

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Λυκείου Κοινού Κορμού

Α' τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Γ΄ Λυκείου Κοινού Κορμού, Α΄ Τεύχος

Το παρόν τεύχος αφιερώνεται στην μνήμη της Επιθεωρήτριας Μαθηματικών Μέσης Εκπαίδευσης Ευτυχίας Καλλεπίτη.

Συγγραφή:	Βολακάκη Μαρία Κοντοβούρκης Μιχάλης Κυριακού Κυριάκος Λοϊζιάς Σωτήρης Ματθαίου Κυριάκος	Παπαγιάννης Κωνσταντίνος Σαλονικίδης Ιωάννης Σεργίδης Μάριος Τιμοθέου Σάββας
Συντονιστές:	Χρίστου Κωνσταντίνος, Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου Βίδρας Αλέκος, Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου	
Εποπτεία:	Φιλίππου Ανδρέας, Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης Γιασουμής Νικόλας, Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης Παπαγιάννη Όλγα, Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης Χατζηχρίστου Χρυσούλα, Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης	
Γλωσσική επιμέλεια:	Παλάτου – Χριστόφια Μαριάννα, Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων	
Σχεδιασμός εξωφύλλου:	Σιαμμάς Χρύσης, Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων	
Συντονισμός έκδοσης:	Παρπούνας Χρίστος, Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων	

Α΄ έκδοση 2017

Β΄ έκδοση 2019

Εκτύπωση:

© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ISBN:



Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε δύο τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Κοινού Κορμού», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Το βιβλίο έχει έναν διττό ρόλο να εκπληρώσει, να μνηθεί ο μαθητής στη συλλογιστική την οποία εκφράζει το αξεπέραστο λογικό-επαγωγικό σύστημα των Μαθηματικών και παράλληλα να ανταποκριθεί στις σύγχρονες εκπαιδευτικές επιταγές.

Όλο το υλικό που περιλαμβάνεται στο παρόν βιβλίο, σύμφωνα με τα Νέα Αναλυτικά Προγράμματα και τους Δείκτες Επιτυχίας και Επάρκειας που τίθενται από την εκπαιδευτική μεταρρύθμιση, αποσκοπεί αφενός στη βοήθεια των μαθητών/τριών να κατανοήσουν τη μαθηματική λογική και σκέψη και αφετέρου στη συνεισφορά της μαθηματικής παιδείας του τόπου.

Το βιβλίο «Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Κοινού Κορμού» περιλαμβάνει την ύλη των Μαθηματικών που προβλέπεται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Γ΄ τάξης Λυκείου, το οποίο τίθεται σε εφαρμογή το σχολικό έτος 2017 – 2018 και είναι εμπλουτισμένο με αυστηρούς ορισμούς και αποδείξεις όπως επίσης με πολλές εφαρμογές και παραδείγματα, που ανταποκρίνονται στις δυνατότητες και στα ενδιαφέροντα των μαθητών/τριών. Επιπρόσθετα, καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια, ώστε να είναι δυνατή η ολοκλήρωση της διδασκαλίας του στον διδακτικό χρόνο, ο οποίος προβλέπεται από το εγκεκριμένο ωρολόγιο πρόγραμμα.

Το κλειδί της επιτυχίας στο μάθημα των Μαθηματικών είναι η ουσιαστική κατανόηση των εννοιών, η ανάπτυξη αναλυτικής και συνθετικής σκέψης, η μεθοδολογική αντιμετώπιση ομαδοποιημένων προβλημάτων και η αποφυγή της αποστήθισης. Η ορθή χρήση του βιβλίου δημιουργεί στον μαθητή, εκτός από το φιλικό περιβάλλον, όλες εκείνες τις προϋποθέσεις, κυριότερες των οποίων είναι ο προβληματισμός και η αυτενέργεια, για ανάπτυξη μιας κριτικής, διερευνητικής και ορθολογιστικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τους Καθηγητές του Πανεπιστημίου Κύπρου Κωνσταντίνο Χρίστου και Αλέκο Βίδαρη.

Δρ Κυπριανός Δ. Λούης

Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΧΟΜΕΝΑ	Σελίδα
1. Εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού	7
▪ Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης (Ορισμοί)	8
▪ Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης (Θεωρήματα)	27
▪ Κυρτότητα – Σημεία καμπής συνάρτησης	37
▪ Μελέτη συνάρτησης – Γραφική παράσταση πολυωνυμικής συνάρτησης	45
▪ Προβλήματα	49
2. Αόριστο Ολοκλήρωμα	61
▪ Εισαγωγή	62
▪ Ορισμός αόριστου ολοκληρώματος	62
▪ Κανόνες ολοκλήρωσης	68
▪ Εφαρμογές αόριστων ολοκληρωμάτων	73
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	83

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 1.1 Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης (Ορισμοί)**
 - 1.1.1 Μονοτονία συνάρτησης**
 - 1.1.2 Ακρότατα συνάρτησης (Τοπικά – Ολικά)**
- 1.2 Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης (Θεωρήματα)**
 - 1.2.1 Μονοτονία συνάρτησης**
 - 1.2.2 Τοπικά ακρότατα συνάρτησης**
 - 1.2.3 Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης**
- 1.3 Κυρτότητα – Σημεία καμψής συνάρτησης**
 - 1.3.1 Κυρτότητα συνάρτησης**
 - 1.3.2 Σημεία καμψής**
- 1.4 Μελέτη συνάρτησης – Γραφική παράσταση πολυωνυμικής συνάρτησης**
- 1.5 Προβλήματα**

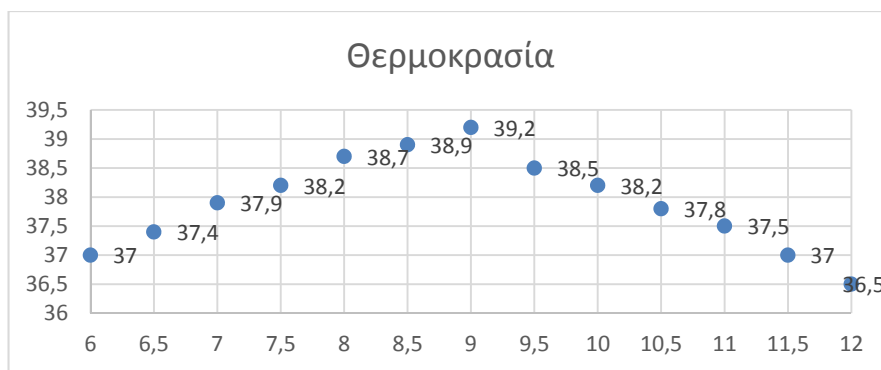
1.1 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (ΟΡΙΣΜΟΙ)

1.1.1 Μονοτονία συνάρτησης

Διερεύνηση 1

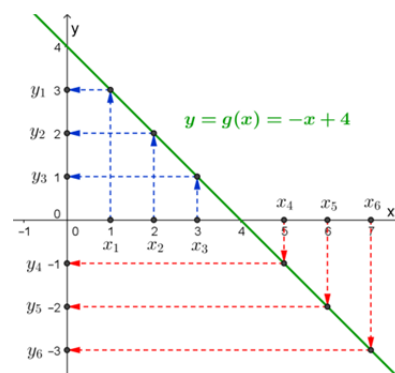
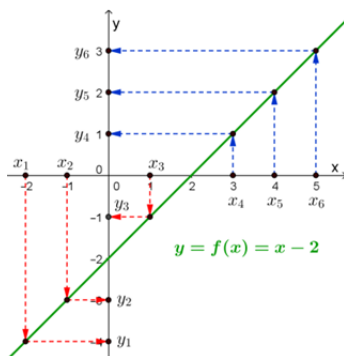
Στην πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζεται η θερμοκρασία του σώματος ενός ασθενή μεταξύ των ωρών 06:00 – 12:00.

- (α) Να σχολιάσετε τη θερμοκρασία του ασθενούς μεταξύ των ωρών 06:00 και 09:00
 (β) Σε τι διαφέρει η θερμοκρασία του ασθενούς μετά τις 09:00 και πριν τις 09:00;
 (γ) Σε ποιες, κατά τη γνώμη σας, χρονικές στιγμές οι θερμοκρασίες του ασθενούς παρουσιάζουν ενδιαφέρον;



Διερεύνηση 2

Στα πιο κάτω σχήματα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x - 2$ και $g(x) = -x + 4$, $x \in \mathbb{R}$.



x	-2	-1	1	3	4	5
$y = f(x)$	-4	-3	-1	1	2	3

x	1	2	3	5	6	7
$y = g(x)$	3	2	1	-1	-2	-3

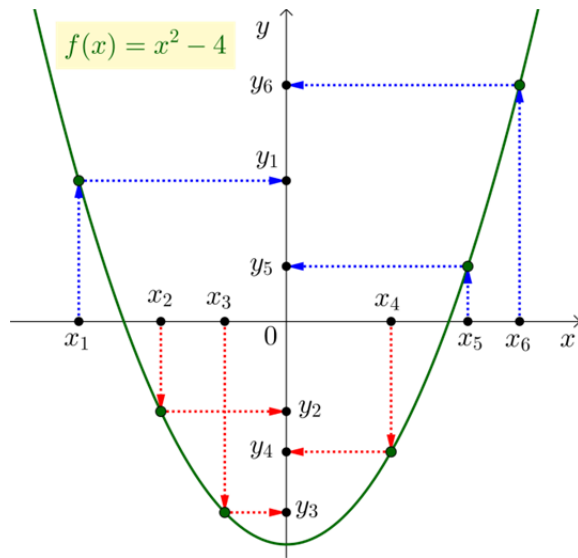
- Τι παρατηρείτε για τις αντίστοιχες τιμές του y , καθώς αυξάνονται οι τιμές του x σε κάθε περίπτωση;

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 - 4, x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά της συνάρτησης είναι διαφορετική στο διάστημα $(-\infty, 0]$, από ότι στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Στο διάστημα $(-\infty, 0]$, καθώς αυξάνονται οι τιμές του x , οι αντίστοιχες τιμές του y φθίνουν, δηλαδή η γραφική παράσταση «κατεβαίνει».

Αντίθετα, στο διάστημα $[0, +\infty)$, καθώς αυξάνονται οι τιμές του x , αυξάνονται και οι αντίστοιχες τιμές του y , δηλαδή η γραφική παράσταση «ανεβαίνει».

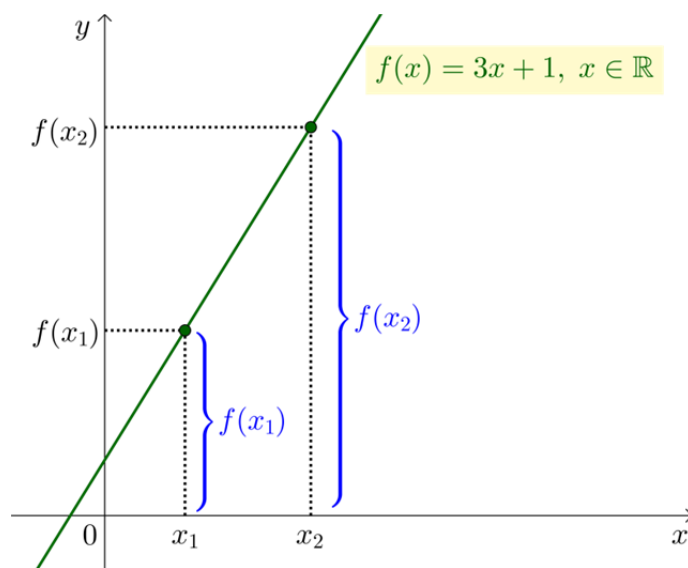


Ορισμός

Μια συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, με Δ ένα διάστημα υποσύνολο του \mathbb{R} , ονομάζεται **γνησίως αύξουσα στο Δ** , αν, για οποιαδήποτε x_1, x_2 που ανήκουν στο Δ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

(Δηλαδή καθώς αυξάνονται οι τιμές του x , αυξάνονται και οι αντίστοιχες τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f .)

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 3x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , αφού καθώς αυξάνονται τα x , αυξάνονται και οι αντίστοιχες τιμές της f , όπως φαίνεται και από τη γραφική της παράσταση.

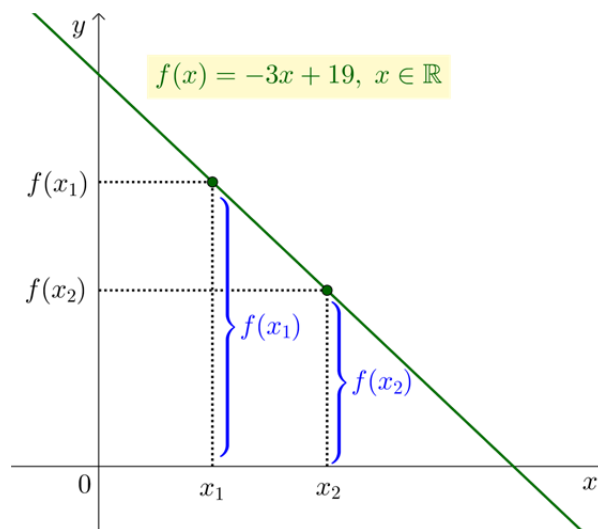


Ορισμός

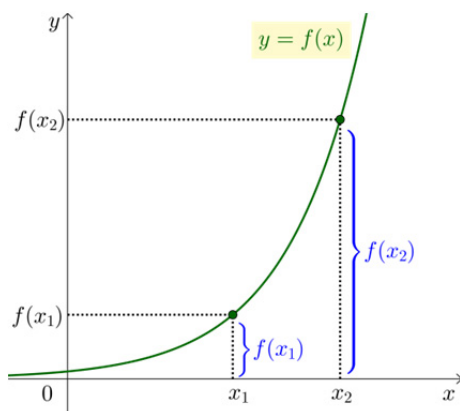
Μια συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, με Δ ένα διάστημα υποσύνολο του \mathbb{R} , ονομάζεται **γνησίως φθίνουσα στο Δ** , αν, για οποιαδήποτε x_1, x_2 που ανήκουν στο Δ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$.

(Δηλαδή καθώς αυξάνονται οι τιμές του x , οι αντίστοιχες τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f μειώνονται.)

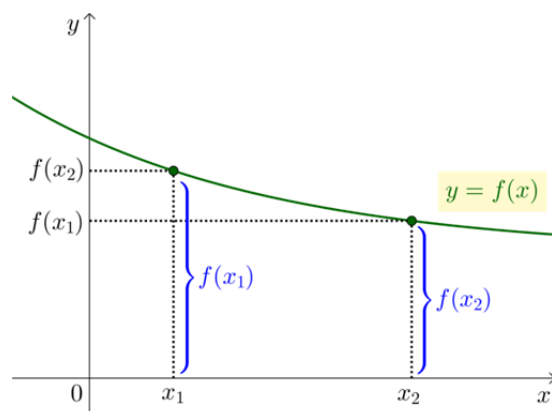
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = -3x + 19$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , αφού καθώς αυξάνονται τα x , οι αντίστοιχες τιμές της f μειώνονται, όπως φαίνεται και από τη γραφική της παράσταση.



Για να δηλώσουμε ότι μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ , γράφουμε $f \uparrow \Delta$ (αντιστοίχως $f \downarrow \Delta$).



f γνησίως αύξουσα στο Δ



f γνησίως φθίνουσα στο Δ

Παρατηρήσεις

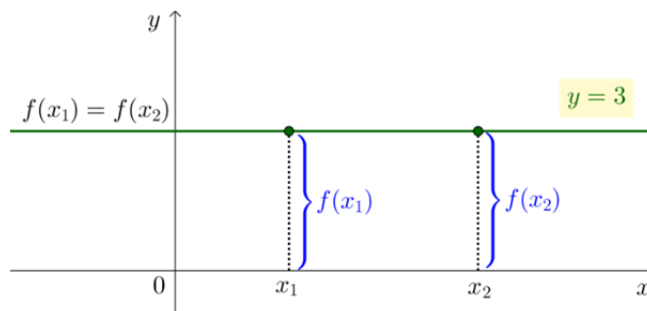
- Μια συνάρτηση λέγεται **γνησίως μονότονη** σε ένα διάστημα Δ , αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε αυτό.
- Κάθε ευθεία με εξίσωση $y = ax + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ είναι:
 - Γνησίως αύξουσα, όταν $a > 0$.
 - Γνησίως φθίνουσα, όταν $a < 0$.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, με Δ ένα διάστημα υποσύνολο του \mathbb{R} , ονομάζεται **σταθερή στο Δ** , αν, για οποιαδήποτε x_1, x_2 που ανήκουν στο Δ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

(Δηλαδή καθώς αυξάνονται οι τιμές του x , οι αντίστοιχες τιμές $f(x)$ της συνάρτησης f παραμένουν σταθερές.)

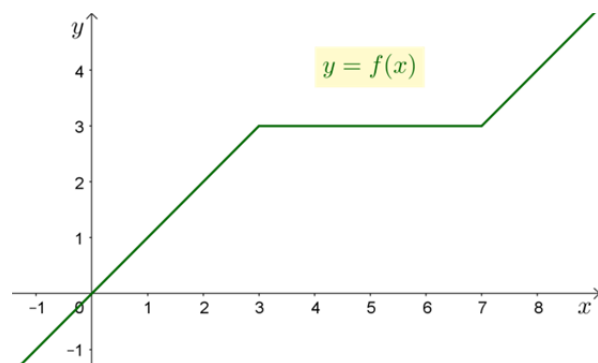
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 3$ είναι σταθερή στο \mathbb{R} , αφού καθώς αυξάνονται τα x , οι αντίστοιχες τιμές της f παραμένουν πάντα οι ίδιες, δηλαδή μένουν σταθερά ίσες με 3, όπως φαίνεται και στο πιο κάτω σχήμα.



Παρατηρήσεις

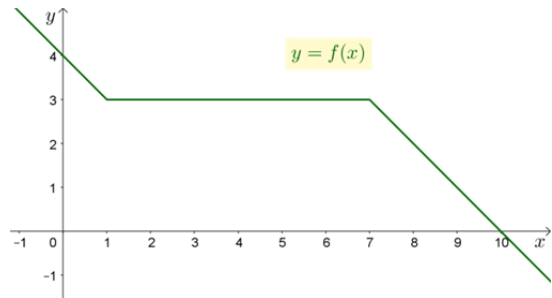
- Αν στον ορισμό της γνησίως αύξουσας συνάρτησης το $f(x_1) < f(x_2)$ αντικατασταθεί με το $f(x_1) \leq f(x_2)$, η συνάρτηση λέγεται **αύξουσα**.

Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι $f(x_1) \leq f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$.



- Αν στον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης το $f(x_1) > f(x_2)$ αντικατασταθεί με το $f(x_1) \geq f(x_2)$, η συνάρτηση λέγεται **φθίνουσα**.

Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι $f(x_1) \geq f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$.



- Μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση είναι και αύξουσα αλλά όχι το αντίστροφο. Όμοια, μια γνησίως φθίνουσα είναι και φθίνουσα αλλά όχι το αντίστροφο.
- Μια πολυωνυμική συνάρτηση (όχι σταθερή) αν είναι αύξουσα (φθίνουσα) σε ένα διάστημα εννοείται ότι είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα). Στην ενότητα αυτή, οι συναρτήσεις που θα μελετήσουμε είναι μόνο πολυωνυμικές.

Παράδειγμα 1

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις πιο κάτω συναρτήσεις f με τύπο:

(α) $f(x) = 5x + 2, x \in \mathbb{R}$

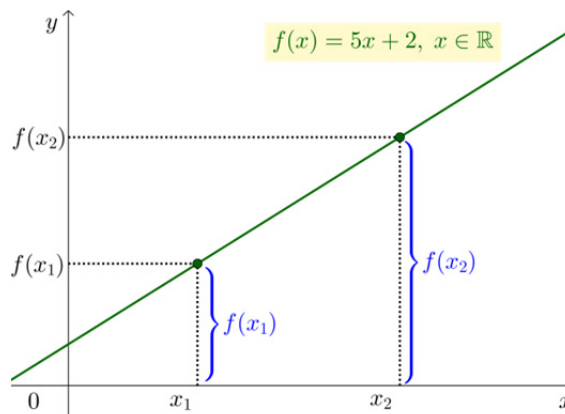
(β) $f(x) = -2x + 3, x \in \mathbb{R}$

Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι για οποιουσδήποτε δύο αριθμούς $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 5x_1 < 5x_2 \Rightarrow 5x_1 + 2 < 5x_2 + 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

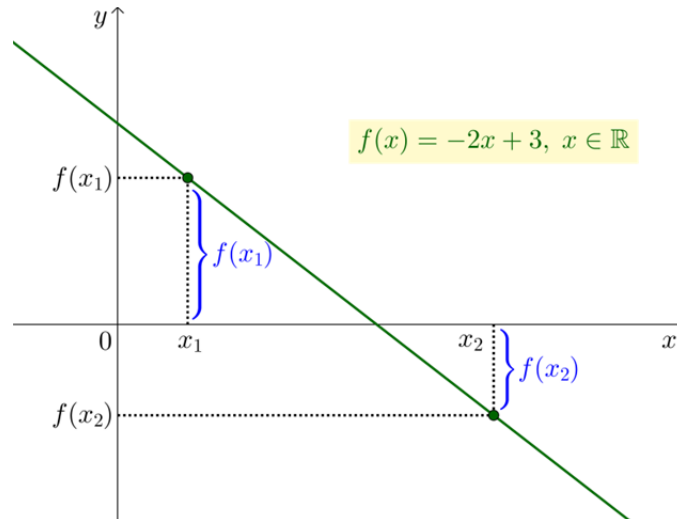
Δηλαδή, αν πάρουμε τον αριθμό $x_1 = 2$, η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης είναι η $f(x_1) = f(2) = 12$. Αν τώρα πάρουμε έναν αριθμό μεγαλύτερο του 2, για παράδειγμα το $x_2 = 3$, η αντίστοιχη τιμή $f(x_2) = f(3) = 17$ είναι μεγαλύτερη από την $f(2) = 12$. Αυτό όμως συμβαίνει για κάθε x_1, x_2 . Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .



(β) Παρατηρούμε ότι για οποιουσδήποτε δύο αριθμούς $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow -2x_1 + 3 > -2x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Δηλαδή, αν πάρουμε τον αριθμό $x_1 = 2$, η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης είναι η $f(x_1) = f(2) = -1$. Αν τώρα πάρουμε έναν αριθμό μεγαλύτερο του 2, για παράδειγμα το $x_2 = 3$, η αντίστοιχη τιμή $f(x_2) = f(3) = -3$ είναι μικρότερη από την $f(2) = -1$. Αυτό όμως συμβαίνει για κάθε x_1, x_2 . Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .



Παράδειγμα 2

Δίνεται μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2)$ και $f(3)$ της συνάρτησης, όταν:

- (α) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα
- (β) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα
- (γ) η συνάρτηση f είναι σταθερή.

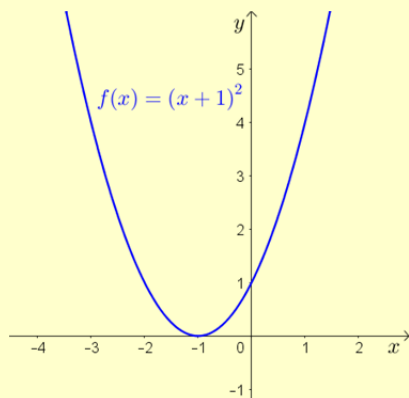
Λύση

- (α) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε: $2 < 3 \Rightarrow f(2) < f(3)$
- (β) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε: $2 < 3 \Rightarrow f(2) > f(3)$
- (γ) Αν η συνάρτηση f είναι σταθερή, τότε: $2 < 3 \Rightarrow f(2) = f(3)$

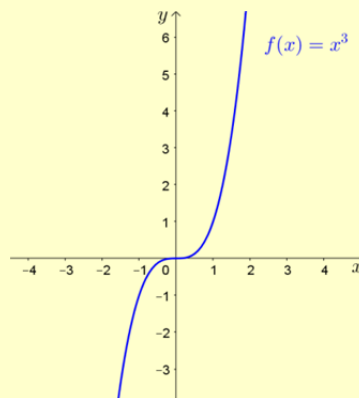
Δραστηριότητες

1. Να αναφέρετε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης σε κάθε περίπτωση στις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις:

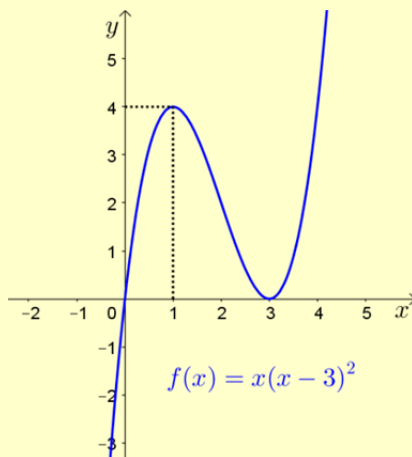
(α)



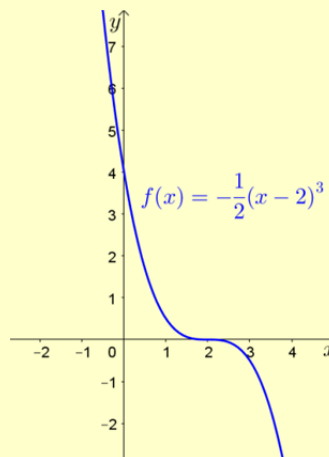
(β)



(γ)



(δ)



2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις πιο κάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = 4 - x, \quad x \in \mathbb{R}$

(β) $g(x) = 2 + 3x, \quad x \in \mathbb{R}$

(γ) $h(x) = -2$

3. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$. Να διατάξετε, από την πιο μικρή στην πιο μεγάλη, τις τιμές $f(3), f(-2), f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(\pi)$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

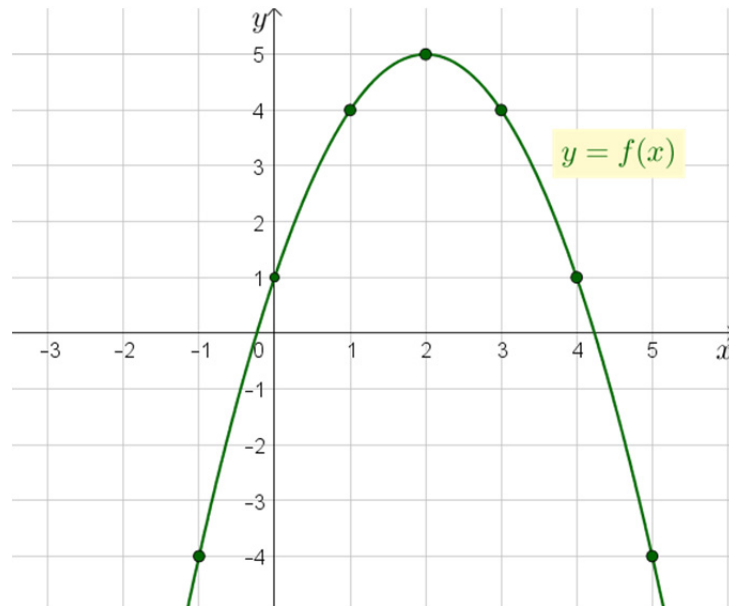
4. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$ και να αναφέρετε τα διαστήματα μονοτονίας της.

1.1.2 Ακρότατα συνάρτησης (Τοπικά – Ολικά)

Ολικά ακρότατα συνάρτησης

Διερεύνηση 1

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.



Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$:

(α) Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα τιμών.

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$							

- (β) Να συγκρίνετε την τιμή $f(2)$ με οποιαδήποτε άλλη τιμή $f(x)$ της συνάρτησης και να της δώσετε ένα χαρακτηρισμό.
- (γ) Να γράψετε τον χαρακτηρισμό που δώσατε στο (β), χρησιμοποιώντας ανισοτική σχέση μεταξύ του $f(2)$ και οποιασδήποτε άλλης τιμής $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ και Δ διάστημα υποσύνολο του \mathbb{R} . Θα λέμε ότι:

- (α) Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ **(ολικό) μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν για κάθε πραγματικό αριθμό x στο διάστημα Δ ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Δηλαδή, η $f(x_0)$ είναι η μεγαλύτερη τιμή, συγκρινόμενη με οποιαδήποτε άλλη τιμή της συνάρτησης στο διάστημα Δ και λέγεται η **μέγιστη τιμή της f** στο πεδίο ορισμού της Δ .

- (β) Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ **(ολικό) ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν για κάθε πραγματικό αριθμό x στο Δ ισχύει:

$$f(x) \geq f(x_0)$$

Δηλαδή, η $f(x_0)$ είναι η μικρότερη τιμή, συγκρινόμενη με οποιαδήποτε άλλη τιμή της συνάρτησης στο διάστημα Δ και λέγεται η **ελάχιστη τιμή της f** στο πεδίο ορισμού της Δ .

- (γ) Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο της f είναι τα **(ολικά) ακρότατα της f** .

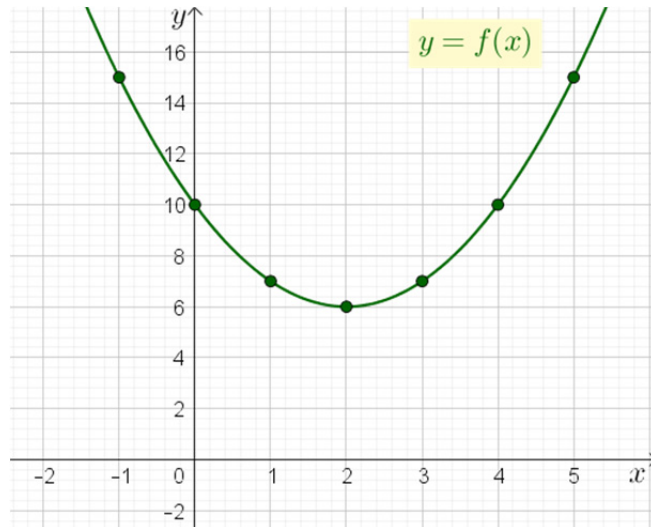
Παρατηρήσεις

- Λέγοντας μέγιστη τιμή εννοούμε την τιμή της συνάρτησης $f(x_0)$, η οποία είναι η **μεγαλύτερη τιμή** που μπορεί να πάρει η συνάρτηση σε όλο το πεδίο ορισμού της. Την γράφουμε και ως $y_{\text{μεγ}} = f(x_0)$.
- Λέγοντας ελάχιστη τιμή εννοούμε την τιμή $f(x_0)$, η οποία είναι η **μικρότερη τιμή** που μπορεί να πάρει η συνάρτηση σε όλο το πεδίο ορισμού της. Την γράφουμε και ως $y_{\text{ελαχ}} = f(x_0)$.
- Μια συνάρτηση δεν έχει πάντα μέγιστη ή ελάχιστη τιμή. Πιθανόν να έχει μέγιστη τιμή και όχι ελάχιστη (ή και αντίστροφα), αλλά ενδέχεται να μην έχει ούτε ελάχιστη, ούτε μέγιστη τιμή.

Παράδειγμα 1

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 10$, $x \in \mathbb{R}$.

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αναφέρετε την ελάχιστη τιμή της.



Λύση

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , παρατηρούμε ότι η ελάχιστη τιμή είναι $y_{ελαχ} = 6$ και αυτό συμβαίνει στην τιμή $x = 2$.

Δηλαδή, $f(x) \geq f(2)$ ή $f(x) \geq 6$, για όλα τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της (\mathbb{R}).

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + (x - 1)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η τιμή $f(1)$ είναι η ελάχιστη τιμή για τη συνάρτηση και να την υπολογίσετε.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq f(1)$.

Υπολογίζοντας την τιμή $f(1)$, έχουμε $f(1) = 3 + (1 - 1)^2 = 3$.

Θα δείξουμε δηλαδή ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $3 + (x - 1)^2 \geq 3$.

Ισοδύναμα, έχουμε ότι

$$3 + (x - 1)^2 \geq 3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$$

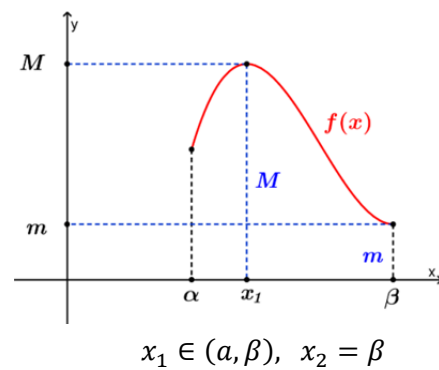
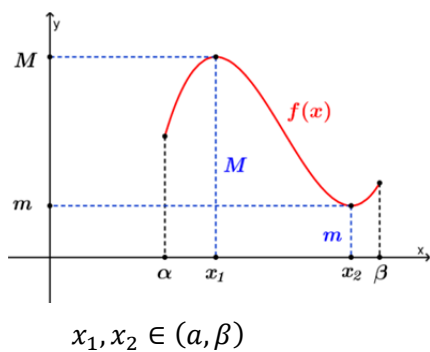
το οποίο ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x , αφού το τετράγωνο οποιουδήποτε αριθμού (άρα και του $(x - 1)^2$) είναι πάντοτε ένας θετικός αριθμός. Επομένως, η τιμή $f(1) = 3$ είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f στο πεδίο ορισμού της, το \mathbb{R} .

Ένα ισχυρό κριτήριο για την εξασφάλιση της μέγιστης και ελάχιστης τιμής μιας συνάρτησης είναι η περίπτωση που η συνάρτηση ορίζεται σε **κλειστό** διάστημα της μορφής $[a, \beta]$.

Θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης Τιμής

Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ τέτοια, ώστε $f(x) \leq f(x_1) = M$ και $f(x) \geq f(x_2) = m$, για κάθε $x \in [a, \beta]$. Λέμε ότι:

- Η τιμή $f(x_1) = M$ είναι η **μέγιστη τιμή** της f στο $[a, \beta]$.
- Η τιμή $f(x_2) = m$ είναι η **ελάχιστη τιμή** της f στο $[a, \beta]$.



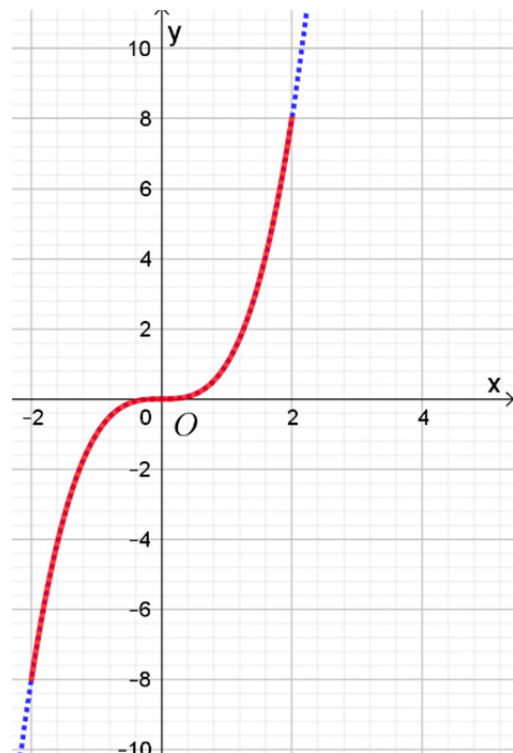
Παρατηρήσεις

- Όταν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού μιας πολυωνυμικής συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε το πιο πάνω θεώρημα μας εξασφαλίζει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Για παράδειγμα, η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ **δεν** παρουσιάζει κανένα ολικό ακρότατο σε όλο το \mathbb{R} , όπως φαίνεται και από την γραφική της παράσταση.

Η ίδια όμως συνάρτηση αν περιοριστεί για παράδειγμα στο διάστημα $[-2, 2]$, τότε έχουμε και ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Συγκεκριμένα,

$$y_{\text{ελαχ}} = f(-2) = -8 \text{ και } y_{\text{μεγ}} = f(2) = 8.$$



Παράδειγμα 3

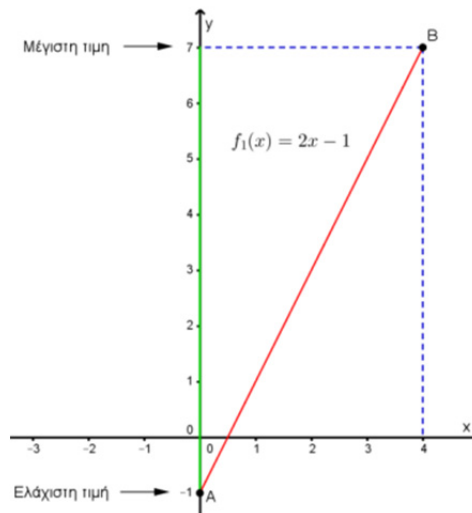
Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = 2x - 1, \quad x \in [0, 4]$$

Λύση

Η συνάρτηση f ορίζεται σε κλειστό διάστημα. Έτσι, με βάση το Θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης Τιμής θα έχει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία με κλίση 2. Η θετική κλίση της ευθείας υποδηλώνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 4]$. Συνεπώς, αναζητούμε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f στα άκρα του διαστήματος $[0, 4]$.

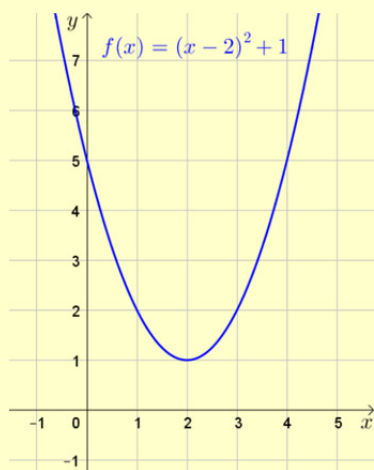
Ισχύει ότι $f(0) = -1$ και $f(4) = 7$. Επομένως, η μέγιστη τιμή της f στο $[0, 4]$ είναι το 7, ενώ η ελάχιστη τιμή της f στο ίδιο διάστημα είναι το -1 .



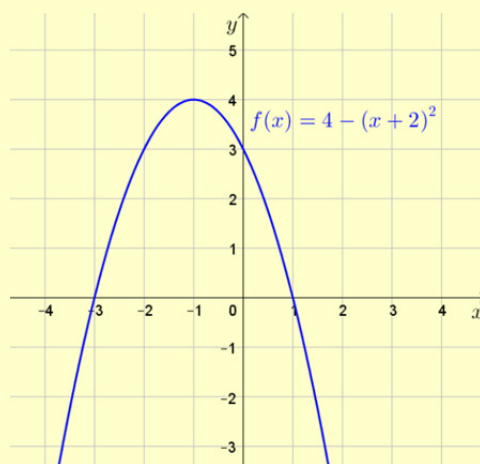
Δραστηριότητες

1. Από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις, να βρείτε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή (αν αυτή υπάρχει) και να γράψετε για κάθε περίπτωση την αντίστοιχη ανισοτική σχέση.

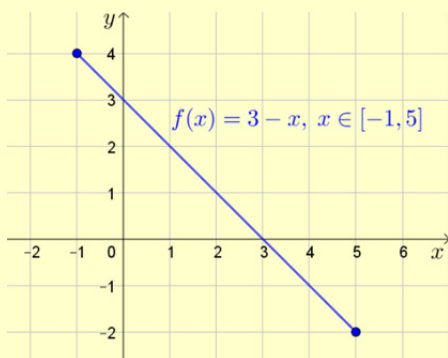
(α)



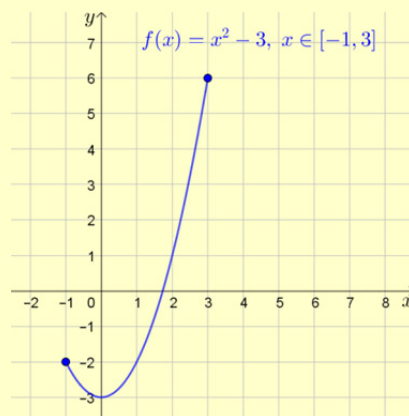
(β)



(γ)



(δ)



2. Να αποδείξετε ότι:

(α) Η $f(3)$ είναι η ελάχιστη τιμή για τη συνάρτηση $f(x) = (x - 3)^2 - 1, x \in \mathbb{R}$ και να την υπολογίσετε.

(β) Η $f(1)$ είναι η μέγιστη τιμή για τη συνάρτηση $f(x) = 11 - (x - 1)^2, x \in \mathbb{R}$ και να την υπολογίσετε.

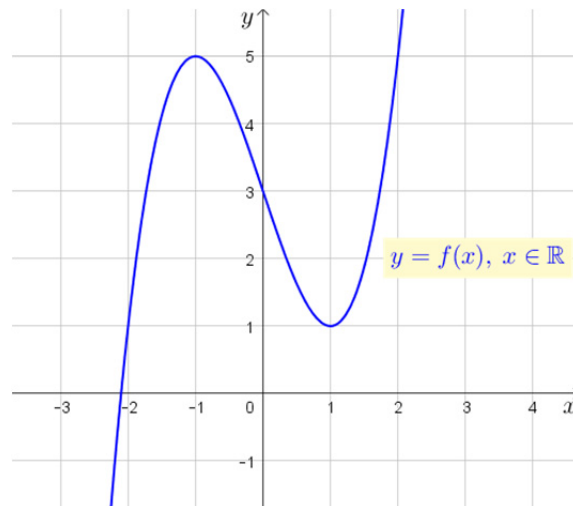
3. Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = 3x - 1, x \in [-2, 3]$

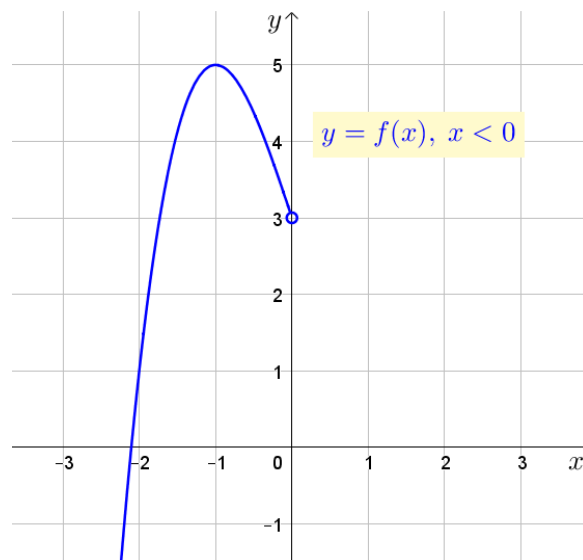
(β) $g(x) = -2x + 5, x \in [-1, 5]$

Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

Η πιο κάτω γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ δεν παρουσιάζει καμία ολικά μέγιστη ή ολικά ελάχιστη τιμή.

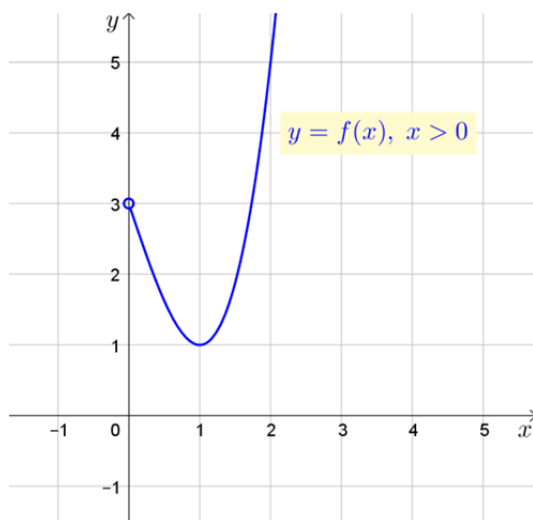


Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της πιο πάνω συνάρτησης στο $\Delta_1 = (-\infty, 0)$ παρατηρούμε ότι στο σημείο $x = -1$, η συνάρτηση παρουσιάζει ολικά μέγιστη τιμή, την $f(-1) = 5$. Δηλαδή, για κάθε $x < 0$, έχουμε $f(x) \leq f(-1) \Leftrightarrow f(x) \leq 5$.



Για την αρχική συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ η τιμή $f(-1) = 5$ δεν «χάνει» την ιδιότητα ως μέγιστη τιμή σε κάποια σημεία του πεδίου ορισμού που βρίσκονται «κοντά» στο -1 , δηλαδή σε ένα κατάλληλα περιορισμένο ανοικτό διάστημα του πεδίου ορισμού της. Αυτό το «περιορισμένο» διάστημα ονομάζεται και «περιοχή του x_0 » και συμβολίζεται με $\pi(x_0)$, δηλαδή είναι ένα ανοικτό διάστημα της μορφής $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ για κάποιο $\delta > 0$.

Με ανάλογο τρόπο, παρατηρούμε το $f(1) = 1$ είναι ολικά ελάχιστη τιμή, όταν η συνάρτηση f περιορίζεται στο διάστημα $(0, +\infty)$. Ισχύει δηλαδή ότι $f(1) \leq f(x)$ για όλα τα $x > 0$. Όμοια, για την αρχική συνάρτηση όμως $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ η τιμή $f(1) = 1$ δεν «χάνει» την ιδιότητα ως ελάχιστη τιμή σε κάποια σημεία του πεδίου ορισμού που βρίσκονται «κοντά» στο 1, δηλαδή σε μια «περιοχή του x_0 ».



Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ και Δ διάστημα υποσύνολο του \mathbb{R} . Θα λέμε ότι:

(α) Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ **τοπικό μέγιστο**, αν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(x_0) \geq f(x), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \Delta$$

Το x_0 λέγεται **θέση (ή σημείο) τοπικού μεγίστου** και το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο** της f .

(β) Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ τοπικό ελάχιστο, αν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(x_0) \leq f(x), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \Delta$$

Το x_0 λέγεται **θέση (ή σημείο) τοπικού ελαχίστου** και το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο** της f .

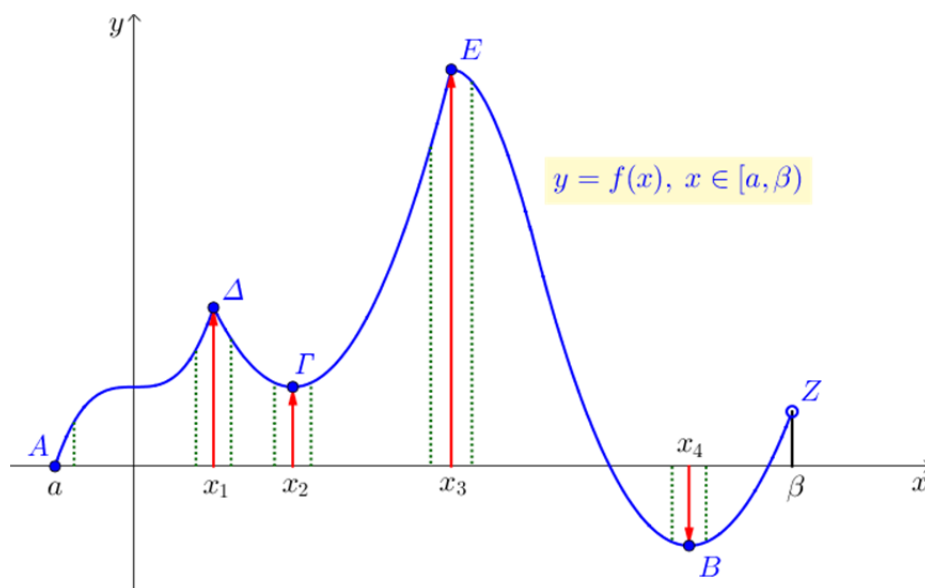
(γ) Το τοπικό μέγιστο και το τοπικό ελάχιστο της f είναι τα **τοπικά ακρότατα** της f .

Παρατηρήσεις

- Αν η ανισότητα $f(x_0) \geq f(x)$ (αντίστοιχα $f(x_0) \leq f(x)$) ισχύει για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τότε όπως έχουμε δει η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο (αντίστοιχα ολικό ελάχιστο) στο x_0 .

- Το τοπικό ακρότατο σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f ενδέχεται να είναι:
 - είτε εσωτερικό του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f
 - είτε άκρο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f .
- Αν το τοπικό ακρότατο είναι εσωτερικό στο x_0 , του πεδίου ορισμού, τότε το «κοντά στο x_0 » ερμηνεύεται σε τιμές που βρίσκονται και δεξιά και αριστερά του x_0 , δηλαδή σε σημεία x του ανοικτού διαστήματος $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Αν το τοπικό ακρότατο είναι σε άκρο του πεδίου ορισμού, τότε το «κοντά στο x_0 » ερμηνεύεται σε τιμές που βρίσκονται είτε μόνο δεξιά, είτε μόνο αριστερά του x_0 (ανάλογα με τη «μορφή» του πεδίου ορισμού), δηλαδή σε σημεία x του $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \Delta$.
- Κάθε ολικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) είναι και τοπικό ακρότατο. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.
- Ένα τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) μπορεί να είναι μικρότερο (μεγαλύτερο) από ένα τοπικό ελάχιστο.

Στην πιο κάτω γραφική παράσταση ισχύουν τα εξής:

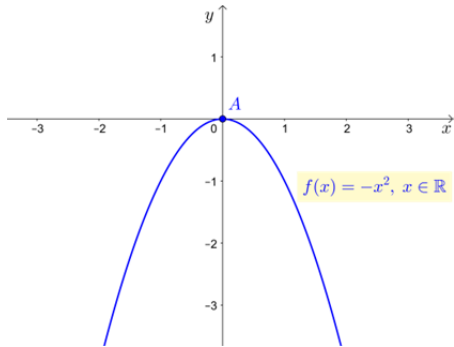


- ✓ Στα σημεία με τετμημένες a, x_1, x_2, x_3 και x_4 , η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα. Στο σημείο β , η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, αφού το β δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .
- ✓ Στα σημεία με τετμημένες a, x_2 και x_4 , η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, ενώ στα σημεία x_1 και x_3 , η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.
- ✓ Στο σημείο με τετμημένη x_4 η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, ενώ στο σημείο με τετμημένη x_3 ολικό μέγιστο, γιατί είναι η μεγαλύτερη και η μικρότερη τιμή της συνάρτησης, αντίστοιχα.

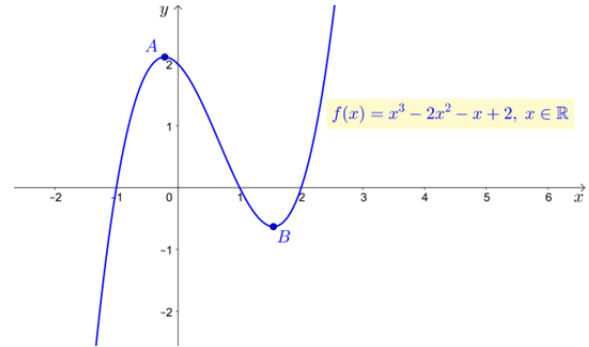
Παράδειγμα 1

Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα (τοπικά και ολικά) των συναρτήσεων σε κάθε περίπτωση ξεχωριστά:

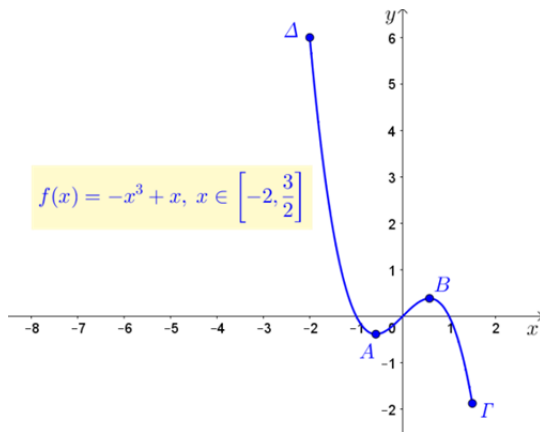
(α)



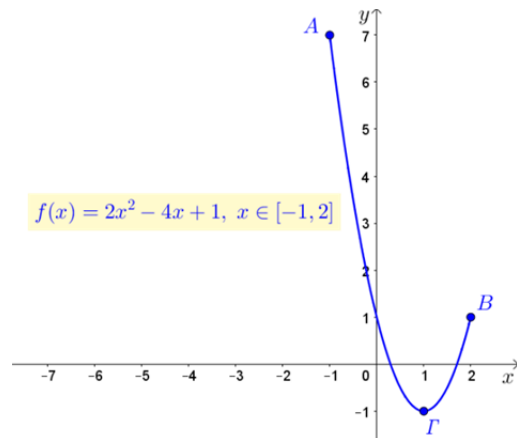
(β)



(γ)



(δ)



Λύση

- (α) Στο Σχήμα (α), το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} . Στο x_A , η f παρουσιάζει τοπικό και συγχρόνως ολικό μέγιστο, το $f(x_A)$, αφού στο x_A η συνάρτηση f παίρνει την μέγιστη της τιμή.
- (β) Στο Σχήμα (β), το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} . Στο x_A , η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, το $f(x_A)$, και στο x_B τοπικό ελάχιστο, το $f(x_B)$. Η συνάρτηση f δεν έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.
- (γ) Στο Σχήμα (γ), το πεδίο ορισμού της f είναι το κλειστό διάστημα $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$. Στα σημεία x_A, x_B, x_Γ και x_Δ , η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα, τα $f(x_A)$, $f(x_B)$, $f(x_\Gamma)$ και $f(x_\Delta)$. Ακρότατα (ολικά) για την f παρουσιάζονται στα x_Γ και x_Δ , τα $f(x_\Gamma)$ και $f(x_\Delta)$. Συγκεκριμένα, στο x_Γ ολικό ελάχιστο, ενώ στο x_Δ ολικό μέγιστο.

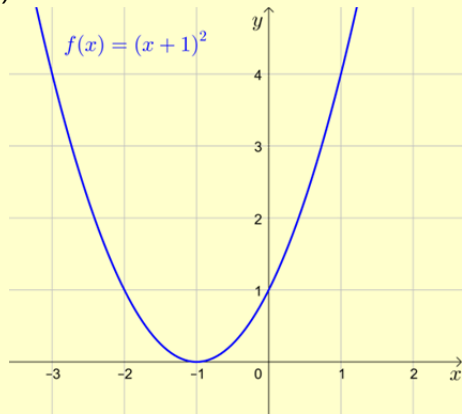
(δ) Στο Σχήμα (δ), το πεδίο ορισμού της f είναι το κλειστό διάστημα $[-1, 2]$.

Στα σημεία x_A, x_B και x_Γ η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα, τα $f(x_A)$, $f(x_B)$ και $f(x_\Gamma)$, ενώ ακρότατα (ολικά) παρουσιάζονται στα x_A και x_Γ , τα $f(x_A)$ και $f(x_\Gamma)$. Συγκεκριμένα, στο σημείο x_Γ , εκτός από τοπικό ελάχιστο, η συνάρτηση f παρουσιάζει συγχρόνως ολικό ελάχιστο, αφού στο x_Γ η συνάρτηση f παίρνει την ελάχιστή της τιμή. Αντίστοιχα, στο σημείο x_A εκτός από τοπικό μέγιστο, η συνάρτηση f παρουσιάζει συγχρόνως ολικό μέγιστο, αφού στο x_A η συνάρτηση f παίρνει τη μέγιστη της τιμή. Στο σημείο x_B , παρά το ότι αυτό βρίσκεται στο ένα άκρο του πεδίου ορισμού της f , η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο αλλά όχι ολικό, αφού στο σημείο x_A η συνάρτηση f λαμβάνει μεγαλύτερη τιμή από ότι στο σημείο x_B .

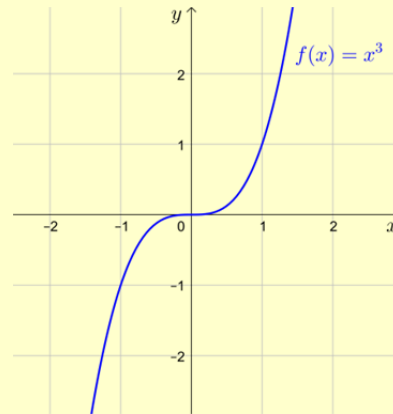
Δραστηριότητες

1. Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα (τοπικά και ολικά) των συναρτήσεων σε κάθε περίπτωση ξεχωριστά:

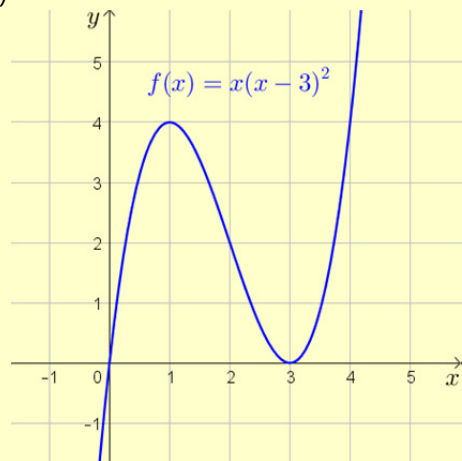
(α)



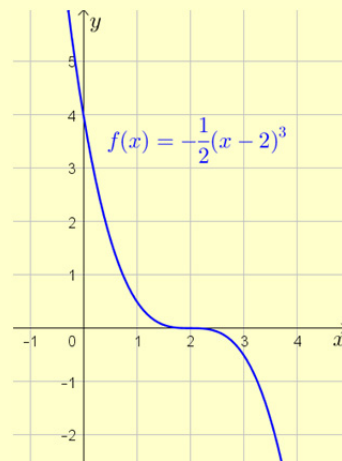
(β)



(γ)



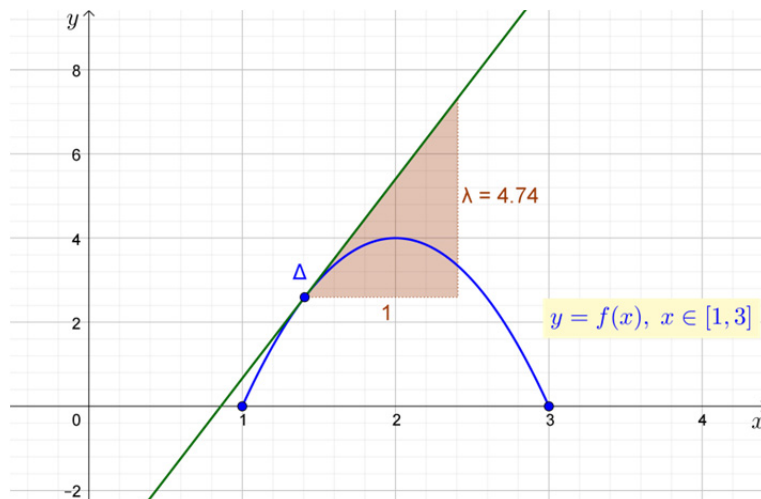
(δ)



1.2 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ)

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «Clyk_En01_Monotonia01.ggb».



Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y = f(x)$, $x \in [1, 3]$ και ένα τυχαίο σημείο της Δ . Το σημείο Δ μπορούμε να το μετακινούμε σε διάφορες θέσεις πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Σε κάθε θέση του σημείου Δ , είναι κατασκευασμένη η εφαπτομένη στο Δ και αναγράφεται η αντίστοιχη κλίση της λ .

Να μετακινήσετε το σημείο Δ πάνω στη γραφική παράσταση και να παρατηρήσετε:

- (α) Σε ποιες θέσεις του διαστήματος $\Delta = [1, 3]$ η κλίση λ είναι θετική;
- (β) Σε ποιες θέσεις του διαστήματος $[1, 3]$ η κλίση λ είναι αρνητική και σε ποια θέση γίνεται ίση με το μηδέν;
- (γ) Πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης f στο Δ όταν $\lambda > 0$ ή $\lambda < 0$;

1.2.1 Μονοτονία συνάρτησης

Σε πολλές περιπτώσεις οι ορισμοί μας δυσκολεύουν στην εύρεση τόσο των διαστημάτων μονοτονίας, όσο και των θέσεων στις οποίες υπάρχουν τοπικά ακρότατα για μια συνάρτηση που ο τύπος της είναι πιο σύνθετος. Έτσι, μπορούμε με κάποια θεωρήματα να έχουμε πιο απλά κριτήρια για την εύρεση του είδους της μονοτονίας μιας συνάρτησης και της ύπαρξης τοπικού ή ολικού ακρότατου.

Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης «ανέρχεται» (είναι δηλαδή γνησίως αύξουσα), τότε παρατηρούμε ότι σε κάθε σημείο της η κλίση της εφαπτομένης της είναι θετική. Αντίθετα, αν η γραφική παράσταση «κατέρχεται», τότε η κλίση της εφαπτομένης είναι αρνητική.

Θεώρημα (Κριτήριο Μονοτονίας)

Έστω $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μία πολυωνυμική συνάρτηση. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

- (α) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$.
- (β) Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, \beta]$.
- (γ) Αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f είναι σταθερή στο $[a, \beta]$.

Παρατηρήσεις

- Η μονοτονία μιας συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ εξαρτάται από το πρόσημο της παραγώγου της στο ανοικτό διάστημα (a, β) .
- Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Δηλαδή, σε μια γνησίως μονότονη συνάρτηση μπορούν να υπάρχουν σημεία x_0 , για τα οποία να ισχύει $f'(x_0) = 0$.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το \mathbb{R} , αλλά υπάρχει σημείο (το $x = 0$), στο οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$.
- Γενικά, αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x που ανήκει σε κάποιο διάστημα Δ και η ισότητα ισχύει **σε μεμονωμένες τιμές, οι οποίες όμως δεν σχηματίζουν από μόνες τους διάστημα**, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Παράδειγμα 1

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις πιο κάτω συναρτήσεις:

- (α) $f(x) = -2x^2$, $0 < x < 2$
- (β) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x$, $x \in \mathbb{R}$

Λύση

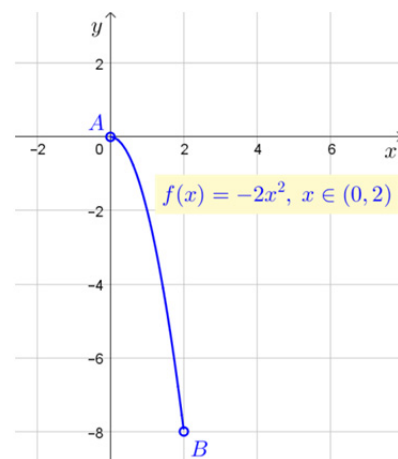
- (α) Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -2x^2$, η πρώτη παράγωγός της f δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = -4x, \quad x \in (0, 2)$$

Για την πρώτη παράγωγο ισχύει ότι:

$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in (0, 2)$$

Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 2)$.



- (β) Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x$, η πρώτη παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3), \quad x \in \mathbb{R},$$

η οποία έχει λύσεις $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$.

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f' αλλάζει μεταξύ των ριζών της. Έτσι, κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας της f σε όλο το πεδίο ορισμού της.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$				

Από τον πίνακα μονοτονίας, παρατηρούμε για την πρώτη παράγωγο ότι:

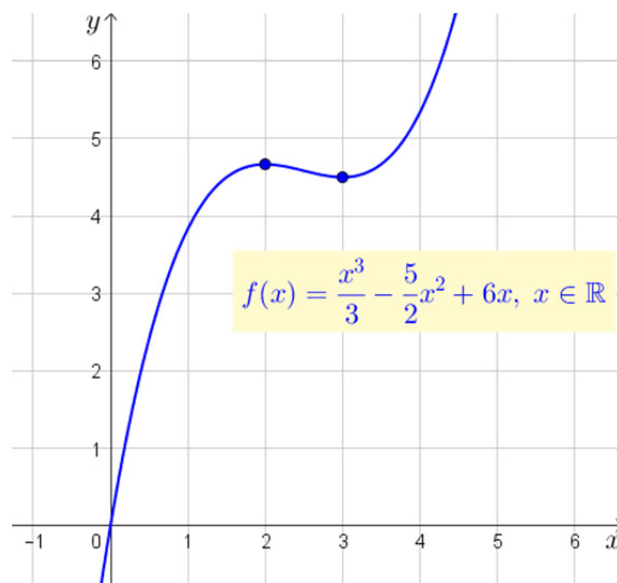
- $f'(x) < 0$, $2 < x < 3$
- $f'(x) > 0$, $x < 2$ και $x > 3$
- $f'(x) = 0$, $x = 2$ και $x = 3$

Ισχύει λοιπόν ότι $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in [2, 3]$. Επειδή όμως η f' δεν μηδενίζεται σε υποδιάστημα του $[2, 3]$, αλλά σε δύο μόνο σημεία του διαστήματος αυτού (για $x = 2$ και $x = 3$), τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 3]$.

Επίσης, ισχύει ότι $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (-\infty, 2], [3, +\infty)$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$, γιατί η f' δεν μηδενίζεται σε υποδιάστημα του $(-\infty, 2]$, αλλά σε ένα μόνο σημείο του διαστήματος αυτού (για $x = 2$). Παρόμοια, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$, γιατί η f' δεν μηδενίζεται σε υποδιάστημα του $[3, +\infty)$, αλλά σε ένα μόνο σημείο του διαστήματος αυτού (για $x = 3$).

Συνοπτικά, η f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 3]$
- γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2]$ και $[3, +\infty)$.



1.2.2 Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

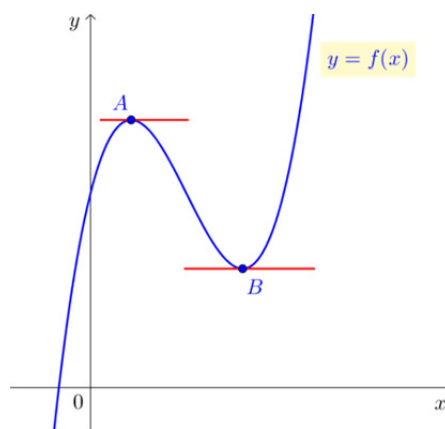
Θεώρημα του Fermat

Έστω ότι η συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της Δ και έστω ότι στο σημείο αυτό η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Τότε, ισχύει:

$$f'(x_0) = 0$$

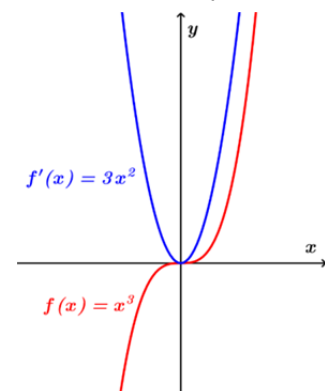
Γεωμετρική Ερμηνεία του Θεωρήματος Fermat

Το Θεώρημα του Fermat δηλώνει ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα x ή συμπίπτει με αυτόν.



Παρατηρήσεις

- Όταν λέμε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, εννοούμε ένα σημείο, το οποίο δεν βρίσκεται στα άκρα του πεδίου ορισμού της. Για παράδειγμα, αν $y = f(x), x \in [1, 5]$, τα μόνα σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης που δεν μπορούν να θεωρηθούν ως εσωτερικά σημεία είναι τα $x_1 = 1$ και $x_2 = 5$, τα οποία είναι τα δύο άκρα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.
- Το Θεώρημα Fermat δεν ισχύει γενικά σε άκρα του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης. Για παράδειγμα, αν $f(x) = x + 2, x \in [1, 5]$, τότε η συνάρτηση f έχει ακρότατες τιμές στο $x = 1$ και $x = 5$, αλλά δεν ισχύει $f'(1) = 0$ ή $f'(5) = 0$, αφού τα $x_1 = 1$ και $x_2 = 5$ δεν είναι εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f .
- Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει, π.χ. η συνάρτηση $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$, έχει $f'(0) = 0$, αλλά το $x_0 = 0$ δεν είναι θέση τοπικού ακρότατου.



- Έστω μία πολυωνυμική συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τα σημεία του διαστήματος, για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$, ονομάζονται **κρίσιμα ή στάσιμα σημεία** της f . Από την προηγούμενη παρατήρηση, είναι προφανές πως κάθε κρίσιμο σημείο δεν είναι απαραίτητα και θέση τοπικού ακρότατου. Το Θεώρημα όμως μας δίνει μια πρώτη πιθανή ένδειξη για την εύρεση τοπικού ακρότατου.
- Το Θεώρημα ύπαρξης Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής για μία πολυωνυμική συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ εξασφαλίζει την ύπαρξη ακροτάτων. Όμως, δεν μας δίνει πληροφορίες σε ποια $x \in [a, \beta]$ λαμβάνεται η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή της f . Όταν όμως πρόκειται για πολυωνυμικές συναρτήσεις, τότε οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων τους πρέπει να αναζητούνται:
 - (α) μεταξύ των κρίσιμων σημείων, δηλαδή μεταξύ των σημείων όπου $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in (a, \beta)$
 - (β) στα άκρα a και β του διαστήματος $[a, \beta]$.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^2 - 6x + 7, x \in \mathbb{R}$

(β) $g(x) = 6x^2 - x^3, x \in \mathbb{R}$

Λύση

(α) Η παράγωγος της συνάρτησης f δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = 2x - 6, x \in \mathbb{R}$$

Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία αναζητούμε εκείνες τις τιμές του x , για τις οποίες $f'(x) = 0$. Ισχύει ότι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

Επομένως, στο $x = 3$ η συνάρτηση έχει κρίσιμο σημείο.

(β) Η παράγωγος της g δίνεται από τον τύπο:

$$g'(x) = 12x - 3x^2, x \in \mathbb{R}$$

Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία, αναζητούμε εκείνες τις τιμές του x , για τις οποίες $g'(x) = 0$. Ισχύει ότι:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(4 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ ή } x_2 = 4$$

Επομένως, στο $x_1 = 0$ και στο $x_2 = 4$ η συνάρτηση έχει κρίσιμα σημεία.

1.2.3 Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης

Θεώρημα (Κριτήριο πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα)

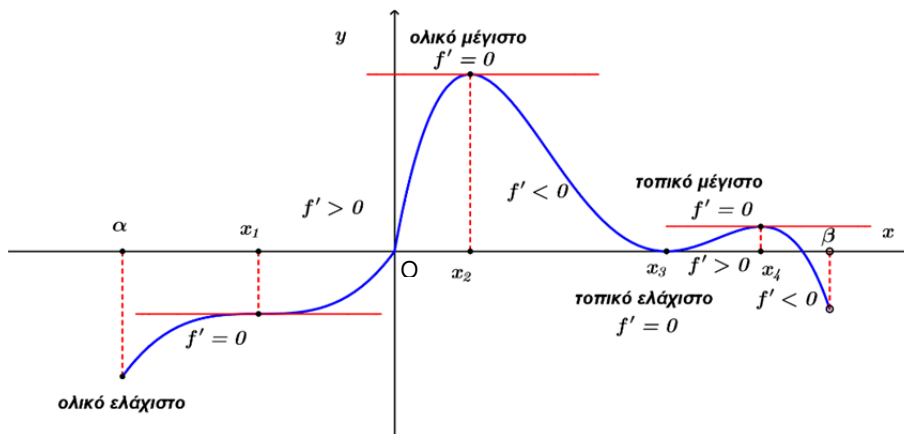
Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ πολυωνυμική συνάρτηση, όπου Δ είναι ένα διάστημα υποσύνολο του \mathbb{R} , και x_0 ένα **κρίσιμο** σημείο του Δ . Τότε, ισχύει ότι:

(α) Αν $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta), \delta > 0$, τότε η f παρουσιάζει στο $x = x_0$ **τοπικό μέγιστο**, το $f(x_0)$.

(β) Αν $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta), \delta > 0$ τότε η f παρουσιάζει στο $x = x_0$ **τοπικό ελάχιστο**, το $f(x_0)$.

Παρατηρήσεις

- Πιο απλά, στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού μιας πολυωνυμικής συνάρτησης παρουσιάζεται τοπικό ακρότατο, όταν ισχύουν συγχρόνως οι εξής δύο συνθήκες:
 - $f'(x_0) = 0$
 - Η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 .
- Αν η f' διατηρεί το πρόσημό της σταθερό στο $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta), \delta > 0$ τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0$ και στο σημείο x_0 , η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.
- Από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορούμε να βρούμε τα διαστήματα μονοτονίας της και τα τοπικά της ακρότατα, κατασκευάζοντας τον αντίστοιχο πίνακα μονοτονίας, όπως φαίνεται και πιο κάτω.



x	a	x_1	x_2	x_3	x_4	β		
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$f(a)$	$f(x_2)$		$f(x_3)$	$f(x_4)$			

Έχουμε ότι:

$f(a)$: ολικό ελάχιστο, $f(x_2)$: ολικό μέγιστο,
 $f(x_3)$: τοπικό ελάχιστο, $f(x_4)$: τοπικό μέγιστο

Παράδειγμα 3

Να μελετήσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα:

(α) $f(x) = 2x^2 - 8x + 9, x \in \mathbb{R}$

(β) $g(x) = x^3 - 3x + 4, x \in \mathbb{R}$

Λύση

(α) Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = 4x - 8, x \in \mathbb{R}$$

Επειδή η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση, αναζητούμε τις θέσεις των ακρότατων της ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία της. Δηλαδή, αναζητούμε εκείνες τις τιμές του x , για τις οποίες $f'(x) = 0$.

Ισχύει ότι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας για την f :

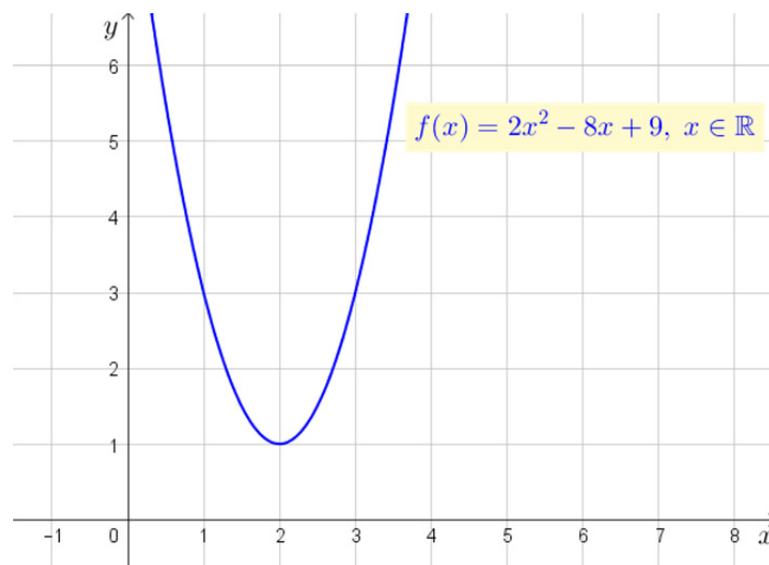
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		$f(2) = 1$	

Από τον πιο πάνω πίνακα, βλέπουμε ότι:

- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$
- η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

Συνεπώς, για $x = 2$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Για $x = 2$ ισχύει:

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 9 = 1$$



(β) Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης g δίνεται από τον τύπο:

$$g'(x) = 3x^2 - 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

Όπως και προηγουμένως, θα αναζητήσουμε τις θέσεις των ακρότατων της ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία της, δηλαδή ανάμεσα σε εκείνες τις τιμές του x , για τις οποίες $g'(x) = 0$.

Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \\ &\Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \\ &\Rightarrow 3(x + 1)(x - 1) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = -1 \text{ ή } x_2 = 1 \end{aligned}$$

Κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας για την g :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$	$\nearrow g(-1) = 6$		$\searrow g(1) = 2 \nearrow$	

Από τον πιο πάνω πίνακα βλέπουμε ότι:

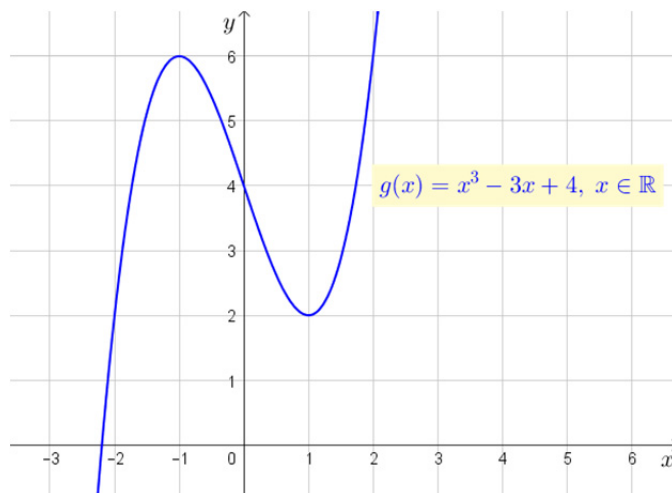
- η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$
- η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$
- η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Συνεπώς, για $x = -1$ η g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και για $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

Για $x = -1$ και $x = 1$ έχουμε αντίστοιχα:

$$g(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 4 = 6 \text{ και } g(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 4 = 2$$

Επομένως, η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, το $g(-1) = 6$ και τοπικό ελάχιστο, το $g(1) = 2$.



Παράδειγμα 4

Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = 1$, την τιμή $f(1) = 2$. Να υπολογίσετε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Λύση

Ισχύει ότι:

$$f(1) = 2 \Rightarrow a + \beta = 2 \quad (1)$$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = 1$.

Επομένως, λόγω του θεωρήματος του Fermat, ισχύει ότι:

$$f'(1) = 0$$

Η πρώτη παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο

$$f'(x) = 2ax + \beta, \quad x \in \mathbb{R}$$

και:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + \beta = 0 \quad (2)$$

Λύνουμε σύστημα με τις σχέσεις (1) και (2), για να βρούμε τα a και β . Έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} a + \beta = 2 \\ 2a + \beta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \beta = 2 - a \\ 2a + \beta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + 2 - a = 0 \Rightarrow a = -2 \text{ και } \beta = 2 - (-2) = 4$$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^2 - 4x, x \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = -3x^2 + 9, x \in \mathbb{R}$

(γ) $f(x) = x^2 - 6x + 9, x \in \mathbb{R}$

(δ) $f(x) = -x^3 + 12x + 1, x \in \mathbb{R}$

2. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν παρουσιάζουν ακρότατα:

(α) $f(x) = 3x^3 + 1, x \in \mathbb{R}$

(β) $g(x) = 2 - x^5, x \in \mathbb{R}$

(γ) $h(x) = x^3 + x^2 + 2x - 3, x \in \mathbb{R}$

3. Να αποδείξετε ότι:

(α) Η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 12x + 11, x \in \mathbb{R}$ έχει ολικό ελάχιστο για $x = 2$.

(β) Η συνάρτηση $g(x) = -x^3 + 3x - 1, x \in \mathbb{R}$ έχει τοπικό ελάχιστο για $x = -1$ και τοπικό μέγιστο για $x = 1$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 3, x \in \mathbb{R}, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

(α) Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό ακρότατο το -2 , τότε να υπολογίσετε τις τιμές των κ, λ .

(β) Τι είδους ακρότατο παρουσιάζει η συνάρτηση f στο $x = 1$;

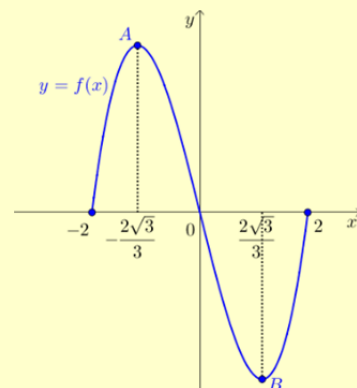
5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία x_A, x_B και για την οποία ισχύει $f(0) = 0$.

Να βρείτε τις τιμές του $x \in [-2, 2]$, για τις οποίες:

(α) $f'(x) = 0$

(β) $f'(x) < 0$

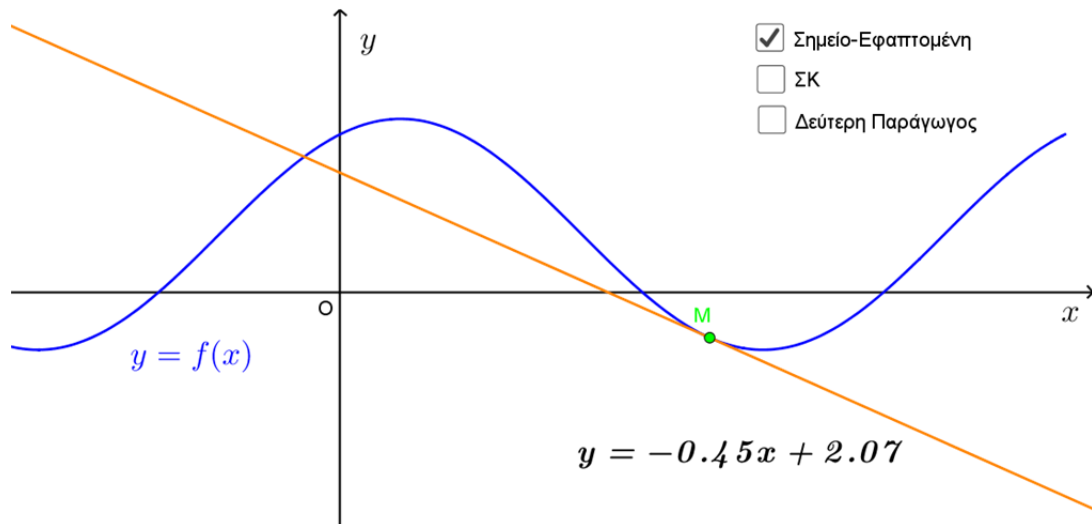
(γ) $f'(x) > 0$



1.3 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «Clyk_En01_Kirti01.ggb».



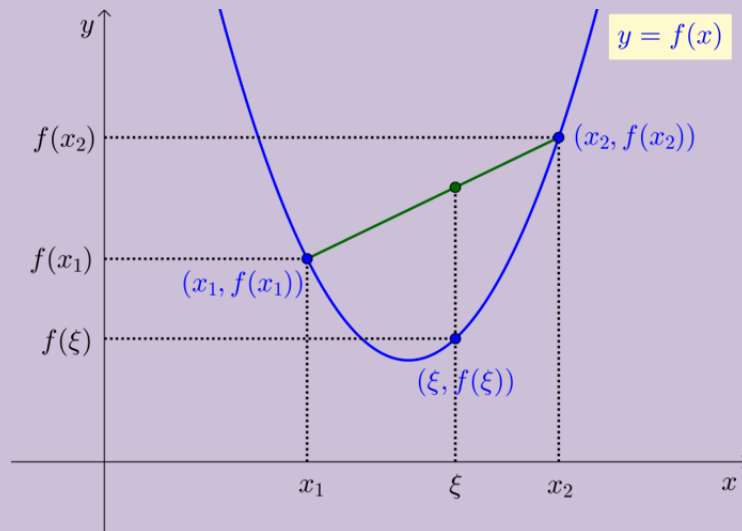
- Να επιλέξετε το **Σημείο-Εφαπτομένη** . Εμφανίζεται η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της σε μεταβλητό σημείο M .
- Στη συνέχεια, να επιλέξετε το **ΣΚ** (σημείο καμπής). Εμφανίζονται τρία σταθερά σημεία A, B και Γ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
 - Ποια είναι η σχέση της εφαπτομένης και της γραφικής παράστασης της f στις περιπτώσεις στις οποίες το M ταυτίζεται με καθένα από τα σταθερά αυτά σημεία;
 - Τι παρατηρείτε για τη σχέση αυτή, όταν το M κινείται μεταξύ των A και B ή μεταξύ των B και Γ ;
- Στη συνέχεια, να επιλέξετε το **Δεύτερη Παράγωγος** . Εμφανίζεται η γραφική παράσταση της f'' .
Ποια είναι η σχέση μεταξύ του προσήμου της f'' και της θέσης της εφαπτομένης ως προς τη γραφική παράσταση της f ;

1.3.1 Κυρτότητα συνάρτησης

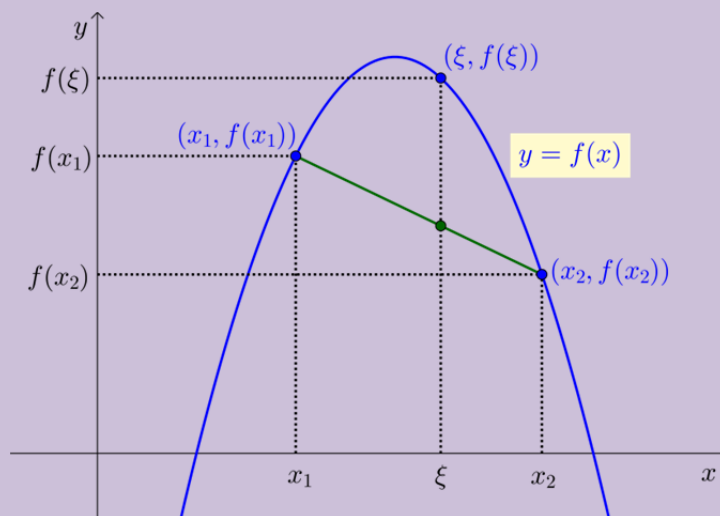
Ορισμός

Έστω μία πολυωνυμική συνάρτηση $f: (a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$.

(α) Η f είναι **κυρτή** ή **στρέφει τα κοίλα άνω στο (a, β)** , αν και μόνον αν για κάθε δύο σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, η γραφική παράσταση της f μεταξύ των σημείων $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ βρίσκεται κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία αυτά.



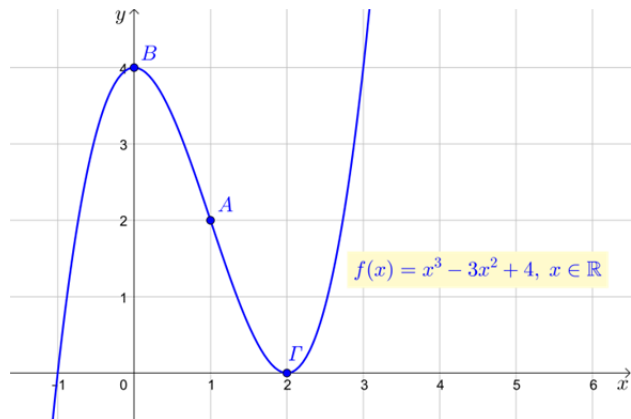
(β) Η f είναι **κοίλη** ή **στρέφει τα κοίλα κάτω στο (a, β)** , αν και μόνον αν για κάθε δύο σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, η γραφική παράσταση της f μεταξύ των σημείων $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ βρίσκεται πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία αυτά.



Παρατήρηση

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x + 4$, $x \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι:

- Η f ορίζεται στο \mathbb{R} .
- Η f είναι κυρτή στο διάστημα $[1, +\infty)$,
- Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 1]$.



Τα επόμενα θεωρήματα αποτελούν κριτήρια για την εύρεση των διαστημάτων, στα οποία μια συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω ή κάτω.

Θεώρημα 1

Έστω μία πολυωνυμική συνάρτηση $f: (a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$.

- (α) Η f είναι **κυρτή** ή **στρέφει τα κοίλα άνω στο** (a, β) , αν και μόνον αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) .
- (β) Η f είναι **κοίλη** ή **στρέφει τα κοίλα κάτω στο** (a, β) , αν και μόνον αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο (a, β) .

Θεώρημα 2

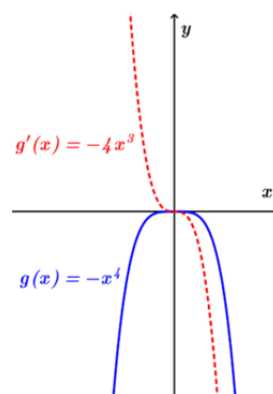
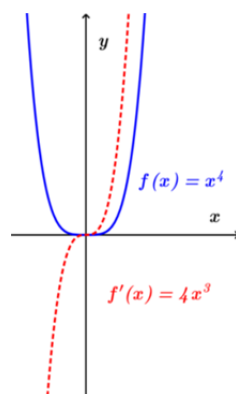
Έστω $f: (a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ πολυωνυμική συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, β) , τότε:

- (α) Αν $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, \beta)$, **η f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω) στο** (a, β) .
- (β) Αν $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in (a, \beta)$, **η f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο** (a, β) .

Για παράδειγμα, για τις συναρτήσεις $f(x) = x^4$ και $g(x) = -x^4$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύουν:

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 \geq 0 \text{ και } g'(x) = -4x^3 \Rightarrow g''(x) = -12x^2 \leq 0$$

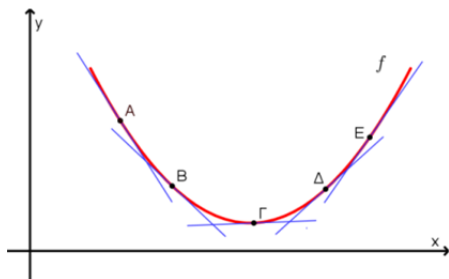
- η f' είναι γνησίως αύξουσα ή $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ η f είναι κυρτή στο \mathbb{R}
- η g' είναι γνησίως φθίνουσα, ή $g''(x) \leq 0 \Leftrightarrow$ η g είναι κοίλη στο \mathbb{R}



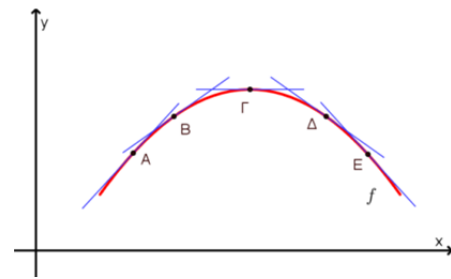
Για να δηλώσουμε στον πίνακα μεταβολών ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ , χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό \smile (αντιστοίχως \frown).

Γεωμετρική Ερμηνεία

- (α) Η f είναι **κυρτή** ή **στρέφει τα κοίλα άνω στο (a, β)** , αν το διάγραμμά της βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο του (a, β) , εκτός από το σημείο επαφής.
- (β) Η f είναι **κοίλη** ή **στρέφει τα κοίλα κάτω στο (a, β)** , αν το διάγραμμά της βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο του (a, β) , εκτός από το σημείο επαφής.



(α) Η f στρέφει τα κοίλα άνω.

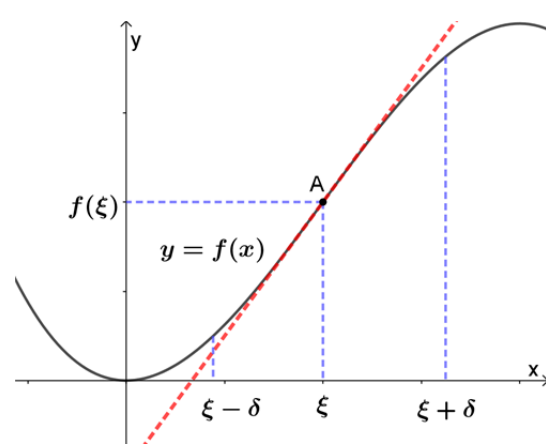
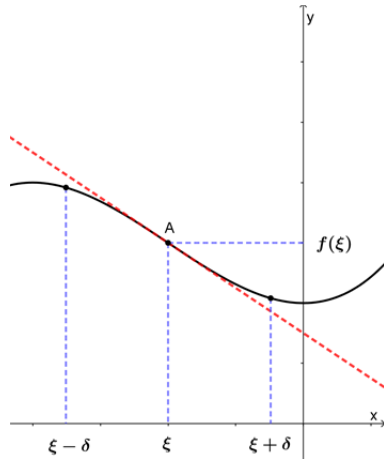


(β) Η f στρέφει τα κοίλα κάτω.

1.3.2 Σημεία καμπής

Διερεύνηση

Στα πιο κάτω σχήματα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων.



- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα σε κάθε περίπτωση.
- Ποια ιδιότητα χαρακτηρίζει το σημείο $(\xi, f(\xi))$ σε κάθε περίπτωση;

Ορισμός

Έστω μια πολυωνυμική συνάρτηση $f: (a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$.

Το σημείο $(\xi, f(\xi))$ ονομάζεται **σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f** , αν αλλάζει το είδος της κυρτότητας της f εκατέρωθεν του $(\xi, f(\xi))$.

Δηλαδή, στρέφει τα κοίλα άνω αριστερά του ξ και κάτω δεξιά του ξ ή αντίστροφα.

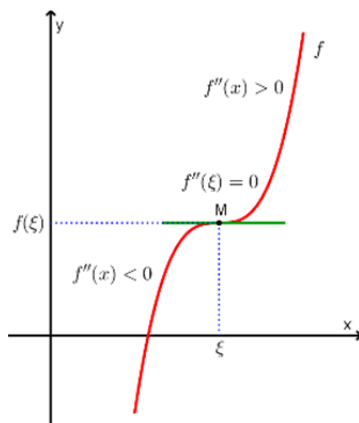
Παρατηρήσεις

- Αν ένα σημείο της γραφικής παράστασης $M(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής, αυτό σημαίνει ότι εκατέρωθεν του ξ η f'' αλλάζει πρόσημο. Για παράδειγμα, από $f''(x) > 0$ γίνεται $f''(x) < 0$ ή αντίστροφα.
- Αν το σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής της πολυωνυμικής συνάρτησης $f: (a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, τότε το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f' .

Θεώρημα (Σημεία καμπής)

Αν η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = \xi$ και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x = \xi$, τότε:

$$f''(\xi) = 0$$



Παρατηρήσεις

- Το θεώρημα αυτό ισχύει μόνο για εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f .
- **Το αντίστροφο του θεωρήματος για σημεία καμπής δεν ισχύει.** Δηλαδή, αν $f''(\xi) = 0$, τότε δεν υπάρχει απαραίτητα σημείο καμπής στο ξ .
Παράδειγμα, η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$.

Συμπέρασμα

Για να εξετάσουμε κατά πόσο η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f: (a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει σημείο καμπής στο $\xi \in (a, \beta)$, πρέπει να ισχύουν συγχρόνως ότι:

- $f''(\xi) = 0$ και
- η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x = \xi$.

Παράδειγμα 1

Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$, $x \in \mathbb{R}$ ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Λύση

Η πρώτη παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η δεύτερη παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Πρέπει να μελετήσουμε το πρόσημο της f'' . Για το λόγο αυτό, πρέπει να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης $f''(x) = 0$ και στη συνέχεια να κατασκευάσουμε πίνακα μεταβολής της f'' . Έχουμε:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow 12x(x - 2) = 0$$

Συνεπώς:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \text{ή} \quad x_2 = 2$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολής για την f'' .

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$				

Από τον πίνακα μεταβολής της f'' , παρατηρούμε ότι:

- $f''(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty, 0)$ και $(2, +\infty)$
- $f''(x) < 0$, $\forall x \in (0, 2)$
- $f''(x) = 0$, για $x = 0$ ή $x = 2$.

Συνεπώς, η γραφική παράσταση της f :

- είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$
- είναι κοίλη στα διαστήματα $[0, 2]$
- παρουσιάζει σημεία καμπής για $x = 0$ και $x = 2$.

Βρίσκουμε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f :

$$f(0) = 10$$

$$f(2) = (2)^4 - 4(2)^3 + 10 = -6$$

Άρα, τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f είναι τα σημεία $A(0, 10)$ και $B(2, -6)$.

Παράδειγμα 2

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = x^3 + ax^2 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$.

Λύση

Βρίσκουμε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της f .

Είναι

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

και:

$$f''(x) = 6x - 2a, \quad x \in \mathbb{R}$$

Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 1$, ισχύει ότι:

$$f''(1) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Δραστηριότητες

1. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τους:

(α) $f(x) = x^3 + 1, x \in \mathbb{R}$

(β) $h(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}$

(γ) $k(x) = -x^3 + 3x^2 - 5, x \in \mathbb{R}$

(δ) $p(x) = x^4 - 24x^2 + 4, x \in \mathbb{R}$

2. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$f''(x) = x(x-1)(x-2)^2(x-3)^3, \forall x \in \mathbb{R}$$

Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει σημεία καμπής.

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις ως Ορθές ή Λανθασμένες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α) Αν η πολυωνυμική συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του διαστήματος Δ , τότε η f λέγεται κυρτή. **ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ**

(β) Αν $f''(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του διαστήματος Δ , τότε η f είναι κυρτή. **ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ**

(γ) Αν η f είναι κοίλη στο Δ , τότε $f''(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . **ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ**

4. Αν το σημείο $A(1,2)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = ax^3 + 6x^2 - \beta x + 5, x \in \mathbb{R},$$

να υπολογίσετε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$.

5. Να εξηγήσετε γιατί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2x - 5, x \in \mathbb{R}$ δεν έχει σημείο καμπής. Στη συνέχεια, να αναφέρετε αν η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη στο \mathbb{R} .

1.4 ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Για τον σκοπό αυτό, θα μας βοηθήσουν τα συμπεράσματα στα οποία έχουμε καταλήξει μέχρι τώρα.

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε ονομάζεται **μελέτη της συνάρτησης** και τα βασικά της βήματα είναι τα παρακάτω:

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες (αν υπάρχουν και είναι εύκολο να υπολογιστούν).
- Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο f' και τις τιμές του x για τις οποίες αυτή μηδενίζεται. Με τη βοήθεια της μεταβολής του προσήμου της f' , βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της και τα τοπικά ακρότατά της (αν υπάρχουν).
- Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο f'' και με τη βοήθεια της μεταβολής του προσήμου της, βρίσκουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη, καθώς και τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης (αν υπάρχουν).
- Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης f στα άκρα του πεδίου ορισμού της και βρίσκουμε τις οριακές τιμές.
- Τέλος, κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f , στον οποίο συγκεντρώνουμε τα συμπεράσματά μας και σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f .

Παράδειγμα 1

Να μελετήσετε και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} ως πολυωνυμική συνάρτηση.

Στη συνέχεια, θα βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων.

$$\text{Αν } x = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Για να βρούμε τα σημεία τομής με τον άξονα των x , λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ ή } x_2 = 3$$

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της f :

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9, \quad x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow 3(x - 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ή } x = 1$$

Κάνουμε πίνακα μονοτονίας της συνάρτησης f .

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗ $f(1) = 4$		↘ $f(3) = 0$		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 1$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 3$ με αντίστοιχες τιμές $f(1) = 4$ και $f(3) = 0$.

Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της f :

$$f''(x) = 6x - 12, \quad x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2.$$

Κάνουμε τον πίνακα μεταβολής για την f'' .

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		Σ.Κ. (2, 2)	↗

Στο διάστημα $(-\infty, 2]$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη) και στο διάστημα $[2, +\infty)$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω (κυρτή). Στο σημείο $(2, 2)$ η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει σημείο καμπής.

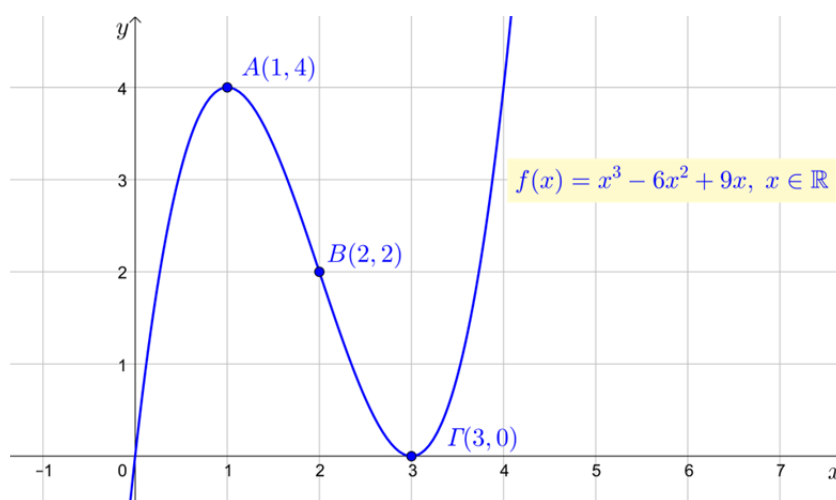
Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού, δηλαδή θα βρούμε τα όρια της συνάρτησης όταν $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Επομένως, το σύνολο τιμών είναι το \mathbb{R} , αφού η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική.



Δραστηριότητες

1. Να μελετήσετε και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

(β) $f(x) = 6 - x - x^2$

(γ) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

(δ) $f(x) = x(6 - 2x)^2$

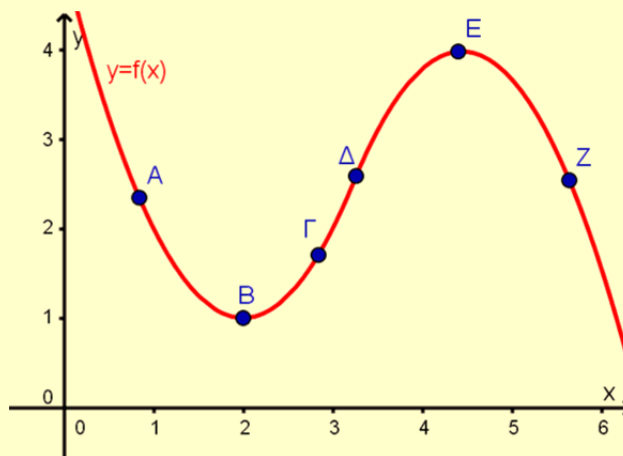
(ε) $f(x) = -9x - 6x^2 - x^3$

(στ) $f(x) = (x - 2)^3 + 1$

(ζ) $f(x) = 1 - (x + 1)^3$

(η) $f(x) = x^4 - 2x^2$

2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $y = f(x)$. Να αναφέρετε το πρόσημο των f' και f'' σε κάθε ένα από τα σημεία A, B, Γ, Δ, E και Z .



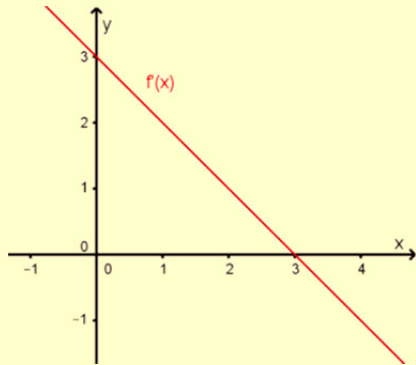
3. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$, η οποία διέρχεται από τα σημεία $(-2, 2)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ και $(2, 2)$ και το πρόσημο των δύο πρώτων παραγώγων της, μεταβάλλεται ως εξής:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-

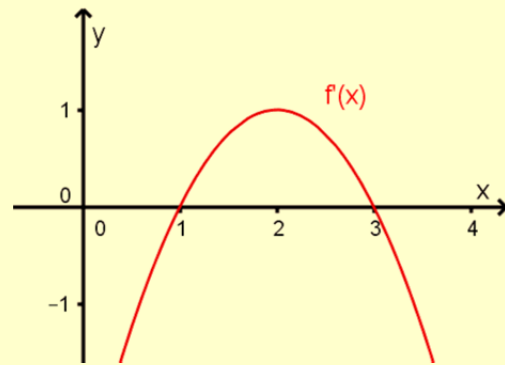
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	-

4. Για κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις, να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση της f' , για να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της $y = f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ή ολικό ελάχιστο, τοπικό ή ολικό μέγιστο και σημείο καμπής. Στη συνέχεια, να κατασκευάσετε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της $y = f(x)$.

(α)



(β)



5. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$, για την οποία δίνονται οι ακόλουθες πληροφορίες:

(α) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο \mathbb{R} .

(γ) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $(-2, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 2)$.

(δ) Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$f(-1) = 4$		$f(1) = 0$		

1.5 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Διερεύνηση

- Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

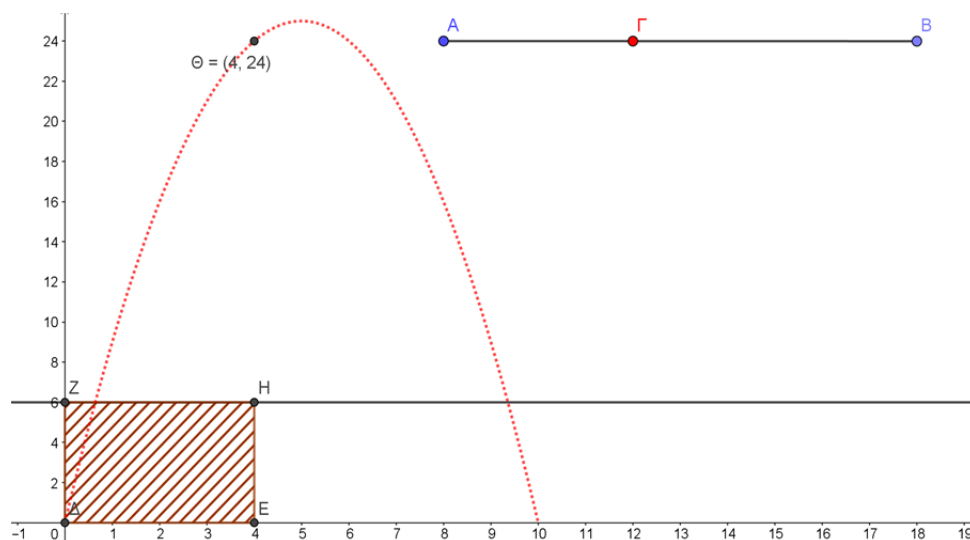
x	2	3	4	4,5	6,2	9	-8	10	13
y	8	7	6	5,5	3,8	1	18	0	-3
$x + y$									
xy									

- Τι παρατηρείτε για το άθροισμα $x + y$;
- Αν $x = a$, ποια είναι η τιμή του y και ποιο το αντίστοιχο γινόμενο;
- Γιατί το γινόμενο $\Gamma(x) = (5 + x)(5 - x)$ είναι μικρότερο ή ίσο από το 25 για κάθε $x \in \mathbb{R}$;
- Ποιο ζεύγος μας δίνει το μεγαλύτερο δυνατό γινόμενο;

Να ανοίξετε το αρχείο «[CLyk_En01_Provlimata_1.ggb](#)».

Μετακινώντας το σημείο Γ στο ευθύγραμμο τμήμα AB , το μήκος $(A\Gamma)$ μας δείχνει τον αριθμό x ως το μήκος (ΔE) του ορθογωνίου ΔEHZ και το y είναι το πλάτος του ορθογωνίου (ΔZ) .

- Να εξηγήσετε τι μας δείχνουν οι συντεταγμένες του σημείου θ και να ερμηνεύσετε τη μεγαλύτερη τιμή του y_θ .



Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε πως μπορούμε να εφαρμόσουμε τις μεθόδους που έχουμε μάθει για εύρεση τοπικών και ολικών ακροτάτων, έτσι ώστε να επιλύσουμε προβλήματα βελτιστοποίησης. Τα προβλήματα αυτά δεν αφορούν μόνο τα Μαθηματικά, αλλά και ένα ευρύτερο φάσμα εφαρμογών των Μαθηματικών, όπως τις Φυσικές Επιστήμες και τα Οικονομικά.

Διαδικασία επίλυσης προβλήματος

Μέσα από τα δεδομένα του προβλήματος εντοπίζουμε τις μεταβλητές και τη σχέση που τις συνδέει. Στη συνέχεια, γράφουμε τον τύπο της συνάρτησης που εκφράζει την ποσότητα που θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε και χρησιμοποιούμε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για την εύρεση ακροτάτων, έτσι ώστε να επιλύσουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Παράδειγμα 1

Το άθροισμα δύο πραγματικών αριθμών είναι σταθερό και ίσο με 20. Να υπολογίσετε το μέγιστο δυνατό γινόμενο των δύο αυτών αριθμών.

Λύση

Έστω x, y οι δύο πραγματικοί αριθμοί με $x + y = 20$.

Το γινόμενο Γ των δύο αριθμών δίνεται από τον τύπο: $\Gamma = xy$.

Όμως $x + y = 20 \Rightarrow x = 20 - y$

Έτσι, καταλήγουμε στη συνάρτηση: $\Gamma = \Gamma(y) = (20 - y)y = 20y - y^2$

Βρίσκουμε πρώτα το διάστημα, στο οποίο ορίζεται η μεταβλητή y . Αφού η μεταβλητή μας αντιπροσωπεύει έναν πραγματικό αριθμό, έχουμε ότι: $y \in \mathbb{R}$

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης Γ και τις τιμές στις οποίες η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται.

Η πρώτη παράγωγος της Γ δίνεται από τον τύπο: $\Gamma'(y) = 20 - 2y$, $y \in \mathbb{R}$

Θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, έχουμε: $\Gamma'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 10$

Κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας για τη συνάρτηση Γ :

y	$-\infty$	10	$+\infty$
$\Gamma'(y)$		+	-
$\Gamma(y)$		$\nearrow \Gamma(10) = 200 \searrow$	

Συνεπώς, το γινόμενο Γ των δύο αριθμών της δραστηριότητας μεγιστοποιείται, όταν ο αριθμός y είναι ο 10. Τελικά, η μέγιστη δυνατή τιμή του γινομένου Γ είναι η:

$$\Gamma_{\text{μέγιστο}} = \Gamma(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 200 - 100 = 100$$

Παράδειγμα 2

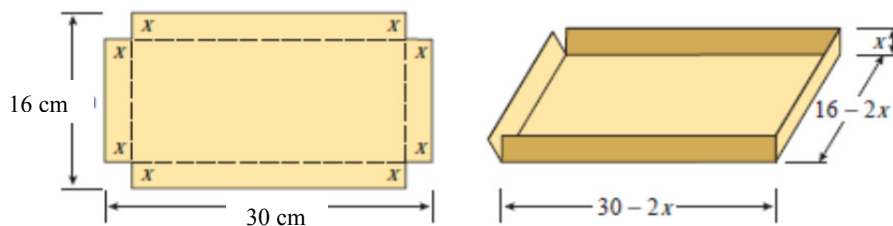
Πρόκειται να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κασόνι σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου από ένα ορθογώνιο χαρτόνι μήκους 30 cm και πλάτους 16 cm. Από κάθε γωνία του ορθογωνίου αποκόπτουμε ίσα τετράγωνα και λυγίζουμε προς τα πάνω τα πλαϊνά κομμάτια. Να βρείτε το μήκος της πλευράς των τετραγώνων που θα αποκοπούν, έτσι ώστε το κασόνι να έχει μέγιστο όγκο.

Λύση

Έχουμε:

- Μήκος χαρτονιού: 30 cm
- Πλάτος χαρτονιού: 16 cm
- Ποσότητα που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε: Όγκος παραλληλεπιπέδου
- Ζητούμενο: Το μήκος της πλευράς των ίσων τετραγώνων που πρέπει να αποκοπούν από τις γωνιές του χαρτονιού.

Φτιάχνουμε σχήμα με τα δεδομένα του προβλήματός μας.



Έστω x η πλευρά των τεσσάρων ίσων τετραγώνων που θα αποκοπούν από κάθε γωνία του χαρτονιού.

Γνωρίζουμε ότι ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου δίνεται από τον τύπο

$$V = a\beta\gamma \quad (1)$$

όπου a, β, γ το μήκος, το πλάτος και το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, αντίστοιχα.

Έχουμε:

$$a = 30 - 2x \quad (2)$$

$$\beta = 16 - 2x \quad (3)$$

$$\gamma = x \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις (2), (3) και (4) στην (1), καταλήγουμε στη συνάρτηση:

$$V(x) = (16 - 2x)(30 - 2x)x \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 92x^2 + 480x$$

Βρίσκουμε πρώτα το διάστημα, στο οποίο ορίζεται η μεταβλητή x . Από τη στιγμή που η μεταβλητή μας αντιπροσωπεύει μήκος, δεν μπορεί ποτέ να είναι αρνητική. Επομένως:

$$x \geq 0 \quad (5)$$

Η μικρότερη διάσταση του χαρτονιού είναι 16 cm και κατ' επέκταση η μικρότερη πλευρά της βάσης του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου θα είναι ίση με $16 - 2x$. Αυτό σημαίνει ότι το μήκος x της πλευράς των τετραγώνων, δεν μπορεί να ξεπεράσει τα 8 cm.

Επομένως:

$$x \leq 8 \quad (6)$$

Από τις (5) και (6), έχουμε ότι:

$$0 \leq x \leq 8$$

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης V δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= 12x^2 - 184x + 480 = 4(3x^2 - 46x + 120) \\ &= 4(x - 12)(3x - 10), \quad x \in (0, 8) \end{aligned}$$

Θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, έχουμε:

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 12 \text{ και } x = \frac{10}{3}$$

Η τιμή $x = 12$ απορρίπτεται. Άρα, ο όγκος του παραλληλεπιπέδου μεγιστοποιείται είτε για $x = \frac{10}{3}$ είτε για μία από τις τιμές των άκρων του διαστήματος $[0, 8]$.

Έχουμε:

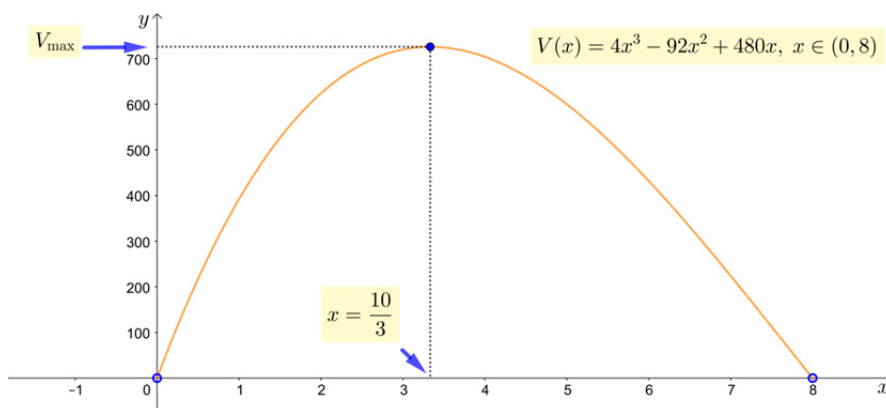
$$V(0) = 0 \text{ cm}^3, \quad V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{19600}{27} \text{ cm}^3 \text{ και } V(8) = 0 \text{ cm}^3$$

Κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας για την V :

x	0	$\frac{10}{3}$	8
$V'(x)$		+	-
$V(x)$		↘	

Συνεπώς, ο όγκος του παραλληλεπιπέδου μεγιστοποιείται, όταν τα τετράγωνα που θα αφαιρέσουμε έχουν πλευρά ίση με $\frac{10}{3}$ cm.

Επομένως, η συνάρτηση V παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = \frac{10}{3}$ cm.



Παράδειγμα 3

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 10 cm και E, Z σημεία των πλευρών $B\Gamma, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $BE = x$ cm και $\Gamma Z = 2x$ cm.

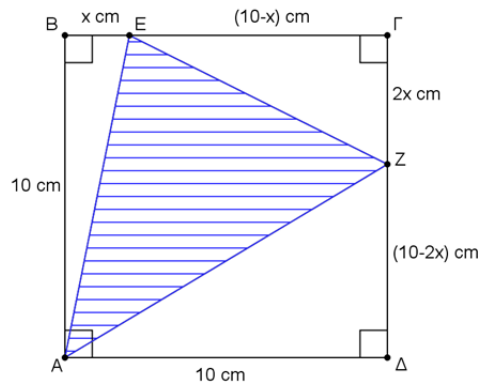
(α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου EAZ δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = x^2 - 5x + 50$$

(β) Να βρείτε την τιμή του x , έτσι ώστε το εμβαδόν E να ελαχιστοποιείται.

Λύση

(α) Φτιάχνουμε σχήμα με τα δεδομένα του προβλήματός μας.



Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν τετραγώνου δίνεται από τον τύπο:

$$E_{\text{τετραγώνου}} = a^2 \Rightarrow E_{AB\Gamma\Delta} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2 \quad (1)$$

Το εμβαδόν τριγώνου δίνεται από τον τύπο:

$$E_{\text{τριγώνου}} = \frac{(\text{βάση})(\text{ύψος})}{2}$$

Έτσι, παίρνουμε:

$$E_{BAE} = \frac{10x}{2} = 5x \text{ cm}^2 \quad (2)$$

$$E_{EZ\Gamma} = \frac{(10-x)2x}{2} = (10x - x^2) \text{ cm}^2 \quad (3)$$

$$E_{A\Delta Z} = \frac{(10-2x)10}{2} = (50 - 10x) \text{ cm}^2 \quad (4)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$E_{EAZ} = E_{AB\Gamma\Delta} - E_{BAE} - E_{EZ\Gamma} - E_{A\Delta Z} \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) στη σχέση (5), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} E_{EAZ} &= 100 - 5x - (10x - x^2) - (50 - 10x) \Rightarrow E_{EAZ} = 100 - 5x - 10x + x^2 - 50 + 10x \\ &\Rightarrow E(x) = x^2 - 5x + 50 \end{aligned}$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει

$$x \geq 0 \quad (6)$$

και

$$2x \leq 10 \Rightarrow x \leq 5 \quad (7)$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$0 \leq x \leq 5$$

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης E και τις τιμές στις οποίες η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται.

Η πρώτη παράγωγος της E δίνεται από τον τύπο:

$$E'(x) = 2x - 5, \quad x \in (0, 5)$$

Θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, έχουμε:

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Αφού $x \in [0, 5]$, το εμβαδόν E του τριγώνου EAZ θα ελαχιστοποιείται είτε για $x = \frac{5}{2}$ είτε για μία από τις τιμές των άκρων του διαστήματος $[0, 5]$. Έχουμε:

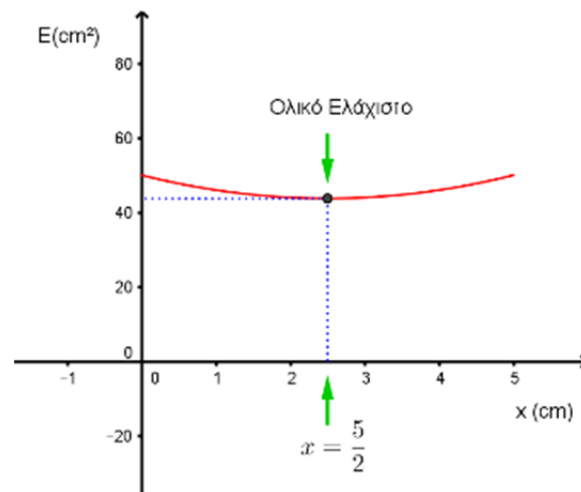
$$E(0) = 50 \text{ cm}^2, E\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{175}{4} \text{ cm}^2 \text{ και } E(5) = 50 \text{ cm}^2$$

Κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας για τη συνάρτηση E :

x	0	$\frac{5}{2}$	5	
$E'(x)$		-	0	+
$E(x)$		↘ ↗		

Συνεπώς, το εμβαδόν E του τριγώνου EAZ ελαχιστοποιείται όταν το μήκος x ισούται με $\frac{5}{2}$ cm. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται τόσο από τη γραφική παράσταση, όσο και από τον πίνακα μονοτονίας της συνάρτησης E .

Και στις δύο περιπτώσεις, η συνάρτηση E παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \frac{5}{2}$ cm.



Παράδειγμα 4

Το κόστος K σε ευρώ της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος δίνεται από τη σχέση:

$$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000, \quad 0 \leq x \leq 105$$

Η είσπραξη E σε ευρώ από την πώληση ενός προϊόντος δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 420 - 2x, \quad 0 \leq x \leq 105$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση του κέρδους $P(x)$ δίνεται από τη σχέση:

$$P(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 18x^2 - 180x - 1000, \quad 0 \leq x \leq 105$$

(β) Να βρείτε την ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου, για την οποία μεγιστοποιείται το κέρδος του.

Λύση

(α) Η είσπραξη σε ευρώ από την πώληση του συγκεκριμένου βιομηχανικού προϊόντος δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 420 - 2x, \quad 0 \leq x \leq 105$$

Επομένως, η είσπραξη σε ευρώ από την πώληση x προϊόντων θα είναι:

$$xE(x)$$

Για να βρούμε το κέρδος για x προϊόντα, αρκεί να αφαιρέσουμε το κόστος των x αυτών προϊόντων από την είσπραξη. Παίρνουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} P(x) &= xE(x) - K(x) \Rightarrow P(x) = x(420 - 2x) - \left(\frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000\right) \\ &\Rightarrow P(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 18x^2 - 180x - 1000, \quad 0 \leq x \leq 105 \end{aligned}$$

(β) Το μέγιστο κέρδος αντιστοιχεί στο μέγιστο της συνάρτησης P . Η πρώτη παράγωγος της P δίνεται από τον τύπο:

$$P'(x) = -x^2 + 36x - 180, \quad 0 < x < 105$$

Είναι:

$$\begin{aligned} P'(x) = 0 &\Leftrightarrow -x^2 + 36x - 180 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = 6 \quad \text{ή} \quad x_2 = 30 \end{aligned}$$

Το κέρδος θα μεγιστοποιείται είτε για $x = 6$ ή $x = 30$ είτε για μία από τις τιμές των άκρων του διαστήματος $[0,105]$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(0) &= -1000, \quad P(6) = -1504, \\ P(30) &= 800, \quad P(105) = -207325 \end{aligned}$$

Κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας για την P :

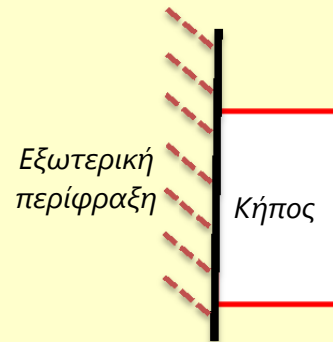
x	0	6	30	105		
$P'(x)$		-	0	+	0	-
$P(x)$		↘ ↗		↘		

Κατά συνέπεια, το κέρδος μεγιστοποιείται όταν παράγονται ημερησίως 30 μονάδες βιομηχανικού προϊόντος.

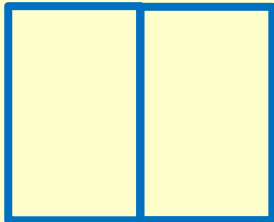
Δραστηριότητες

1. Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο ίση με 100 cm , το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν και να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν του.
2. Το άθροισμα δύο αριθμών είναι ίσο με 30 . Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενό τους.

3. Θέλουμε να περιφράξουμε μια ορθογώνια περιοχή στο οικόπεδό μας έτσι, ώστε η μία πλευρά του ορθογώνιου να βρίσκεται πάνω στην εξωτερική περίφραξη του οικοπέδου. Αν διαθέτουμε 80 m συρματοπλέγματος, ποιο είναι το μέγιστο εμβαδόν που μπορούμε να περιφράξουμε;



4. Έχουμε 200 m συρματοπλέγματος και θέλουμε να περιφράξουμε μια περιοχή με ένα διαχωριστικό στη μέση (Σχήμα 1).
 - (α) Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογώνιου ώστε να περιφράξουμε τη μεγαλύτερη δυνατή περιοχή;
 - (β) Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις αν χωρίσουμε την περιοχή σε 4 ίσα ορθογώνια (Σχήμα 2);
 - (γ) Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις στα προηγούμενα δύο ερωτήματα, αν η μία πλευρά του ορθογώνιου συνορεύει με ποταμό και δεν χρειάζεται περίφραξη;



Σχήμα 1



Σχήμα 2

5. Η χωρητικότητα σε λίτρα των πνευμόνων ενός ανθρώπου ηλικίας x ετών δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{5}x + 4, \quad 10 \leq x \leq 35$$

Σε ποια ηλικία οι πνεύμονες του ανθρώπου έχουν τη μέγιστη χωρητικότητα;

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα πολυωνυμική συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in [0, 6]$.
Να συγκρίνετε τους αριθμούς:
(α) $f(1)$ και $f(5)$
(β) $-f(2)$ και $-f(4)$
(γ) $f(f(0))$ και $f(f(6))$
2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:
(α) $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ (β) $f(x) = -x^2 + 10x$, $x \in [4, 8]$
(γ) $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 3$, $x \in \mathbb{R}$ (δ) $f(x) = x^4 - 2x^2$, $x \in \mathbb{R}$
3. Να βρείτε (αν υπάρχει) την ολικά μέγιστη και ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:
(α) $f(x) = -2x + 4$, $x \in [-2, 4]$ (β) $f(x) = x^3 + 2$, $x \in [-1, 2]$
(γ) $f(x) = -2x^2 + 12x - 1$ (δ) $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [-3, 3]$
4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις παρακάτω συναρτήσεις:
(α) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$
(β) $f(x) = x^4 - 24x^2 + x + 3$, $x \in \mathbb{R}$
(γ) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$, $x \in \mathbb{R}$
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + 4$, $a, \beta \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τις τιμές των a και β , αν γνωρίζουμε ότι για $x = -1$ η συνάρτηση έχει τοπικά μέγιστη τιμή, το 8.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - 12x^2 + \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τις τιμές των a και β , αν γνωρίζουμε ότι το σημείο $A(2, 1)$ είναι σημείο καμπής για την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
7. Να μελετήσετε και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση των παρακάτω συναρτήσεων:
(α) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$, $x \in \mathbb{R}$ (β) $f(x) = x^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$
(γ) $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$ (δ) $f(x) = x(x - 5)^2$
(ε) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

8. Η κατανάλωση σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα ενός κινητήρα, όταν αυτός λειτουργεί με x χιλιάδες στροφές ανά λεπτό, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 10, \quad 1 < x < 5$$

- (α) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία έχουμε τη μικρότερη κατανάλωση.
(β) Να υπολογίσετε την κατανάλωση αυτή.
9. Κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ανοικτό από πάνω, έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας ίσο με 12 dm^2 . Να υπολογίσετε τον μέγιστο δυνατό όγκο του.
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 27 - x^2$

- (α) Να μελετήσετε και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
(β) Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει δύο κορυφές στον άξονα των τετμημένων και δύο κορυφές πάνω στη γραφική παράσταση της f .

11. Το κόστος ημερήσιας παραγωγής x τόνων τσιμέντου σε ευρώ είναι:

$$K(x) = 50 + 70x + \frac{1}{20}x^2, \quad x > 0$$

Μία ημερήσια παραγωγή x τόνων, μπορεί να πουληθεί στην τιμή των $\left(270 - \frac{3x}{20}\right)$ ανά τόνο.

- (α) Να βρείτε τη συνάρτηση του κέρδους P σε ευρώ.
(β) Να υπολογίσετε την ημερήσια παραγωγή, ώστε το κέρδος P να είναι το μέγιστο δυνατό.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να αποδείξετε ότι οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες στα αντίστοιχα διαστήματα του πεδίου ορισμού τους:

$$(\alpha) f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 3 \\ x^2, & x > 3 \end{cases}$$

$$(\beta) g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1 \\ x^2 + 2x + 3, & x > 1 \end{cases}$$

2. Ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα ίση με $\sqrt{3}$ m περιστρέφεται γύρω από μία από τις κάθετες πλευρές του και παράγει κώνο. Να υπολογίσετε την ακτίνα και το ύψος του κώνου που έχει το μέγιστο δυνατό όγκο. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τον μέγιστο δυνατό όγκο.

3. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 3, x \in \mathbb{R}$ και των δύο πρώτων παραγώγων της. Στη συνέχεια, να σχολιάσετε τη συμπεριφορά της f σε σχέση με το πρόσημο των f' και f'' .

4. Να δείξετε ότι:

(α) Το $f(1)$ είναι ολικό ελάχιστο για τη συνάρτηση $f(x) = |x - 1| + 3$.

(β) Το $f(1)$ είναι ολικό μέγιστο και το $f(-1)$ είναι ολικό ελάχιστο για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$.

5. Αν η συνάρτηση $y = f(x), x \in \Delta$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ , να δείξετε ότι η συνάρτηση $y = -f(x), x \in \Delta$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 2.1 Εισαγωγή
- 2.2 Ορισμός Αόριστου Ολοκληρώματος
- 2.3 Κανόνες Ολοκλήρωσης
- 2.4 Εφαρμογές Αόριστων Ολοκληρωμάτων

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

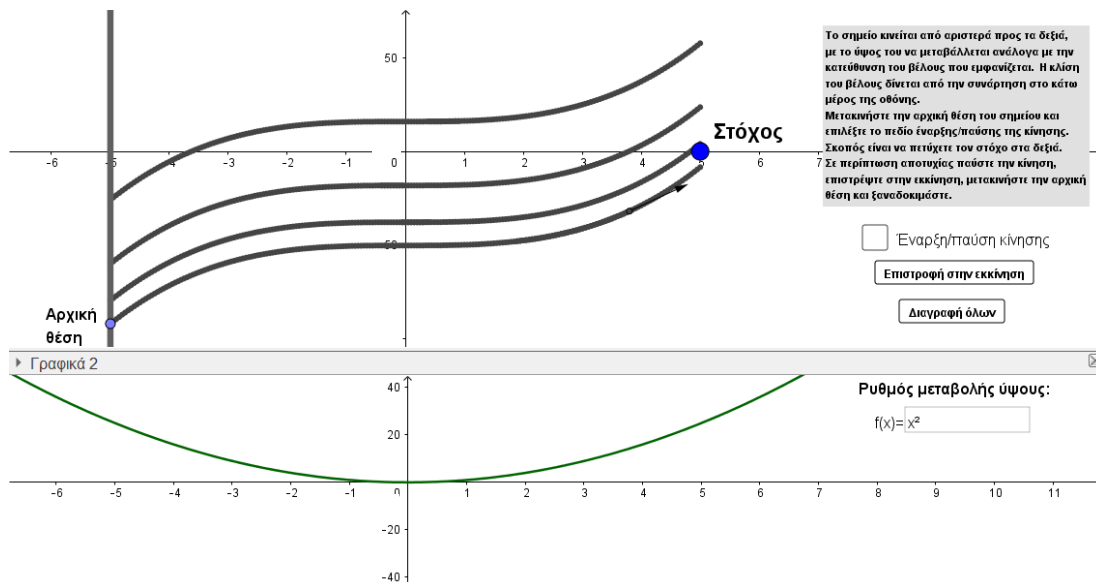
Η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι η συνάρτηση που δίνει τον ρυθμό μεταβολής της αρχικής συνάρτησης. Το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης είναι μια οικογένεια συναρτήσεων που έχουν ως παράγωγο τη δεδομένη συνάρτηση. Οι εφαρμογές των ολοκληρωμάτων βρίσκονται σε όλες τις επιστήμες, από τη φυσική και τη μηχανική μέχρι τα οικονομικά και την ιατρική. Δίνουν τη δυνατότητα, για παράδειγμα:

- ✓ Να προβλέψουμε τη μελλοντική θέση κινούμενων σωμάτων.
- ✓ Να υπολογίσουμε την ένταση ενός ηλεκτρικού πεδίου.
- ✓ Να υπολογίσουμε την ταχύτητα διαφυγής ενός αντικειμένου από το πεδίο βαρύτητας της Γης.
- ✓ Να υπολογίσουμε τα επίπεδα ραδιενέργειας σε μια πυρηνική αντίδραση.
- ✓ Να σχεδιάσουμε πολύπλοκα ιατρικά μηχανήματα για τη ρύθμιση της αρτηριακής πίεσης.

2.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Εξερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «CLyk_En02_Efarmogidio01.ggb».



Ένα σημείο κινείται από αριστερά προς τα δεξιά, με το ύψος του να μεταβάλλεται ανάλογα με την κατεύθυνση του βέλους που εμφανίζεται. Η κλίση της ευθείας στην οποία βρίσκεται το βέλος δίνεται από τη συνάρτηση στο κάτω μέρος της οθόνης.

- Να μετακινήσετε την αρχική θέση του σημείου και να επιλέξετε το πεδίο έναρξης/παύσης της κίνησης. Σκοπός είναι να πετύχετε τον στόχο στα δεξιά. Σε

περίπτωση αποτυχίας, να σταματήσετε την κίνηση, να επιστρέψτε στην εκκίνηση, να μετακινήσετε την αρχική θέση και να ξαναδοκιμάσετε.

- Ποια είναι η σχέση των γραφικών παραστάσεων που σχηματίζονται με τη γραφική παράσταση του ρυθμού μεταβολής στο κάτω μέρος της οθόνης; Μπορείτε να βρείτε τους τύπους αυτών των συναρτήσεων;
- Να αλλάξετε τον τύπο για τον ρυθμό μεταβολής και να επαναλάβετε τα πιο πάνω βήματα.

Διερεύνηση

Για τη συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι γνωστό ότι $f'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να βρείτε μία συνάρτηση f που να επαληθεύει την πιο πάνω σχέση.
- (β) Να εξετάσετε αν είναι η μοναδική συνάρτηση με την πιο πάνω ιδιότητα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- (γ) Να βρείτε μια συνάρτηση f_1 με την πιο πάνω ιδιότητα, αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι $f_1(1) = 5$.

Το πρόβλημα που θέλουμε να επιλύσουμε είναι το εξής:

Έστω πολυωνυμική συνάρτηση f ορισμένη σε ανοικτό διάστημα Δ . Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις F με πεδίο ορισμού το Δ , έτσι ώστε $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \Delta$.

Θεώρημα 1

Έστω πολυωνυμική συνάρτηση F ορισμένη σε διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$.
Αν $F'(x) = 0$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε η συνάρτηση F είναι σταθερή στο $\Delta = [\alpha, \beta]$.

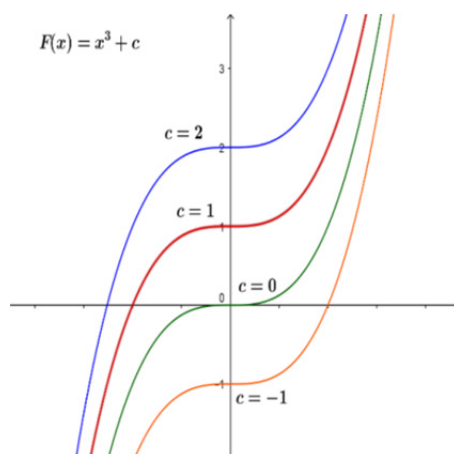
Θεώρημα 2

Έστω F και G δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.
Αν ισχύει $F'(x) = G'(x)$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε:
$$G(x) = F(x) + c, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Παρατηρήσεις

- Το Θεώρημα 1 δηλώνει ότι αν μία πολυωνυμική συνάρτηση έχει παράγωγο ίση με το μηδέν σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε αυτή είναι η σταθερή συνάρτηση.

- Το Θεώρημα 2 δηλώνει ότι αν δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις έχουν ίσες παραγώγους σε κάποιο διάστημα, τότε οι τιμές τους στο διάστημα αυτό έχουν σταθερή διαφορά. Συνεπώς, η γραφική παράσταση της μίας συνάρτησης είναι κατακόρυφη μετατόπιση της άλλης. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης x^3 είναι $3x^2$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2, οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση που έχει παράγωγο τη συνάρτηση $f(x) = 3x^2$ θα είναι της μορφής $F(x) = x^3 + c$, για κάποια σταθερά c .



- Έχουμε, επίσης, ότι αν $F'(x) = f(x)$, τότε για οποιαδήποτε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $G'(x) = (F(x) + c)' = f(x)$.

Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . **Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα** της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \Delta$.

Παρατηρήσεις

- Η συνάρτηση F ονομάζεται και **αντιπαράγωγος**.
- Η παράγουσα συνάρτηση **δεν είναι μοναδική**.

Τα πιο πάνω συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα

Κάθε **πολυωνυμική** συνάρτηση f ορισμένη σε ανοικτό διάστημα Δ έχει αρχική συνάρτηση F στο Δ .

Επίσης, ισχύει:

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι, επίσης, αρχική συνάρτηση της f στο Δ .
- Κάθε αρχική συνάρτηση G της f στο Δ είναι της μορφής $G(x) = F(x) + c$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Ορισμός

Αν η συνάρτηση F είναι μια αρχική συνάρτηση της f σε ένα διάστημα Δ (δηλαδή ισχύει $F'(x) = f(x), \forall x \in \Delta$), τότε το σύνολο **όλων** των αρχικών συναρτήσεων της f στο διάστημα Δ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς x** και γράφεται συμβολικά:

$$\int f(x) dx$$

Η διαδικασία εύρεσης του αόριστου ολοκληρώματος ονομάζεται **ολοκλήρωση**.

Αν F είναι μια αντιπαράγωγος της f , τότε οποιαδήποτε άλλη αντιπαράγωγος της f θα διαφέρει από την F κατά μια σταθερά c . Έτσι, αν η F είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια, ώστε $F'(x) = f(x), \forall x \in \Delta$, τότε:

$$\int f(x) dx = \int F'(x) dx = F(x) + c$$

Αναφερόμαστε στη συνάρτηση $F(x) + c$ ως το αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$, έχοντας όμως υπόψη ότι η σταθερά c μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Η σταθερά c ονομάζεται **σταθερά της ολοκλήρωσης**.

Παρατηρήσεις

- Το σύμβολο \int προέρχεται από το γράμμα S , αρχικό της λέξης *Summa*, που σημαίνει «άθροισμα» στα Λατινικά.
- Σύμφωνα με τον ορισμό το αόριστο ολοκλήρωμα είναι μια «οικογένεια συναρτήσεων» που προκύπτουν με κατακόρυφη μετατόπιση από ένα μέλος της οικογένειας.
- Το « dx » ονομάζεται **διαφορικό της μεταβλητής x** και συμβολίζει την απειροελάχιστη μεταβολή της. Γράφεται δίπλα στη συνάρτηση που πρόκειται να ολοκληρωθεί, για να δείξει την ανεξάρτητη μεταβλητή ως προς την οποία γίνεται η παραγωγή της αρχικής συνάρτησης.
- Αν δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις f και g είναι ίσες, τότε τα αόριστα ολοκληρώματά τους είναι ίσα. Δηλαδή:

$$f = g \Rightarrow \int f(x) dx = \int g(x) dx$$

- Για την πολυωνυμική συνάρτηση f , ισχύει ότι:

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x)$$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int 4x^3 dx$$

Λύση

Έχουμε ότι $4x^3 = (x^4)'$. Άρα, όλες οι αρχικές συναρτήσεις της $4x^3$ είναι της μορφής $x^4 + c$.

Δηλαδή:

$$\int 4x^3 dx = x^4 + c$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int (3t^2 - 2) dt$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\int (3t^2 - 2) dt = t^3 - 2t + c,$$

αφού ισχύει:

$$(t^3 - 2t + c)' = 3t^2 - 2$$

Δραστηριότητες

- (α) Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

(β) Ποιες άλλες ονομασίες χρησιμοποιούμε για την έννοια της αντιπαραγώγου μιας συνάρτησης;

(γ) Τι ονομάζουμε αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f σε ένα ανοικτό διάστημα Δ ;
- Να βρείτε μια αντιπαραγώγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = 0$

(β) $f(x) = 6x^5$

(γ) $f(x) = x^3$

(δ) $f(x) = x^{-3}, x \neq 0$
- Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

i. $\int 2x \, dx$

(α) $2x + c$ (β) 2 (γ) $x^2 + c$

ii. $\int 5x^4 \, dx$

(α) $20x^3 + c$ (β) $x^5 + c$ (γ) $\frac{4x^5}{5} + c$

2.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Διερεύνηση

Να βρείτε αντιπαράγωγους για τις συναρτήσεις στην πρώτη στήλη του ακόλουθου πίνακα:

Συνάρτηση	Αντιπαράγωγος
$f(x) = 1$	
$f(x) = -3$	
$f(x) = x$	
$f(x) = x^5$	
$f(x) = x^{100}$	
$f(x) = x^v, v \in \mathbb{N}$	
$f(x) = 2x^2$	
$f(x) = 5x^3$	
$f(x) = \frac{3}{4}x^5$	
$f(x) = 2x + 4x^3$	
$f(x) = 5x^4 - 9x^8$	
$f(x) = x^9 + 2x^4$	
$f(x) = 5x^2 - 4x^7$	

Γενικά, ισχύει ότι:

Βασικά αόριστα ολοκληρώματα

$$\int a \, dx = ax + c, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad \forall r \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Παρατηρήσεις

- Ο πιο πάνω κανόνας ισχύει για οποιοδήποτε εκθέτη διάφορο του -1 , όπου ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = x^r, x > 0$.

Για παράδειγμα, ισχύει:

$$\int x^{-2} \, dx = -x^{-1} + c, \quad \forall x > 0 \quad \text{και} \quad \int \sqrt[3]{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} + c$$

- Όταν γράφουμε $\int dx$, εννοούμε $\int 1 \, dx = x + c$.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα:

(α) $\int 4 \, dx$

(β) $\int -\pi \, dx$

(γ) $\int x^4 \, dx$

(δ) $\int x^{1000} \, dx$

(ε) $\int x^{-3} \, dx$

(στ) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

Λύση

(α) $\int 4 \, dx = 4x + c$

(β) $\int -\pi \, dx = -\pi x + c$

(γ) $\int x^4 \, dx = \frac{x^5}{5} + c$

(δ) $\int x^{1000} \, dx = \frac{1}{1001} x^{1001} + c$

(ε) $\int x^{-3} \, dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{2} x^{-2} + c$

(στ) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

Ιδιότητες αόριστου ολοκληρώματος

1. $\int af(x) dx = a \int f(x) dx, a \in \mathbb{R}$
2. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
3. $\int [\kappa f(x) \pm \lambda g(x)] dx = \kappa \int f(x) dx \pm \lambda \int g(x) dx, \lambda, \kappa \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

1. Έχουμε:

$$\left(a \int f(x) dx \right)' = a \left(\int f(x) dx \right)' = af(x)$$

2. Έχουμε:

$$\left(\int f(x) dx \pm \int g(x) dx \right)' = \left(\int f(x) dx \right)' \pm \left(\int g(x) dx \right)' = f(x) \pm g(x)$$

3. Έχουμε:

$$\left(\kappa \int f(x) dx \pm \lambda \int g(x) dx \right)' = \left(\kappa \int f(x) dx \right)' \pm \left(\lambda \int g(x) dx \right)' = \kappa f(x) \pm \lambda g(x)$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα:

- (α) $\int 3x^4 dx$
- (β) $\int (x^6 + x^3) dx$
- (γ) $\int (4x^4 - 3x^3 + 2x^2) dx$

Λύση

$$(α) \int 3x^4 dx = 3 \int x^4 dx = 3 \frac{x^5}{5} + c = \frac{3}{5} x^5 + c$$

$$(β) \int (x^6 + x^3) dx = \int x^6 dx + \int x^3 dx = \frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{4} + c.$$

$$(γ) \int (4x^4 - 3x^3 + 2x^2) dx = 4 \int x^4 dx - 3 \int x^3 dx + 2 \int x^2 dx \\ = 4 \cdot \frac{x^5}{5} - 3 \cdot \frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} + c = \frac{4}{5} x^5 - \frac{3}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + c$$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα:

(α) $\int (x - 3)^2 dx$

(β) $\int (x^5 - 3)(x + x^2) dx$

Λύση

(α) $\int (x - 3)^2 dx = \int (x^2 - 6x + 9) dx = \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 9x + c = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + c$

(β) $\int (x^5 - 3)(x + x^2) dx = \int (x^7 + x^6 - 3x^2 - 3x) dx = \frac{x^8}{8} + \frac{x^7}{7} - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + c$

Παράδειγμα 4

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, β και γ , ώστε να ισχύει:

$$\int (ax^2 + \beta x + \gamma) dx = x^3 - 3x + c$$

Λύση

Για το αόριστο ολοκλήρωμα στην ισότητα που δίνεται, έχουμε ότι:

$$\int (ax^2 + \beta x + \gamma) dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{\beta}{2}x^2 + \gamma x + c$$

Έτσι, πρέπει να ισχύει:

$$\frac{a}{3} = 1 \Rightarrow a = 3, \quad \frac{\beta}{2} = 0 \Rightarrow \beta = 0, \quad \gamma = -3$$

Δραστηριότητες

1. Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση $F(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$ είναι μία παράγουσα για τη συνάρτηση $f(x) = 4x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Η F είναι η μοναδική παράγουσα για την f ;
2. Να γράψετε μία σχέση που να συνδέει τις συναρτήσεις $f(x) = 7x^6$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^7$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Να βρείτε τα πιο κάτω αόριστα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int 1 dx$$

$$(\beta) \int \frac{4}{5} dx$$

$$(\gamma) \int \frac{1}{x^5} dx$$

$$(\delta) \int \frac{x}{3} dx$$

$$(\epsilon) \int \pi x dx$$

$$(\sigma\tau) \int 5x^4 dx$$

$$(\zeta) \int (4x + 3) dx$$

$$(\eta) \int (3x^2 + 2x + 1) dx$$

$$(\theta) \int (x^2 - x + 2) dx$$

$$(\iota) \int (u^3 - 3u + 1) du$$

$$(\iota\alpha) \int (3x^4 - 2x^5 - 5) dx$$

$$(\iota\beta) \int (x - 3)(1 - 2x) dx$$

$$(\iota\gamma) \int (u - 5)^2 du$$

$$(\iota\delta) \int 2u(u - 1)^2 du$$

4. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, β, γ και δ , ώστε:

$$\int (ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) dx = 3x^4 - 5x^2 + x + c$$

5. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int \lambda x^{\kappa-2} dx = 3x^5 + c$$

6. Αν $f(x) = u'(x)$ και $g(x) = v'(x)$, να υπολογίσετε συναρτήσεις των $u(x)$ και $v(x)$, τα αόριστα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int f(x) dx$$

$$(\beta) \int -g(x) dx$$

$$(\gamma) \int [2f(x) - 3g(x)] dx$$

$$(\delta) \int [3 - f(x)] dx$$

2.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Διερεύνηση

- Να αντιστοιχίσετε τη λεκτική πληροφορία με την αντίστοιχη συμβολική έκφραση για μια πολυωνυμική συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Λεκτική πληροφορία	Αντίστοιχη συμβολική έκφραση
(α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f περνά από το σημείο $A(1, 6)$.	i. $f'(-2) = -4$, $f(-2) = 9$
(β) Σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης, η κλίση της καμπύλης είναι διπλάσια από την τετμημένη στο συγκεκριμένο σημείο.	ii. $f(0) = 5$, $f'(0) = 0$
(γ) Στο σημείο $B(0, 5)$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.	iii. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x$
(δ) Η κλίση της καμπύλης στο σημείο $B(-2, 9)$ είναι ίση με -4 .	iv. $f(1) = 6$

- Ποια είναι η κλίση της καμπύλης στο σημείο A ;
- Ποια ή ποιες λεκτικές δηλώσεις είναι αναγκαίες για την εύρεση της άγνωστης συνάρτησης f ;

Όπως αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου, μια από τις πιο σημαντικές εφαρμογές των αόριστων ολοκληρωμάτων είναι ο υπολογισμός μιας συνάρτησης, όταν γνωρίζουμε μια σχέση για τις παραγώγους της και κάποιες αρχικές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί. Προβλήματα αυτής της μορφής ονομάζονται **προβλήματα αρχικών τιμών**.

Έστω, για παράδειγμα, ότι για μια συνάρτηση y σε κάποιο ανοικτό διάστημα Δ , είναι γνωστό ότι για $x_0 \in \Delta$ η συνάρτηση παίρνει την τιμή y_0 και ισχύει:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (1)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέρη της πιο πάνω εξίσωσης ως προς x , έχουμε ότι

$$y = \int f(x) dx = F(x) + c,$$

όπου F είναι μια αντιπαράγωγος της f . Η πιο πάνω είναι η **γενική λύση** της εξίσωσης (1). Αποτελείται από μια οικογένεια συναρτήσεων με τη ζητούμενη παράγωγο, που η καθεμιά είναι κάθετη μετατόπιση των άλλων και σαρώνουν το μέρος του επιπέδου με $x \in \Delta$, δηλαδή το αόριστο ολοκλήρωμα της f .

Επιλέγουμε τη σταθερά ώστε η συνάρτηση μας να περνά από το σημείο (x_0, y_0) .

Για $x = x_0$ έχουμε ότι $y = y_0$, άρα:

$$y_0 = F(x_0) + c \Rightarrow c = y_0 - F(x_0)$$

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι η συνάρτηση $y = F(x) + y_0 - F(x_0)$ ικανοποιεί την εξίσωση (1) και την αρχική συνθήκη.

Παράδειγμα 1

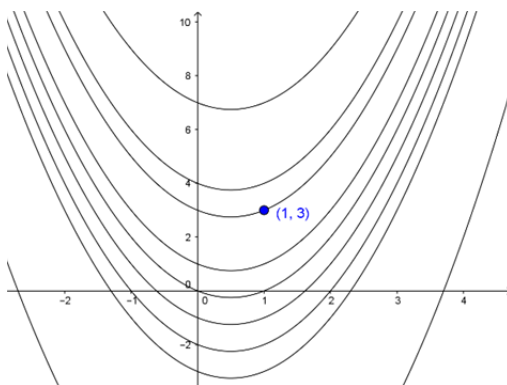
Να βρείτε τη συνάρτηση $g(x)$ αν $g'(x) = 2x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$ και $g(1) = 3$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$g(x) = \int (2x - 1) dx = x^2 - x + c$$

Μερικές γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων αυτής της μορφής παρουσιάζονται στο πιο κάτω σχήμα.



Πρέπει να υπολογίσουμε τη σταθερά c , ώστε να πάρουμε αυτή που περνά από το σημείο $(1, 3)$.

Αντικαθιστώντας την αρχική συνθήκη στην πιο πάνω εξίσωση, έχουμε ότι:

$$g(1) = 3 \Rightarrow 1^2 - 1 + c = 3 \Rightarrow c = 3$$

Άρα, $g(x) = x^2 - x + 3$.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε συνάρτηση f με $f'(x) = -4x^3 - 4x, \forall x \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(0,5)$.

Λύση

Η αρχική συνθήκη είναι $f(0) = 5$. Έχουμε ότι:

$$f(x) = \int (-4x^3 - 4x) dx = -x^4 - 2x^2 + c$$

Από την αρχική συνθήκη:

$$-0^4 - 2 \cdot 0^2 + c = 5 \Rightarrow c = 5$$

Έτσι, $f(x) = -x^4 - 2x^2 + 5$.

Παράδειγμα 3

Για μια επιχείρηση, το συνολικό κόστος παραγωγής $K(x)$ για μια περίοδο είναι συνάρτηση του αριθμού x των προϊόντων που παράγει. Το οριακό κόστος είναι το κόστος παραγωγής ενός επιπλέον προϊόντος, όταν παράγονται x προϊόντα. Δηλαδή, είναι ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού κόστους και είναι ίσο με την παράγωγο $K'(x)$. Μια βιομηχανία επίπλων κατασκευάζει καναπέδες και υπολογίζει ότι το οριακό κόστος για ένα μήνα δίνεται από τον τύπο $K'(x) = (x - 20)^2$, ενώ τα πάγια έξοδα ανά μήνα είναι €3000, (δηλαδή ισχύει ότι για $x = 0$, το κόστος είναι $K(0) = 3000$). Αν σε ένα μήνα κατασκευάσει 30 καναπέδες, να υπολογίσετε πόση πρέπει να είναι η τιμή πώλησής τους ώστε να καλύψει το συνολικό κόστος.

Λύση

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση του συνολικού κόστους. Έχουμε ότι:

$$K(x) = \int (x - 20)^2 dx = \int (x^2 - 40x + 400) dx = \frac{x^3}{3} - 20x^2 + 400x + c$$

Η αρχική συνθήκη είναι $K(0) = 3000$.

Έτσι, $c = 3000$ και έχουμε:

$$K(x) = \frac{x^3}{3} - 20x^2 + 400x + 3000.$$

Άρα, το συνολικό κόστος για την κατασκευή 30 καναπέδων είναι $K(30) = 22\,200$.

Η τιμή πώλησης ενός καναπέ πρέπει να είναι τουλάχιστον $22\,200 \div 30 = 740$ ευρώ.

Παράδειγμα 4

Να βρείτε συνάρτηση f για την οποία $f''(x) = 6x$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες $f'(1) = 0$ και $f(1) = 2$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int 6x dx = 3x^2 + c_1$$

Υπολογίζουμε τη σταθερά με την πρώτη συνθήκη:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -3$$

Άρα, $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ολοκληρώνουμε ξανά για να υπολογίσουμε την $f(x)$:

$$f(x) = \int (3x^2 - 3) dx = x^3 - 3x + c_2$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε την δεύτερη συνθήκη για να υπολογίσουμε την νέα σταθερά:

$$f(1) = 2 \Rightarrow 1^3 - 3 \cdot 1 + c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 4$$

Έτσι, $f(x) = x^3 - 3x + 4$.

Δραστηριότητες

- Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f σε κάθε περίπτωση:
 - $f'(x) = 3x - 2, f(1) = 1$
 - $f'(x) = 2 - 3x^2, f(3) = 2$
 - $f''(x) = 4 - 6x, f'(0) = 4, f(0) = 1$
 - $f''(x) = x, f'(1) = f(1) = 1$
 - $f''(x) = 2, f(1) = f(3) = 0$
 - $f'''(x) = 6, f''(0) = -4, f'(0) = 0, f(0) = 1$
- Να βρείτε τη συνάρτηση f με $f''(x) = 4x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$, αν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $(-1, 1)$.
- Να βρείτε τη συνάρτηση f με $f''(x) = 6 - 12x^2, \forall x \in \mathbb{R}$, ώστε να περνά από τα σημεία $(0, 2)$ και $(2, 0)$.
- Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f''(x) = 4x^3 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$, και $f'(1) = 4$, να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.
- Τα έσοδα $R(x)$ μιας επιχείρησης σε κάποιο χρονικό διάστημα είναι συνάρτηση του αριθμού x των προϊόντων που παράγει. Η συνάρτηση οριακού εσόδου $r(x)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής των εσόδων καθώς μεταβάλλεται η παραγωγή (δηλαδή ισχύει $r(x) = R'(x)$). Αν για μια επιχείρηση η συνάρτηση οριακού εσόδου δίνεται από τη συνάρτηση $r(x) = 40 - 6x$, να βρείτε τα έσοδα R της επιχείρησης όταν παράγει 10 μονάδες του προϊόντος της.
(Εννοείται ότι όταν η παραγωγή είναι μηδενική, η επιχείρηση δεν έχει έσοδα. Δηλαδή, ισχύει ότι $R(0) = 0$.)
- Να βρείτε συνάρτηση $f(x)$ για την οποία $f'''(x) = 2$, έτσι ώστε να περνά από την αρχή των αξόνων και να έχει σημείο καμπής στο σημείο $(1, 2)$.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int (x^5 - x^3 + x) dx$$

$$(\beta) \int (7 - 5x^2 + 3x^4 + x^6) dx$$

$$(\gamma) \int \left(\frac{9}{7}x^8 - \frac{5}{3}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \right) dx$$

$$(\delta) \int 3(x^4 - \pi x) dx$$

$$(\epsilon) \int \frac{x^3 - 4x}{5} dx$$

$$(\sigma\tau) \int 3x(1 - 2x^2) dx$$

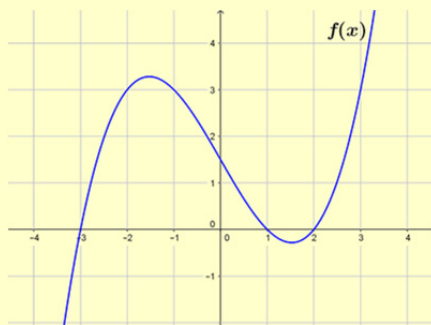
$$(\zeta) \int 2(x + 2)^2 dx$$

$$(\eta) \int -3x^3(1 - x^3)^2 dx$$

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ , ώστε:

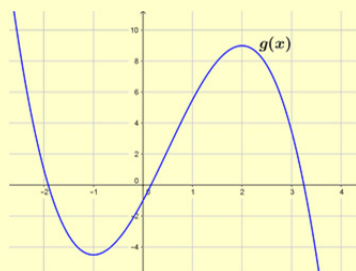
$$\int \kappa x^{\kappa+\lambda} dx = 2x^4 + c$$

3. Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



Αν $\int f(x) dx = F(x) + c$, να βρείτε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση F παρουσιάζει τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα.

4. Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g .



Αν $\int g(x) dx = G(x) + c$, να βρείτε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση G παρουσιάζει σημεία καμπής.

5. Να βρείτε τη συνάρτηση f με $f'(x) = ax + 4, \forall x \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $(2, 5)$.
6. Να βρείτε τη συνάρτηση f με $f'(x) = 2 - x, \forall x \in \mathbb{R}$ και μέγιστη τιμή 8.
7. Για την πολυωνυμική συνάρτηση $y = f(x), x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι η κλίση της καμπύλης σε κάθε σημείο της $P(x, y)$ είναι πάντοτε ίση με $4x + 8$.
 (α) Να βρείτε τη συνάρτηση f , αν αυτή διέρχεται από το σημείο $A(-1, -5)$.
 (β) Να προσδιορίσετε το ακρότατο της συνάρτησης.
8. Να βρείτε τη συνάρτηση f με $f''(x) = 3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$, ώστε να περνά από το σημείο $A(1, 2)$, και η εφαπτομένη ευθεία της στο A να έχει κλίση -1 .
9. Ο ρυθμός απόσβεσης της αξίας ενός μηχανήματος δίνεται από τη συνάρτηση $D(t) = 200(10 - t)$, όπου t είναι η ηλικία του οχήματος σε χρόνια. Αν για την αξία του οχήματος συναρτήσει του χρόνου $V(t)$ ισχύει ότι $V'(t) = -D(t)$, να βρείτε:
 (α) τη συνάρτηση $V(t)$ συναρτήσει της αρχικής αξίας του μηχανήματος V_0
 (β) την αρχική αξία του οχήματος, αν η αξία του εκμηδενίζεται μετά από 10 χρόνια.
10. Για μια επιχείρηση, η συνάρτηση οριακού κόστους $m(x)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού κόστους $K(x)$ συναρτήσει της ποσότητας παραγωγής x . Δηλαδή, $m(x) = K'(x)$. Αν η συνάρτηση οριακού κόστους σε μια βιοτεχνία μεταλλικών κατασκευών είναι $m(x) = 10 + 3x^2$ και το συνολικό κόστος για την παραγωγή 3 μονάδων είναι 56, να βρείτε το συνολικό κόστος για την παραγωγή 10 μονάδων.
11. Ο όγκος νερού σε μια κυλινδρική δεξαμενή με ακτίνα R δίνεται από τον τύπο $V = \pi R^2 v$, όπου v είναι το ύψος της στάθμης του νερού. Όταν υπάρχει ροή νερού στη δεξαμενή, ο όγκος και το ύψος της στάθμης είναι συναρτήσεις του χρόνου t . Η δεξαμενή γεμίζει για 4 ώρες κάθε μέρα, με ροή νερού που δίνεται από τον τύπο $V'(t) = 5t(4 - t) \text{ m}^3/\text{h}$. Αν η ακτίνα της δεξαμενής είναι 5 m και η αρχική στάθμη του νερού είναι 2 m, να βρείτε:
 (α) τον τύπο για τον όγκο νερού στη δεξαμενή συναρτήσει του χρόνου $V(t)$
 (β) το ύψος της στάθμης του νερού μετά από 4 ώρες.

12. Το κέρδος $P(x)$ μιας επιχείρησης σε ένα χρόνο είναι συνάρτηση του αριθμού x των προϊόντων που παράγει. Το περιθώριο κέρδους είναι το κέρδος που θα αποκομίσει από την παραγωγή ενός επιπλέον προϊόντος, όταν παράγει ήδη x προϊόντα και είναι ίσο με τον ρυθμό μεταβολής του κέρδους $P'(x)$. Αν το περιθώριο κέρδους μιας επιχείρησης κατασκευής υπολογιστών δίνεται από τον τύπο $P'(x) = -\frac{3x^2}{100} + 24x - 2000$ και τα λειτουργικά έξοδα της επιχείρησης με μηδενική παραγωγή είναι €10000, να υπολογίσετε το κέρδος (ή ζημιά) της επιχείρησης, όταν κατασκευάζει 500 υπολογιστές.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω αόριστα ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας την την αντικατάσταση που δίνεται:

$$(\alpha) \quad \int x(x+1)^{10} dx, \quad t = x+1$$

$$(\beta) \quad \int x\sqrt{x+2} dx, \quad x+2 = u$$










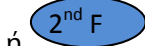












$$(\gamma) \quad \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}} dx, \quad x+1 = u$$

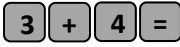


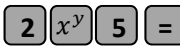


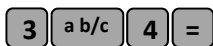



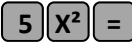

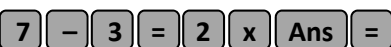






ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

\in	ανήκει
\notin	δεν ανήκει
\forall	για κάθε
\exists	υπάρχει
\cup	ένωση συνόλων
\cap	τομή συνόλων
\subset	γνήσιο υποσύνολο
\subseteq	υποσύνολο
\emptyset ή $\{ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
\neq	άνισο
\equiv	ταυτοτικά ίσο
\cong	κατά προσέγγιση ίσο
\mathbb{N}	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4, \dots\}$
\mathbb{N}_0	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4, \dots\}$
\mathbb{Z}	ακέραιοι αριθμοί $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
\mathbb{Z}^+	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4, \dots\}$
\mathbb{Z}^-	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$
\mathbb{Q}	ρητοί αριθμοί $\{\alpha/\beta: \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \text{ και } \beta \neq 0\}$
\mathbb{Q}^+	θετικοί ρητοί αριθμοί
\mathbb{Q}_0^+	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
\mathbb{Q}^-	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
\mathbb{R}	πραγματικοί αριθμοί
\Rightarrow	απλή συνεπαγωγή
\Leftrightarrow	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
\perp	κάθετες
\parallel	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή



		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
		Υποδιαστολή
		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
	ή  ή 	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
	ή 	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
		Εισαγωγή Προσήμου –
	ή 	Κλάσμα
	ή 	Μετατροπή Κλάσματος ⇔ Δεκαδικό
		Σβήσιμο μνήμης
		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3 + 4$		3+4 7
$2,34 - 1,1$		2.34 - 1.1 1.24
$3 \cdot 2$		3X2 6
2^5		2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$		5E3 ή 5X103 5000
$\frac{3}{4}$	 ή 	$\frac{3}{4}$ 3∟4
$2\frac{3}{4}$	 ή 	$2\frac{3}{4}$ 2 ∟ 3 ∟ 4
$\sqrt{4}$		$\sqrt{4}$ 2
5^2		5^2 25
$2 \cdot (7 - 3)$		2X(7 - 3) 8
$2 \cdot (7 - 3)$		2XAns 8
$2 - (-3)$		$2 - (-3)$ 5
$ -3 $		$ -3 $ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	 ή 	$\frac{1}{4}$
$9 - 6 : 2$	Υπολογισμός και αποθήκευση 	$9 - 6 : 2 M +$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9 - 6 : 2) - 6 : (9 - 6 : 2)$		$3 X M - 6 : M$ 17

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ 1°- 89°

Γωνία	ημω	συνω	εφω
1°	0,017	0,999	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,995	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,384
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
28°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
38°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Γωνία	ημω	συνω	εφω
46°	0,720	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,470	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,748
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,333
78°	0,978	0,203	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	0,999	0,018	57,290