύψος υ, γενέτειρα λ και ακτίνες βάσεων R και ρ είναι αντίστοιχα:
$$V = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)$$
$$E_\kappa = \pi(R+\rho)\lambda$$
$$E_{o\lambda} = E_\kappa + E_{\beta_1} + E_{\beta_2} = \pi(R+\rho)\lambda + \pi R^2 + \pi\rho^2,$$

10. Σφαίρα ονομάζεται το στερεό που παράγεται από μία πλήρη περιστροφή ενός ημικυκλίου γύρω από τη διάμετρό του.
Ως γεωμετρικός τόπος, η σφαίρα ορίζεται και ως εξής:
Σφαίρα είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που απέχουν σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο.

11. Θέσεις ευθείας – σφαίρας στον χώρο
Θεωρούμε σφαίρα με ακτίνα R και ευθεία που απέχει απόσταση d από το κέντρο της σφαίρας. Τότε:
(α) η ευθεία και η σφαίρα δεν έχουν κοινά σημεία, όταν $d > R$
(β) η ευθεία εφάπτεται στην σφαίρα, όταν $d = R$
(γ) η ευθεία τέμνει την σφαίρα, όταν $d < R$.

12. Θέσεις επιπέδου – σφαίρας στον χώρο
Θεωρούμε σφαίρα με ακτίνα R και επίπεδο π που απέχει απόσταση d από το κέντρο της σφαίρας. Τότε:
(α) το επίπεδο και η σφαίρα δεν έχουν κοινά σημεία, όταν $d > R$
(β) το επίπεδο εφάπτεται στη σφαίρα, όταν $d = R$
(γ) το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα, όταν $d < R$.

13. Ο όγκος και το εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας με ακτίνα R είναι αντίστοιχα:
$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$
$$E = 4\pi R^2$$

14. Περιστροφή επίπεδων σχημάτων γύρω από άξονα
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, παράλληλο με τον άξονα περιστροφής, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει την κυρτή επιφάνεια κυλίνδρου.
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο τέμνει κατά οξεία γωνία τον άξονα περιστροφής, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω τον άξονα περιστροφής παράγει την κυρτή επιφάνεια κώνου.
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο δεν τέμνει τον άξονα περιστροφής και σχηματίζει οξεία γωνία με αυτόν, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει την κυρτή επιφάνεια κόλουρου κώνου.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να υπολογίσετε τον όγκο κώνου με ακτίνα $4\,\mathrm{cm}$ και το εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $20\pi\ \mathrm{cm}^2$.

2. Τα ύψη ενός κώνου και ενός κυλίνδρου είναι ίσα. Ο όγκος του κώνου είναι $12\pi\ \mathrm{cm}^3$ και το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $24\pi\ \mathrm{cm}^2$. Αν οι ακτίνες τους είναι ίσες, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.

3. Η στάθμη του νερού σε κυλινδρικό δοχείο ακτίνας $3\,\mathrm{cm}$ είναι $4\,\mathrm{cm}$. Μέσα στο δοχείο τοποθετούμε μια σφαίρα, η οποία καλύπτεται πλήρως από το νερό και η στάθμη του νερού διπλασιάζεται. Να υπολογίσετε την επιφάνεια της σφαίρας.

4. Κύλινδρος είναι εγγεγραμμένος σε σφαίρα ακτίνας $7\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι διπλάσιο από την ακτίνα του, να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου.

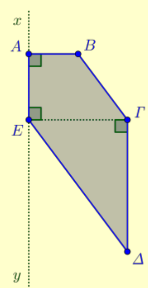
5. Οι τομές δύο παράλληλων επιπέδων με σφαίρα είναι δύο ίσοι κύκλοι ακτίνας $3\,\mathrm{cm}$. Αν η ακτίνα της σφαίρας είναι $5\,\mathrm{cm}$, να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των δύο επιπέδων.

6. Δίνεται σφαίρα με ακτίνα $R = 13\,\mathrm{cm}$ και ένα επίπεδο π που απέχει από το κέντρο της σφαίρας απόσταση $d = 12\,\mathrm{cm}$. Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου που είναι εγγεγραμμένος στη σφαίρα και η βάση του είναι η τομή της σφαίρας και του επιπέδου.

7. Ορθογώνιο τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $\hat{Γ} = \hat{Δ} = 90°$ και πλευρές $ΑΔ = 12\,\mathrm{cm}$, $ΒΓ = 8\,\mathrm{cm}$ και $ΔΓ = 3\,\mathrm{cm}$, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία ε που είναι παράλληλη προς την $ΑΔ$ και απέχει $2\,\mathrm{cm}$ από αυτήν. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή αυτή.

8. Παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ = 10\,\mathrm{m}$, $ΒΓ = 2\sqrt{2}\,\mathrm{m}$ και $\hat{Γ} = \frac{3\pi}{4}$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την $ΔΓ$. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

9. Στο διπλανό σχήμα $ΑΕ = 4\,\mathrm{cm}$, $ΒΓ = 5\,\mathrm{cm}$, $ΓΔ = 8\,\mathrm{cm}$, $ΔΕ = 10\,\mathrm{cm}$, $Ε\hat{Γ}Δ = \frac{\pi}{2}$ και οι $ΑΒ, ΕΓ$ είναι κάθετες στον άξονα xy. Το σκιασμένο μέρος του σχήματος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

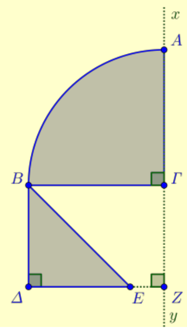


10. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με πλευρά $α$. Προεκτείνουμε το ύψος $ΑΔ$ κατά τμήμα $ΔΕ = α$ και φέρουμε τον άξονα xEy, ο οποίος είναι παράλληλος με την πλευρά $ΒΓ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του $α$, το εμβαδό της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται, όταν το τρίγωνο $ΑΒΓ$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xEy.

11. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $\left(\hat{A} = \frac{\pi}{2}\right)$ πλευράς $AB = 6\ \mathrm{cm}$. Προεκτείνουμε την πλευρά $ΑΓ$ προς το μέρος του $Α$ κατά τμημα $ΑΔ = ΑΓ$. Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα $xΔy$, ο οποίος είναι κάθετος στην $ΔΓ$ στο $Δ$ και παράγει όγκο ίσο με $512\pi\ \mathrm{cm}^3$. Να υπολογίσετε:
    (α) το μήκος της πλευράς $ΑΓ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$
    (β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

12. Επίπεδο π περιέχει κύκλο με κέντρο το $Κ$ και ακτίνα R και ευθύγραμμο τμήμα $ΣΑ$ που είναι εφαπτόμενο στον κύκλο στο σημείο $Α$. Η ευθεία ε είναι κάθετη στο επίπεδο π στο σημείο $Κ$. Αν το $Τ$ είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ε, να αποδείξετε ότι $(ΤΣ)^2 = (ΤΚ)^2 + (ΚΑ)^2 + (ΣΑ)^2$.

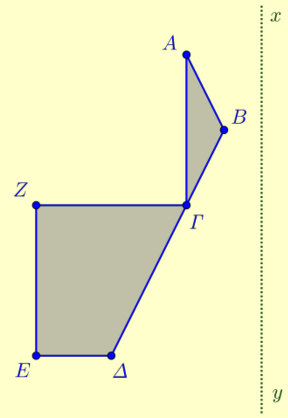
13. Στο διπλανό σχήμα ο κυκλικός τομέας $ΑΒΓ$ είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα $ΒΓ = 8\ \mathrm{cm}$ και το τρίγωνο $ΒΔΕ$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $ΒΔ = ΔΕ = 6\ \mathrm{cm}$. Αν η $ΔΖ$ είναι κάθετη στον άξονα xy, να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου σχήματος γύρω από τον άξονα xy.



Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

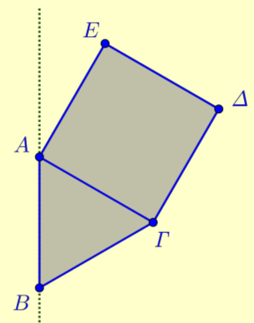
1. Τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ πλευράς $α$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα xAy που είναι κάθετος στη διαγώνιο $ΑΓ$ του τετραγώνου. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του $α$, τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

2. Το διπλανό σκιασμένο σχήμα αποτελείται από το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΒΓ)$ και το ορθογώνιο τραπέζιο $ΖΓΔΕ$ $\left(E\hat{Z}Γ = Z\hat{E}Δ = \frac{\pi}{2}\right)$. Ο άξονας xy είναι παράλληλος με το ευθύγραμμο τμήμα $ΖΕ$ και απέχει $6\,\mathrm{m}$ από αυτό. Αν $Α\hat{Γ}Ζ = \frac{\pi}{2}$, $ΖΓ = ΖΕ = ΑΓ = 4\,\mathrm{m}$, $ΕΔ = 2\,\mathrm{m}$ και $ΒΔ = 3\sqrt{5}\,\mathrm{m}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου σχήματος γύρω από τον άξονα xy.



3. Κόλουρος κώνος και κώνος έχουν ίσα ύψη και η ακτίνα της μικρής βάσης του κόλουρου κώνου είναι ίση με την ακτίνα της βάσης του κώνου. Συμβολίζουμε με R την ακτίνα της μεγάλης βάσης του κόλουρου κώνου, ρ την ακτίνα της μικρής βάσης του κόλουρου κώνου, λ_1 την γενέτειρα του κόλουρου κώνου και λ_2 την γενέτειρα του κώνου.
   (α) Να αποδείξετε ότι:
   $$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{R^2 - 2R\rho}{\lambda_1 + \lambda_2}$$
   (β) Αν η ακτίνα της μεγάλης βάσης του κόλουρου κώνου είναι μεγαλύτερη από το διπλάσιο της ακτίνας της μικρής βάσης του κόλουρου κώνου, να αποδείξετε ότι:
   $$\lambda_1 > \lambda_2$$

4. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ πλευράς $2\,\mathrm{cm}$. Με πλευρά την $ΑΓ$ γράφουμε τετράγωνο $ΑΓΔΕ$ έξω από το τρίγωνο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σχήματος $ΑΒΓΔΕΑ$ γύρω από την $ΑΒ$.



ΕΝΟΤΗΤΑ 12

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

12.1 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Μέτρα θέσης και διασποράς

Σε προηγούμενες τάξεις έχουμε μάθει τις πιο κάτω στατιστικές έννοιες:

- **Συχνότητα** μιας παρατήρησης ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που εκφράζει πόσες φορές εμφανίζεται η παρατήρηση αυτή.
- **Επικρατούσα τιμή** είναι η παρατήρηση που εμφανίζεται με τη μεγαλύτερη συχνότητα και συμβολίζεται με x_ε.
- **Μέση τιμή** είναι το πηλίκο του αθροίσματος όλων των παρατηρήσεων διά το πλήθος τους και συμβολίζεται με $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu}{\nu}, \text{ όπου } x_1, x_2, \dots, x_\nu \text{ οι παρατηρήσεις}$$

- **Διάμεσος** είναι η μεσαία παρατήρηση ενός δείγματος ν παρατηρήσεων όταν αυτές διατάσσονται σε αύξουσα σειρά. Η διάμεσος συμβολίζεται με x_δ:

$$x_\delta = \begin{cases} x_{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}, & \nu - \text{περιττός} \\ \dfrac{x_{\left(\frac{\nu}{2}\right)} + x_{\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}}{2}, & \nu - \text{άρτιος} \end{cases},$$

όπου $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(\nu)}$ οι διατεταγμένες παρατηρήσεις

- **Εύρος** είναι η διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από τη μεγαλύτερη:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

- **Διακύμανση ή διασπορά** ν παρατηρήσεων $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\nu$ ονομάζεται ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή. Συμβολίζεται με s^2 και ισχύει:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_\nu - \bar{x})^2}{\nu}$$

- **Τυπική απόκλιση** ονομάζεται η τετραγωνική ρίζα της διασποράς. Συμβολίζεται με s και ισχύει:

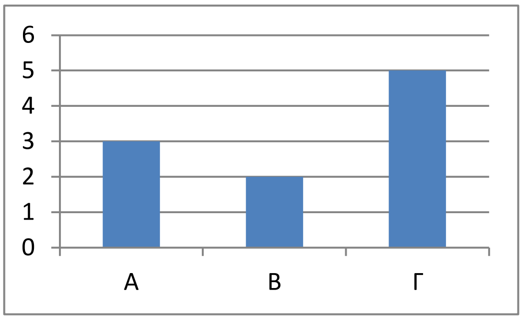
$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_\nu - \bar{x})^2}{\nu}}$$

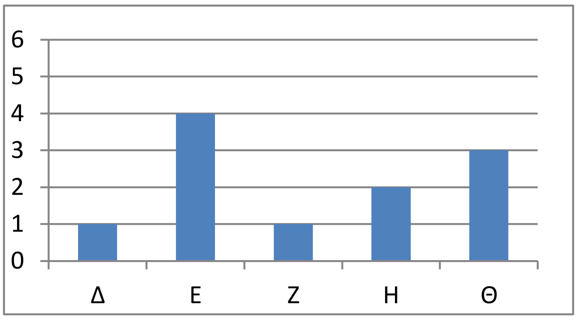
12.2 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΥΟ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ

12.2.1 Σύγκριση δύο πληθυσμών με βάση τα μέτρα θέσης και διασποράς

Διερεύνηση

Στα πιο κάτω διαγράμματα δίνονται οι πωλήσεις που έκαναν οι εργαζόμενοι στις εταιρείες X και Y.





(α) Ποια εταιρεία έκανε τον μεγαλύτερο αριθμό πωλήσεων;

(β) Ποιο μέτρο θα επιλέγατε, για να βρείτε τον καλύτερο πωλητή σε κάθε εταιρεία;

(γ) Ποιο μέτρο θα επιλέγατε για να βρείτε ποια είναι η εταιρεία με την καλύτερη απόδοση;

(δ) Ποιο μέτρο θα επιλέγατε, για να συγκρίνετε τη σταθερότητα των πωλήσεων σε κάθε εταιρεία;

Τα μέτρα θέσης και διασποράς είναι χρήσιμα, όταν συγκρίνουμε δύο διαφορετικούς πληθυσμούς. Ανάλογα με το ερώτημα που πρέπει να απαντήσουμε, υπολογίζουμε και συγκρίνουμε τα κατάλληλα μέτρα θέσης και διασποράς στους δύο πληθυσμούς.

Παράδειγμα 1

Η εταιρεία λεωφορείων της πόλης μας καταγράφει κάθε μέρα τον αριθμό των καθυστερημένων δρομολογίων. Ο πίνακας παρουσιάζει τα καθυστερημένα δρομολόγια ανά ημέρα τους μήνες Φεβρουάριο και Μάιο του ίδιου έτους.

Φεβρουάριος										*Μάιος*									
6	7	5	4	3	0	0	1	2	5	3	0	1	0	3	1	2	3	4	9
9	1	5	4	3	6	7	1	0	0	2	0	4	1	1	2	3	4	1	5
0	0	1	2	1	0	4	1			7	2	1	2	3	0	4	1	0	2
										1									

(α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο, την επικρατούσα τιμή και το εύρος του αριθμού των καθυστερημένων δρομολογίων για κάθε μήνα.

(β) Πιστεύετε ότι η εταιρεία έχει βελτιώσει το επίπεδο των υπηρεσιών της μεταξύ Φεβρουαρίου – Μαΐου; Να εξηγήσετε γιατί.

Λύση

(α) Για να υπολογίσουμε τη διάμεσο των παρατηρήσεων για τον μήνα Φεβρουάριο κατατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

$$0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,2,2,3,3,4,4,4,5,5,5,6,6,7,7,9$$

Οι μεσαίες παρατηρήσεις των 28 πιο πάνω παρατηρήσεων είναι οι $x_{\left(\frac{28}{2}\right)} = x_{14} = 2$ και $x_{\left(\frac{28}{2}+1\right)} = x_{15} = 2$. Η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Δηλαδή:

$$x_\delta = \frac{2+2}{2} = 2$$

Η επικρατούσα τιμή για τον μήνα Φεβρουάριο είναι $x_\varepsilon = 0$, γιατί παρουσιάζεται εφτά φορές. Έχει, δηλαδή, τη μεγαλύτερη συχνότητα από τις παρατηρήσεις.
Το εύρος είναι $R = 9 - 0 = 9$.

Για να υπολογίσουμε τη διάμεσο των παρατηρήσεων για τον μήνα Μάιο κατατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

$$0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,4,4,4,4,5,7,9$$

Η μεσαία παρατήρηση των 31 πιο πάνω παρατηρήσεων είναι η $x_{\left(\frac{31+1}{2}\right)} = x_{16} = 2$.
Η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση. Δηλαδή, $x_\delta = 2$.

Η επικρατούσα τιμή για τον μήνα Μάιο είναι $x_\varepsilon = 1$, γιατί παρουσιάζεται οκτώ φορές. Έχει, δηλαδή, τη μεγαλύτερη συχνότητα από τις παρατηρήσεις.
Το εύρος είναι $R = 9 - 0 = 9$.

(β) Παρατηρούμε ότι έχουμε την ίδια διάμεσο, το ίδιο εύρος και μικρή διαφορά στην επικρατούσα τιμή. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι η εταιρεία δεν έχει βελτιώσει σημαντικά το επίπεδο υπηρεσιών.

Παράδειγμα 2

Το δημαρχείο της πόλης μας εξετάζει δυο είδη λαμπτήρων για τη φωταγώγηση της πόλης. Παίρνει τυχαία 9 λαμπτήρες από το κάθε είδος και καταγράφει τις ώρες λειτουργίας τους πριν καταστραφούν. Οι ώρες φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

Είδος A (ώρες)	140	150	160	130	150	170	150	140	160
Είδος B (ώρες)	170	180	190	110	200	100	80	120	200

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των ωρών λειτουργίας του κάθε είδους.

(β) Ποιο είδος θα πρέπει να προτιμήσει το δημαρχείο;

Λύση

(α) Η μέση τιμή για το είδος A είναι

$$\bar{x}_A = \frac{140+150+160+130+150+170+150+140+160}{9} = 150$$

και για το είδος B είναι:

$$\bar{x}_B = \frac{170+180+190+110+200+100+80+120+200}{9} = 150$$

Η τυπική απόκλιση για το είδος A είναι:

$$s_A = \frac{1}{3}\sqrt{(130-150)^2 + 2(140-150)^2 + 2(160-150)^2 + (170-150)^2} = 11{,}547$$

Η τυπική απόκλιση για το είδος B είναι:

$$s_B = \frac{1}{3}\sqrt{(80-150)^2 + (100-150)^2 + (110-150)^2 + \cdots + 2(200-150)^2} = 44{,}472$$

(β) Η μέση τιμή του χρόνου λειτουργίας των λαμπτήρων και των δύο ειδών είναι 150 ώρες και η τυπική απόκλιση για το είδος A και Β είναι 11,547 και 44,472, αντίστοιχα. Το δημαρχείο πρέπει να επιλέξει το είδος A, γιατί ο χρόνος λειτουργίας έχει σημαντικά μικρότερη τυπική απόκλιση από το είδος B. Αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος λειτουργίας των λαμπτήρων του είδους A θα είναι πολύ πιο κοντά στη μέση τιμή του χρόνου λειτουργίας τους. Έτσι, θα μπορεί πολύ πιο εύκολα το δημαρχείο να προγραμματίσει την αντικατάστασή τους.

Παράδειγμα 3

Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον χρόνο σε δευτερόλεπτα που χρειάστηκαν δύο αθλητές, για να τρέξουν στο δρόμο των 100 μέτρων.

Αθλητής A	10,5	10,4	10,5	10,5	10,5	10,6	10,5	10,5	10,4	10,5
Αθλητής B	10,1	10,6	10,3	10,4	9,9	10,3	10,2	10,1	10,1	10

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των χρόνων των δύο αθλητών.

(β) Ποιος είναι ο καλύτερος αθλητής;

Λύση

(α) Η μέση τιμή για το χρόνο του αθλητή A είναι

$$\bar{x}_A = \frac{10{,}5+10{,}4+10{,}5+10{,}5+10{,}5+10{,}6+10{,}5+10{,}5+10{,}4+10{,}5}{10} = 10{,}5$$

και η μέση τιμή για το χρόνο του αθλητή B είναι:

$$\bar{x}_B = \frac{10{,}1+10{,}6+10{,}3+10{,}4+9{,}9+10{,}3+10{,}2+10{,}1+10{,}1+10}{10} = 10{,}2$$

Η τυπική απόκλιση για το χρόνο του αθλητή A είναι:

$$s_A = \sqrt{\frac{1}{10}(3\cdot 0{,}1^2)} = 0{,}055$$

Η τυπική απόκλιση για το χρόνο του αθλητή B είναι:

$$s_B = \sqrt{\frac{1}{10}(5\cdot 0{,}1^2 + 2\cdot 0{,}2^2 + 0{,}3 + 0{,}4\,)} = 0{,}2$$

(β) Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή του χρόνου του αθλητή B είναι μικρότερη από τη μέση τιμή του χρόνου του αθλητή A. Συνεπώς, ο καλύτερος αθλητής είναι ο B.

12.2.2 Σύγκριση δύο πληθυσμών – Συντελεστής μεταβλητότητας

Το στατιστικό μέτρο που χρησιμοποιείται για τη σύγκριση των διασπορών μεταξύ ομάδων παρατηρήσεων ή για τη διαπίστωση ύπαρξης ή όχι ομοιογένειας στις παρατηρήσεις μιας ομάδας λέγεται **συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας** (CV). Ο συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας υπολογίζεται από τον τύπο

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|},$$

όπου s η τυπική απόκλιση και $\bar{x}$ η μέση τιμή.

Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι ανεξάρτητος από τη μονάδα μέτρησης των παρατηρήσεων και εκφράζεται συνήθως ως ποσοστό.
Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι μικρότερος από 10%, λέγεται ότι τα δεδομένα παρουσιάζουν **ομοιογένεια**.
Ένα δείγμα A έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια από ένα δείγμα B, αν $CV_A < CV_B$.

Χρησιμοποιείται σε δύο περιπτώσεις:

(α) όταν θέλουμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα δυο διαφορετικών μετρήσεων της ίδιας μεταβλητής.
Για παράδειγμα, όταν θέλουμε να συγκρίνουμε τη διασπορά στους βαθμούς μιας τάξης στα Μαθηματικά μέσα από δύο διαφορετικά διαγωνίσματα.

(β) όταν θέλουμε να συγκρίνουμε ένα δείγμα ενός πληθυσμού ως προς δύο διαφορετικές μεταβλητές.
Για παράδειγμα, όταν θέλουμε να συγκρίνουμε τη διασπορά του ύψους και του βάρους σε ένα δείγμα εφήβων.

Παράδειγμα 4

Ένας δειγματοληπτικός έλεγχος στην κεντρική αγορά, στις τιμές του κρέατος και των ψαριών, είχε τα αποτελέσματα που φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

Ψάρι €/kg	7,3	7,3	7,1	8,3	8,9	7,9	9,2	8,7	7,3	8,7
Κρέας €/kg	4	3,1	4,2	2,4	3,1	5	3,9	3,2	3,4	3,8

Για το κάθε είδος, να υπολογίσετε:

(α) τη μέση τιμή
(β) την τυπική απόκλιση
(γ) τον συντελεστή μεταβολής

Λύση

(α) Ψάρι:

$$\bar{x} = \frac{7{,}3 + 7{,}3 + 7{,}1 + 8{,}3 + 8{,}9 + 7{,}9 + 9{,}2 + 8{,}7 + 7{,}3 + 8{,}7}{10} = 8{,}1$$

Κρέας:

$$\bar{x} = \frac{4 + 3{,}1 + 4{,}2 + 2{,}4 + 3{,}1 + 5 + 3{,}9 + 3{,}2 + 3{,}4 + 3{,}8}{10} = 3{,}6$$

(β) Ψάρι:

$$s = \sqrt{\frac{1}{10}(1^2 + 2 \cdot 0{,}2^2 + 2 \cdot 0{,}6^2 + 4 \cdot 0{,}8^2 + 1{,}1^2)} = 0{,}746$$

Κρέας:

$$s = \sqrt{\frac{1}{10}(2 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}3^2 + 2 \cdot 0{,}4^2 + 2 \cdot 0{,}5^2 + 0{,}6^2 + 1{,}2^2 + 1{,}4^2)} = 0{,}689$$

(γ) Ψάρι:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{0{,}746}{8{,}1} = 0{,}0921 = 9{,}21\%$$

Κρέας:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{0{,}689}{3{,}6} = 0{,}1914 = 19{,}14\%$$

Παράδειγμα 5

Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι βαθμοί των μαθητών δύο τμημάτων της Β΄ Λυκείου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών:

B_{21}	2	15	12	11	19	17	19	9	13	4	7	15	19	20	17	9
B_{22}	7	8	16	15	18	15	17	11	13	9	20	9	8	14	16	12

Για το κάθε τμήμα, να υπολογίσετε:

(α) τη μέση τιμή

(β) την τυπική απόκλιση

(γ) τον συντελεστή μεταβολής

Ποιο είναι, κατά τη γνώμη σας, το πιο σταθερό (σε επίδοση) τμήμα;

Λύση

(α) B_{21}:

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 7 + 2 \cdot 9 + 11 + 12 + 13 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 17 + 3 \cdot 19 + 20}{16} = 13$$

B_{22}:

$$\bar{x} = \frac{7 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 11 + 12 + 13 + 14 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 16 + 17 + 18 + 20}{16} = 13$$

(β) B_{21}:

Βαθμός (x_i)	**Συχνότητα** (f_i)	$(\boldsymbol{x_i - \bar{x}})^2$	$\boldsymbol{f_i(x_i - \bar{x})^2}$
2	1	$(2-13)^2 = 121$	121
4	1	$(4-13)^2 = 81$	81
7	1	$(7-13)^2 = 36$	36
9	2	$(9-13)^2 = 16$	32
11	1	$(11-13)^2 = 4$	4
12	1	$(12-13)^2 = 1$	1
13	1	$(13-13)^2 = 0$	0
15	2	$(15-13)^2 = 4$	8
17	2	$(17-13)^2 = 16$	32
19	3	$(19-13)^2 = 36$	108
20	1	$(20-13)^2 = 49$	49
	$\boldsymbol{\nu = 16}$		$\boldsymbol{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2 = 472}$

$$s = \sqrt{\frac{472}{16}} = \sqrt{29{,}5} \approx 5{,}4314$$

B_{22}:

Βαθμός (x_i)	**Συχνότητα** (f_i)	$(\boldsymbol{x_i - \bar{x}})^2$	$\boldsymbol{f_i(x_i - \bar{x})^2}$
7	1	$(7-13)^2 = 36$	36
8	2	$(8-13)^2 = 25$	50
9	2	$(9-13)^2 = 16$	32
11	1	$(11-13)^2 = 4$	4
12	1	$(12-13)^2 = 1$	1
13	1	$(13-13)^2 = 0$	0
14	1	$(14-13)^2 = 1$	1
15	2	$(15-13)^2 = 4$	8
16	2	$(16-13)^2 = 9$	18
17	1	$(17-13)^2 = 16$	16
18	1	$(18-13)^2 = 25$	25
20	1	$(20-13)^2 = 49$	49
	$\boldsymbol{\nu = 16}$		$\boldsymbol{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2 = 240}$

$$s = \sqrt{\frac{240}{16}} = \sqrt{15} \approx 3{,}873$$

(γ) B_{21}:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{5{,}4314}{13} = 0{,}4178 = 41{,}78\%$$

B_{22}:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{3{,}873}{13} = 0{,}2979 = 29{,}79\%$$

Οι βαθμοί των μαθητών των δύο τμημάτων δεν παρουσιάζουν ομοιογένεια. Όμως το B_{22} παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια βαθμών, άρα είναι πιο σταθερό.

Δραστηριότητες

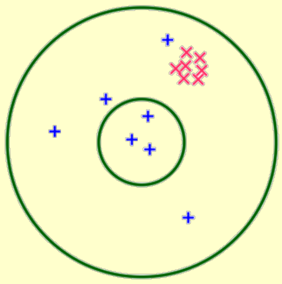
1. Μια εταιρεία αποτελείται από τέσσερις τομείς. Οι υπάλληλοι σε κάθε τομέα ρωτήθηκαν αν θέλουν να μετακινηθεί το ωράριο εργασίας κατά μισή ώρα. Οι απαντήσεις των υπαλλήλων παρουσιάζονται στον πιο κάτω πίνακα.

Τομέας A	Ναι	Όχι	Ναι	Ναι	Ναι	Όχι	Ναι	Ναι	Ναι	Όχι	Ναι	Όχι
Τομέας B	Όχι	Όχι	Ναι	Όχι	Ναι							
Τομέας Γ	Ναι	Ναι	Όχι	Όχι	Όχι	Ναι	Ναι	Όχι				
Τομέας Δ	Όχι	Ναι	Όχι	Ναι	Ναι	Όχι	Όχι	Ναι	Ναι	Όχι	Όχι	

(α) Να υπολογίσετε την επικρατούσα τιμή των απαντήσεων σε κάθε τομέα.

(β) Να αναφέρετε κατά πόσο η εταιρεία πρέπει να αλλάξει το ωράριο εργασίας.

2. Δύο τοξότες ρίχνουν βέλη στο διπλανό στόχο. Με κόκκινο σημειώνουμε τις βολές του τοξότη A και με μπλε σημειώνουμε τις βολές του τοξότη B.



(α) Να βρείτε τον τοξότη, του οποίου οι βολές έχουν τη μικρότερη διασπορά.

(β) Ποιος είναι ο καλύτερος τοξότης;

3. Σε δύο δείγματα A και B δίνονται $\bar{x}_A = 50$, $s_A = 4$, $\bar{x}_B = 70$, $s_B = 6$.

(α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής για το καθένα από τα πιο πάνω δείγματα.

(β) Να βρείτε ποιο από τα δείγματα A και B παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

4. Δίνονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των βαθμολογιών στην τελική εξέταση στο μάθημα των Μαθηματικών τεσσάρων τμημάτων της Β΄ Λυκείου.

Τμήμα	Μέση Τιμή	Τυπική Απόκλιση
B_1	14,1	1,5
B_2	14,2	2,3
B_3	12,9	1,2
B_4	13,7	2,7

(α) Ποιο τμήμα έχει τη μεγαλύτερη μέση τιμή και ποιο τμήμα έχει τη μικρότερη τυπική απόκλιση;

(β) Ποιο είναι, κατά τη γνώμη σας, το καλύτερο από τα τέσσερα τμήματα;

(γ) Ποιο από τα πιο πάνω τμήματα παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια;

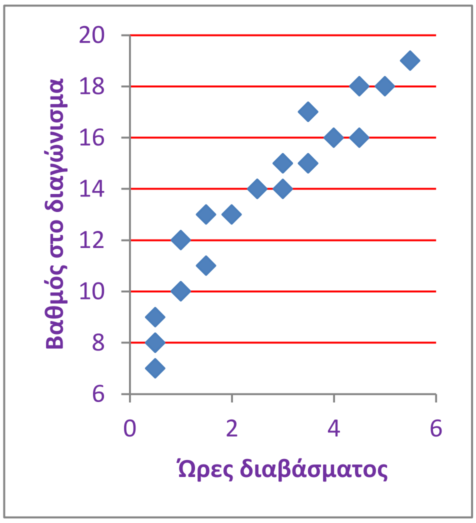
12.3 ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ – ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

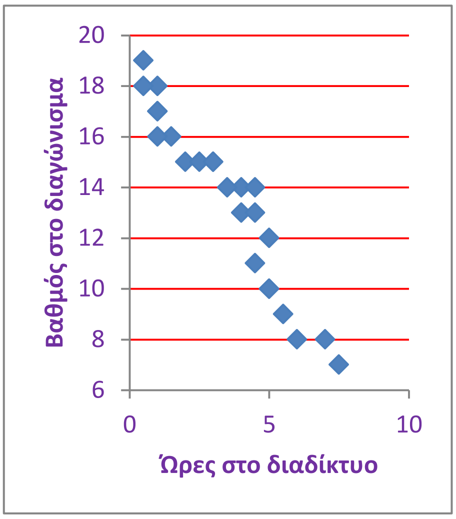
Διερεύνηση

Τα πιο κάτω διαγράμματα παρουσιάζουν τον βαθμό των μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών σε σχέση με τον χρόνο που αφιέρωσαν τις προηγούμενες δύο μέρες για διάβασμα και για ενασχόληση με το διαδίκτυο.

(α) Ποια σχέση έχουν οι μεταβλητές *«βαθμός»* και *«ώρες διαβάσματος»*;

(β) Να συγκρίνετε τη σχέση των μεταβλητών βαθμός και ώρες διαβάσματος με τη σχέση των μεταβλητών βαθμός και ώρες στο διαδίκτυο.



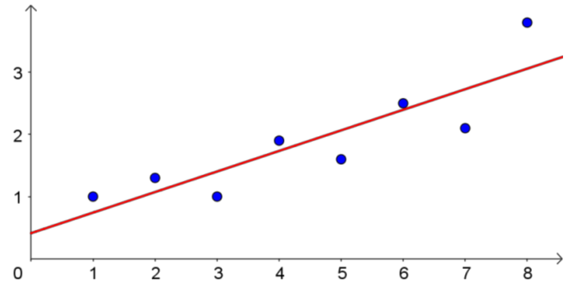


12.3.1 Διαγράμματα διασποράς

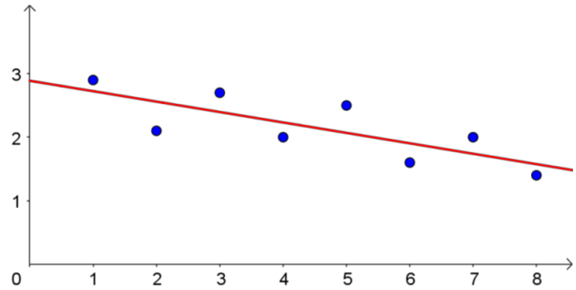
Ένα χρήσιμο εργαλείο για να μελετήσουμε την πιθανή ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών από έναν πληθυσμό, είναι το **διάγραμμα διασποράς**. Αν έχουμε παρατηρήσεις $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ από μια μεταβλητή X και $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ από μια μεταβλητή Y, τότε το διάγραμμα διασποράς είναι η γραφική παράσταση των σημείων $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_\nu, y_\nu)$ σε ένα σύστημα αξόνων. Η μεταβλητή X ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** και η μεταβλητή Y **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Με τα διαγράμματα διασποράς μπορούμε να μελετήσουμε τη σχέση που ενδέχεται να έχουν οι δύο μεταβλητές. Η ύπαρξη οποιασδήποτε σχέσης μεταξύ δυο μεταβλητών ονομάζεται **συσχέτιση**. Η συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών μπορεί να είναι γραμμική ή μη γραμμική. Εμείς, όμως, θα περιοριστούμε μόνο σε γραμμικές συσχετίσεις.

- Δύο μεταβλητές έχουν **θετική συσχέτιση**, όταν οι τιμές της μιας μεταβλητής αυξάνονται ή μειώνονται τότε και οι τιμές της άλλης μεταβλητής αυξάνονται ή μειώνονται, αντίστοιχα.



- Δύο μεταβλητές έχουν **αρνητική συσχέτιση**, όταν οι τιμές της μιας μεταβλητής αυξάνονται ή μειώνονται τότε οι τιμές της άλλης μεταβλητής μειώνονται ή αυξάνονται, αντίστοιχα.

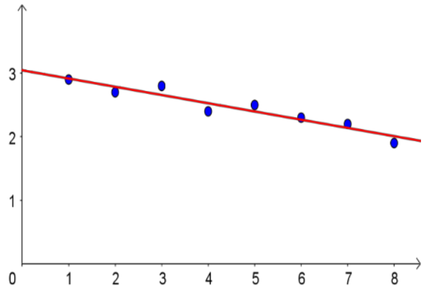


Επίσης, όσο μικρότερη είναι η διασπορά των δεδομένων γύρω από την ευθεία τάσης των παρατηρήσεων, τόσο πιο ισχυρή είναι η συσχέτιση μεταξύ των δυο μεταβλητών.

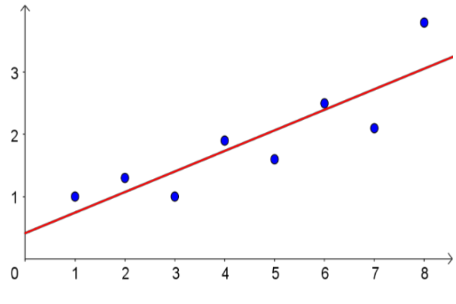
Σημείωση
Η ευθεία που περνά ανάμεσα στα σημεία ενός διαγράμματος συσχέτισης ονομάζεται **ευθεία τάσης** των παρατηρήσεων.

Παραδείγματα

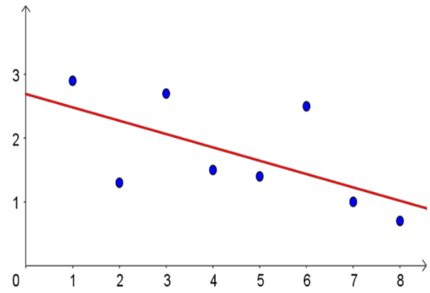
Ισχυρή αρνητική συσχέτιση



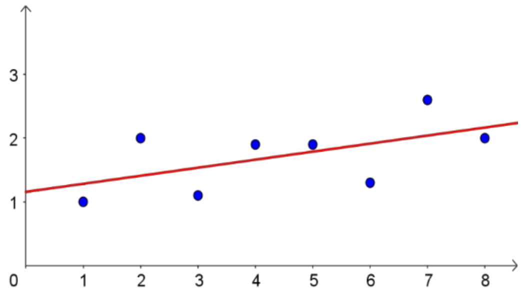
Ισχυρή θετική συσχέτιση



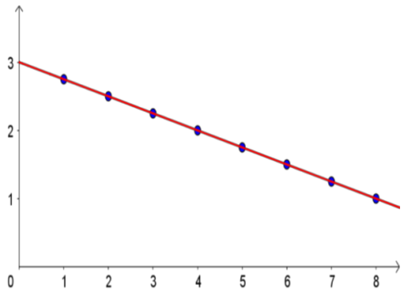
Ασθενής αρνητική συσχέτιση



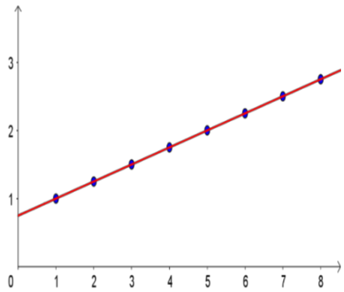
Ασθενής θετική συσχέτιση



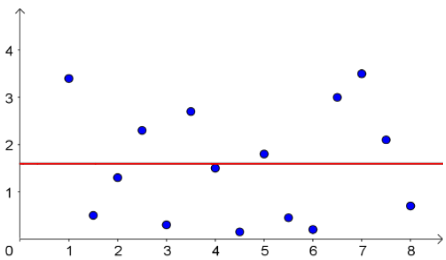
Τέλεια αρνητική συσχέτιση



Τέλεια θετική συσχέτιση



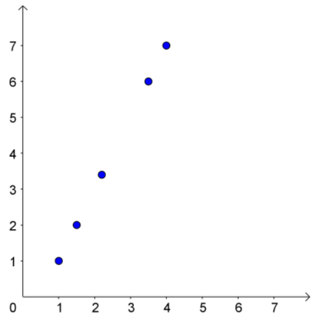
Μηδενική συσχέτιση



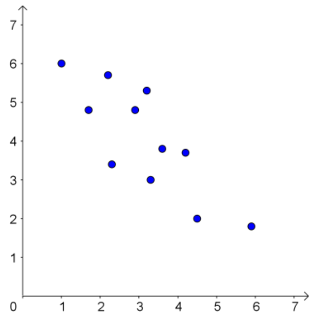
Παράδειγμα 1

Δίνονται τα πιο κάτω διαγράμματα διασποράς:

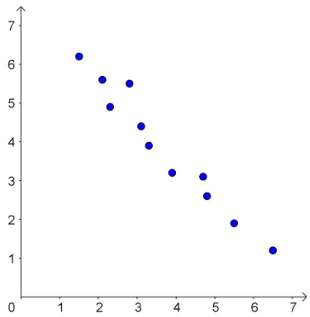
(I)



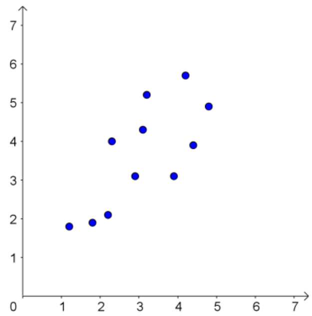
(II)



(III)



(IV)



(α) Να βρείτε ποια διαγράμματα παρουσιάζουν θετική συσχέτιση και ποια διαγράμματα παρουσιάζουν αρνητική συσχέτιση.

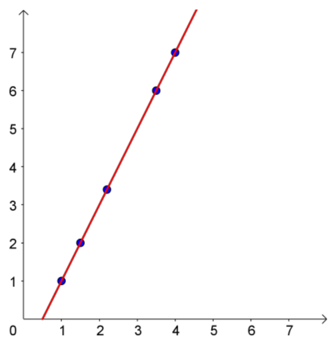
(β) Ποιο διάγραμμα παρουσιάζει ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση και ποιο ασθενή αρνητική γραμμική συσχέτιση;

(γ) Ποιο διάγραμμα παρουσιάζει τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση;

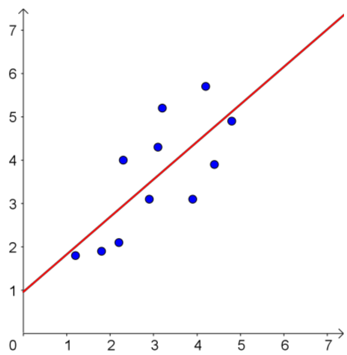
Λύση

(α) Θετική συσχέτιση παρουσιάζουν τα διαγράμματα (I) και (IV), γιατί όσο αυξάνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή αυξάνεται, η εξαρτημένη μεταβλητή τείνει να αυξάνεται.

(I)

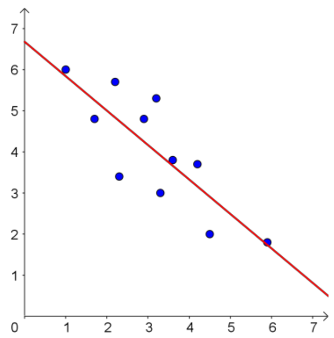


(IV)

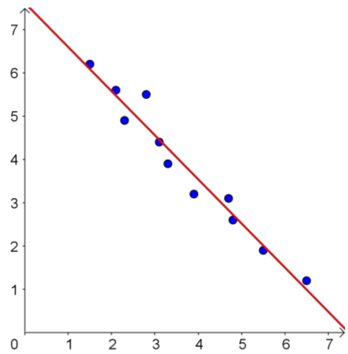


Αρνητική συσχέτιση τα διαγράμματα (ΙΙ) και (ΙΙΙ), γιατί όσο αυξάνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, η εξαρτημένη μεταβλητή τείνει να μειώνεται.

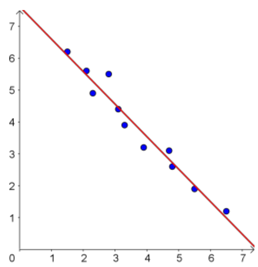
(ΙΙ)



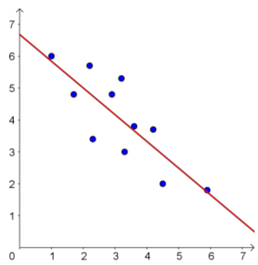
(ΙΙΙ)



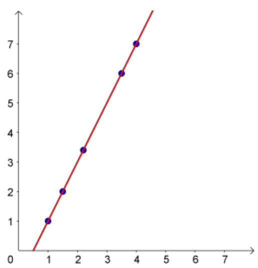
(β) Ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση παρουσιάζει το διάγραμμα (ΙΙΙ), γιατί τα σημεία παρουσιάζουν σχετικά μικρή διασπορά και όσο αυξάνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, η εξαρτημένη μεταβλητή τείνει να μειώνεται.



Ασθενή αρνητική γραμμική συσχέτιση παρουσιάζει το διάγραμμα (ΙΙ), γιατί τα σημεία παρουσιάζουν σχετικά μεγάλη διασπορά και όσο αυξάνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, η εξαρτημένη μεταβλητή τείνει να μειώνεται.



(γ) Τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση παρουσιάζει το διάγραμμα (Ι), γιατί όλα τα σημεία του διαγράμματος είναι σημεία μιας ευθείας με θετική κλίση.



12.3.2. Συντελεστής συσχέτισης

Διερεύνηση

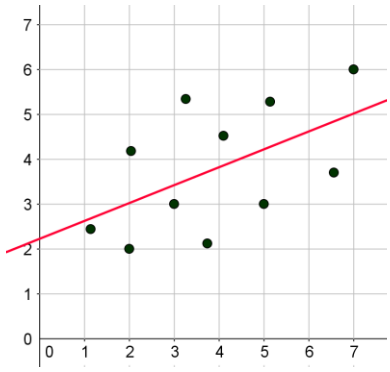
Για το κάθε διάγραμμα διασποράς δίνεται ένας συντελεστής r ως δείκτης της συσχέτισης δύο μεταβλητών.

(α) Σε ποια διαγράμματα ο συντελεστής r είναι θετικός και σε ποια αρνητικός;

(β) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή που μπορεί να έχει ο συντελεστής r;

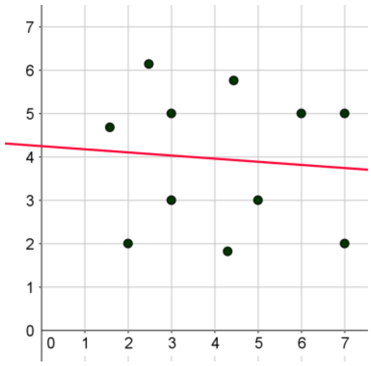
(γ) Ποια η σχέση του συντελεστή r με την ασθενή, την ισχυρή, την τέλεια και τη μηδενική γραμμική συσχέτιση.

(I)



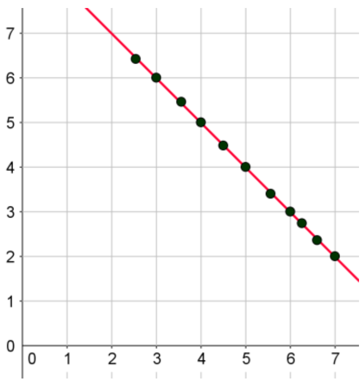
$r = 0{,}63$

(II)



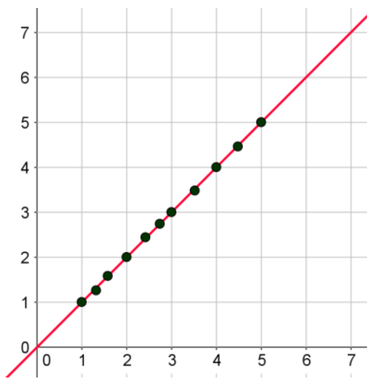
$r = 0$

(III)



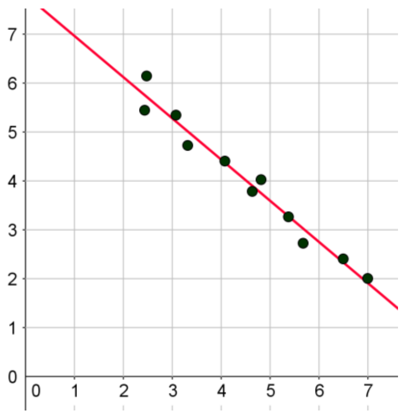
$r = -1$

(IV)



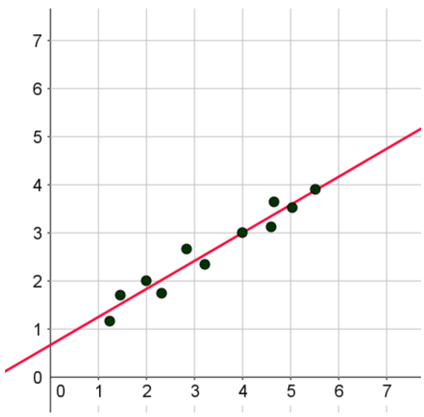
$r = 1$

(V)



$r = -0{,}98$

(VI)



$r = 0{,}97$

Ένας σημαντικός συντελεστής που καθορίζει τον βαθμό **γραμμικής συσχέτισης** δύο μεταβλητών είναι ο **συντελεστής συσχέτισης** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{r}$.

Ο συντελεστής συσχέτισης δεν εκφράζεται σε συγκεκριμένες μονάδες μέτρησης και είναι πάντα ένας αριθμός στο διάστημα $[-1, 1]$.

Όταν $r = 1$, έχουμε **τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση** μεταξύ των δύο μεταβλητών, όταν $r = -1$, έχουμε **τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση** και όταν $r = 0$ έχουμε **μηδενική γραμμική συσχέτιση**.

Όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι θετικός, έχουμε **θετική γραμμική συσχέτιση** μεταξύ των μεταβλητών. Όσο ο συντελεστής πλησιάζει τη μονάδα, τόσο πιο συγκεντρωμένες γύρω από την ευθεία είναι οι παρατηρήσεις. Επομένως, τόσο πιο ισχυρή είναι η θετική γραμμική συσχέτιση.

Όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι αρνητικός, έχουμε **αρνητική γραμμική συσχέτιση** μεταξύ των μεταβλητών. Όσο ο συντελεστής πλησιάζει το -1, τόσο πιο συγκεντρωμένες γύρω από την ευθεία είναι οι παρατηρήσεις. Επομένως, τόσο πιο ισχυρή είναι η αρνητική γραμμική συσχέτιση.

Διερεύνηση

(α) Να ανοίξετε το αρχείο *«κατανόηση στατιστικών παραμέτρων.html»* και να επιλέξετε το σύνδεσμο *«να εκτιμήσετε τη συσχέτιση»*.
(β) Να εκτιμήσετε τη συσχέτιση στο διάγραμμα διασποράς που παρουσιάζεται.
(γ) Να επαναλάβετε την ίδια διαδικασία και για άλλα διαγράμματα διασποράς.

12.3.3 Υπολογισμός του συντελεστή συσχέτισης

Αν έχουμε παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ από μια μεταβλητή X και παρατηρήσεις $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ από μια μεταβλητή Y, τότε ο συντελεστής συσχέτισης των δύο μεταβλητών δίνεται από τον τύπο

$$\boldsymbol{r = \frac{\Sigma_{xy} - \nu\overline{x}\overline{y}}{\nu s_x s_y}},$$

όπου:

$$\boldsymbol{\Sigma_{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_\nu y_\nu}$$

Παράδειγμα 2

Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι βαθμοί 12 μαθητών ενός τμήματος Β′ Λυκείου στο διαγώνισμα των Μαθηματικά και στο διαγώνισμα της Φυσικής, αντίστοιχα.

Μαθητής	Βαθμός Μαθηματικά (x)	Βαθμός Φυσική (y)
M_1	10	8
M_2	14	13
M_3	17	16
M_4	12	13
M_5	15	15
M_6	16	16
M_7	20	19
M_8	18	19
M_9	10	12
M_{10}	13	13
M_{11}	12	10
M_{12}	11	14

(α) Να σημειώσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα σημεία (x, y), σύμφωνα με τον πιο πάνω πίνακα, όπου:

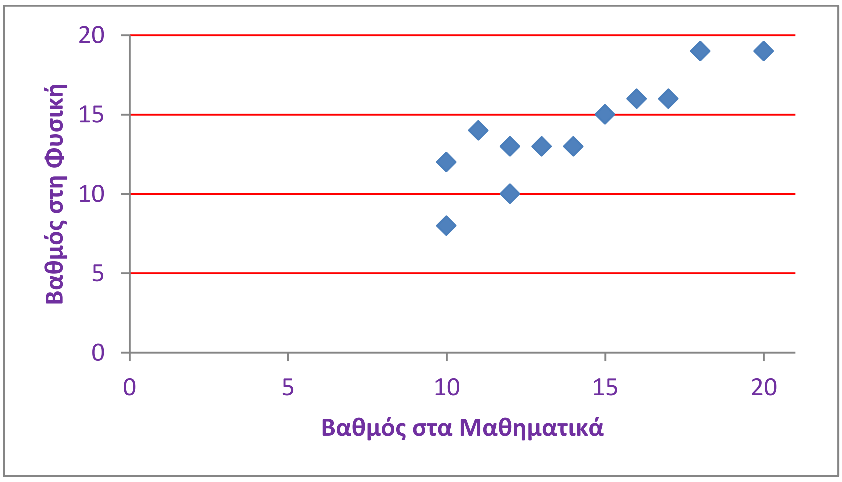
$x =$ "Βαθμός στα Μαθηματικά" και $y =$ "Βαθμός στη Φυσική"

(β) Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης των βαθμών στα Μαθηματικά και στη Φυσική.

(γ) Τι παρατηρείτε ως προς τη σχέση των δύο βαθμών για κάθε μαθητή;

Λύση

(α)



(β) Ο συντελεστής συσχέτισης είναι:

$$r = \frac{\Sigma_{xy} - \nu\bar{x}\bar{y}}{\nu s_x s_y}, \text{ όπου } \Sigma_{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_\nu y_\nu$$

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
10	8	80	16	36
14	13	182	0	1
17	16	272	9	4
12	13	156	4	1
15	15	225	1	1
16	16	256	4	4
20	19	380	36	25
18	19	342	16	25
10	12	120	16	4
13	13	169	1	1
12	10	120	4	16
11	14	154	9	0
$\Sigma_x = 168$	$\Sigma_y = 168$	$\Sigma_{xy} = 2456$	$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 116$	$\Sigma(y_i - \bar{y})^2 = 118$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma_X}{\nu} = \frac{168}{12} = 14, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma_y}{\nu} = \frac{168}{12} = 14, \qquad s_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{116}{12}} = 3{,}109$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{118}{12}} = 3{,}136$$

Άρα:

$$r = \frac{\Sigma_{xy} - \nu\bar{x}\bar{y}}{\nu s_x s_y} = \frac{2456 - 12 \cdot 14 \cdot 14}{12 \cdot 3{,}109 \cdot 3{,}136} = 0{,}89$$

(γ) Παρατηρούμε ότι υπάρχει ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των βαθμών στα Μαθηματικά και στη Φυσική γιατί είναι θετικός αριθμός «κοντά» στο 1.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Όταν έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση ο συντελεστής συσχέτισης είναι 1.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν για το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης ισχύει $r=0$, τότε οι μεταβλητές X και Y είναι δεν έχουν γραμμική συσχέτιση.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Ο συντελεστής συσχέτισης $r=0{,}1$ δείχνει πιο ισχυρή γραμμική συσχέτιση των δύο μεταβλητών από ότι ο συντελεστής συσχέτισης $r=-0{,}8$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Όταν ερευνούμε τη «μάζα των μαθητών μιας τάξης», σε σχέση με «το ύψος τους»», τότε η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η μάζα και η εξαρτημένη μεταβλητή το ύψος	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Δύο μεταβλητές έχουν αρνητική γραμμική συσχέτιση, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μίας μεταβλητής τείνουν να μειώνονται οι τιμές της άλλης μεταβλητής	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι $r=-0.99$, τότε οι δύο μεταβλητές έχουν ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Μια εταιρεία ενδιαφέρεται να ερευνήσει την επίδραση των εξόδων για διαφήμιση τους τελευταίους έξι μήνες στα έσοδα από τις πωλήσεις.

Έξοδα για διαφήμιση	Έσοδα
2,5	56,2
3,4	77,2
2,7	59,3
3,1	68,4
4,0	75,7

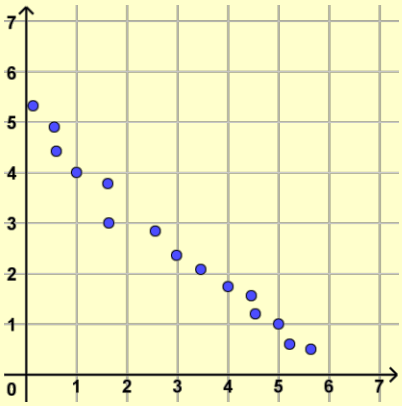
Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς και να χαρακτηρίσετε τη συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών.

3. Να διατάξετε τις πιο κάτω τιμές του r σε αύξουσα τάξη του βαθμού γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών:

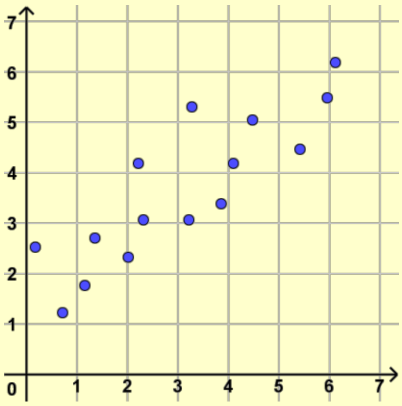
$$-0{,}6,\quad 0{,}9,\quad -0{,}7,\quad 0{,}2,\quad -1$$

4. Να περιγράψετε το είδος της συσχέτισης των δύο μεταβλητών με τους χαρακτηρισμούς (τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση, τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση, μηδενική συσχέτιση, ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση, ασθενής θετική γραμμική συσχέτιση, ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση, ασθενής αρνητική γραμμική συσχέτιση) στα πιο κάτω διαγράμματα:

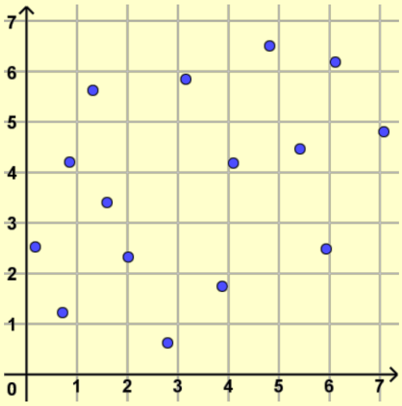
(I)



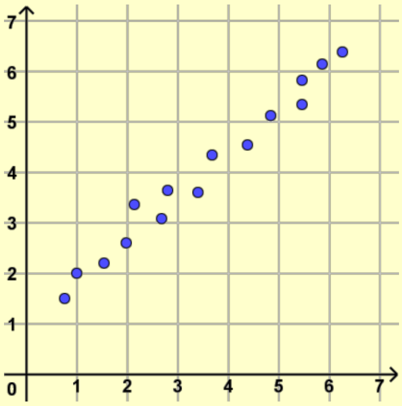
(II)



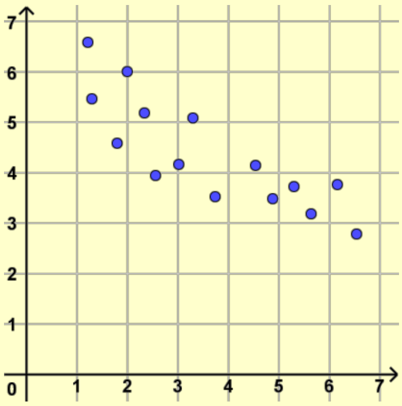
(III)



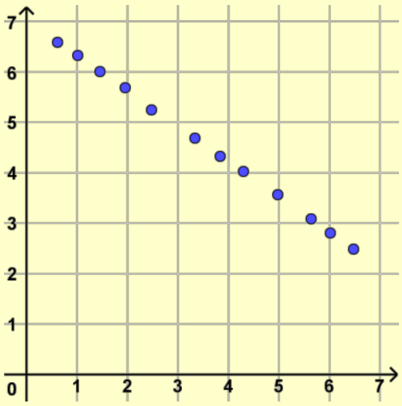
(IV)



(V)



(VI)



5. Δίνονται οι βαθμοί 8 μαθητών σε δύο διαγωνίσματα.

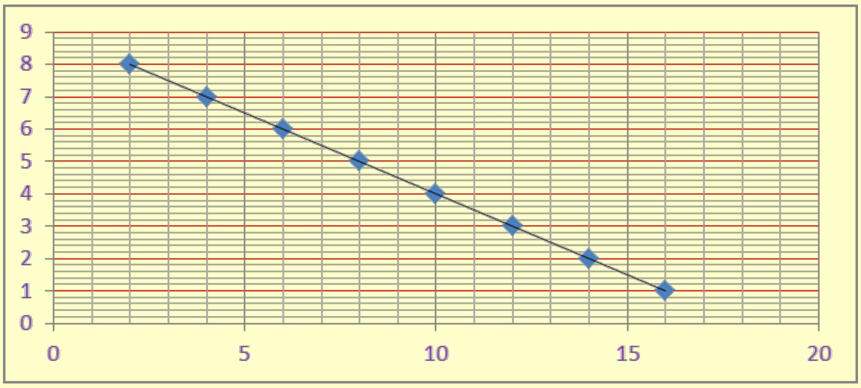
Διαγώνισμα A (x)	Διαγώνισμα B (y)
13	17
11	14
16	18
15	13
20	20
13	14
9	12
18	16

(α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς.

(β) Να υπολογίσετε τον γραμμικό συντελεστή συσχέτισης.

(γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών.

6. Δίνεται το πιο κάτω διάγραμμα διασποράς μεταξύ δύο μεταβλητών.



Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης και να χαρακτηρίσετε τη συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών.

Περίληψη

1. Ο συντελεστής μεταβλητότητας CV δίνεται από τη σχέση
$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|},$$
όπου s η τυπική απόκλιση και $\bar{x}$ η μέση τιμή.

2. Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι μικρότερος από 10%, λέγεται ότι τα δεδομένα παρουσιάζουν ομοιογένεια.

3. Ένα δείγμα A έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια από ένα δείγμα B, αν $CV_A < CV_B$.

4. Αν έχουμε παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ από μια μεταβλητή X και $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ από μια μεταβλητή Y, τότε το **διάγραμμα διασποράς** είναι η γραφική παράσταση των σημείων $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_\nu, y_\nu)$ σε ένα σύστημα αξόνων.

5. Η πιο απλή σχέση που μπορεί να έχουν δυο μεταβλητές είναι η **συσχέτιση**.

6. Όταν οι μεταβλητές δεν παρουσιάζουν συσχέτιση, τότε λέμε ότι έχουν **μηδενική** συσχέτιση.

7. Δύο μεταβλητές έχουν:

- **θετική συσχέτιση**, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής τείνουν να αυξάνονται και οι τιμές της άλλης μεταβλητής. Ειδικότερα:
    i. **ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση**, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής τείνουν να αυξάνονται και οι τιμές της άλλης μεταβλητής και τα σημεία στο διάγραμμα διασποράς έχουν σχετικά μικρή διασπορά γύρω από μια συγκεκριμένη ευθεία.
    ii. **ασθενή θετική γραμμική συσχέτιση**, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής τείνουν να αυξάνονται και οι τιμές της άλλης μεταβλητής και τα σημεία στο διάγραμμα διασποράς έχουν σχετικά μεγάλη διασπορά γύρω από μια συγκεκριμένη ευθεία.
    iii. **τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση**, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής αυξάνονται και οι τιμές της άλλης μεταβλητής και όλα τα σημεία στο διάγραμμα διασποράς ανήκουν σε μια συγκεκριμένη ευθεία.
- **αρνητική συσχέτιση**, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής τείνουν να μειώνονται οι τιμές της άλλης μεταβλητής. Ειδικότερα:
    i. **ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση**, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής τείνουν να μειώνονται οι τιμές της άλλης μεταβλητής και τα σημεία στο διάγραμμα διασποράς έχουν σχετικά μικρή διασπορά γύρω από μια συγκεκριμένη ευθεία.
    ii. **ασθενή αρνητική γραμμική συσχέτιση**, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής τείνουν να μειώνονται οι τιμές της άλλης μεταβλητής και τα σημεία στο διάγραμμα διασποράς έχουν σχετικά μεγάλη διασπορά γύρω από μια συγκεκριμένη ευθεία.

iii. **τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση**, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής μειώνονται οι τιμές της άλλης μεταβλητής και όλα τα σημεία στο διάγραμμα διασποράς ανήκουν σε μια συγκεκριμένη ευθεία.

8. **Συντελεστή συσχέτισης**

Αν έχουμε παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ από μια μεταβλητή X και παρατηρήσεις $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ από μια μεταβλητή Y, τότε ο συντελεστής συσχέτισης των δύο μεταβλητών είναι

$$\boldsymbol{r = \frac{\Sigma_{xy} - \nu\overline{x}\overline{y}}{\nu s_x s_y}},$$

όπου:

$$\boldsymbol{\Sigma_{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_\nu y_\nu}.$$

9. (α) Όταν $r > 0$, έχουμε θετική γραμμική συσχέτιση.
   (β) Όταν $r < 0$, έχουμε αρνητική γραμμική συσχέτιση.
   (γ) Όταν $r = 0$, έχουμε μηδενική γραμμική συσχέτιση.
   (δ) Όταν $r = 1$, έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση.
   (ε) Όταν $r = -1$, έχουμε τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση.

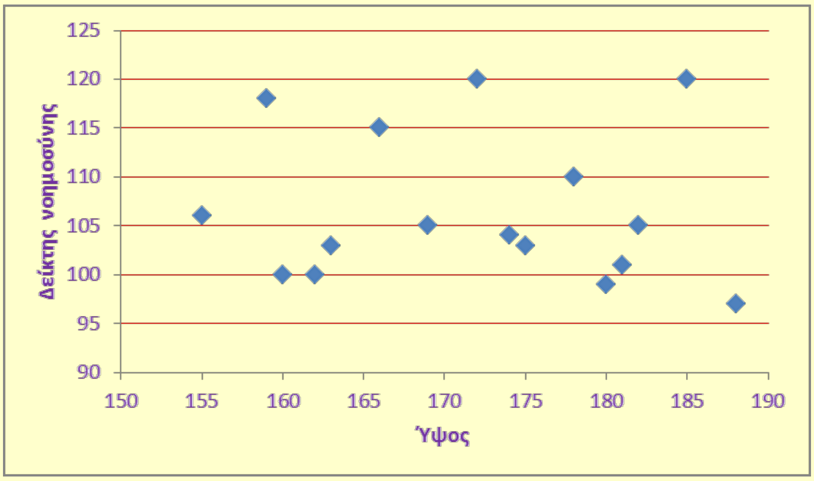
10. (α) Όσο ο συντελεστής πλησιάζει τη μονάδα, τόσο πιο συγκεντρωμένες γύρω από την ευθεία είναι οι παρατηρήσεις. Επομένως, τόσο πιο ισχυρή είναι η θετική γραμμική συσχέτιση.
    (β) Όσο ο συντελεστής πλησιάζει το -1, τόσο πιο συγκεντρωμένες γύρω από την ευθεία είναι οι παρατηρήσεις. Επομένως, τόσο πιο ισχυρή είναι η αρνητική γραμμική συσχέτιση.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Ο συντελεστής μεταβλητότητας εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης που εκφράζονται οι παρατηρήσεις.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Ένα δείγμα έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια από ένα άλλο, αν έχει μεγαλύτερο συντελεστή μεταβλητότητας.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Όταν μεγαλώνει η απόλυτη τιμή του συντελεστή συσχέτισης, τότε έχουμε πιο ισχυρή συσχέτιση.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(δ)	Όταν $r > 0$, τότε υπάρχει τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ε)	Ένας συντελεστής συσχέτισης $r_1 = 0{,}6$ δείχνει μεγαλύτερη γραμμική συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών από ότι ένας άλλος $r_2 = -0{,}9$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(στ)	Η διάμεσος είναι μέτρο διασποράς.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ζ)	Ο λόγος της μέσης τιμής προς την τυπική απόκλιση καλείται συντελεστής μεταβολής και είναι καθαρός αριθμός.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Δίνεται το πιο κάτω διάγραμμα διασποράς.

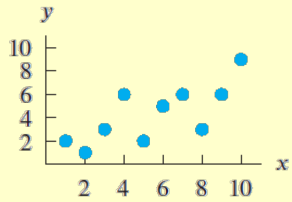


Να εξετάσετε αν πόσο υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

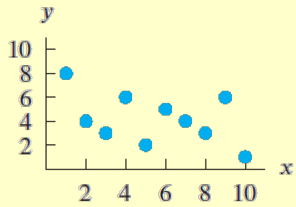
3. Να αντιστοιχήσετε τους πιο κάτω συντελεστές συσχέτισης με τα αντίστοιχα διαγράμματα διασποράς.

$$r=-0{,}98,\ \ r=-0{,}5,\ \ r=-0{,}25,\ \ r=0,\ \ r=0{,}7,\ \ r=1$$

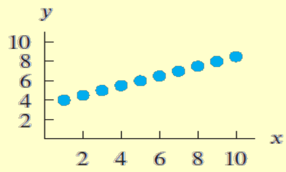
(α)



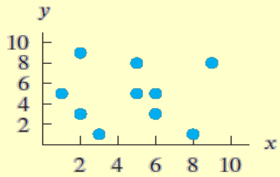
(β)



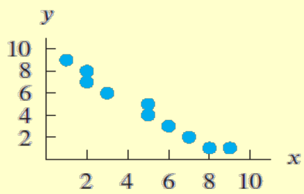
(γ)



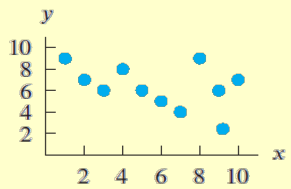
(δ)



(ε)



(στ)



4. Σε ένα διαγώνισμα, η μέση τιμή της βαθμολογίας για το τμήμα B_1 ήταν 13,5 και η τυπική απόκλιση 1,4.
   (α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας.
   (β) Να συγκρίνετε την ομοιογένεια των βαθμών του τμήματος B_2 που έχει μέσο όρο 16,5 και η τυπική απόκλιση του είναι 3,2.

5. Μια εταιρεία εξετάζει τη διάρκεια ζωής δύο ειδών μπαταριών A και B. Παίρνει τυχαία 7 μπαταρίες από το κάθε είδος και καταγράφει τις ώρες λειτουργίας τους. Οι ώρες (σε χιλιάδες) φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

Είδος A	22	20	22	26	24	22	18
Είδος B	24	26	32	24	19	23	20

   (α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση για τη διάρκεια ζωής των μπαταριών.
   (β) Να βρείτε ποιο από τα δύο είδη παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.

6. Σε ένα τμήμα Α΄ Λυκείου στο μάθημα των Μαθηματικών έγιναν 5 διαγωνίσματα. Ο καθηγητής έδωσε στους μαθητές δύο τρόπους υπολογισμού της συνολικής γραπτής βαθμολογίας τους και ζήτησε από τους μαθητές να επιλέξουν τον τρόπο που θα ήθελαν. Ο πρώτος τρόπος ήταν να μην ληφθεί υπόψη ο μικρότερος από τους βαθμούς στα 5 διαγωνίσματα και να υπολογιστεί ο μέσος όρος των υπολοίπων 4 βαθμών. Ο δεύτερος τρόπος ήταν να ληφθούν όλα τα διαγωνίσματα υπόψη και να υπολογιστεί η διάμεσος των βαθμών και των 5 διαγωνισμάτων. Αν οι βαθμοί του Σόλωνα στα διαγωνίσματα είναι $8, 15, 18, 18, 19$, να βρείτε ποιο από τους δύο τρόπους πρέπει να επιλέξει, για να υπολογιστεί η καλύτερη γραπτή βαθμολογία του.

7. Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζεται ο αριθμός των προϊόντων που πώλησε μια εταιρεία για 12 εβδομάδες και ο χρόνος που χρειάστηκε για να κατασκευαστούν.

Αριθμός προϊόντων	Χρόνος σε λεπτά
22	51
48	106
45	91
77	165
71	148
63	133
34	75
56	120
47	95
53	110
55	111
76	163

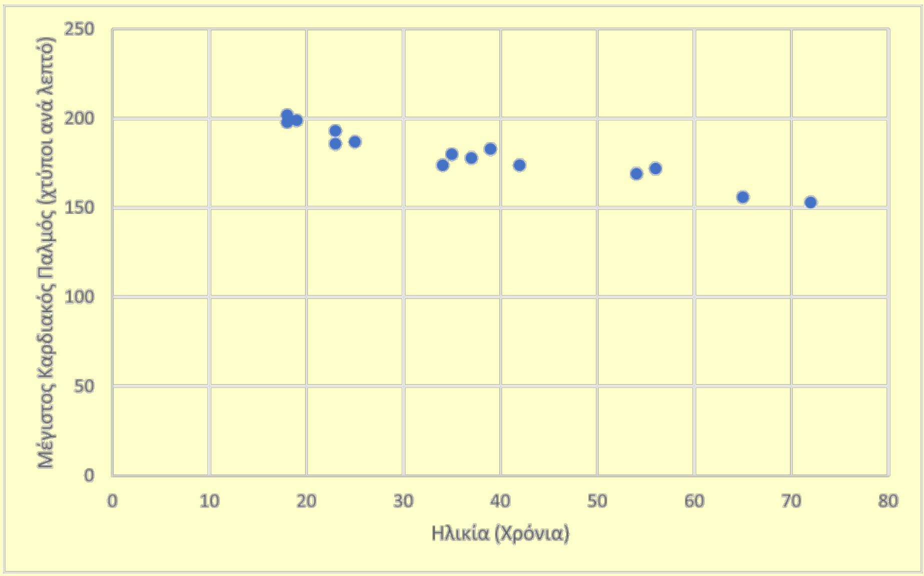
(α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς.
(β) Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης.
(γ) Να χαρακτηρίσετε τη συσχέτιση του αριθμού των προϊόντων με τον χρόνο που χρειάστηκε για να κατασκευαστούν.

8. Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζεται η ηλικία και τα επίπεδα γλυκόζης 6 ασθενών.

Ηλικία	Επίπεδα γλυκόζης
43	99
21	65
25	79
42	75
57	87
59	81

(α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης.
(β) Να χαρακτηρίσετε τη συσχέτιση της ηλικίας με το επίπεδο γλυκόζης.

9. Θέλουμε να διερευνήσουμε αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ του Μέγιστου Καρδιακού Παλμού (MHR) και της ηλικίας στους ενήλικες. Πιο κάτω δίνονται τα δεδομένα και το διάγραμμα διασποράς για 15 τυχαία επιλεγμένους ενήλικες:



Ηλικία	MHR
18	202
23	186
25	187
35	180
65	156
54	169
34	174
56	172
72	153
19	199
23	193
42	174
18	198
39	183
37	178

(α) Να χαρακτηρίσετε τη συσχέτιση του Μέγιστου Καρδιακού Παλμού ενός ενήλικα με την ηλικία του.

(β) Τι συμπέρασμα μπορείτε να εξάγετε;

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τους βαθμούς του Β΄ Τετραμήνου και τους βαθμούς στις Παγκύπριες εξετάσεις των 20 μαθητών του τμήματος Γ_1 ενός σχολείου στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης.

Β΄ Τετρ.	14	19	19	19	17	20	18	19	17	16	14	12	13	20	18	14	20	19	12	13
Παγκ.	9	16	17	12	6	17	17	16	12	14	7	3	11	18	14	12	16	16	6	10

(α) Να επιλέξετε κατάλληλες στατιστικές μεθόδους (μέτρα θέσης – διασποράς, γραφικά διαγράμματα), για να συγκρίνετε τους βαθμούς που πήραν οι μαθητές στο Β΄ Τετράμηνο και στις Παγκύπριες εξετάσεις στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης.
(β) Τι συμπεράσματα μπορείτε να εξάγετε;
(γ) Υπάρχει γραμμική συσχέτιση για τις δύο μεταβλητές;

2. Στον διπλανό πίνακα παρουσιάζονται οι βαθμολογίες των Παγκύπριων Εξετάσεων στα Νέα Ελληνικά των μαθητών των τμημάτων $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ενός σχολείου.

(α) Ποιο τμήμα έχει τον πιο ψηλό μέσο όρο;
(β) Ποιες οι διαφορές των μέσων όρων και ποιες των διαμέσων των βαθμών;
(γ) Υπάρχουν διαφορές ως προς το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των βαθμών των τριών τμημάτων;
(δ) Να επιλέξετε άλλες κατάλληλες στατιστικές μεθόδους για να συγκρίνετε τους βαθμούς των τριών τμημάτων. Να διατυπώσετε τα συμπεράσματα σας.

Γ_1	Γ_2	Γ_3
13	10	16
18	12	4
12	15	11
15	12	6
11	14	7
13	14	16
17	13	12
16	12	13
17	7	12
16	14	8
12	14	12
9	14	8
8	11	11
18	13	8
16	11	12
14	10	12
17	18	8
17	15	7
11	11	12
12	11	9
16	14	10
13	16	10
15	14	10

3. Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται στην πρώτη γραμμή οι τιμές σε διαφορετικά κράνη ποδηλασίας και στην δεύτερη γραμμή η βαθμολογία ποιότητας τους που έγινε από ειδικούς.

Τιμή σε €	35	22	33	42	50	23	29	18	39	28	20	25
Βαθμολογία Ποιότητας	64	60	58	55	54	45	47	43	42	41	40	32

(α) Υπάρχει γραμμική συσχέτιση ανάμεσα στην τιμή και την βαθμολογία ποιότητας;

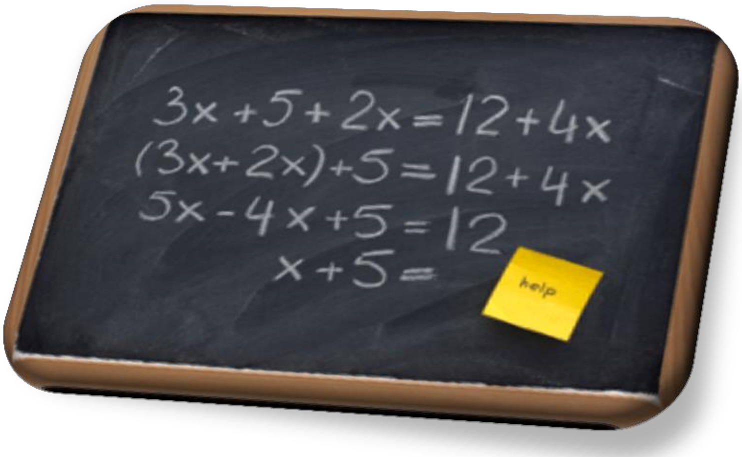
(β) Να εξετάσετε κατά πόσο ισχύει ο ισχυρισμός ότι αν αγοράσουμε πιο ακριβό κράνος θα έχει πιο υψηλή ποιότητα.

4. Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι γραμμικές συσχετίσεις των γραπτών βαθμολογιών στις εξετάσεις Ιουνίου στα 5 εξεταζόμενα μαθήματα του τμήματος A_4.

	Μαθηματικά	Βιολογία	Νέα Ελληνικά	Φυσική	Χημεία
Μαθηματικά	1,00				
Βιολογία	0,54	1,00			
Νέα Ελληνικά	0,76	0,81	1,00		
Φυσική	0,70	0,73	0,71	1,00	
Χημεία	0,41	0,80	0,67	0,66	1,00

Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει, ισχυρή ή όχι, γραμμική συσχέτιση ανάμεσα στις βαθμολογίες στα 5 εξεταζόμενα μαθήματα των μαθητών αυτών.

Απαντήσεις Δραστηριοτήτων



Ενότητα 09: Πολύγωνα – Μέτρηση κύκλου

Σελίδα 16 Εγγεγραμμένα – Εγγράψιμα τετράπλευρα

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	$\hat{A}=120°,\ \hat{B}=100°,\ \hat{\Gamma}=60°,\ \hat{\Delta}=80°$	
2.	(α) $\hat{x}=135°$	(β) $B\Delta=4\text{ cm}$
5.	(α) $\hat{x}=44°,\ \hat{y}=68°,\ \hat{z}=90°$ (β) $\hat{x}=76°,\ \hat{y}=114°,\ \hat{z}=24°$ (γ) $\hat{x}=34°,\ \hat{y}=70°,\ \hat{z}=62°$	
6.	(α) $x=4\text{ cm}$	(β) $E_{AB\Gamma\Delta}=27{,}5\text{ cm}^2$

Σελίδα 33 Κανονικά πολύγωνα

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	$\kappa_5=72°,\ \kappa_{10}=36°,\ \kappa_{12}=30°$ $\varphi_5=108°,\ \varphi_{10}=144°,\ \varphi_{12}=150°$	
2.	(α) Κανονικό εξάγωνο	(β) Κανονικό πεντάγωνο
3.	(α) Κανονικό δεκάγωνο	(β) Κανονικό οκτάγωνο
4.	(α) Κανονικό δεκάγωνο (β) Δεν υπάρχει	(γ) Δεν υπάρχει (δ) Κανονικό δεκάγωνο
5.	$\dfrac{R_1}{R_2}=2,\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}=2,\ \dfrac{a_1}{a_2}=2,\ \dfrac{\Pi_1}{\Pi_2}=2$	

Σελίδα 37 Κανονικά πολύγωνα

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$\lambda_3=4\sqrt{3}\text{ cm},\ a_3=2\text{ cm},\ E_3=12\sqrt{3}\text{ cm}^2,\ \Pi_3=12\sqrt{3}\text{ cm}$
2.	$a_4=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\text{ cm},\ E_4=18\text{ cm}^2,\ \Pi_4=12\sqrt{2}\text{ cm}$
3.	$\lambda_6=10\text{ cm},\ E_6=150\sqrt{3}\text{ cm}^2,\ \Pi_6=60\text{ cm}$
4.	$R=4\text{ cm},\ E_3=12\sqrt{3}\text{ cm}^2$
5.	$\Pi_{AB\Gamma\Delta}=R\left(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right),\ E_{AB\Gamma\Delta}=R^2\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
6.	$\Pi_{AB\Gamma\Delta}=R\left(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right),\ E_{AB\Gamma\Delta}=R^2\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
7.	Μήκος μη – παράλληλων πλευρών: $R\sqrt{2}$ Ύψος: $\frac{R(\sqrt{3}+1)}{2}$, $E=\frac{R^2(2+\sqrt{3})}{2}$

Σελίδα 44 Μέτρηση κύκλου

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	45°
4.	$\gamma_{\overset{\frown}{AB}}=\dfrac{\pi R}{2},\ \gamma_{\overset{\frown}{B\Delta}}=\dfrac{2\pi R}{3},\ \gamma_{\overset{\frown}{A\Delta}}=\dfrac{5\pi R}{6}$

Σελίδα 49 Μέτρηση κύκλου

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$E = 144\pi \text{ cm}^2$
5.	$\dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}}$
6.	$\dfrac{R^2}{6}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$

Σελίδα 52 Μέτρηση κύκλου

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$E = \dfrac{R^2}{4}\left(3\pi + 2 - \sqrt{3}\right)$
2.	(α) $E = 24\pi \text{ cm}^2$ (β) $E = \left(8\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}\right) \text{ cm}^2$
3.	$\Pi = 6\pi \text{ cm}, \; E = 3\pi \text{ cm}^2$
4.	$\Pi = \dfrac{R}{3}\left(3\sqrt{3} + 3 + \pi\right), \; E = \dfrac{R^2}{6}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$
5.	(α) $R = 2a$ (β) $E = \pi a^2$
6.	$E = \dfrac{R^2}{24}\left(\pi + 6\sqrt{3}\right)$
7.	$E = \dfrac{\rho^2}{2}\left(2\sqrt{3} - \pi\right)$
8.	$\Pi = \dfrac{\pi}{3}\left(5\rho + 6\sqrt{3}\right), \; E = \dfrac{\rho^2}{6}\left(24\sqrt{3} - 11\pi\right)$
10.	$E = \dfrac{R^2}{2}(\pi - 2)$

Σελίδα 58 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$E = \dfrac{a^2}{24}\left(\pi + 3\sqrt{3}\right)$
3.	$E = 2a^2(\pi - 2)$
4.	$E = \dfrac{a^2}{6}\left(6 - 3\sqrt{3} + \pi\right)$
7.	$\dfrac{1}{6}$
12.	$E = \dfrac{\pi R^2}{9}, \; \Gamma = \dfrac{2\pi R}{3}$
14.	(α) $A\Gamma = 2 \text{ cm}$ (β) $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ (γ) $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}, \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}, \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12} \text{ cm}^2$
15.	(α) $\hat{x} = 88°, \; \hat{y} = 112°, \; \hat{z} = 92°$ (β) $\hat{x} = 130°, \; \hat{y} = 115°, \; \hat{z} = 32{,}5°$

Σελίδα 62 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού	
Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
7.	(γ) $\Gamma = \frac{3\pi R}{2}$
9.	(β) Αν η κάθετη στην $Α\Delta$ στο $Β$ τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου $Α\Delta$ στο $Ζ$, ο γεωμετρικός τόπος του $Μ$ είναι το τεταρτοκύκλιο $ΑΖ$.
10.	(γ) $\Pi = \frac{(\pi+2\sqrt{3})R}{3}$, $Ε = \frac{(\pi-\sqrt{3})R^2}{6}$
17.	$Β\Gamma = 13{,}2$

Ενότητα 10: Παράγωγος

Σελίδα 76 Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο της – Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) $f'(4) = 0$ (β) $f'(-1) = -3$	(γ) $f'(0) = -1$ (δ) $f'(1) = -1$
3.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΣΩΣΤΟ	(γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΛΑΘΟΣ
4.	(α) $f'(0) = 1$ (β) Η παράγωγος δεν υπάρχει στο $x_0 = 0$. (γ) Η παράγωγος δεν υπάρχει στο $x_0 = 0$.	
5.	$a = 12,\ \beta = 16$	
6.	(α) $-2\ \mathrm{m/sec}$	(β) $0\ \mathrm{m/sec}$
7.	-8	
8.	1	

Σελίδα 80 Παράγωγος συνάρτηση

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) $f'(x) = 6x,\ x \in \mathbb{R}$	(β) $f''(x) = 6,\ x \in \mathbb{R}$
2.	(α) $f'(x) = -\frac{2}{x^2},\ \ x \in \mathbb{R} - \{0\}$	(β) $f''(x) = \frac{4}{x^3},\ \ x \in \mathbb{R} - \{0\}$
3.	$f'(x) = 3x^2,\ \ x \in [-1, 3)$	

Σελίδα 89 Παράγωγος βασικών συναρτήσεων – Κανόνες παραγώγισης

Δραστηριότητα	Απαντήσεις		
1.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΛΑΘΟΣ	(γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΛΑΘΟΣ	(ε) ΛΑΘΟΣ
2.	(α) $f'(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$ (β) $f'(x) = 7x^6,\ x \in \mathbb{R}$ (γ) $f'(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$ (δ) $f'(x) = -\frac{4}{x^5},\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (ε) $f'(x) = 5^x \ln 5,\ x \in \mathbb{R}$ (στ) $f'(x) = -3e^x,\ x \in \mathbb{R}$ (ζ) $f'(x) = -\frac{7}{5x^2},\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (η) $f'(x) = \frac{9}{20 \cdot \sqrt[4]{x}},\ x \in (0, +\infty)$ (θ) $f'(x) = 8x - 6,\ x \in \mathbb{R}$ (ι) $f'(x) = 6x^2 - \frac{8}{x^2},\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (ια) $f'(x) = e^x - \frac{2}{x^3},\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (ιβ) $f'(x) = 4 - 18x^2 - 8x^3,\ x \in \mathbb{R}$ (ιγ) $f'(x) = x^4 e^x (5 + x),\ x \in \mathbb{R}$ (ιδ) $f'(x) = e^x (4e^x - 3),\ x \in \mathbb{R}$ (ιε) $f'(x) = \frac{2(x^2 - x - 1)}{(x^2 + 1)^2},\ x \in \mathbb{R}$ (ιστ) $f'(x) = \frac{(x+4)(x+2)}{(x+3)^2},\ x \in \mathbb{R} - \{-3\}$		

3.	(α) $f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x + \gamma,\ f''(x) = 6ax + 2\beta,$ $f'''(x) = 6a, \quad x \in \mathbb{R}$ (β) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{2}{3},\ \ x \in \mathbb{R}$

Σελίδα 96 Παράγωγος τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
2.	(α) $f'(x) = 2\text{συν}x + \text{ημ}x,\ \ x \in \mathbb{R}$ (β) $f'(x) = \text{εφ}x + x\,\text{τεμ}^2 x,\ \ x \in \mathbb{R} - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$ (γ) $f'(x) = e^x(\text{ημ}x + \text{συν}x),\ \ x \in \mathbb{R}$ (δ) $f'(x) = x^3\,\text{τεμ}x\left(1 + \frac{x\,\text{εφ}x}{4}\right),\ \ x \in \mathbb{R} - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$ (ε) $y' = \frac{\text{στεμ}x(1-\text{σφ}x)}{(1+\text{σφ}x)^2},\ \ x \in \mathbb{R} - \left\{\kappa\pi - \frac{\pi}{4},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$ (στ) $y' = \frac{1+\text{ημ}x-\text{συν}x}{(1+\text{ημ}x)^2},\ \ x \in \mathbb{R} - \left\{2\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$ (ζ) $y' = \frac{\text{ημ}x+x^2\text{συν}x+x\,\text{συν}x}{(x+1)^2},\ \ x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ (η) $y' = \frac{\text{ημ}^2 x-\text{συν}^2 x}{\text{ημ}^2 x\,\text{συν}^2 x},\ \ x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\kappa\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$ (θ) $y' = xe^x(2\text{συν}x + x\,\text{συν}x - x\,\text{ημ}x),\ \ x \in \mathbb{R}$ (ι) $y' = \frac{(x-1)\text{συν}x-x\,\text{ημ}x}{e^x},\ \ x \in \mathbb{R}$
3.	(β) $\lambda = -4$
4.	$f'(x) = \begin{cases} 2x+1\,, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \text{συν}x, & x > 0 \end{cases}$
5.	$f'(x) = \begin{cases} (2x-1)\text{ημ}x + x^2\text{συν}x, & x < 0 \\ 2x+1\,, & x > 0 \end{cases}$
6.	(β) $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$ (γ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{x} = -4$

Σελίδα 102 Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
1.	(α) ΛΑΘΟΣ (δ) ΣΩΣΤΟ (στ) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ (ε) ΣΩΣΤΟ (ζ) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ
2.	(α) $y' = 3\text{συν}3x$ (β) $y' = -2x\,\text{ημ}(x^2+1)$ (γ) $y' = -e^{-x}$ (δ) $y' = -4\text{ημ}8x$ (ε) $y' = 3x^2 e^{x^3}$ (στ) $y' = e^{\text{ημ}x}\text{συν}x$ (ζ) $y' = 5(x^3-2x+6)^4(3x^2-2)$ (η) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (θ) $y' = \frac{-12}{(3x+1)^3}$ (ι) $y' = (e^x - \text{ημ}x)\,\text{συν}(e^x + \text{συν}x)$ (ια) $y' = -\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-5}}\,\text{στεμ}\sqrt{x^3-5}\,\text{σφ}\sqrt{x^3-5}$ (ιβ) $y' = 5\text{συν}5x - 4e^{-4x}$ (ιγ) $y' = 2\ln 5 \cdot 5^{2x}$ (ιδ) $y' = -4^{-x}\text{τεμ}7x\,(\ln 4 - 7\text{εφ}7x)$ (ιε) $y' = -10x\,\text{σφ}^4(x^2+1)\,\text{στεμ}^2(x^2+1)$

	(ιστ) $y' = 4(x\ \sigma\varphi x)^3(\sigma\varphi x - x\ \sigma\tau\varepsilon\mu^2 x)$ (ιζ) $y' = 2x^3\tau\varepsilon\mu^2 3x\ (2 + 3x\ \varepsilon\varphi 3x)$ (ιη) $y' = \frac{2}{(e^x+e^{-x})^2}$ (ιθ) $y' = 6xe^{3x^2}\tau\varepsilon\mu^2 e^{3x^2}$ (κ) $y' = \frac{5}{7\cdot\sqrt[7]{(x-2)^2}}$
5.	(β) $8\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{sec}$
6.	(α) $a'(t) = \frac{7}{3(a(t))^2}\ \ \mathrm{cm/min}$ (β) $E'(t) = \frac{28}{a(t)}\ \ \mathrm{cm}^2/\mathrm{min}$ (γ) $14\ \ \mathrm{cm}^2/\mathrm{min}$
8.	(α) 9 μονάδες μήκους/sec (β) 6 μονάδες μήκους/sec^2 (γ) $t = 4\ \mathrm{sec},\ \ t = 2\ \mathrm{sec}$
9.	Οι πωλήσεις του προϊόντος αυξάνονται κατά περίπου δύο προϊόντα ανά εβδομάδα.
10.	$\frac{1}{2\pi}\ \ \mathrm{m/min}$

Σελίδα 110 Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΛΑΘΟΣ	(δ) ΛΑΘΟΣ (ε) ΛΑΘΟΣ (στ) ΛΑΘΟΣ
2.	$\lambda = 4$	
3.	(α) $3x + y - 4 = 0$ (β) $3x - y + 3 = 0$ (γ) $x = 1$	
5.	$A(0,1)$ $x - y + 1 = 0$	
6.	$a = -\frac{1}{3},\ \ \beta = 9,\ \ \gamma = 18$	

Σελίδα 119 Πεπλεγμένη συνάρτηση

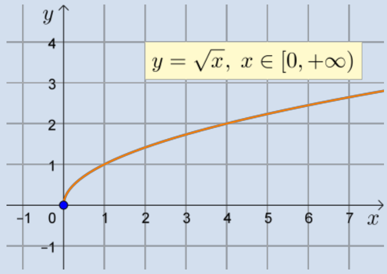
Δραστηριότητα	Απαντήσεις	
1.	(α) $y' = \frac{x+y}{y-x}$ (β) $y' = \frac{3-2xy}{x^2-1}$ (γ) $y' = \frac{1+e^y}{1-xe^y}$	(δ) $y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (ε) $y' = -\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu y}$
4.	(ε): $(\ln 4 - 2)x - y + 4 - \ln 4 = 0$ (κ): $x + (\ln 4 - 2)y + 3 - \ln 16 = 0$	
5.	(ε): $x - 2y + 4 = 0$ (κ): $2x + y - 12 = 0$	
6.	(ε): $2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot x + 3\eta\mu\theta \cdot y - 6 = 0$ (κ): $3\eta\mu\theta \cdot x - 2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot y - 5\eta\mu\theta\ \sigma\upsilon\nu\theta = 0$	
7.	$(1,2),\ \ (-1,0)$	
9.	$(2\sqrt{3},\sqrt{3}),\ \ (-2\sqrt{3},-\sqrt{3})$	

Σελίδα 126 Συνάρτηση που ορίζεται παραμετρικά

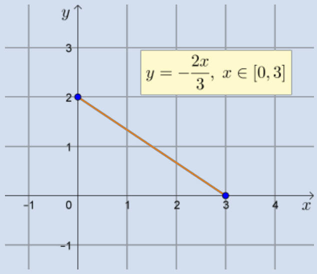
Δραστηριότητα **Απαντήσεις**

1.

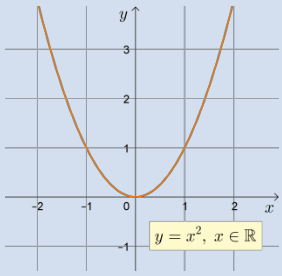
(α)



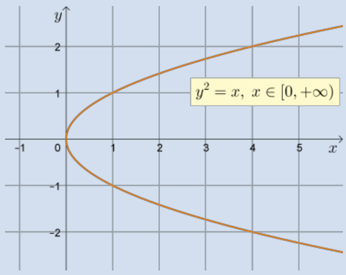
(β)



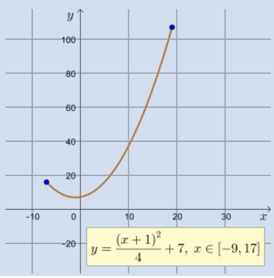
(γ)



(δ)



(ε)



2. (α) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=-\sqrt{3}$ (β) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{(\text{συν}t-1)^2}$

3. (α) ΝΑΙ

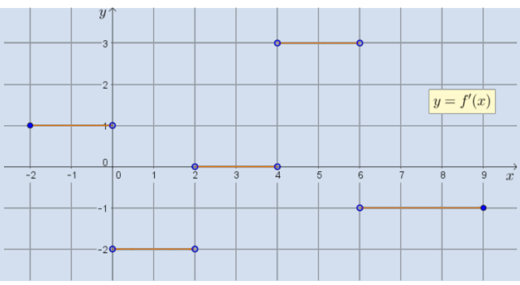
4. (β) $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=-2}=\frac{9}{4}$

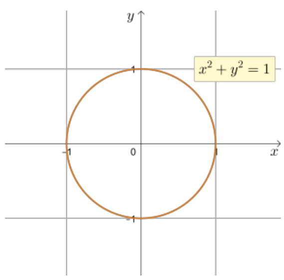
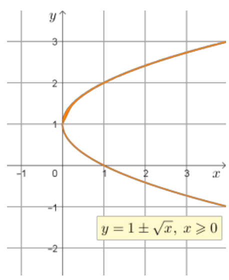
5.	$4x - 3y - 10 = 0$
6.	Οριζόντια εφαπτομένη στο $(0,2)$ Κατακόρυφες εφαπτομένες στα $(2,\sqrt{2})$ και $(-2,\sqrt{2})$
7.	$32x - 16y - 25 = 0$

Σελίδα 133 Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**	
2.	$4x + y - 11 = 0$	
3.	$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = 4$	
4.	(α) $f'(x) = \frac{1}{x}$ (β) $f'(x) = \frac{4}{x}\ln^3 x$ (γ) $f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x}$ (δ) $f'(x) = σφx$ (ε) $f'(x) = \frac{3}{x} - εφx$ (στ) $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)(x-1)}$ (ζ) $f'(x) = 2x\ln(x+8) + \frac{x^2}{x+8}$	(η) $f'(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ (θ) $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (ι) $y' = \frac{x}{(x^2-4)\ln 10}$ (ια) $y' = \frac{5}{3(5x+8)\ln 5}$ (ιβ) $y' = -\frac{2\ln x+1}{x^3}$ (ιγ) $y' = x2^{x^2+2}\ln 2$ (ιδ) $y' = x^{ημx}\left(συνx \ln x + \frac{ημx}{x}\right)$
5.	$a = \frac{11}{20},\ \beta = -\frac{3}{5}$	
6.	$(1,0),\ \left(e^2, \frac{4}{e^2}\right)$	
7.	$\left(e, e^{1/e}\right)$	
8.	$x + y = 0$	

Σελίδα 139 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**		
1.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΛΑΘΟΣ (γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΛΑΘΟΣ (ε) ΛΑΘΟΣ	(στ) ΛΑΘΟΣ (ζ) ΣΩΣΤΟ (η) ΣΩΣΤΟ (θ) ΛΑΘΟΣ	(ι) ΣΩΣΤΟ (ια) ΣΩΣΤΟ (ιβ) ΛΑΘΟΣ (ιγ) ΣΩΣΤΟ
2.	(δ)		
3.	(α) $x = -2,\ x = -1,\ x = 0,\ x = 1,\ x = 2,\ x = 4$ (β) $x = -2,\ x = -1,\ x = 1,\ x = 2$ (γ) $x = 0,\ x = 4$		
4.	(β) $f'(0) = 0$		
5.	(β) $x - y = 0$		
7.	$a = 1,\ \beta = 2$		
8.			

9.	(α) $f'(x) = (x+1)e^x,\ \ f''(x) = (x+2)e^x,\ \ x \in \mathbb{R}$ (β) $(a, \beta, \gamma) = (\gamma + 1, -2\gamma, \gamma),\ \ \gamma \in \mathbb{R}$	
10.	(α) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ (β) $f'(x) = x^4 + \frac{16}{x^3}$ (γ) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \text{συν}x + 5\text{τεμ}x\ \text{εφ}x$ (δ) $f'(x) = -5\text{ημ}5x - \frac{1}{x}$ (ε) $f'(x) = \ln x + \frac{x+2}{x}$ (στ) $f'(x) = x^3(4\text{εφ}x + x\ \text{τεμ}^2 x)$ (ζ) $f'(x) = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$ (η) $y' = \frac{e^x\text{ημ}x + \text{ημ}x + xe^x\text{συν}x + x\text{συν}x - xe^x\text{ημ}x}{(e^x+1)^2}$ (θ) $y' = 144x(6x^2 - 5)^{11}$ (ι) $y' = 2x\ \text{τεμ}^2 x^2 - 2^x\text{στεμ}2^x\ \text{σφ}2^x + \frac{3\ln^2 x}{x}$ (ια) $y' = \frac{3x^2}{x^3-1}$ (ιβ) $y' = \frac{3\text{συν}x\sqrt{\text{ημ}x}}{2}$ (ιγ) $y' = \text{ημ}\sqrt{x+1}$ (ιδ) $y' = \text{ημ}x\ \text{στεμ}^2(\text{συν}x)$ (ιε) $y' = e^{\text{συν}x}\, 3^{7x}(-\text{ημ}x + 7\ln 3)$ (ιστ) $y' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$ (ιζ) $y' = \frac{x^2}{3(x^3+8)}$ (ιη) $y' = e^x x^{e^x}\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$	
11.	(α) $y = 7$ (β) $4x - y - 5 = 0$	(γ) $8x - y - 25 = 0$ (δ) $8x - y - 50 = 0$
14.	(α) $V(t) = 4\pi x(t),\ \ t > 0$	(β) $8\ \text{cm}^3/\text{sec}$
15.	(α) $1\ \text{cm}/\text{sec}$	(β) $\sqrt{3}\ \text{cm}^2/\text{sec}$
16.	(α) $y' = -\frac{x}{y}$ (β) $y' = \frac{y-3x^2}{2y-x}$ (γ) $y' = \frac{1-3x^2y^3}{3x^3y^2-1}$	(δ) $y' = \frac{y(4x\sqrt{xy}-1)}{x(1-2x\sqrt{xy})}$ (ε) $y' = \frac{y\ \text{συν}(xy)}{1-x\ \text{συν}(xy)}$ (στ) $y' = \frac{\text{συν}(\pi x)}{\text{ημ}(\pi y)}$
17.	$a = 1,\ \ \beta = -\frac{2}{3}$	
20.	$(0, 1),\ \ (0, -1)$	
22.	(α) 	(β) 

23.	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(3t^2 - 3t + 1)}{(1-2t)^3}$
24.	(β) $(0, 1)$
25.	$\frac{1}{6}$
26.	$\lambda = \frac{1}{2}$

Σελίδα 145 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) $-18 \ \mathrm{m^2/sec}$ (β) $2 \ \mathrm{m/sec}$ (γ) $2 \ \mathrm{m/sec}$
2.	$x - y + 1 = 0$
5.	$\frac{20}{81}$
6.	(β) $\lambda = 1$ (γ) $x - y + 24 = 0$

Ενότητα 11: Στερεομετρία

Σελίδα 161 Στερεά από περιστροφή (Κύλινδρος – Κώνος)

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$E_{ολ} = 300\pi \text{ cm}^2,\ V = 500\pi \text{ cm}^3$
2.	$E_{ολ} = 24\pi \text{ cm}^2,\ V = 12\pi \text{ cm}^3$
3.	(α) ΛΑΘΟΣ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΣΩΣΤΟ
4.	$E_{κ} = 144\pi \text{ cm}^2,\ V = 432\pi \text{ cm}^3$
5.	$E_{ολ} = 270\pi \text{ cm}^2,\ V = 450\pi \text{ cm}^3$
6.	$V = 320\pi \text{ m}^3$
7.	$V = 72\pi \text{ cm}^3$
8.	$ΒΓ = 8 \text{ cm}$
9.	$E_{ολ} = 92 \text{ cm}^2$

Σελίδα 171 Στερεά από περιστροφή (Κόλουρος Κώνος – Σφαίρα)

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ
2.	$E_{κ} = 204\pi \text{ cm}^2,\ E_{ολ} = 308\pi \text{ cm}^2,\ V = 620\pi \text{ cm}^3$
3.	$\upsilon = 4 \text{ cm}$
4.	$E = 64\pi \text{ cm}^2,\ V = \dfrac{256\pi}{3} \text{ cm}^3$
5.	$\rho = 3 \text{ cm}$
6.	$V = 720\pi \text{ cm}^3$

Σελίδα 177 Περιστροφή επίπεδων σχημάτων γύρω από άξονα

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$E_{ολ} = 150\pi \text{ cm}^2,\ V = 204\pi \text{ cm}^3$
2.	$E_{ολ} = 172\pi \text{ cm}^2,\ V = 199\pi \text{ cm}^3$
3.	$E_{ολ} = 330\pi \text{ cm}^2,\ V = 340\pi \text{ cm}^3$
4.	$E_{ολ} = 240\pi \text{ cm}^2$
5.	$E_{ολ} = 57\pi \text{ cm}^2,\ V = 42\pi \text{ cm}^3$

Σελίδα 180 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	$V = 16\pi \text{ cm}^2$
2.	$E_{ολ} = 42\pi \text{ cm}^2$
3.	$E = 36\pi \text{ cm}^2$
4.	$V = 686\pi \text{ cm}^3$
5.	8 cm
6.	$V = 600\pi \text{ cm}^3$
7.	$E_{ολ} = 184\pi \text{ cm}^2,\ V = 204\pi \text{ cm}^3$
8.	$E_{ολ} = 8(\sqrt{2}+5)\pi \text{ cm}^2,\ V = 40\pi \text{ cm}^3$
9.	$E_{ολ} = 210\pi \text{ cm}^2,\ V = 276\pi \text{ cm}^3$
10.	$E_{ολ} = a^2(\sqrt{3}+6)\pi \text{ cm}^2,\ V = \dfrac{a^3}{4}(1+2\sqrt{3})\pi \text{ cm}^3$
11.	(α) $x = 8 \text{ cm}$ (β) $E_{ολ} = 528\pi \text{ cm}^2$

13.	$E_{o\lambda} = 4(71 + 15\sqrt{2})\pi \text{ cm}^2, \ V = \dfrac{1672\pi}{3} \text{ cm}^3$

Σελίδα 182 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

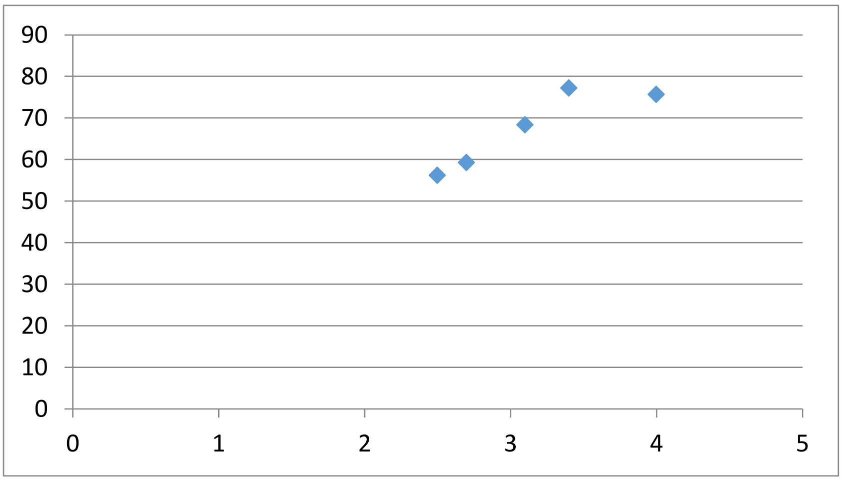
Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
1.	$E_{\text{ολ}} = 4\alpha^2\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2, \ V = a^3\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$
2.	$E_{\text{ολ}} = (116 + 18\sqrt{5})\pi \text{ cm}^2, \ V = \dfrac{340\pi}{3} \text{ cm}^3$
4.	$E_{\text{ολ}} = 8(1 + \sqrt{3})\pi \text{ cm}^2, \ V = 2(3 + 2\sqrt{3})\pi \text{ cm}^3$

Ενότητα 12: Στατιστική

Σελίδα 191 Σύγκριση δύο πληθυσμών

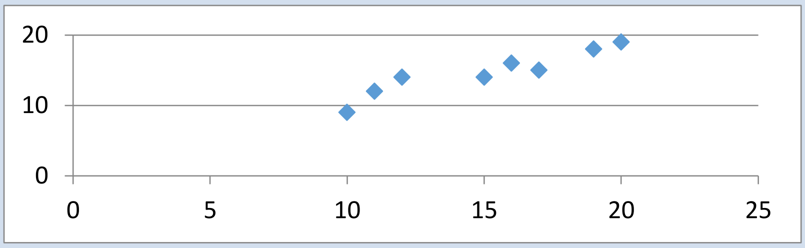
Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) Τομέας A: $x_\varepsilon = \text{ΝΑΙ}$ Τομέας B: $x_\varepsilon = \text{ΟΧΙ}$ Τομέας Γ: $x_\varepsilon = \text{ΝΑΙ, ΟΧΙ}$ Τομέας Δ: $x_\varepsilon = \text{ΟΧΙ}$ (β) ΟΧΙ
2.	(α) Τοξότης A (β) Τοξότης B
3.	(α) $CV_A = 0{,}08,\ CV_B = 0{,}086$ (β) Το A, αφού $CV_A < CV_B$.
4.	(α) Μεγαλύτερη μέση τιμή: B_2 Μικρότερη τυπική απόκλιση: B_3 (β) Το B_1 (γ) Το B_3

Σελίδα 201 Συσχέτιση δύο μεταβλητών – Συντελεστής συσχέτισης

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΣΩΣΤΟ (γ) ΛΑΘΟΣ (ε) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ (δ) ΛΑΘΟΣ (στ) ΛΑΘΟΣ
2.	 Ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση
3.	$0{,}2\,,\quad -0{,}6\,,\quad -0{,}7\,,\quad 0{,}9\,,\quad -1$
4.	(I) Ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση (II) Ασθενής θετική γραμμική συσχέτιση (III) Μηδενική συσχέτιση (IV) Ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση (V) Ασθενής αρνητική γραμμική συσχέτιση (VI) Τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση

5.

(α)



(β) $r = 0{,}77$

(γ) Θετική γραμμική συσχέτιση

6.

$r = -1$

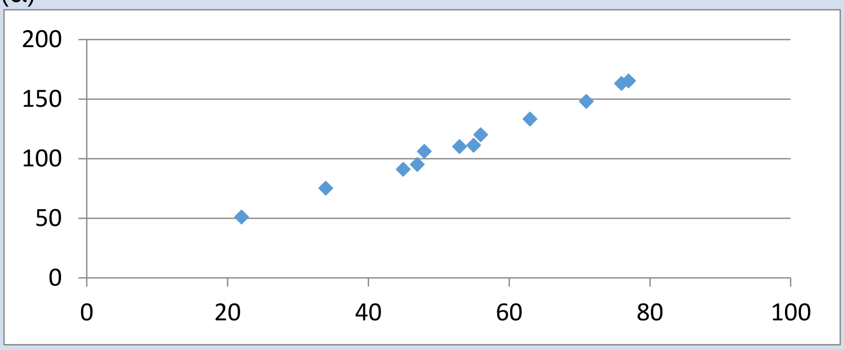
Τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση

Σελίδα 206 Δραστηριότητες Ενότητας

Δραστηριότητα	Απαντήσεις
1.	(α) ΛΑΘΟΣ (δ) ΛΑΘΟΣ (στ) ΛΑΘΟΣ (β) ΛΑΘΟΣ (ε) ΛΑΘΟΣ (ζ) ΛΑΘΟΣ (γ) ΣΩΣΤΟ
2.	Δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση.
3.	(α) $r = 0{,}7$ (γ) $r = 1$ (ε) $r = -0{,}98$ (β) $r = -0{,}25$ (δ) $r = 0$ (στ) $r = -0{,}5$
4.	(α) $CV_{B_1} = 10{,}37\%$ (β) $CV_{B_2} = 19{,}39\%$ Οι βαθμοί του τμήματος B_1 παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια από τους βαθμούς του τμήματος B_2.
5.	(α) Είδος A: $\bar{x} = 22,\ s = 2{,}58$ Είδος B: $\bar{x} = 24,\ s = 4{,}28$ (β) Το πρώτο δείγμα έχει περισσότερη ομοιογένεια.
6.	Υπολογισμός της διαμέσου

7.

(α)



(β) $r = 0{,}99$

(γ) Όσο περισσότερα προϊόντα παρασκευάζονται, τόσο περισσότερος χρόνος απαιτείται.

8.

(α) $r = 0{,}5298$

(β) Ασθενής θετική γραμμική συσχέτιση

9.

(α) Ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση

(β) Ο μέγιστος καρδιακός παλμός στους ενήλικες μειώνεται με την ηλικία.

Σελίδα 210 Δραστηριότητες Εμπλουτισμού	
Δραστηριότητα	**Απαντήσεις**
1.	(γ) Ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση
2.	(α) Γ_1 (β) $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1{,}34, \;\; x_{\delta_1} - x_{\delta_2} = 2$ $\bar{x}_1 - \bar{x}_3 = 4, \;\; x_{\delta_1} - x_{\delta_3} = 5$ $\bar{x}_2 - \bar{x}_3 = 2{,}65, \;\; x_{\delta_2} - x_{\delta_3} = 3$
3.	(α) Θετική γραμμική συσχέτιση ($r = 0{,}84$)
4.	Υπάρχει θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ Βιολογίας – Νέων Ελληνικών και μεταξύ Βιολογίας – Χημείας.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$\in$	ανήκει
$\notin$	δεν ανήκει
$\forall$	για κάθε
$\exists$	υπάρχει
$\cup$	ένωση συνόλων
$\cap$	τομή συνόλων
$\subset$	γνήσιο υποσύνολο
$\subseteq$	υποσύνολο
$\emptyset$ ή $\{\ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
$\neq$	άνισο
$\equiv$	ταυτοτικά ίσο
$\cong$	κατά προσέγγιση ίσο
$\mathbb{N}$	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{N}_0$	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{Z}$	ακέραιοι αριθμοί $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\dots\}$
$\mathbb{Z}^+$	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{Z}^-$	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1,-2,-3,-4,\dots\}$
$\mathbb{Q}$	ρητοί αριθμοί $\{\alpha/\beta\text{: } \alpha,\beta\in Z \text{ και } \beta\neq 0\}$
$\mathbb{Q}^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{Q}_0^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
$\mathbb{Q}^-$	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{R}$	πραγματικοί αριθμοί
$\Rightarrow$	απλή συνεπαγωγή
$\Leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
$\perp$	κάθετες
$\parallel$	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή

=		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
.		Υποδιαστολή
EXP		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
Ans		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
$x^{\square}$	ή x^y ή ^	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
SHIFT	ή 2^{nd} F	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
AC		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
DEL		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
Abs		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
(-)		Εισαγωγή Προσήμου –
a b/c	ή ▯/▯	Κλάσμα
S⇔D	ή a b/c	Μετατροπή Κλάσματος ⇔ Δεκαδικό
CLR		Σβήσιμο μνήμης
M+		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
M-		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
M		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3+4$	[3] [+] [4] [=]	3+4 7
2,34 – 1,1	[2] [.] [3] [4] [–] [1] [.] [1] [=]	2.34 – 1.1 1.24
$3 \cdot 2$	[3] [x] [2] [=]	$3X2$ 6
2^5	[2] [x^y] [5] [=]	2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$	[5] [EXP] [3] [=]	$5E3$ ή $5X103$ 5000
$\frac{3}{4}$	[a b/c] [3] ↓ [4] → [=] ή [3] [a b/c] [4] [=]	$\frac{3}{4}$ 3⌟4
$2\frac{3}{4}$	[SHIFT] [▪/▪] [2] → [3] ↓ [4] [=] ή [2] [a b/c] [3] [a b/c] [4] [=]	$2\frac{3}{4}$ 2⌟3⌟4
$\sqrt{4}$	[√] [4] [=]	$\sqrt{4}$ 2
5^2	[5] [X²] [=]	5^2 25
$2 \cdot (7-3)$	[2] [x] [(] [7] [–] [3] [)] [=]	$2X(7-3)$ 8
$2 \cdot (7-3)$	[7] [–] [3] [=] [2] [x] [Ans] [=]	$2XAns$ 8
$2-(-3)$	[2] [–] [(] [(-)] [3] [)] [=]	$2-(-3)$ 5
$\lvert -3 \rvert$	[Abs] [(-)] [3] [=]	$\lvert -3 \rvert$ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	[S⇔D] ή [SHIFT] [a b/c]	$\frac{1}{4}$
$9-6:2$	Υπολογισμός και αποθήκευση [9] [–] [6] [÷] [2] [=] [M+]	9 – 6 : 2 M + 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9-6:2) - 6:(9-6:2)$	[3] [X] [M] [–] [6] [÷] [M] [=]	3 X M – 6 : M 17

Τριγωνομετρικοι Αριθμοι Γωνιων 1°- 89°

Γωνία	ημω	συνω	εφω
1°	0,017	0,999	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,395	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,348
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
28°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
38°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Γωνία	ημω	συνω	εφω
46°	0,720	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,470	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,748
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,333
78°	0,978	0,203	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	0,999	0,018	57,290