ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Λυκείου
Κοινού Κορμού

Β΄ τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Γ΄ Λυκείου Κοινού Κορμού, Β΄ Τεύχος

Το παρόν τεύχος αφιερώνεται στην μνήμη της Επιθεωρήτριας Μαθηματικών Μέσης Εκπαίδευσης Ευτυχίας Καλλεπίτη.

Συγγραφή: Βολακάκη Μαρία, Κοντοβούρκης Μιχάλης, Κυριακού Κυριάκος, Λοϊζιάς Σωτήρης, Ματθαίου Κυριάκος, Παπαγιάννης Κωνσταντίνος, Σαλονικίδης Ιωάννης, Σεργίδης Μάριος, Τιμοθέου Σάββας

Συντονιστές: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*
Βίδρας Αλέκος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*

Εποπτεία: Φιλίππου Ανδρέας, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Γιασουμής Νικόλας, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*
Χατζηχρίστου Χρυσούλα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*

Γλωσσική επιμέλεια: Παλάτου – Χριστόφια Μαριάννα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ έκδοση 2017
Β΄ έκδοση 2019

Εκτύπωση:

ISBN:

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε δύο τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Κοινού Κορμού», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Το βιβλίο έχει έναν διττό ρόλο να εκπληρώσει, να μυηθεί ο μαθητής στη συλλογιστική την οποία εκφράζει το αξεπέραστο λογικό-επαγωγικό σύστημα των Μαθηματικών και παράλληλα να ανταποκριθεί στις σύγχρονες εκπαιδευτικές επιταγές.

Όλο το υλικό που περιλαμβάνεται στο παρόν βιβλίο, σύμφωνο με τα Νέα Αναλυτικά Προγράμματα και τους Δείκτες Επιτυχίας και Επάρκειας που τίθενται από την εκπαιδευτική μεταρρύθμιση, αποσκοπεί αφενός στη βοήθεια των μαθητών/τριών να κατανοήσουν τη μαθηματική λογική και σκέψη και αφετέρου στη συνεισφορά της μαθηματικής παιδείας του τόπου.

Το βιβλίο «Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Κοινού Κορμού» περιλαμβάνει την ύλη των Μαθηματικών που προβλέπεται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Γ΄ τάξης Λυκείου, το οποίο τίθεται σε εφαρμογή το σχολικό έτος 2017 – 2018 και είναι εμπλουτισμένο με αυστηρούς ορισμούς και αποδείξεις όπως επίσης με πολλές εφαρμογές και παραδείγματα, που ανταποκρίνονται στις δυνατότητες και στα ενδιαφέροντα των μαθητών/τριών. Επιπρόσθετα, καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια, ώστε να είναι δυνατή η ολοκλήρωση της διδασκαλίας του στον διδακτικό χρόνο, ο οποίος προβλέπεται από το εγκεκριμένο ωρολόγιο πρόγραμμα.

Το κλειδί της επιτυχίας στο μάθημα των Μαθηματικών είναι η ουσιαστική κατανόηση των εννοιών, η ανάπτυξη αναλυτικής και συνθετικής σκέψης, η μεθοδολογική αντιμετώπιση ομαδοποιημένων προβλημάτων και η αποφυγή της αποστήθισης. Η ορθή χρήση του βιβλίου δημιουργεί στον μαθητή, εκτός από το φιλικό περιβάλλον, όλες εκείνες τις προϋποθέσεις, κυριότερες των οποίων είναι ο προβληματισμός και η αυτενέργεια, για ανάπτυξη μιας κριτικής, διερευνητικής και ορθολογιστικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τους Καθηγητές του Πανεπιστημίου Κύπρου Κωνσταντίνο Χρίστου και Αλέκο Βίδρα.

Δρ Κυπριανός Δ. Λούης

Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΣΥΝΟΛΑ – ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

3.1 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

Έχουμε μάθει…

- **Σύνολο** είναι μια **καλώς ορισμένη συλλογή διαφορετικών μεταξύ τους αντικειμένων**.

Τα αντικείμενα που αποτελούν ένα σύνολο λέγονται **στοιχεία** του συνόλου.
Όταν ένα στοιχείο a **ανήκει σε ένα σύνολο** A, γράφουμε $a \in A$, ενώ αν το στοιχείο a **δεν ανήκει σε ένα σύνολο** A, γράφουμε $a \notin A$.

Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου A λέγεται **πληθικός αριθμός** του συνόλου A και συμβολίζεται ως $\nu(A)$ ή $|A|$.

Ένα σύνολο με πληθικό αριθμό 0 λέγεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με $\{\quad\}$ ή $\emptyset$.

Για παράδειγμα, το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 = 0\}$ είναι κενό σύνολο, γιατί δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός που να επαληθεύει την εξίσωση $x^2 + 4 = 0$.

Ένα σύνολο με πληθικό αριθμό 1 λέγεται **μονομελές σύνολο**.

Για παράδειγμα, τα σύνολα $A = \{6\}$ και $B = \{x \in \mathbb{R}: 3x + 5 = 0\}$ είναι μονομελή σύνολα.

Τα στοιχεία ενός συνόλου δεν είναι αναγκαστικά ομοειδή. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να έχουμε ως σύνολο το {Βασίλης, 1, $\{1\}$, 2, $\emptyset$, a}.

Ένα στοιχείο είτε ανήκει είτε δεν ανήκει σε ένα σύνολο.

- Ένα σύνολο μπορούμε να το ορίσουμε:
  - με **απαρίθμηση των στοιχείων** του. Για παράδειγμα, $\{a, \beta, \gamma\}$.
  - με **περιγραφή της χαρακτηριστικής ιδιότητας** των στοιχείων του. Για παράδειγμα, $A = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ άρτιος}\}$.
  - ως **αποτέλεσμα πράξεων με σύνολα**. Για παράδειγμα, αν $A = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ άρτιος}\}$ και $B = \{y \in \mathbb{R}: 1 < y < 8\}$, το σύνολο που προκύπτει από τα κοινά στοιχεία των A, B είναι ένα άλλο σύνολο, το $\Gamma = \{2, 4, 6\}$, το οποίο είναι η γνωστή μας τομή των δύο συνόλων.

Ο πληθικός αριθμός του κενού συνόλου είναι $\nu(\emptyset) = 0$. Αν $\nu(A) = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{N}$, τότε το σύνολο A χαρακτηρίζεται ως **πεπερασμένο**, ενώ, αντίθετα, αν $\nu(A) = \infty$, τότε το σύνολο A χαρακτηρίζεται ως **άπειρο σύνολο**.

- Ένα σύνολο A είναι **υποσύνολο** του B, τότε και μόνο τότε, αν ισχύει $x \in A$ συνεπάγεται $x \in B$ και συμβολίζουμε $\boldsymbol{A \subseteq B}$.

  Συμβολικά, γράφουμε
  $$\boldsymbol{A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B}$$
  και διαβάζουμε ότι το σύνολο A **περιέχεται (ή εγκλείεται)** στο σύνολο $\boldsymbol{B}$.

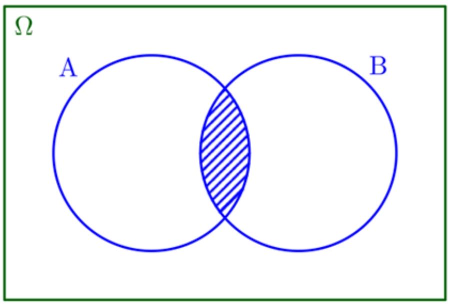
- Δύο σύνολα A και B λέγονται **ίσα** ($A = B$), όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

  Γενικά, ισχύει:
  $$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A$$

Πράξεις με σύνολα

- Ένα σύνολο που περιέχει όλα τα σύνολα που μελετάμε λέγεται **σύνολο αναφοράς** και συμβολίζεται με Ω.

- Αν Ω είναι ένα σύνολο αναφοράς και A, B δύο υποσύνολα του Ω, τότε ορίζεται **τομή** δύο συνόλων A και B ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα **κοινά** στοιχεία των A και B.

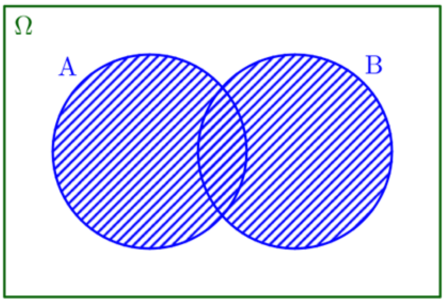


 Συμβολίζεται με $A \cap B$ και έχουμε ότι:

$$A \cap B = \{x \in \Omega |\, x \in A \text{ και } x \in B\}$$

 Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε τα σύνολα A και B λέγονται **ξένα μεταξύ τους ή διαζευκτά**.

- Αν Ω ένα σύνολο αναφοράς και A, B δύο υποσύνολα του Ω, τότε ορίζεται **ένωση** δύο συνόλων A και B ένα νέο σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία, τα οποία ανήκουν **σε ένα τουλάχιστον** από τα A και B.

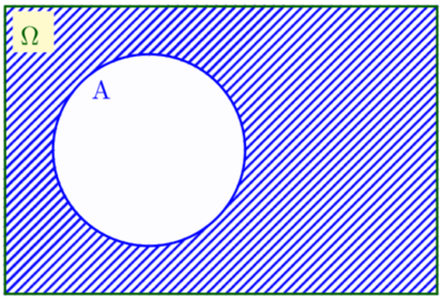


 Συμβολίζεται με $A \cup B$ και έχουμε ότι:

$$A \cup B = \{x \in \Omega |\, x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

 Είναι προφανές ότι $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$. Επίσης, ισχύει $A \cup A = A$ και $A \cup \emptyset = A$.

- Αν Ω ένα σύνολο αναφοράς και A ένα υποσύνολο του Ω, τότε ορίζεται **συμπλήρωμα** του A ως προς Ω ένα νέο σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία, τα οποία ανήκουν στο Ω και δεν ανήκουν στο A.



 Συμβολίζεται με A' ή A^c και έχουμε ότι:

$$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

- Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$x \in A' \Leftrightarrow x \notin \mathrm{A} \text{ και } x \in A \Leftrightarrow x \notin A'$$

- Ένα στοιχείο του συνόλου αναφοράς Ω είτε θα ανήκει στο A είτε δεν θα ανήκει στο A. Επομένως, ισχύει ότι $A \cup A' = \Omega$.
- Δεν υπάρχει στοιχείο του συνόλου αναφοράς Ω, τέτοιο ώστε να ανήκει στο A και συγχρόνως να μην ανήκει στο A. Επομένως, ισχύει ότι $A \cap A' = \emptyset$.
- Αν ένα στοιχείο του συνόλου αναφοράς Ω δεν ανήκει στο συμπλήρωμα του συνόλου A, τότε ανήκει στο A και αντίστροφα. Επομένως, ισχύει ότι $(A')' = A$.

3.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ιδιότητες της σχέσης εγκλεισμού $(\subseteq)$

(α) $A \subseteq A$ για κάθε σύνολο A **(Ανακλαστική)**

(β) $A \subseteq B$ και $B \subseteq A \Longrightarrow A = B$ **(Αντισυμμετρική)**

(γ) $(A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma) \Longrightarrow A \subseteq \Gamma$ **(Μεταβατική)**

Παρατηρήσεις

- Η σχέση $\subset$ του **γνήσιου εγκλεισμού** ικανοποιεί μόνο τη μεταβατική ιδιότητα. Ισχύει δηλαδή ότι $(A \subset B$ και $B \subset \Gamma) \Longrightarrow A \subset \Gamma$.
- Για τα βασικά αριθμοσύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ ισχύει $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Για ένα σύνολο A, το σύνολο **που περιέχει όλα τα υποσύνολα του A** λέγεται **δυναμοσύνολο** και συμβολίζεται με $P(A)$. Ισχύει ότι $P(A) = \{X: X \subseteq A\}$, δηλαδή το δυναμοσύνολο ενός συνόλου A είναι ένα σύνολο, το οποίο **έχει ως στοιχεία σύνολα** που είναι υποσύνολα του A.
- Αν το σύνολο A έχει ν στοιχεία, τότε το δυναμοσύνολο του A έχει 2^{ν} στοιχεία.
  Για παράδειγμα, αν $A = \{2, 5\}$, τότε το δυναμοσύνολο του A είναι το σύνολο $P(A) = \{\emptyset,\ \{2\},\ \{5\},\ A\}$ και ισχύει $\nu(A) = 2,\ \nu\big(P(A)\big) = 2^2 = 4$.

Ιδιότητες ισότητας συνόλων

(α) $A = A$ για κάθε σύνολο A **(Ανακλαστική)**

(β) $A = B \Longrightarrow B = A$ **(Συμμετρική)**

(γ) $(A = B$ και $B = \Gamma) \Longrightarrow A = \Gamma$ **(Μεταβατική)**

Ιδιότητες της πράξης της τομής συνόλων

(α) $A \cap B = B \cap A$ **(Αντιμεταθετική)**

(β) $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$ **(Προσεταιριστική)**

(γ) $A \cap \Omega = A$

(δ) $A \cap \emptyset = \emptyset$

(ε) $A \cap A = A$

(στ) $(A \cap B) \subseteq A$ και $(A \cap B) \subseteq B$

(ζ) $A \subseteq B \Longrightarrow (A \cap \Gamma) \subseteq (B \cap \Gamma)$

(η) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$

Ιδιότητες της πράξης της ένωσης συνόλων

(α) $A \cup B = B \cup A$ **(Αντιμεταθετική)**

(β) $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$ **(Προσεταιριστική)**

(γ) $A \cup \Omega = \Omega$

(δ) $A \cup \emptyset = A$

(ε) $A \cup A = A$

(στ) $A \subseteq (A \cup B)$ και $B \subseteq (A \cup B)$

(ζ) $A \subseteq B \Longrightarrow (A \cup \Gamma) \subseteq (B \cup \Gamma)$

(η) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$

Ιδιότητες που συνδέουν τις πράξεις της ένωσης και της τομής συνόλων

(α) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
Η πράξη της ένωσης είναι επιμεριστική ως προς την πράξη της τομής.

(β) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$
Η πράξη της τομής είναι επιμεριστική ως προς την πράξη της ένωσης.

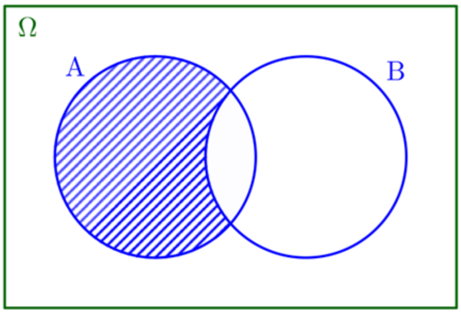
Βασικές σχέσεις σε δύο σύνολα που συνδέουν τις πράξεις της ένωσης, της τομής και του συμπληρώματος είναι γνωστές ως τύποι του De Morgan.

Πρόταση (Τύποι De Morgan)

(α) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

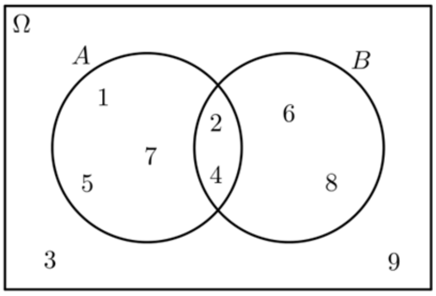
(β) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

- Αν Ω ένα σύνολο αναφοράς και A, B δύο υποσύνολα του Ω, τότε ορίζουμε **διαφορά του B από το A** ένα νέο σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του A, τα οποία δεν ανήκουν στο B.
  Συμβολίζουμε με $A - B$ και έχουμε ότι:
  $A - B = A \cap B' = \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ και } x \notin B\}$



Παράδειγμα 1

Τα σύνολα A και B δύο πεπερασμένα σύνολα στο σύνολο αναφοράς Ω, όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα.
Να ορίσετε τα σύνολα $A \cap B, B - A$ και $(A \cup B)'$.



Λύση

Το σύνολο $A \cap B$ περιέχει όλους τους αριθμούς που ανήκουν ταυτόχρονα και στα δύο αυτά σύνολα. Συνεπώς, $A \cap B = \{2, 4\}$.

Το σύνολο $B - A$ περιέχει όλους τους αριθμούς που ανήκουν στο σύνολο B, αλλά όχι στο σύνολο A. Συνεπώς, $B - A = \{6, 8\}$.

Το σύνολο $(A \cup B)'$ περιέχει όλους τους αριθμούς που δεν ανήκουν ούτε στο σύνολο A, ούτε στο σύνολο B. Συνεπώς, $(A \cup B)' = \{3, 9\}$.

3.3 ΑΡΧΗ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ – ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ

Διερεύνηση 1

(α) Αν A, B είναι δύο πεπερασμένα σύνολα, να εξηγήσετε πότε ισχύει η ισότητα:

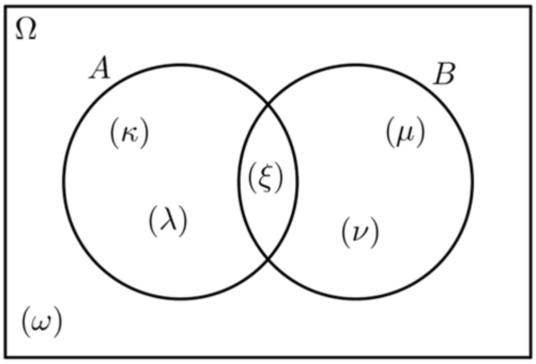
$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$$

(β) Γιατί δεν ισχύει πάντοτε αυτή η ισότητα;

(γ) Ποιος πληθικός αριθμός βελτιώνει την ισότητα για όλα τα πεπερασμένα σύνολα A, B;

Διερεύνηση 2

Τα σύνολα A και B είναι δύο πεπερασμένα σύνολα στο σύνολο αναφοράς Ω με $\nu(\Omega) = N, N \in \mathbb{N}$, όπως φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα. Οι περιοχές $(\kappa), (\lambda), (\mu), (\nu), (\xi)$ και (ω) δείχνουν το πλήθος των στοιχείων στη συγκεκριμένη περιοχή.



(α) Να αναφέρετε πόσες φορές μετριέται η κάθε περιοχή στο άθροισμα $\nu(A) + \nu(B)$.

(β) Να αναφέρετε πόσες φορές μετριέται η κάθε περιοχή στο άθροισμα $\nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B)$.

(γ) Πόσες φορές πρέπει να μετρηθεί η κάθε μία περιοχή εντός των κύκλων, ώστε να υπολογίσουμε τον πληθικό αριθμό της ένωσης των δύο συνόλων A, B;

(δ) Να χρησιμοποιήσετε το ερώτημα (β), για να βρείτε έναν τύπο για τον πληθικό αριθμό $\nu(A \cup B)$.

(ε) Να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο θα υπολογίσετε τον αριθμό $\nu(A' \cap B')$.

Η αρχή του εγκλεισμού – αποκλεισμού αναφέρεται στο πλήθος των στοιχείων δύο πεπερασμένων συνόλων A και B σε σχέση με το πλήθος των στοιχείων της ένωσης και της τομής των δύο συνόλων.

Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού

Για δύο πεπερασμένα σύνολα A και B ισχύει:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B)$$

Παρατήρηση

Όταν τα πεπερασμένα σύνολα A, B είναι ξένα, τότε είναι προφανές ότι τα δύο σύνολα δεν έχουν κοινά στοιχεία.

Έτσι, ισχύει $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \nu(A \cap B) = 0$ και ότι $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.

Πρόταση

Αν $A, B \subseteq \Omega$ είναι δύο πεπερασμένα σύνολα με $A \cap B \neq \emptyset$, τότε ισχύουν:

(α) $\nu(A') = \nu(\Omega) - \nu(A)$

(β) $\nu(A \cap B') = \nu(A) - \nu(A \cap B)$

(γ) $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B)$,

(δ) $\nu(A' \cap B') = \nu(\Omega) - \nu(A) - \nu(B) + \nu(A \cap B)$

Απόδειξη

(α) Τα σύνολα A και A' είναι ξένα μεταξύ τους. Ισχύει $A \cup A' = \Omega$.

Επομένως:

$$\nu(A \cup A') = \nu(\Omega) \Leftrightarrow \nu(A) + \nu(A') = \nu(\Omega) \Leftrightarrow \nu(A') = \nu(\Omega) - \nu(A)$$

(β) Τα σύνολα $A \cap B$ και $A \cap B'$ είναι ξένα μεταξύ τους. Ισχύει $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

Επομένως:

$$\begin{aligned} \nu\big((A \cap B) \cup (A \cap B')\big) = \nu(A) &\Leftrightarrow \nu(A \cap B) + \nu(A \cap B') = \nu(A) \\ &\Leftrightarrow \nu(A \cap B') = \nu(A) - \nu(A \cap B) \end{aligned}$$

(γ) Τα σύνολα $A \cap B'$ και B είναι ξένα μεταξύ τους. Ισχύει $A \cup B = (A \cap B') \cup B$.

Επομένως:

$$\nu(A \cup B) = \nu\big((A \cap B') \cup B\big) = \nu(A \cap B') + \nu(B) = \nu(A) - \nu(A \cap B) + \nu(B)$$

(δ) $\nu(A' \cap B') = \nu((A \cup B)') = \nu(\Omega) - \nu((A \cup B)' = \nu(\Omega) - \big(\nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B)\big)$

$$= \nu(\Omega) - \nu(A) - \nu(B) + \nu(A \cap B)$$

Παράδειγμα 1

Σε μια βιβλιοθήκη υπάρχουν 10 βιβλία με περιεχόμενο στις πιθανότητες, 8 βιβλία με περιεχόμενο στην στατιστική και 6 βιβλία με περιεχόμενο και στις πιθανότητες και στην στατιστική. Πόσα βιβλία υπάρχουν με περιεχόμενο τουλάχιστον με ένα από τα δύο θέματα;

Λύση

Έστω A το σύνολο των βιβλίων με περιεχόμενο στις πιθανότητες. Τότε, $\nu(A) = 10$.

Έστω B το σύνολο των βιβλίων με περιεχόμενο στην στατιστική. Τότε, $\nu(B) = 8$.

Έστω $A \cap B$ το σύνολο των βιβλίων με περιεχόμενο και στις πιθανότητες και στην στατιστική. Τότε, $\nu(A \cap B) = 6$.

Το πλήθος των βιβλίων με περιεχόμενο τουλάχιστον σε ένα από τα δύο θέματα είναι ο πληθικός αριθμός $\nu(A \cup B)$.

Με χρήση της σχέσης του εγκλεισμού αποκλεισμού, έχουμε:

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B) = 10 + 8 - 6 = 12$$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
Τα σύνολα A και B είναι δύο πεπερασμένα σύνολα στο σύνολο αναφοράς Ω.

(α)	Αν $A \subseteq B$, τότε ισχύει $\nu(A) \leq \nu(B)$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν $x \in (A - B)$, τότε ισχύει ότι $x \notin B$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Ισχύει πάντα ότι $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Ισχύει πάντα ότι $x \in \{x\}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Το κενό σύνολο περιέχει το 0.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Ισχύει πάντα ότι $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	Τα σύνολα $\Omega - A$ και A' είναι ίσα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Δίνεται το σύνολο αναφοράς $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και τα υποσύνολά του $A = \{x \in \Omega \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \in \Omega \mid x \text{ άρτιος}\}$.
Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τα πιο κάτω σύνολα:

(α) A'	(β) $A \cap B$	(γ) $A \cup B$
(δ) $A - B$	(ε) $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$	(στ) $B - A$

3. Σε ένα σύνολο 20 μαθητών, 10 μαθητές έχουν διαγώνισμα μόνο τη Δευτέρα, 5 μαθητές έχουν διαγώνισμα μόνο την Τρίτη και 3 μαθητές έχουν διαγώνισμα και τις δύο μέρες. Να βρείτε πόσοι από τους 20 μαθητές:
(α) έχουν διαγώνισμα τη Δευτέρα
(β) έχουν διαγώνισμα την Τρίτη
(γ) έχουν ένα μόνο διαγώνισμα αυτές τις δύο μέρες
(δ) έχουν διαγώνισμα τουλάχιστον σε μια από τις δύο μέρες
(ε) δεν έχουν διαγώνισμα ούτε τη Δευτέρα ούτε την Τρίτη.

4. Σε μια τάξη των 20 παιδιών, οι 12 προτιμούν ως αγαπημένο τους φρούτο το μήλο, ενώ οι 10 προτιμούν το αχλάδι. Αν υπάρχουν πέντε παιδιά που δεν προτίμησαν ούτε μήλο, ούτε αχλάδι, πόσα από τα παιδιά προτιμούν και μήλο και αχλάδι;

5. Πόσοι φυσικοί αριθμοί από το 1 μέχρι και το 100 διαιρούνται είτε με το 3 είτε με το 5;

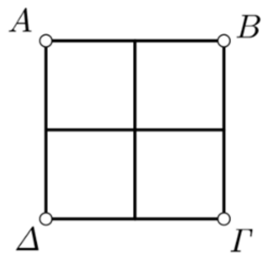
3.4 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Διερεύνηση 1

Σε ένα πρωτάθλημα σκακιού μιας χώρας συμμετέχουν 100 παίκτες. Αγωνίζονται κατά ζεύγη σε αγώνες, όπου κάθε φορά ο ηττημένος αποσύρεται και αγωνίζεται μόνο ο νικητής σε επόμενο αγώνα, αντιμετωπίζοντας άλλον παίκτη. Αν κάθε μέρα διεξάγονται 9 αγώνες, να βρείτε πόσες μέρες θα διαρκέσει το πρωτάθλημα μέχρι να αναδειχθεί ο πρωταθλητής.

Διερεύνηση2

Στο διπλανό τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ διαστάσεων 2×2:



(α) Να υπολογίσετε το πλήθος όλων των τετραγώνων που σχηματίζονται από οριζόντιες και κατακόρυφες ευθείες.

(β) Να υπολογίσετε το πλήθος όλων των ορθογωνίων παραλληλογράμμων που σχηματίζονται από οριζόντιες και κατακόρυφες ευθείες.

(γ) Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να μεταβούμε από το $Δ$ στο $Β$, όταν η κίνηση γίνεται πάνω στο πλέγμα και η κατεύθυνση είναι μόνο προς τα πάνω και δεξιά ή προς τα δεξιά και πάνω.

Εισαγωγή

Ο βασικός σκοπός της Συνδυαστικής Απαρίθμησης (ή απλά Συνδυαστικής) είναι η συστηματική ανάπτυξη μεθόδων και τεχνικών, για τον υπολογισμό του πλήθους στοιχείων πεπερασμένων συνόλων.

Οι συστηματικές αυτές τεχνικές ή μέθοδοι αναφέρονται στην Συνδυαστική ως αρχές ή μέθοδοι απαρίθμησης και είναι ιδιαίτερα χρήσιμες, όταν ο πληθικός αριθμός των συνόλων μας είναι μεγάλος. Για παράδειγμα, όταν μας ζητηθεί ο υπολογισμός των διαγωνίων σε ένα πεντάγωνο, αυτό δεν είναι πρόβλημα Συνδυαστικής, γιατί ο αριθμός είναι σχετικά μικρός και μπορεί να υπολογισθεί εύκολα και γρήγορα με άμεση καταμέτρηση. Όμως το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου με πλήθος πλευρών 100 είναι πρόβλημα Συνδυαστικής, γιατί απαιτείται ανάπτυξη συστηματικής μεθόδου καταμέτρησης του πλήθους των διαγωνίων και όχι απλή καταμέτρησή τους.
Η Συνδυαστική έχει εφαρμογές σε πολλούς τομείς των Μαθηματικών, γιατί σε πολλά προβλήματα απαιτείται η γνώση του πλήθους των αντικειμένων σε ένα σύνολο και όχι ποια είναι τα στοιχεία του συγκεκριμένου συνόλου.

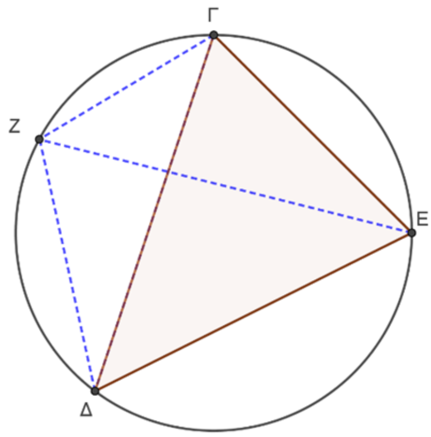
Μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου με συστηματική απαρίθμηση και καταγραφή τους, όταν αυτό είναι μικρό.

- Για παράδειγμα, τρία παιδιά A, B, Γ μπορούν να σταθούν σε σειρά με 6 διαφορετικούς τρόπους, σύμφωνα με την πιο κάτω συστηματική καταγραφή όλων των τριάδων:

$AB\Gamma$	$A\Gamma B$	$B\Gamma A$	$BA\Gamma$	ΓAB	ΓBA

- Το πλήθος των τριγώνων που μπορούν να σχηματιστούν από 4 διαφορετικά σημεία Γ, Δ, E, Z, που βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο, είναι 4. Τα τρίγωνα είναι:

$\Gamma\Delta E$	$\Gamma\Delta Z$	ΓEZ	ΔEZ



3.4.1 Αρχή Αθροίσματος

Διερεύνηση

Από Αθήνα προς Θεσσαλονίκη εκτελούνται καθημερινά 2 αεροπορικά, 5 οδικά και 3 ακτοπλοϊκά δρομολόγια.
Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί κάποιος να μεταβεί από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη μια συγκεκριμένη μέρα.

Αρχή Αθροίσματος
Αν από ένα πεπερασμένο σύνολο $\{a_1, a_2, \dots, a_\kappa\}$ το στοιχείο a_1 μπορεί να επιλεγεί με ν_1 διαφορετικούς τρόπους, το στοιχείο a_2 μπορεί να επιλεγεί με ν_2 διαφορετικούς τρόπους, ..., και το a_κ στοιχείο μπορεί να επιλεγεί με ν_κ διαφορετικούς τρόπους, καθώς επίσης και η επιλογή κάποιου στοιχείου a_i αποκλείει την επιλογή του στοιχείου a_j, $i \neq j$, τότε η επιλογή του a_1 ή a_2 ή ... ή a_κ μπορεί να γίνει με $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\kappa$ διαφορετικούς τρόπους.

Παρατηρήσεις

- Είναι πολύ σημαντικό ότι για να εφαρμοστεί η αρχή του αθροίσματος θα πρέπει να έχει εξασφαλιστεί ότι η επιλογή ενός στοιχείου a_i αποκλείει την επιλογή ενός άλλου διαφορετικού στοιχείου $a_j, i \neq j$.
- Μια ισοδύναμη διατύπωση της αρχής του αθροίσματος με χρήση συνόλων είναι:

  Για δύο σύνολα ξένα μεταξύ τους ισχύει:
$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$$

Γενικά, για ν το πλήθος σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_\nu$, τα οποία είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους, ισχύει:

$$\nu(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu) = \nu(A_1) + \nu(A_2) + \cdots + \nu(A_\nu)$$

Δηλαδή, η βασική προϋπόθεση ότι κατά την επιλογή του στοιχείου a_i αποκλείεται στη συνέχεια η επιλογή του a_j, $i \neq j$, έχει αντικατασταθεί με την έκφραση ότι τα σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους.

Παράδειγμα 1

Δίνονται τα σύνολα:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\} \text{ και } \Pi = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 \dots\}$$

Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε από τα σύνολα A ή Π ένα φυσικό αριθμό που να είναι:

(α) μικρότερος από το 14

(β) πρώτος αριθμός και μικρότερος από το 14

(γ) άρτιος πρώτος αριθμός μικρότερος από το 14.

Λύση

(α) Έχουμε έξι επιλογές από το σύνολο A (οι αριθμοί $2, 4, 6, 8, 10$ και 12) και εφτά επιλογές από το σύνολο Π (οι αριθμοί $1, 3, 5, 7, 9, 11$ και 13). Συνολικά, από την αρχή του αθροίσματος, έχουμε $6 + 7 = 13$ αριθμούς μικρότερους από το 14.

(β) Έχουμε μια επιλογή από το σύνολο A (μόνο το 2) και πέντε επιλογές από το σύνολο Π (οι αριθμοί 3,5,7,11,13). Συνολικά, από την αρχή του αθροίσματος, έχουμε $1 + 5 = 6$ αριθμούς.

(γ) Έχουμε μια επιλογή από το σύνολο A (μόνο το 2) και καμιά επιλογή από το σύνολο Π. Συνολικά, από την αρχή του αθροίσματος, έχουμε $1 + 0 = 1$ αριθμό.

Παράδειγμα 2

Ο καθηγητής των Μαθηματικών ανάθεσε στους μαθητές του μία εργασία για τα Μαθηματικά. Ο κάθε μαθητής δικαιούται να επιλέξει είτε μία εργασία από οκτώ εργασίες που αφορούν την Άλγεβρα, είτε μία από δέκα εργασίες που αφορούν την Γεωμετρία, ή μία από τις πέντε εργασίες που αφορούν την Στατιστική. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή μίας εργασίας από έναν μαθητή;

Λύση

Παρατηρούμε ότι η επιλογή μίας εργασίας ενός παιδιού από οποιαδήποτε ενότητα αποκλείει συγχρόνως την επιλογή από οποιαδήποτε άλλη ενότητα. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή του αθροίσματος. Αφού από την ενότητα Άλγεβρα έχουμε οκτώ επιλογές, από την ενότητα Γεωμετρία έχουμε δέκα επιλογές και από την ενότητα Στατιστικής, πέντε επιλογές, τότε έχουμε συνολικά $8 + 10 + 5 = 23$ διαφορετικούς τρόπους επιλογής της εργασίας ενός μαθητή.

3.4.2 Πολλαπλασιαστική Αρχή

Διερεύνηση

Σε μια χώρα υπάρχουν 3 οδικά και 2 αεροπορικά δρομολόγια για να ταξιδέψει κάποιος από την πόλη A στην πόλη B, ενώ για να ταξιδέψει από την πόλη B στην πόλη Γ υπάρχουν 2 ατμοπλοϊκά δρομολόγια. Να βρείτε:

(α) με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί κάποιος να ταξιδέψει από την πόλη A στην πόλη B

(β) με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί κάποιος να ταξιδέψει από την πόλη A στην πόλη Γ, μέσω της πόλης B

Σε τι διαφέρουν τα δύο πιο πάνω αποτελέσματα στο (α) και (β);

Αν υποθέσουμε ότι κατά την απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου ισχύουν δύο βασικές προϋποθέσεις, όπως:

- η διαδικασία της απαρίθμησης μπορεί να χωριστεί σε ν διαφορετικές φάσεις, όπου η καθεμία εκτελείται διαδοχικά, δηλαδή η μία μετά την άλλη και
- οι επιλογές σε κάθε φάση είναι μονοσήμαντα ορισμένες, όταν είναι γνωστά τα αποτελέσματα κάθε προηγούμενης φάσης,

τότε μπορεί να εφαρμοστεί μια άλλη αρχή απαρίθμησης που λέγεται **Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης ή Πολλαπλασιαστική Αρχή ή Αρχή Γινομένου**.

Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης

Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ν διαδοχικές φάσεις $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu$. Αν η φάση φ_1 μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_1 τρόπους και για καθέναν από αυτούς η φάση φ_2 μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_2 τρόπους ,…, και για καθέναν από όλους αυτούς τους τρόπους η φάση φ_ν μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_ν τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot \dots \cdot \kappa_\nu$ τρόπους.

Παράδειγμα 3

Σε ένα εστιατόριο εργάζονται 3 μάγειρες, 10 σερβιτόροι και 2 καθαρίστριες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί μια τριμελής αντιπροσωπεία, η οποία να αποτελείται από ένα μάγειρα, ένα σερβιτόρο και μια καθαρίστρια, για να συναντήσει τον ιδιοκτήτη του εστιατορίου;

Λύση

Η επιλογή της αντιπροσωπείας μπορεί να γίνει σε τρεις φάσεις. Η πρώτη φάση είναι η επιλογή ενός μάγειρα που μπορεί να πραγματοποιηθεί με 3 τρόπους. Για καθέναν από αυτούς, η δεύτερη φάση είναι η επιλογή ενός σερβιτόρου, που μπορεί να πραγματοποιηθεί με 10 τρόπους. Για καθέναν από αυτούς, η τρίτη φάση είναι η επιλογή μιας καθαρίστριας, που μπορεί να πραγματοποιηθεί με 2 τρόπους.

Μάγειρας	Σερβιτόρος	Καθαρίστρια
3	10	2

Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, η επιλογή της αντιπροσωπείας μπορεί να γίνει με $3 \cdot 10 \cdot 2 = 60$ διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 4

Σε μια βιβλιοθήκη υπάρχουν μόνο τέσσερα Ελληνικά, τρία Γαλλικά και επτά Ιταλικά βιβλία. Όλα τα βιβλία είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Επιλέγουμε τυχαία δύο βιβλία γραμμένα σε διαφορετική γλώσσα.

(α) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα Ελληνικό και ένα Γαλλικό βιβλίο.

(β) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 2 βιβλία με διαφορετική γλώσσα.

Λύση

(α) Η επιλογή Ελληνικού και Γαλλικού βιβλίου μπορεί να γίνει σε δύο φάσεις. Η πρώτη φάση είναι η επιλογή του Ελληνικού βιβλίου, που μπορεί να πραγματοποιηθεί με 4 τρόπους. Για καθέναν από αυτούς, η δεύτερη φάση είναι η επιλογή του Γαλλικού βιβλίου, που μπορεί να πραγματοποιηθεί με 3 τρόπους.

Ελληνικό	Γαλλικό
4	3

Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, η επιλογή μπορεί να πραγματοποιηθεί με $4 \cdot 3 = 12$ τρόπους.

(β) Θα υπολογίσουμε τους διαφορετικούς τρόπους που μπορούμε να επιλέξουμε δύο βιβλία με διαφορετική γλώσσα.

Αφού επιλέγουμε βιβλία σε διαφορετική γλώσσα, μπορούμε να επιλέξουμε είτε Ελληνικό και Γαλλικό, είτε Ελληνικό και Ιταλικό, είτε Γαλλικό και Ιταλικό.

Από το (α) ερώτημα, έχουμε ότι η επιλογή Ελληνικού και Γαλλικού βιβλίου μπορεί να πραγματοποιηθεί με $4 \cdot 3 = 12$ τρόπους.

Ομοίως, η επιλογή του Ελληνικού και του Ιταλικού μπορεί να πραγματοποιηθεί με $4 \cdot 7 = 28$ τρόπους και η επιλογή του Γαλλικού και του Ιταλικού μπορεί να πραγματοποιηθεί με $3 \cdot 7 = 21$ τρόπους.

Ελληνικό	Ιταλικό
4	7

Γαλλικό	Ιταλικό
3	7

Συνεπώς, από την αρχή του αθροίσματος, το σύνολο όλων των διαφορετικών τρόπων επιλογής δύο βιβλίων με διαφορετική γλώσσα είναι $12+28+21=61$.

Παράδειγμα 5

Πόσους διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με ψηφία από το σύνολο $A=\{1,3,5,7,9\}$, αν:

(α) επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου

(β) δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου

Λύση

(α) Για τον σχηματισμό των τριψήφιων αριθμών έχουμε πέντε επιλογές στη θέση των μονάδων. Για την θέση των δεκάδων έχουμε πάλι πέντε επιλογές, γιατί οποιοδήποτε ψηφίο έχει χρησιμοποιηθεί για την προηγούμενη θέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ξανά. Ομοίως, έχουμε πάλι πέντε επιλογές για τη θέση των εκατοντάδων.

Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
5	5	5

Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή, το σύνολο των διαφορετικών τριψήφιων είναι $5\cdot5\cdot5=125$.

(β) Όταν επιλέξουμε ένα ψηφίο (με πέντε διαφορετικούς τρόπους) στη θέση των μονάδων, τότε αυτό το ψηφίο δεν μπορεί να ξαναχρησιμοποιηθεί για τη θέση των δεκάδων, οπότε μόνο τέσσερις επιλογές υπάρχουν. Αφού επιλέξουμε και το ψηφίο των δεκάδων, μόνο 3 επιλογές μας απομένουν για το ψηφίο των εκατοντάδων.

Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
5	4	3

Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των διαφορετικών τριψήφιων είναι $5\cdot4\cdot3=60$.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε δύο διαδοχικές φάσεις. Αν η πρώτη φάση μπορεί να πραγματοποιηθεί με x τρόπους και για καθέναν από αυτούς η δεύτερη φάση μπορεί να πραγματοποιηθεί με y τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί συνολικά με $x+y$ τρόπους.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Επιλέγουμε ένα παιδί από 2 αγόρια και 3 κορίτσια. Η επιλογή μπορεί να πραγματοποιηθεί με 6 τρόπους.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Επιλέγουμε ένα αγόρι και ένα κορίτσι από 2 αγόρια και 3 κορίτσια. Η επιλογή μπορεί να πραγματοποιηθεί με 6 τρόπους.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Για να ταξιδεύσει κάποιος από την Αθήνα στην Θεσσαλονίκη μια συγκεκριμένη μέρα, έχει τις εξής επιλογές: πέντε διαφορετικές αναχωρήσεις με λεωφορείο, τρεις διαφορετικές αναχωρήσεις με τρένο, δύο διαφορετικές αναχωρήσεις με πλοιάριο και δύο διαφορετικές αναχωρήσεις με αεροπλάνο. Με πόσους διαφορετικούς τρόπου μπορεί κάποιος να ταξιδεύσει την συγκεκριμένη μέρα από Αθήνα προς Θεσσαλονίκη;

3. Από μία πόλη μπορούμε να κατευθυνθούμε ανατολικά με τρεις διαφορετικούς δρόμους, δυτικά με δύο διαφορετικούς δρόμους, βόρεια με έναν δρόμο και νότια με δύο δρόμους. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να φύγουμε από την πόλη;

4. Σε ένα ράφι υπάρχουν πέντε διαφορετικά βιβλία Μαθηματικών και τέσσερα διαφορετικά βιβλία Φυσικής. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα βιβλία, αν:
   (α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.
   (β) τα βιβλία της φυσικής πρέπει να είναι σε διαδοχικές θέσεις.

5. Να υπολογίσετε το πλήθος των αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία του συνόλου $\Omega=\{5,6,7,8,9\}$, αν αυτοί είναι:
   (α) διψήφιοι χωρίς επανάληψη ψηφίου
   (β) διψήφιοι με επανάληψη ψηφίου
   (γ) τριψήφιοι χωρίς επανάληψη ψηφίου
   (δ) τριψήφιοι με επανάληψη ψηφίου
   (ε) περιττοί τριψήφιοι χωρίς επανάληψη ψηφίου.

6. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία του συνόλου $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, αν:
   (α) δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου
   (β) επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου;

7. Αν σε πέντε εργάσιμες μέρες μια τάξη έχει τρία διαφορετικά διαγωνίσματα, πόσα διαφορετικά προγράμματα μπορούν να καταρτιστούν, αν:
   (α) τα διαγωνίσματα θα είναι σε διαφορετική μέρα
   (β) επιτρέπεται μέχρι δύο το πολύ διαγωνίσματα σε μία μέρα;

8. Με πόσους τρόπους 10 άτομα μπορούν να ορίσουν μια επιτροπή που θα αποτελείται από πρόεδρο, γραμματέα και ταμία, αν και τα 10 άτομα έχουν δικαίωμα να εκλεγούν;

9. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα μπορούμε να έχουμε, όταν:
   (α) ρίξουμε δύο κανονικά ζάρια διαφορετικού χρώματος
   (β) ρίξουμε τρία κανονικά ζάρια διαφορετικού χρώματος
   (γ) ρίξουμε ένα κανονικό ζάρι και ένα νόμισμα;

3.5 ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

Διερεύνηση

Ο Δούκας της Τοσκάνης ενδιαφερόταν για τα τυχερά παιγνίδια και ρώτησε το Γαλιλαίο, γιατί όταν ρίχνει τρία ζάρια πολλές φορές, το άθροισμα 10 εμφανίζεται περισσότερες φορές από το άθροισμα 9. Ο Δούκας υποστήριζε ότι είναι παράδοξο, γιατί υπάρχουν έξι δυνατά αποτελέσματα για το άθροισμα 10 και έξι δυνατά αποτελέσματα για το άθροισμα 9.

$6+1+3=10$	$6+2+2=10$	$5+4+1=10$	$5+3+2=10$
$4+4+2=10$	$6+2+1=9$	$5+3+1=9$	$5+2+2=9$
$4+4+1=9$	$4+3+2=9$	$4+3+2=10$	$3+3+3=9$

Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι παράδοξο το πιο πάνω φαινόμενο.

3.5.1 Το $\boldsymbol{\nu}$ παραγοντικό, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{N}$

Το γινόμενο ν διαδοχικών φυσικών αριθμών εμφανίζεται συχνά σε προβλήματα συνδυαστικής απαρίθμησης.

Ορισμός

Το ν παραγοντικό με $\nu \in \mathbb{N}$ και $\nu > 1$ ισούται με το γινόμενο των ν πρώτων θετικών ακεραίων αριθμών και συμβολίζεται με $\nu!$. Είναι δηλαδή:

$$\boldsymbol{\nu! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots (\nu - 1) \cdot \nu, \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad \nu > 1}$$

Για τις περιπτώσεις που το ν ισούται με 1 ή 0, έχουμε εξ ορισμού:

$$\mathbf{1! = 1} \text{ και } \mathbf{0! = 1}$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = 6!\,, \quad B = \frac{7!}{5!}, \quad \Gamma = \frac{8!}{5! \cdot 3!}$$

Λύση

- $A = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$
- Παρατηρούμε ότι $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5! \cdot 6 \cdot 7$. Συνεπώς:
$$B = \frac{7!}{5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5!} = 42$$
- Έχουμε ότι:
$$\Gamma = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$$

3.5.2 Μεταθέσεις

Διερεύνηση

Δίνονται τα σύνολα:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ και } B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

(α) Πόσοι τετραψήφιοι μπορούν να σχηματιστούν, χρησιμοποιώντας όλα τα στοιχεία του συνόλου A;

(β) Πόσοι πενταψήφιοι μπορούν να σχηματιστούν, χρησιμοποιώντας όλα τα στοιχεία του συνόλου B;

(γ) Τι παρατηρείτε;

Ορισμός

Μετάθεση ν διαφορετικών αντικειμένων λέγεται κάθε τοποθέτηση των ν αντικειμένων, σε σειρά.

Παρατήρηση

- Σε κάθε μετάθεση μας ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης των στοιχείων. Για παράδειγμα, οι μεταθέσεις $ΑΒΓΔ$ και $ΒΑΓΔ$ είναι διαφορετικές.

Πρόταση

Το **πλήθος των μεταθέσεων $\boldsymbol{\nu}$ διαφορετικών** αντικειμένων συμβολίζεται με $\boldsymbol{M_\nu}$ και δίνεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{M_\nu = \nu!}$$

Απόδειξη

Ο υπολογισμός του πλήθους των μεταθέσεων ν διαφορετικών στοιχείων ενός συνόλου $A = \{a_1, a_2, \dots, a_\nu\}$ μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ν φάσεις. Στην πρώτη φάση επιλέγουμε ένα στοιχείο από το σύνολο A και το τοποθετούμε στην πρώτη θέση. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με ν διαφορετικούς τρόπους, γιατί υπάρχουν ν διαθέσιμα αντικείμενα. Στη δεύτερη φάση η τοποθέτηση αντικειμένου στη δεύτερη θέση μπορεί να πραγματοποιηθεί με $(\nu - 1)$ τρόπους, γιατί υπάρχουν $(\nu - 1)$ διαθέσιμα αντικείμενα (ένα αντικείμενο έχει ήδη τοποθετηθεί στην πρώτη θέση). Ομοίως, στην $\nu -$φάση η τοποθέτηση αντικειμένου στη $\nu -$θέση μπορεί να πραγματοποιηθεί με 1 τρόπο, γιατί υπάρχει 1 διαθέσιμο αντικείμενο (τα άλλα $\nu - 1$ αντικείμενα έχουν ήδη τοποθετηθεί).

Φάσεις	$1^η$ θέση	$2^η$ θέση	$\cdots$	$ν^η$ θέση
Τρόποι	ν	$\nu - 1$	$\cdots$	1

Συνεπώς, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, η τοποθέτηση των αντικειμένων μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\nu \cdot (\nu - 1) \cdot \ldots \cdot 1 = \nu!$ διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να παραταχθούν τρεις στρατιώτες σε ευθεία γραμμή.

Λύση

Κάθε τοποθέτηση των τριών στρατιωτών σε ευθεία γραμμή αντιστοιχεί σε μία μετάθεση τριών διαφορετικών αντικειμένων. Συνεπώς, η τοποθέτηση των στρατιωτών μπορεί να γίνει με $M_3 = 3! = 6$ διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 3

Δίνεται η λέξη **ΤΡΑΠΕΖΙ**.

(α) Να βρείτε το πλήθος όλων των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.
(β) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με Τ και τελειώνουν σε Ι;
(γ) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με φωνήεν;
(δ) Πόσοι από αυτούς έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις;

Λύση

(α) Όλα τα γράμματα της λέξης **ΤΡΑΠΕΖΙ** είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Έτσι, το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης είναι ίσο με:

$$M_7 = 7! = 5040$$

(β) Ο υπολογισμός γίνεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση είναι η τοποθέτηση του **Τ** στην πρώτη θέση, η οποία και γίνεται μόνο με έναν τρόπο και η δεύτερη φάση είναι οι μεταθέσεις των υπόλοιπων 6 διαφορετικών γραμμάτων στις επόμενες 6 θέσεις, που είναι ίσο με:

$$M_6 = 6! = 720$$

(γ) Ο υπολογισμός γίνεται σε τρεις φάσεις. Στην πρώτη φάση είναι η τοποθέτηση του **Τ** στην πρώτη θέση, η οποία και γίνεται μόνο με έναν τρόπο. Στην δεύτερη φάση είναι η τοποθέτηση του **Ι** στην τελευταία θέση, η οποία και γίνεται πάλι μόνο με έναν τρόπο. Στην τρίτη φάση, όπου πρέπει να τοποθετήσουμε τα υπόλοιπα πέντε γράμματα στις θέσεις που απομένουν, έχουμε $M_5 = 5! = 120$ τρόπους.
Συνολικά, έχουμε $1 \cdot 1 \cdot 120 = 120$ τρόπους.

(δ) Στην πρώτη φάση πρέπει να τοποθετήσουμε ένα φωνήεν. Αυτό γίνεται με τρεις διαφορετικούς τρόπους, γιατί έχουμε μόνο τρία φωνήεντα. Στη δεύτερη φάση πρέπει να τοποθετήσουμε τα 6 υπόλοιπα γράμματα στις υπόλοιπες έξι θέσεις. Αυτό μπορεί να γίνει με $M_6 = 6! = 720$ τρόπους.
Συνολικά, έχουμε $3 \cdot 6! = 3 \cdot 720 = 2160$ τρόπους.

(ε) Αν θεωρήσουμε τα τρία φωνήεντα **ΑΕΙ** ως ένα αντικείμενο, τότε μαζί με τα υπόλοιπα τέσσερα σύμφωνα έχουμε πέντε διαφορετικά αντικείμενα, για να τα τοποθετήσουμε σε σειρά. Άρα, σε πρώτη φάση έχουμε $M_5 = 5! = 120$ διαφορετικές μεταθέσεις. Στη δεύτερη φάση έχουμε όλες τις μεταθέσεις των τριών φωνηέντων, δηλαδή $M_3 = 3! = 6$.
Συνολικά, έχουμε $5! \cdot 3! = 120 \cdot 6 = 720$ τρόπους.

Παράδειγμα 4

Έξι Αμερικάνοι, πέντε Ρώσοι και τέσσερις Κινέζοι θα τοποθετηθούν σε σειρά, για να παρακολουθήσουν ένα συνέδριο.

(α) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση αυτή, χωρίς κανένα περιορισμό.

(β) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση αυτή, έτσι ώστε τα άτομα της κάθε εθνικότητας να καθίσουν σε συνεχόμενα καθίσματα.

Λύση

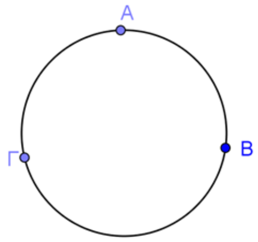
(α) Κάθε τοποθέτηση των 15 συνέδρων σε σειρά, χωρίς κανένα περιορισμό, ισοδυναμεί με μια μετάθεση 15 αντικειμένων. Συνεπώς, η τοποθέτηση των συνέδρων μπορεί να γίνει με $M_{15} = 15! = 1307674368000$ τρόπους.

(β) Στη πρώτη φάση θεωρούμε τα άτομα της κάθε εθνικότητας ως ένα αντικείμενο. Επομένως, κάθε τοποθέτηση των ατόμων των τριών εθνικοτήτων ισοδυναμεί με μιαν απλή μετάθεση τριών αντικειμένων. Στην πρώτη φάση το πλήθος των τοποθετήσεων είναι 3!. Στη δεύτερη φάση, για καθεμιά από τις τοποθετήσεις της πρώτης φάσης, οι έξι Αμερικάνοι μπορούν να καθίσουν με 6! τρόπους, οι πέντε Ρώσοι με 5! τρόπους και οι τέσσερις Κινέζοι με 4! τρόπους. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, η τοποθέτηση των ατόμων των εθνικοτήτων σε συνεχόμενα καθίσματα μπορεί να πραγματοποιηθεί με $3! \cdot 6! \cdot 5! \cdot 4! = 12441600$ τρόπους.

3.5.3 Κυκλικές Μεταθέσεις

Διερεύνηση

Να εξετάσετε κατά πόσο το πλήθος των φωτογραφήσεων τεσσάρων ατόμων, που στέκονται σε σειρά, είναι το ίδιο με το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που τα ίδια τέσσερα άτομα μπορούν να χορέψουν σε κύκλο, κρατώντας ο ένας το χέρι του άλλου. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Όταν έχουμε να τοποθετήσουμε σε σειρά τρία άτομα A, B, Γ, είναι γνωστό ότι υπάρχουν $3! = 6$ διαφορετικές μεταθέσεις, οι οποίες είναι:

$$(A, B, \Gamma), (A, \Gamma, B), (B, \Gamma, A), (B, A, \Gamma), (\Gamma, A, B), (\Gamma, B, A)$$

Αν τοποθετήσουμε τα τρία άτομα A, B, Γ σε κύκλο, θεωρούμε ότι έχουμε μιαν κυκλική μετάθεση των τριών ατόμων με μία συγκεκριμένη φορά (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα).

Σε μιαν κυκλική μετάθεση, όπως φαίνεται και στο σχήμα, χρησιμοποιώντας την ίδια φορά και αρχίζοντας από διαφορετικό σημείο έναρξης σε κάθε περίπτωση, παρατηρούμε ότι «παράγονται» τρεις διαφορετικές απλές μεταθέσεις. Δηλαδή, με δεξιόστροφη φορά, αν το σημείο έναρξης στον κύκλο είναι το:

- A, τότε έχουμε την απλή μετάθεση $AB\Gamma$
- B, τότε έχουμε την απλή μετάθεση $B\Gamma A$
- Γ, τότε έχουμε την απλή μετάθεση ΓAB.

Επομένως, σε μία κυκλική μετάθεση αντιστοιχούν τρεις απλές μεταθέσεις. Συνεπώς, όλες οι διαφορετικές κυκλικές μεταθέσεις των τριών ατόμων είναι:

$$\frac{M_3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

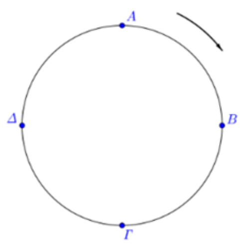
Τα πιο πάνω μπορούν να επεκταθούν και για περισσότερα στοιχεία και να γενικευθούν.

Ορισμός

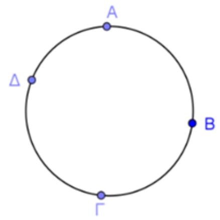
Κυκλική μετάθεση ν διαφορετικών αντικειμένων είναι κάθε τοποθέτηση των ν αντικειμένων σε κύκλο, κατά μία ορισμένη φορά.

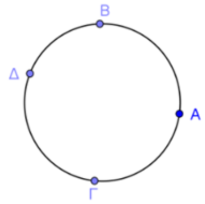
Για παράδειγμα, αν καθίσουν σε κύκλο τέσσερα παιδιά A, B, Γ, Δ, τότε έχουμε μια κυκλική μετάθεση των 4.

Σε κάθε διαφορετική μετακίνηση ενός παιδιού στη θέση ενός άλλου προκύπτει και διαφορετική κυκλική μετάθεση, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

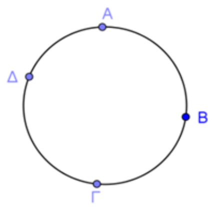


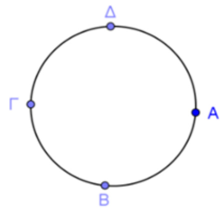
Στα πιο κάτω σχήματα, αν αρχίσουμε από το σημείο A και με συγκεκριμένη στροφή (έστω δεξιόστροφα) κινούμενοι, έχουμε την κυκλική μετάθεση $ΑΒΓΔ$ στον πρώτο κύκλο, ενώ στον δεύτερο κύκλο, αρχίζοντας και πάλι από το A, έχουμε την κυκλική μετάθεση $ΑΓΔΒ$ που είναι διαφορετική από την προηγούμενη.





Δεν προκύπτει διαφορετική κυκλική μετάθεση στις περιπτώσεις όπου τα παιδιά μετακινηθούν ως αποτέλεσμα στροφής, όπως φαίνεται και στο πιο κάτω σχήμα. Αν και πάλι αρχίσουμε από το A κινούμενοι δεξιόστροφα τόσο στον πρώτο όσο και στον δεύτερο κύκλο θα έχουμε την ίδια κυκλική μετάθεση $ΑΒΓΔ$.





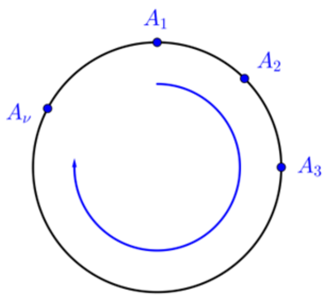
Πρόταση

Το **πλήθος όλων των κυκλικών μεταθέσεων** ν διαφορετικών αντικειμένων είναι ίσο με $(\boldsymbol{\nu}-\mathbf{1})!$ και συμβολίζεται με $\boldsymbol{K_\nu}$.
Δηλαδή:

$$\boldsymbol{K_\nu = (\nu - 1)!}$$

Απόδειξη

Έστω μια κυκλική μετάθεση ν διαφορετικών αντικειμένων με δεξιόστροφη φορά, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι αν το σημείο έναρξης είναι το A_1, έχουμε την απλή μετάθεση $(A_1, A_2, \dots, A_\nu)$. Αν το σημείο έναρξης είναι το A_2, τότε για την ίδια κυκλική μετάθεση έχουμε την απλή μετάθεση $(A_2, A_3, \dots, A_\nu, A_1)$. Με τον ίδιο τρόπο, και αρχίζοντας κάθε φορά από ένα διαφορετικό σημείο, καταλήγουμε ότι **σε κάθε μία κυκλική μετάθεση αντιστοιχούν $\boldsymbol{\nu}$ απλές μεταθέσεις**.



Επομένως:

$$M_\nu = \nu \cdot K_\nu \Leftrightarrow K_\nu = \frac{M_\nu}{\nu} = \frac{\nu!}{\nu} = \frac{\nu \cdot (\nu-1)!}{\nu} = (\nu-1)!$$

Παράδειγμα 5

Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν πέντε άτομα να καθίσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι με ορισμένη φορά.

Λύση

Κάθε τοποθέτηση των πέντε ατόμων ισοδυναμεί με μια κυκλική μετάθεση πέντε αντικειμένων. Συνεπώς, η τοποθέτηση των ατόμων μπορεί να γίνει με $K_5 = (5-1)! = 4! = 24$ διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 6

Δέκα μαθητές θα χορέψουν σε κύκλο.

(α) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση χωρίς κανένα περιορισμό.

(β) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση, έτσι ώστε δύο συγκεκριμένοι μαθητές να χορέψουν ο ένας πλάι στον άλλο.

Λύση

(α) Κάθε τοποθέτηση των 10 μαθητών σε κύκλο χωρίς κανένα περιορισμό ισοδυναμεί με μια κυκλική μετάθεση 10 αντικειμένων. Συνεπώς, η τοποθέτηση των μαθητών μπορεί να γίνει με $K_{10} = (10-1)! = 9! = 362880$ τρόπους.

(β) Στην πρώτη φάση θεωρούμε τους δύο συγκεκριμένους μαθητές, οι οποίοι θα είναι ο ένας πλάι στον άλλο, ως ένα αντικείμενο. Επομένως, υπολογίζουμε το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων εννιά αντικειμένων με $K_9 = 8!$. Στη δεύτερη φάση, για καθεμιά από τις τοποθετήσεις της πρώτης φάσης, οι δύο αυτοί μαθητές μπορούν να τοποθετηθούν με $M_2 = 2!$ τρόπους, ο ένας πλάι στον άλλο. Συνεπώς, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, οι δύο αυτοί μαθητές μπορούν να χορέψουν ο ένας πλάι στον άλλο με $8! \cdot 2! = 80640$ τρόπους.

3.5.4 Επαναληπτικές Μεταθέσεις

Διερεύνηση

Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το πλήθος των πενταψήφιων αριθμών οι οποίοι μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία $1, 1, 1, 2, 3$ χρησιμοποιώντας το κάθε ένα ψηφίο μόνο μια φορά είναι ίσο με $5! = 120$.

Να εξετάσετε κατά πόσο είναι σωστός ισχυρισμός του.

Ορισμός

Επαναληπτική μετάθεση ν αντικειμένων, τα οποία δεν είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους, είναι κάθε τοποθέτησή των ν αντικειμένων σε σειρά.

Πρόταση

Το **πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων** ν αντικειμένων, από τα οποία τα κ_1 είναι μεταξύ τους τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα άλλα, τα κ_2 είναι επίσης τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα άλλα, ..., τα κ_λ είναι επίσης τα ίδια και διαφορετικά από τα άλλα είναι ίσο με $\frac{\nu!}{\kappa_1!\cdot\kappa_2!\cdot\ldots\cdot\kappa_\lambda!}$ και συμβολίζεται με $\boldsymbol{M_\nu^\varepsilon}$.

Δηλαδή:

$$\boldsymbol{M_\nu^\varepsilon = \frac{\nu!}{\kappa_1!\cdot\kappa_2!\cdot\ldots\cdot\kappa_\lambda!}}$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι κάθε επαναληπτική μετάθεση ν αντικειμένων, από τα οποία τα κ_1 είναι τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα άλλα, τα κ_2 είναι τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα άλλα, ..., τα κ_λ είναι τα ίδια και διαφορετικά από τα άλλα, αντιστοιχεί σε $\kappa_1!\cdot\kappa_2!\cdot\ldots\cdot\kappa_\lambda!$ μεταθέσεις ν αντικειμένων.

Συνεπώς, ισχύει ότι:

$$M_\nu = \kappa_1!\cdot\kappa_2!\cdot\ldots\cdot\kappa_\lambda!\cdot M_\nu^\varepsilon \Rightarrow M_\nu^\varepsilon = \frac{\nu!}{\kappa_1!\cdot\kappa_2!\cdot\ldots\cdot\kappa_\lambda!}.$$

Παράδειγμα 7

Δίνεται η λέξη **ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ**.

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(β) Πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς:

i. αρχίζουν με τη λέξη **ΠΑΡΑ**

ii. έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις.

Λύση

(α) Κάθε αναγραμματισμός της λέξης **ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ** ισοδυναμεί με μια επαναληπτική μετάθεση 9 αντικειμένων, από τα οποία τα τρία (**ΑΑΑ**) είναι τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα υπόλοιπα και τα δύο (**ΣΣ**) είναι τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα άλλα. Συνεπώς, το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης είναι:

$$M_9^{\varepsilon} = \frac{9!}{3! \cdot 2!} = 30240$$

(β) i. Στην πρώτη φάση τοποθετούμε τη λέξη **ΠΑΡΑ** στις πρώτες θέσεις. Αυτό γίνεται με έναν μόνο τρόπο. Στη συνέχεια, σε δεύτερη φάση με τα υπόλοιπα γράμματα **ΣΤΑΣΗ** σχηματίζουμε αναγραμματισμούς. Το πλήθος των αναγραμματισμών είναι ίσο με το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων πέντε αντικειμένων, από τα οποία τα δύο (**ΣΣ**) είναι τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα άλλα. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ** που αρχίζουν με την λέξη **ΠΑΡΑ** είναι:

$$M_5^{\varepsilon} = \frac{5!}{2!} = 60$$

ii. Στην πρώτη φάση θεωρούμε τα φωνήεντα **ΑΑΑΗ** ως ένα αντικείμενο. Επομένως, υπολογίζουμε το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων των 6 αντικειμένων **(ΑΑΑΗ),Π,Ρ,Σ,Τ,Σ**, που υπολογίζεται σε:

$$M_6^{\varepsilon} = \frac{6!}{2!} = 360$$

Στη δεύτερη φάση, για καθέναν από τους αναγραμματισμούς της πρώτης φάσης, τα συνεχόμενα γράμματα **ΑΑΑΗ** που μετακινούνται ως ένα αντικείμενο, μπορούν να τοποθετηθούν με:

$$M_4^{\varepsilon} = \frac{4!}{3!} = 4 \text{ τρόπους}$$

Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ** που έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις είναι $360 \cdot 4 = 1440$.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων 10 διαφορετικών αντικειμένων είναι ίσο με $10!$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Ισχύει ότι $0! = 0$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Οι λέξεις **ΚΑΛΗΜΕΡΑ** και **ΕΛΛΗΝΙΚΟ** έχουν το ίδιο πλήθος αναγραμματισμών.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(δ)	Το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΚΗΠΟΣ** είναι ίσο με το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης πέντε διαφορετικών λουλουδιών σε σειρά.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ε)	$4\,! + 3\,! = 7\,!$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(στ)	$M_5 = 120$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων A, B και Γ, όπου:

$$A = 7\,! - 2 \cdot 5!\,, \quad B = \frac{10\,!}{4\,! \cdot 6\,!}, \quad \Gamma = \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{6\,!}$$

3. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να σταθούν σε ευθεία γραμμή πέντε παιδιά για φωτογράφιση:
   (α) αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός
   (β) αν το πιο ψηλό παιδί θα σταθεί στο μέσο;

4. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν επτά διαφορετικά μαθήματα να τοποθετηθούν στο πρόγραμμα μιας ημέρας με επτά περιόδους.

5. Πέντε κορίτσια και τρία αγόρια θα καθίσουν σε οκτώ συνεχόμενα καθίσματα στο θέατρο. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν, αν:
   (α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός
   (β) τα κορίτσια θα είναι σε συνεχόμενα καθίσματα;

6. Να υπολογίσετε τους αναγραμματισμούς της λέξης **ΛΥΚΕΙΟ**.
   (α) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με **Λ**;
   (β) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με **Λ** και τελειώνουν σε **Ο**;
   (γ) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με φωνήεν;
   (δ) Πόσοι από αυτούς έχουν τα φωνήεντα συνεχόμενα;

7. Με πόσους τρόπους μπορούν να σταθούν 9 παιδιά, το ένα δίπλα στο άλλο, αν:
   (α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός
   (β) ένα συγκεκριμένο παιδί θα βρίσκεται στο αριστερό άκρο
   (γ) δύο συγκεκριμένα παιδιά θα βρίσκονται στα δύο άκρα;

8. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν έξι παιδιά σε ένα κυκλικό τραπέζι; Σε πόσους από αυτούς τους τρόπους δύο συγκεκριμένα παιδιά βρίσκονται το ένα πλάι στο άλλο;

9. Δίνεται η λέξη **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**.
   (α) Να βρείτε το πλήθος όλων των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.
   (β) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από **Μ**;
   (γ) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από **Μ** και λήγουν σε **Α**;
   (δ) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από σύμφωνο;

10. (α) Να βρείτε πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης **ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ** υπάρχουν.
    (β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς:
    i. έχουν τελευταίο γράμμα το **Σ**
    ii. δεν περιέχουν την λέξη **ΑΓΩΓΟΣ**
    iii. έχουν τα σύμφωνα σε συνεχόμενες θέσεις.

3.6 ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

Διερεύνηση

Σε αγώνες στίβου στον ημιτελικό δρόμο των 100 m λαμβάνουν μέρος οκτώ αθλητές.

(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τερματίσουν στις τρεις πρώτες θέσεις;

(β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να προκριθούν οι πέντε καλύτερες θέσεις;

(γ) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους τερματίζουν οι οκτώ αθλητές;

3.6.1 Διατάξεις

Ορισμός

Διάταξη ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ είναι κάθε τοποθέτηση των κ από τα ν αντικείμενα σε σειρά.

Παρατηρήσεις

- Στη διάταξη μας ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης των αντικειμένων, όπως διαφαίνεται και από την ονομασία της. Για παράδειγμα, από το σύνολο $\{A, B\}$, η διάταξη AB είναι διαφορετική από την διάταξη BA.
- Αν $\kappa = \nu$, τότε η διάταξη ν των διαφορετικών αντικειμένων ανά ν είναι η γνωστή σε μας μετάθεση ν διαφορετικών αντικειμένων.
- Δύο διατάξεις θεωρούνται διαφορετικές, όταν:
  - έχουν έστω και ένα στοιχείο διαφορετικό, πχ $AB\Gamma \neq AB\Delta$
  - αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία, αλλά είναι τοποθετημένα σε διαφορετική σειρά, πχ $AB\Gamma \neq BA\Gamma$.

Πρόταση

Το **πλήθος των διατάξεων** ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ συμβολίζεται με $\boldsymbol{\Delta_\kappa^\nu}$ και ισχύει:

$$\boldsymbol{\Delta_\kappa^\nu = \frac{\nu!}{(\nu - \kappa)!}}$$

Απόδειξη

Η τοποθέτηση σε σειρά των κ από τα ν διαφορετικά αντικείμενα σε κ θέσεις μπορεί να πραγματοποιηθεί σε κ φάσεις. Η πρώτη φάση είναι η τοποθέτηση αντικειμένου στην πρώτη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με ν τρόπους, γιατί υπάρχουν ν διαθέσιμα αντικείμενα. Για καθέναν από αυτούς, η δεύτερη φάση είναι η τοποθέτηση αντικειμένου στη δεύτερη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\nu - 1$ τρόπους, γιατί υπάρχουν $\nu - 1$ διαθέσιμα αντικείμενα (ένα αντικείμενο έχει τοποθετηθεί στην πρώτη θέση),…., και για καθέναν από αυτούς, η κ −φάση είναι η τοποθέτηση αντικειμένου στη κ –θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\nu-(\kappa-1)$ τρόπους, γιατί υπάρχουν $\nu-(\kappa-1)$ διαθέσιμα αντικείμενα (τα άλλα $\kappa-1$ αντικείμενα έχουν τοποθετηθεί).

Φάσεις	1η θέση	2η θέση	$\cdots$	κη θέση
Τρόποι	ν	$\nu-1$	$\cdots$	$\nu-\kappa+1$

Συνεπώς, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, η τοποθέτηση των αντικειμένων μπορεί να πραγματοποιηθεί με:

$$\varDelta_\kappa^\nu=\nu\cdot(\nu-1)\cdot\ldots\cdot(\nu-\kappa+1) \text{ διαφορετικούς τρόπους}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}=\frac{(\nu-\kappa)!\,(\nu-\kappa+1)\cdot\ldots\cdot(\nu-1)\nu}{(\nu-\kappa)!}=\nu\cdot(\nu-1)\cdot\ldots\cdot(\nu-\kappa+1)$$

Συνεπώς:

$$\varDelta_\kappa^\nu=\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$$

Παράδειγμα 1

Ο κύριος Μηνάς θα επιλέξει πέντε από εννιά διαφορετικά πουκάμισα, για να φορέσει ένα, διαφορετικό κάθε μέρα, από τη Δευτέρα μέχρι τη Παρασκευή. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να πραγματοποιηθεί η επιλογή του.

Λύση

1ος τρόπος

Ζητούμε όλες τις δυνατές **διατεταγμένες** πεντάδες από ένα σύνολο εννιά στοιχείων. Επομένως, όλοι οι διαφορετικοί τρόποι επιλογής πέντε πουκαμίσων είναι το πλήθος των διατάξεων των 9 ανά 5.

Δηλαδή, έχουμε $\varDelta_5^9=\frac{9!}{(9-5)!}=\frac{9!}{4!}=9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5=15120$ διαφορετικούς τρόπους.

2ος τρόπος

Κάθε επιλογή των πέντε από τα εννιά πουκάμισα ισοδυναμεί με μια διάταξη εννιά διαφορετικών αντικειμένων ανά πέντε. Θα υπολογίσουμε το πλήθος των διατάξεων με την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης.

Η επιλογή των πουκαμίσων πραγματοποιείται σε πέντε φάσεις.

Η πρώτη φάση είναι η επιλογή του πουκαμίσου που θα φορεθεί τη Δευτέρα, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με εννιά τρόπους, γιατί υπάρχουν εννιά διαθέσιμα πουκάμισα. Η δεύτερη φάση είναι η επιλογή του πουκαμίσου που θα φορεθεί την Τρίτη, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με οκτώ τρόπους, γιατί υπάρχουν οκτώ διαθέσιμα πουκάμισα (ένα πουκάμισο έχει φορεθεί την Δευτέρα). Ομοίως, η πέμπτη φάση είναι η επιλογή του πουκαμίσου που θα φορεθεί την Παρασκευή, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με πέντε τρόπους, γιατί υπάρχουν πέντε διαθέσιμα πουκάμισα (τέσσερα πουκάμισα έχουν φορεθεί από Δευτέρα μέχρι Πέμπτη).

Φάσεις	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή
Τρόποι	9	8	7	6	5

Συνεπώς, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, η επιλογή των πέντε από τα εννιά πουκάμισα μπορεί να πραγματοποιηθεί με $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 2

Σε μια κούρσα αλόγων τρέχουν εννιά άλογα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τερματίσουν στις δύο πρώτες θέσεις, αν έχει σημασία η σειρά τερματισμού;

Λύση

1ος τρόπος

Ζητούμε όλα τα δυνατά **διατεταγμένα** ζεύγη από ένα σύνολο εννιά στοιχείων.

Επομένως, όλοι οι διαφορετικοί τρόποι τερματισμού των δύο αλόγων είναι το πλήθος των διατάξεων των 9 ανά 2.

Δηλαδή, έχουμε $\Delta_2^9 = 9 \cdot 8 = 72$ διαφορετικούς τρόπους τερματισμού.

2ος τρόπος

Με τη θεμελειώδη αρχή της απαρίθμησης έχουμε μόνο δύο θέσεις οι οποίες μπορούν να συμπληρωθούν:

Φάσεις	1η θέση	2η θέση
Τρόποι	9	8

Επομένως, έχουμε συνολικά $9 \cdot 8 = 72$ διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 3

Η κυρία Ματίνα ξέχασε τον τετραψήφιο κωδικό του συναγερμού στο σπίτι της. Θυμάται όμως ότι αποτελείται από κάποια από τα ψηφία $1, 2, 3, 4, 5$ και ότι όλα τα ψηφία του κωδικού είναι διαφορετικά.

(α) Να βρείτε πόσοι είναι όλοι οι δυνατοί κωδικοί που μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω δεδομένα.

(β) Να βρείτε πόσοι είναι όλοι οι δυνατοί κωδικοί που μπορούν να σχηματιστούν, αν η κυρία Ματίνα θυμάται ότι το τελευταίο ψηφίο του κωδικού είναι το 1.

Λύση

(α) Κάθε τοποθέτηση σε σειρά των τεσσάρων από των πέντε διαφορετικών ψηφίων ισοδυναμεί με μια διάταξη πέντε αντικειμένων ανά τέσσερα. Συνεπώς, το πλήθος των κωδικών είναι το πλήθος των διατάξεων 5 αντικειμένων ανά 4:

$$\Delta_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

(β) Αφού η τελευταία θέση είναι ήδη συμπληρωμένη, μας απομένει να συμπληρώσουμε τις υπόλοιπες τρεις θέσεις με τα τέσσερα ψηφία που έχουν απομείνει. Έχουμε, δηλαδή, διατάξεις των 4 ανά 3:

$$\Delta_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

Παράδειγμα 4

Να λύσετε την εξίσωση $\Delta_3^\nu = 12\nu, \nu \geq 3$.

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta_3^\nu = 12\nu \ &\Leftrightarrow \frac{\nu!}{(\nu-3)!} = 12\nu \Leftrightarrow \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)!}{(\nu-3)!} = 12\nu \\ &\Leftrightarrow \nu(\nu-1)(\nu-2) = 12\nu \Leftrightarrow (\nu-1)(\nu-2) = 12 \\ &\Leftrightarrow \nu^2 - 3\nu + 2 = 12 \Leftrightarrow \nu^2 - 3\nu - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\nu-5)(\nu+2) = 0 \Leftrightarrow \nu_1 = 5\,, \nu_2 = -2 \end{aligned}$$

Δεκτή λύση το $\nu_1 = 5$, ενώ απορρίπτεται η λύση $\nu_2 = -2$, γιατί πρέπει να ισχύει $\nu \geq 3$.

3.6.2 Επαναληπτικές διατάξεις

Διερεύνηση

(α) Να καταγράψετε όλα τα δυνατά αποτελέσματα που μπορούν να προκύψουν ρίχνοντας ένα νόμισμα τρεις φορές, αν είναι γνωστό ότι σε κάθε ρίψη ενδέχεται να εμφανιστεί «κορώνα» (K) ή «γράμματα» (Γ).

(β) Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα προκύπτουν;

(γ) Να αναφέρετε κατά πόσο αποτελεί διάταξη το κάθε ένα από τα αποτελέσματα που καταγράψατε. Αν όχι, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας, εντοπίζοντας που διαφοροποιείται από τη διάταξη που έχετε μάθει.

Ορισμός

Για κάθε σύνολο A με ν διακεκριμένα στοιχεία, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_\nu\}$, ορίζεται ως επαναληπτική διάταξη ν στοιχείων ανά κ, η κατάταξη σε ευθεία γραμμή των κ στοιχείων που πήραμε από τα ν, αν κάθε στοιχείο μπορεί να επαναλαμβάνεται μέχρι κ φορές.

Παρατήρηση

- Στις απλές διατάξεις των ν ανά κ ισχύει ότι $\kappa \leq \nu$. Στις επαναληπτικές διατάξεις των ν ανά κ, μπορεί το κ να είναι και μεγαλύτερο του ν $(\kappa > \nu)$. Για παράδειγμα, με στοιχεία από το σύνολο $X = \{1, 2\}$ μπορούμε να σχηματίσουμε τετραψήφιους αριθμούς, όπως $1221, 1222, 2121$, οι οποίοι αποτελούν διατάξεις των 2 ανά 4.

Πρόταση

Το πλήθος **των επαναληπτικών διατάξεων** ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ είναι ίσο με ν^{κ} και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\delta_{\kappa}^{\nu}}$. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{\delta_{\kappa}^{\nu} = \nu^{\kappa}}$$

Απόδειξη

Η τοποθέτηση των ν αντικειμένων μπορεί να πραγματοποιηθεί σε κ φάσεις.

Η πρώτη φάση είναι η τοποθέτηση αντικειμένου στην πρώτη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με ν τρόπους, γιατί υπάρχουν ν διαθέσιμα αντικείμενα. Η δεύτερη φάση είναι η τοποθέτηση αντικειμένου στην δεύτερη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με ν τρόπους, γιατί υπάρχουν ν διαθέσιμα αντικείμενα. Ομοίως, η κ-φάση είναι η τοποθέτηση αντικειμένου στην κ-θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με ν τρόπους, γιατί υπάρχουν ν διαθέσιμα αντικείμενα.

Φάσεις	1η θέση	2η θέση	$\cdots$	κη θέση
Τρόποι	ν	ν	$\cdots$	ν

Συνεπώς, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, η τοποθέτηση των ν αντικειμένων μπορεί να γίνει με $\underbrace{\nu \cdot \nu \cdot \ldots \cdot \nu}_{\kappa-\text{παράγοντες}} = \nu^{\kappa}$ διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 5

(α) Να βρείτε πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $7, 8$ και 9.

(β) Να υπολογίσετε πόσους τριψήφιους μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 4, 5$.

Λύση

(α) *1ος τρόπος*

Κάθε τοποθέτηση των τριών ψηφίων στις πέντε θέσεις ενός πενταψήφιου αριθμού αντιστοιχεί με μια επαναληπτική διάταξη των τριών αντικειμένων ανά πέντε. Επομένως, οι πενταψήφιοι αριθμοί που μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $7, 8$ και 9 είναι $\delta_5^3 = 3^5 = 243$.

2ος τρόπος

Η τοποθέτηση των ψηφίων μπορεί να πραγματοποιηθεί σε πέντε φάσεις.

Η πρώτη φάση είναι η τοποθέτηση ψηφίου στην πρώτη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με τρεις τρόπους, γιατί υπάρχουν τρία διαθέσιμα ψηφία $(7, 8, 9)$.

Η δεύτερη φάση είναι η τοποθέτηση ψηφίου στη δεύτερη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με τρεις τρόπους, γιατί υπάρχουν τρία διαθέσιμα ψηφία $(7, 8, 9)$.

Ομοίως, η πέμπτη φάση είναι η τοποθέτηση ψηφίου στην πέμπτη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με τρεις τρόπους, γιατί υπάρχουν τρία διαθέσιμα ψηφία $(7, 8, 9)$.

Φάσεις	1η θέση	2η θέση	$\cdots$	5η θέση
Τρόποι	3	3	$\cdots$	3

Συνεπώς, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, η τοποθέτηση των τριών ψηφίων σε πέντε θέσεις μπορεί να πραγματοποιηθεί με $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$ διαφορετικούς τρόπους.

(β) *1ος τρόπος*

Κάθε τοποθέτηση των πέντε ψηφίων στις τρεις θέσεις ενός τριψήφιου αριθμού αντιστοιχεί με μια επαναληπτική διάταξη των πέντε αντικειμένων ανά τρία. Επομένως, οι πενταψήφιοι αριθμοί που μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 4$ και 5 είναι $\delta_3^5 = 5^3 = 125$.

2ος τρόπος

Η τοποθέτηση των ψηφίων μπορεί να πραγματοποιηθεί σε τρεις φάσεις.

Η πρώτη φάση είναι η τοποθέτηση ψηφίου στην πρώτη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με πέντε τρόπους, γιατί υπάρχουν πέντε διαθέσιμα ψηφία $(1, 2, 3, 4, 5)$. Η δεύτερη φάση είναι η τοποθέτηση ψηφίου στη δεύτερη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με πέντε τρόπους, γιατί υπάρχουν πέντε διαθέσιμα ψηφία $(1, 2, 3, 4, 5)$. Ομοίως, η τρίτη φάση είναι η τοποθέτηση ψηφίου στην τρίτη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με πέντε τρόπους, γιατί υπάρχουν πέντε διαθέσιμα ψηφία $(1, 2, 3, 4, 5)$.

Φάσεις	1η θέση	2η θέση	3η θέση
Τρόποι	5	5	5

Συνεπώς, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, το πλήθος όλων των τριψήφιων αριθμών θα είναι $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$.

Παράδειγμα 6

(α) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν τέσσερις τουρίστες να διαμείνουν στα έξι ξενοδοχεία μιας πόλης.

(β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν οι τέσσερις τουρίστες να διαμείνουν:

i. σε διαφορετικά ξενοδοχεία

ii. στο ίδιο ξενοδοχείο.

Λύση

(α) Κάθε τοποθέτηση των τεσσάρων τουριστών στα έξι ξενοδοχεία ισοδυναμεί με μια επαναληπτική διάταξη 6 αντικειμένων ανά 4. Συνεπώς, η διαμονή των τουριστών μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\delta_4^6 = 6^4 = 1296$ διαφορετικούς τρόπους.

(β) Για το i:

Κάθε τοποθέτηση των τεσσάρων τουριστών σε έξι διαφορετικά ξενοδοχεία ισοδυναμεί με μια διάταξη έξι διαφορετικών αντικειμένων ανά τέσσερα. Συνεπώς, η διαμονή των τουριστών μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\Delta_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$ τρόπους.

Για το ii:

Οι τουρίστες μπορούν να μείνουν στο ίδιο ξενοδοχείο με έξι τρόπους, γιατί υπάρχουν έξι ξενοδοχεία.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Μια διάταξη ν διαφορετικών αντικειμένων ανά ν είναι μια μετάθεση ν διαφορετικών αντικειμένων.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ είναι ίσο με κ^{ν}.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης ν διαφορετικών αντικειμένων σε σειρά είναι ίσο με το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης $\nu-1$ από τα ν διαφορετικά αντικείμενα σε σειρά.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τερματίσουν στις τρεις πρώτες θέσεις οκτώ ισοδύναμοι αθλητές των $100\ \text{m}$;

3. Πόσοι διαφορετικοί τριψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία $\{1,2,3,4,5\}$, χωρίς επανάληψη, αν:
(α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός
(β) ο αριθμός πρέπει να είναι περιττός
(γ) ο αριθμός πρέπει να είναι περιττός και μεγαλύτερος του 400.

4. Πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε, χρησιμοποιώντας μόνο ψηφία από το σύνολο $A=\{1,2,3\}$;

5. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους 10 τουρίστες μπορούν να μπουν τυχαία σε τρία λεωφορεία.

6. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί σχηματίζοντα με τα ψηφία $1, 2, 3\ ,4, 5, 6, 7$, αν:
(α) δεν επιτρέπεται να επαναλαμβάνεται ψηφίο
(β) επιτρέπεται να επαναλαμβάνεται ψηφίο
(γ) είναι μεγαλύτεροι από το 5000 και δεν επαναλαμβάνεται ψηφίο
(δ) είναι άρτιοι μεγαλύτεροι από το 5000 και δεν επαναλαμβάνεται ψηφίο.

3.7 ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Διερεύνηση

(α) Ο καθηγητής μιας τάξης ζήτησε δύο από τα τέσσερα παιδιά A, B, Γ και Δ της τάξης του να τον βοηθήσουν. Ποιες είναι όλες οι ομάδες με τα δύο παιδιά που μπορούν να σχηματιστούν;

(β) Να εξηγήσετε κατά πόσο ο σχηματισμός όλων των δυάδων στο ερώτημα (α) αποτελεί ή όχι διάταξη των 4 ανά 2, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(γ) Πώς συνδέεται η διάταξη των 4 ανά 2 με το πλήθος των δυάδων στο ερώτημα (α);

Συνδυασμοί των $\boldsymbol{\nu}$ ανά $\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{\nu} \geq \boldsymbol{\kappa}$

Ορισμός

Συνδυασμός ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ λέγεται κάθε ομάδα των κ από τα ν αντικείμενα, χωρίς να μας ενδιαφέρει η τοποθέτησή τους σε σειρά.

Πρόταση

Το **πλήθος των συνδυασμών** ν διαφορετικών αντικειμένων ανά $\kappa\ (\kappa \leq \nu)$ συμβολίζεται με $\binom{\boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\kappa}}$ και δίνεται από τον τύπο:

$$\binom{\boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\boldsymbol{\nu}!}{\boldsymbol{\kappa}!\,(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\kappa})!}$$

Απόδειξη

Όπως γνωρίζουμε, το πλήθος των διατάξεων ν αντικειμένων ανά κ δίνεται από τον τύπο:

$$\Delta_\kappa^\nu = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$$

Θα βρούμε τώρα το Δ_κ^ν, χρησιμοποιώντας την έννοια των συνδυασμών.

Κάθε διάταξη ν αντικειμένων ανά κ μπορεί να γίνει σε δύο φάσεις.

Στην πρώτη φάση, παίρνουμε κ από τα ν αντικείμενα, το οποίο μπορεί να γίνει με $\binom{\nu}{\kappa}$ τρόπους, όσοι δηλαδή και οι συνδυασμοί των ν αντικειμένων ανά κ.

Στη δεύτερη φάση, τοποθετούμε τα κ αντικείμενα που επιλέξαμε σε σειρά, το οποίο μπορεί να γίνει με $\kappa!$ τρόπους.

Έτσι, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, έχουμε ότι:

$$\Delta_\kappa^\nu = \binom{\nu}{\kappa} \cdot \kappa! \Rightarrow \binom{\nu}{\kappa} = \frac{\Delta_\kappa^\nu}{\kappa!} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)! \cdot \kappa!}$$

Παρατηρήσεις

Σε ένα σύνολο με ν διαφορετικά στοιχεία:

- Το $\binom{\nu}{1}$ εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε ένα στοιχείο από ένα σύνολο με ν στοιχεία Είναι προφανές ότι έχουμε ν διαφορετικές επιλογές. Έτσι, $\binom{\nu}{1} = \nu$. Αυτό φυσικά υπολογίζεται και από τον τύπο:
$$\binom{\nu}{1} = \frac{\nu\,!}{1! \cdot (\nu-1)!} = \frac{\nu \cdot (\nu-1)!}{(\nu-1)!} = \nu$$

- Το $\binom{\nu}{\nu}$ εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε ν στοιχεία από το σύνολο που περιέχει ν στοιχεία. Είναι προφανές ότι έχουμε ένα μόνο τρόπο να κάνουμε αυτή την επιλογή (επιλέγοντας τα όλα). Έτσι, $\binom{\nu}{\nu} = 1$. Με τον τύπο έχουμε:
$$\binom{\nu}{\nu} = \frac{\nu\,!}{\nu! \cdot (\nu-\nu)!} = \frac{\nu\,!}{\nu! \cdot 0!} = 1$$

- Το $\binom{\nu}{0}$ εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε κανένα στοιχείο από το σύνολο που περιέχει ν στοιχεία. Είναι προφανές ότι έχουμε έναν μόνο τρόπο.
Με τον τύπο έχουμε:
$$\binom{\nu}{0} = \frac{\nu\,!}{0! \cdot (\nu-0)!} = \frac{\nu\,!}{0!\ \cdot \nu!} = 1$$

- Μια βασική ιδιότητα στους συνδυασμούς είναι η σχέση:
$$\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu-\kappa}, \nu \geq \kappa$$
Το $\binom{\nu}{\kappa}$ εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε κ στοιχεία από ένα σύνολο που περιέχει ν στοιχεία, $\nu \geq \kappa$. Σε κάθε επιλογή μιας ομάδας με κ στοιχεία αντιστοιχεί και μια ομάδα από $(\nu-\kappa)$ στοιχεία, τα οποία δεν επιλέγονται. Επομένως, το πλήθος των $\binom{\nu}{\nu-\kappa}$ θα είναι το ίδιο με το $\binom{\nu}{\kappa}$.
Με τύπο έχουμε:
$$\binom{\nu}{\nu-\kappa} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!\,[\nu-(\nu-\kappa)]!} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!\,\kappa!} = \binom{\nu}{\kappa}$$

Παράδειγμα 1

Σε μια επιτροπή συμμετέχουν 10 άτομα.

(α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει επιλογή τριών ατόμων από αυτά;

(β) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει επιλογή επτά ατόμων από αυτά;

Λύση

(α) Οι τρόποι που ζητούνται είναι οι συνδυασμοί 10 ατόμων ανά 3, δηλαδή:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{\cancel{7!}\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{3!\cdot \cancel{7!}} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$$

Άρα, η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει με 120 τρόπους.

(β) Οι τρόποι που ζητούνται είναι οι συνδυασμοί 10 ατόμων ανά 7, δηλαδή:

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\,(10-7)!} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{\cancel{7!}\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{\cancel{7!}\cdot 3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$$

Άρα, η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει με 120 τρόπους.

Παρατήρηση

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε επίσης ότι ισχύει $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$.

Αυτό αιτιολογείται από τον γενικό τύπο $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu-\kappa}$ με $\nu = 10,\ \kappa = 3$.

Παράδειγμα 2

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\binom{\nu}{2} + \binom{\nu}{1} = 15$$

Λύση

$$\begin{aligned}
\binom{\nu}{2} + \binom{\nu}{1} = 15 &\Longrightarrow \frac{\nu!}{(\nu-2)!\cdot 2!} + \frac{\nu!}{(\nu-1)!\cdot 1!} = 15 \\
&\Rightarrow \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)!}{(\nu-2)!\cdot 2!} + \frac{\nu(\nu-1)!}{(\nu-1)!\cdot 1!} = 15 \\
&\Longrightarrow \frac{\nu\cdot(\nu-1)}{2} + \nu = 15 \Longrightarrow \nu\cdot(\nu-1) + 2\nu = 30 \\
&\Longrightarrow \nu^2 - \nu + 2\nu = 30 \Longrightarrow \nu^2 + \nu - 30 = 0 \\
&\Longrightarrow (\nu-5)(\nu+6) = 0 \Longrightarrow \nu = 5, \nu = -6
\end{aligned}$$

Η λύση $\nu = 5$ είναι δεκτή ενώ η λύση $\nu = -6$ απορρίπτεται, αφού το ν είναι φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1.

Παράδειγμα 3

Μια εταιρεία θα προσλάβει τέσσερεις υπαλλήλους. Έκαναν αίτηση πέντε γυναίκες και επτά άντρες. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή, αν:

(α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός

(β) πρέπει να προσληφθούν δύο άντρες και δύο γυναίκες

(γ) πρέπει να προσληφθούν τουλάχιστον τρεις γυναίκες.

Λύση

(α) Αφού δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στην επιλογή, σημαίνει ότι από ένα σύνολο 12 ατόμων (πέντε γυναίκες και επτά άντρες) επιλέγουμε τέσσερα άτομα. Οι τρόποι που μπορεί να γίνει αυτό είναι:

$$\binom{12}{4} = \frac{12\,!}{4\,!\,\cdot 8!} = 495$$

(β) Η επιλογή των τεσσάρων ατόμων θα γίνει σε δύο φάσεις. Στη μία φάση επιλέγονται δύο από τους επτά άντρες, το οποίο μπορεί να γίνει με $\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} =$ 21 διαφορετικούς τρόπους. Στην άλλη φάση γίνεται επιλογή των δύο γυναικών από τις πέντε, το οποίο γίνεται με $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$ διαφορετικούς τρόπους. Επομένως, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν συνολικά $\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2} = 21 \cdot 10 = 210$ διαφορετικοί τρόποι.

(γ) Οι ομάδες τεσσάρων ατόμων με τουλάχιστον τρεις γυναίκες περιλαμβάνουν είτε τρεις γυναίκες και έναν άντρα είτε τέσσερις γυναίκες.

Στην πρώτη περίπτωση, το πλήθος τους είναι $\binom{5}{3}\cdot\binom{7}{1} = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{7!}{6!\cdot 1!} = 70$.

Στη δεύτερη περίπτωση τους είναι $\binom{5}{4} = \frac{5!}{1!\cdot 4!} = 5$.

Έτσι, σύμφωνα με την αρχή του αθροίσματος έχουμε συνολικά $70 + 5 = 75$ διαφορετικούς τρόπους.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Το πλήθος των συνδυασμών 9 διαφορετικών αντικειμένων ανά 2 είναι το ίδιο με το πλήθος των συνδυασμών 9 διαφορετικών αντικειμένων ανά 7.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Το πλήθος των διατάξεων ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ είναι ίσο με $\kappa!$ φορές το πλήθος των συνδυασμών ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Το πλήθος των υποσυνόλων του συνόλου $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta\}$, που έχουν πληθικό αριθμό 2 είναι 15.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   (α) $\binom{\nu}{2}=15$ (β) $\binom{\nu}{3}=\binom{\nu}{2}$

3. Ένας καθηγητής θέλει να διαλέξει τρία από τα επτά αγόρια που υπάρχουν στην τάξη του για να τον βοηθήσουν. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να κάνει την επιλογή του;

4. Πόσες χειραψίες μπορούν να ανταλλάξουν μεταξύ τους εννιά άτομα, αν όλοι κάνουν μεταξύ τους χειραψία από μία φορά;

5. Σε μια υπηρεσία πρόκειται να προσληφθούν πέντε από τους 10 υποψήφιους, οι οποίοι παρακάθισαν σε εξέταση. Οι υποψήφιοι είναι επτά άνδρες και τρεις γυναίκες. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η πρόσληψη, αν θα προσληφθούν:
   (α) τρεις άνδρες και δύο γυναίκες
   (β) τουλάχιστον τρεις άνδρες
   (γ) το πολύ δύο γυναίκες
   (δ) οπωσδήποτε ο άνδρας και η γυναίκα που πρώτευσαν στην εξέταση.

6. Πενταμελής επιτροπή θα δημιουργηθεί από μια ομάδα εννιά αντρών και επτά γυναικών. Με πόσους τρόπους μπορεί να δημιουργηθεί η συγκεκριμένη επιτροπή, αν:
   (α) δεν υπάρχει περιορισμός
   (β) μια συγκεκριμένη γυναίκα θα συμπεριλαμβάνεται στην επιτροπή
   (γ) θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο άντρες και τουλάχιστον δύο γυναίκες
   (δ) θα υπάρχουν το πολύ δύο άντρες.

7. Πόσα τρίγωνα μπορούμε να σχηματίσουμε με έξι διαφορετικά σημεία, τα οποία βρίσκονται πάνω σε κύκλο;

8. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Πάνω στην ε_1 υπάρχουν τα σημεία A, B, Γ, Δ, E και πάνω στην ευθεία ε_2 υπάρχουν τα σημεία Z, H, Θ, I. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών τριγώνων που μπορούν να σχηματιστούν με κορυφές σημεία που δίνονται από τις πιο πάνω ευθείες.

9. Δίνεται το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
   (α) Πόσα υποσύνολα υπάρχουν με πληθικό αριθμό 4;
   (β) Σε πόσα από αυτά τα υποσύνολα περιέχεται το 1;
   (γ) Σε πόσα από αυτά δεν περιέχεται το 1;

3.8 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Ιστορικό σημείωμα

Η μελέτη των Πιθανοτήτων ξεκίνησε με την προσπάθεια να λυθούν προβλήματα σχετικά με τα τυχερά παιγνίδια. Παρόλο που τα τυχερά παιγνίδια έχουν τις ρίζες τους στα βάθη των αιώνων, η μελέτη τους ξεκίνησε το $16^{ο}$ αιώνα μ.Χ.

Ο πρώτος που υπολόγισε πιθανότητες ήταν ο Gerolamo Cardano (1501-1576) στο βιβλίο του "Liber de Ludo Aleae". Το 1620 ο Γαλιλαίος έγραψε την διατριβή περί μιας ανακάλυψης σχετικής με τα ζάρια, η οποία χρησιμοποιούσε ένα πρώιμο πιθανολογικό μοντέλο για να απαντήσει σε συγκεκριμένα ερωτήματα.

Η πρώτη τεκμηριωμένη απόδειξη θεμελιωδών αρχών της θεωρίας των πιθανοτήτων έγινε στην αλληλογραφία των Blaise Pascal (1623-1662) και Pierre de Fermat (1601-1665). Η αλληλογραφία άρχισε από τον Pascal, ο οποίος ήθελε την βοήθεια του Fermat σχετικά με προβλήματα που του δόθηκαν από τον Chevalier de Mere΄, έναν ευγενή της αυλής του Λουδοβίκου του $14^{ου}$, παίκτη τυχερών παιχνιδιών.

Η θεωρία πιθανοτήτων αναπτύχθηκε ραγδαία τον $18^{ο}$ αιώνα μ.Χ με κύριους συντελεστές τον Jacob Bernoulli (1654- 1705) και τον Abraham de Moivre (1667-1754). Το 1812 ο Pierre-Simon marquis de Laplace (1749-1827) δημοσιεύει ένα θεμελιώδες σύγγραμμα στην θεωρία πιθανοτήτων, το "Theorie analytique des Probabilites".

Η αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων θα γίνει από τον Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) το 1933. Η αξιωματική προσέγγιση του Kolmogorov αποτελεί τη βάση για τη σύγχρονη θεωρία πιθανοτήτων.

Διερεύνηση

Ο πατέρας του Γιώργου και του Παναγιώτη ρίχνει ένα αμερόληπτο νόμισμα δύο φορές. Τους λέει ότι *«αν η δεύτερη ένδειξη είναι κορώνα, κερδίζει ο Γιώργος»* ενώ *«αν και οι δύο ενδείξεις είναι γράμματα, κερδίζει ο Παναγιώτης»*.

Να εξετάσετε κατά πόσο το πιο πάνω τυχερό παιγνίδι είναι δίκαιο για τα δύο παιδιά.

3.8.1 Εισαγωγή στις Πιθανότητες

Η θεωρία των Πιθανοτήτων έχει ως κύριο σκοπό και αντικείμενο μελέτης φαινόμενα, στα οποία μπορούν να εμφανιστούν πολλά και διαφορετικά αποτελέσματα (που είναι ίσως γνωστά εκ των προτέρων), αλλά χωρίς να υπάρχει τρόπος να καθοριστεί ποιο αποτέλεσμα θα εμφανίζεται κάθε φορά.

Τα τυχερά παιχνίδια φαίνεται να ήταν η απαρχή της ανάπτυξης της θεωρίας των Πιθανοτήτων, γιατί είναι διαδικασίες όπου το αποτέλεσμά τους δεν μπορεί να προβλεφθεί με σιγουριά. Μάλιστα, ένα από τα διασημότερα προβλήματα των πιθανοτήτων είχε τεθεί κατά τον $16^{ο}$ αιώνα από τον Γάλλο κόμη De Mere προς τον σπουδαίο Μαθηματικό και φιλόσοφο της εποχής Pascal:

A gambler's dispute in 1654 led to the creation of a mathematical theory of probability by two famous French mathematicians, Blaise Pascal and Pierre de Fermat. Antoine Gombaud, Chevalier de Méré, a French nobleman with an interest in gaming and gambling questions, called Pascal's attention to an apparent contradiction concerning a popular dice game. The game consisted in throwing a pair of dice 24 times; the problem was to decide whether or not to bet even money on the occurrence of at least one "double six" during the 24 throws. A seemingly well-established gambling rule led de Méré to believe that betting on a double six in 24 throws would be profitable, but his own calculations indicated just the opposite.

A Short History of Probability
From *Calculus, Volume II* by Tom M. Apostol (2nd edition, John Wiley & Sons, 1969)

3.8.2 Πείραμα τύχης – Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

Θεωρούμε τις πιο κάτω διαδικασίες:

- Ρίψη ενός νομίσματος μία φορά
- Ρίψη ενός νομίσματος τέσσερις φορές
- Ρίψη δύο ζαριών

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι είναι διαδικασίες που «παράγουν» παρατηρήσεις, οι οποίες δεν είμαστε βέβαιοι κάθε φορά ποιο θα είναι το αποτέλεσμά τους.

Ορισμός
Πείραμα τύχης λέγεται το πείραμα το οποίο όσες φορές και αν επαναληφθεί (φαινομενικά τουλάχιστον κάτω από τις ίδιες συνθήκες) δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμά του.

Σε ένα πείραμα τύχης δεν είναι με βεβαιότητα γνωστό το αποτέλεσμά του, αλλά είναι γνωστά εκ των προτέρων τα αναμενόμενα αποτελέσματά του. Για παράδειγμα, στο πείραμα τύχης

«Η ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού»

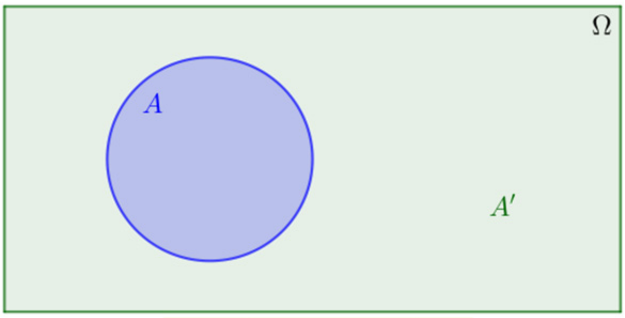
είναι εκ των προτέρων γνωστά όλα τα αποτελέσματά του, που είναι οι αριθμοί που εμφανίζονται στις έδρες του $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, χωρίς να γνωρίζουμε κάθε φορά το αποτέλεσμα.

Ορισμός

Δειγματικός χώρος λέγεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων σε ένα πείραμα τύχης και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\Omega}$.

Ορισμοί

- **Ενδεχόμενο** ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.
  Στο προηγούμενο πείραμα τύχης της ρίψης ενός ζαριού, ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Τα υποσύνολα A και B του δειγματικού χώρου Ω, με $A = \{6\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$, είναι δύο ενδεχόμενά του.
- **Απλό ενδεχόμενο** ονομάζεται κάθε μονομελές υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.
  Στο προηγούμενο πείραμα τύχης της ρίψης ενός ζαριού, το υποσύνολο A του δειγματικού χώρου Ω, με $A = \{6\}$, είναι ένα απλό ενδεχόμενό του.
- Το **συμπλήρωμα** ενός ενδεχομένου A σε έναν δειγματικό χώρο Ω πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A και συμβολίζεται με A'. Δηλαδή, το συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου A αποτελείται από όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω που δεν είναι στοιχεία του συνόλου A.



$A \cup A' = \Omega, \quad A \cap A' = \emptyset$

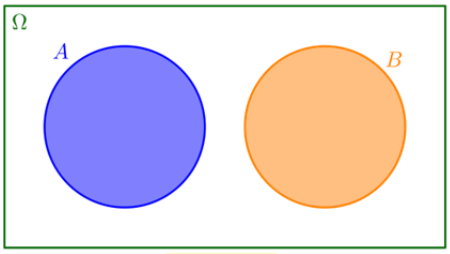
Ορισμός

Αντίθετα ενδεχόμενα λέγονται τα ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου που το ένα είναι συμπλήρωμα του άλλου.

(Δύο αντίθετα ενδεχόμενα δεν έχουν κοινά στοιχεία ($A \cap A' = \emptyset$), ενώ αν ενώσουμε τα στοιχεία των δύο συνόλων παίρνουμε ολόκληρο τον δειγματικό χώρο Ω ($A \cup A' = \Omega$)).

Ορισμός

Ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους λέγονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, όταν η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου ($A \cap B = \emptyset$). (Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα **δεν έχουν κοινά στοιχεία** ($A \cap B = \emptyset$)).



$A \cap B = \emptyset$

- Δύο αντίθετα ενδεχόμενα είναι πάντα ασυμβίβαστα, χωρίς να συμβαίνει όμως το αντίστροφο (στο παράδειγμά μας $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B \neq \Omega$).
- Το κενό σύνολο $\emptyset$ και το σύνολο Ω είναι υποσύνολα του Ω. Για τον λόγο αυτό, μπορούν να θεωρηθούν και ως ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω.

Ορισμός

Το $\emptyset$ λέγεται **αδύνατο ενδεχόμενο**, γιατί δεν πραγματοποιείται αφού δεν έχει στοιχεία και το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**, γιατί πραγματοποιείται πάντοτε.

Παράδειγμα 1

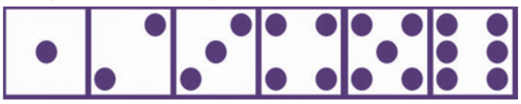
Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι μια φορά.

(α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πιο πάνω πειράματος τύχης.
(β) Να βρείτε όλα τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου.
(γ) Να βρείτε το ενδεχόμενο:

A: «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός»

Λύση

(α) Όλα τα δυνατά αποτελέσματα της ρίψης ενός ζαριού είναι:



Συνεπώς, ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(β) Τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου είναι τα μονομελή υποσύνολα του δειγματικού χώρου. Συνεπώς, όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι:

$$E_1 = \{1\}, \quad E_2 = \{2\}, \quad E_3 = \{3\}, \quad E_4 = \{4\}, \quad E_5 = \{5\}, \quad E_6 = \{6\}$$

(γ) Το ενδεχόμενο A αποτελείται από όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου που είναι άρτιοι αριθμοί. Συνεπώς, $A = \{2, 4, 6\}$.

Παράδειγμα 2

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta\}$.

(α) Να βρείτε ένα βέβαιο ενδεχόμενο του πιο πάνω δειγματικού χώρου.

(β) Να βρείτε ένα αδύνατο ενδεχόμενο του πιο πάνω δειγματικού χώρου.

(γ) Να βρείτε το συμπλήρωμα του ενδεχομένου $A = \{\alpha, \beta, \varepsilon\}$.

(δ) Να βρείτε ένα ενδεχόμενο ασυμβίβαστο με το A και να εξηγήσετε γιατί μπορεί και να μην είναι αντίθετο με το A.

Λύση

(α) Ένα βέβαιο ενδεχόμενο είναι ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta\}$.

(β) Ένα αδύνατο ενδεχόμενο είναι το κενό σύνολο $\emptyset$.

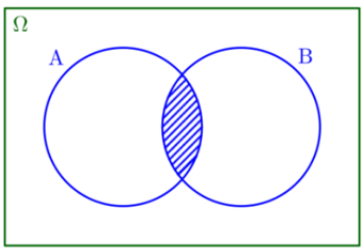
(γ) Το συμπλήρωμα του ενδεχομένου A περιλαμβάνει τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω που δεν είναι στοιχεία του συνόλου A. Συνεπώς, $A' = \{\gamma, \delta, \zeta, \eta\}$.

(δ) Ένα ασυμβίβαστο ενδεχόμενο με το A είναι το $B = \{\zeta, \eta\}$, γιατί δεν έχουν κοινά στοιχεία. Δεν είναι αντίθετο με το A, γιατί η ένωσή τους δεν μας δίνει ολόκληρο τον δειγματικό χώρο Ω.

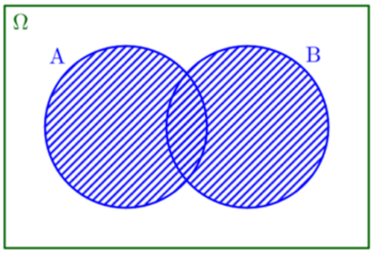
3.8.3 Πράξεις με ενδεχόμενα

Κατά την διεξαγωγή ενός πειράματος τύχης, από δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω μπορούν να δημιουργηθούν και άλλα ενδεχόμενα, ως αποτέλεσμα πράξης μεταξύ των δύο ενδεχομένων.

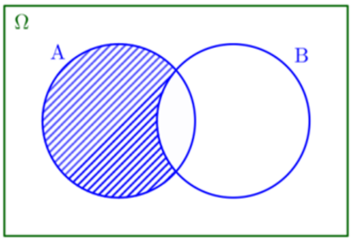
- Η **τομή δύο ενδεχομένων** A και B του δειγματικού χώρου Ω πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιηθούν συγχρόνως και τα δύο ενδεχόμενα και συμβολίζεται με $A \cap B$. Δηλαδή, η τομή $A \cap B$ είναι το ενδεχόμενο του πειράματος τύχης που περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω, τα οποία ανήκουν και στο ενδεχόμενο A και στο ενδεχόμενο B.



- Η **ένωση δύο ενδεχομένων** A και B του δειγματικού χώρου Ω πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα δύο ενδεχόμενα και συμβολίζεται με $A \cup B$. Δηλαδή, η ένωση $A \cup B$ είναι το ενδεχόμενο του πειράματος τύχης που περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω, τα οποία ανήκουν είτε στο ενδεχόμενο A είτε στο ενδεχόμενο B.



- Η **διαφορά του ενδεχομένου B από το ενδεχόμενο A** του ίδιου δειγματικού χώρου Ω πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A και δεν πραγματοποιείται το B και συμβολίζεται με $A - B$. Δηλαδή, είναι το ενδεχόμενο του πειράματος τύχης που περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω, τα οποία ανήκουν στο ενδεχόμενο A αλλά δεν ανήκουν στο ενδεχόμενο B.
  Ισχύει $A - B = A \cap B'$.



Παράδειγμα 3

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα δύο φορές. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: «Η πρώτη ένδειξη είναι γράμματα»

B: «Οι δύο ενδείξεις είναι κορώνα»

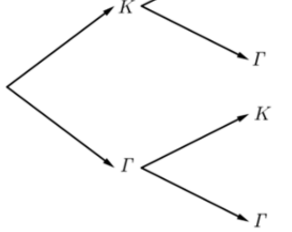
(α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω και τα ενδεχόμενα A και B.

(β) Να βρείτε τα ενδεχόμενα $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.

(γ) Να εξετάσετε κατά πόσο τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.

(δ) Να εξετάσετε κατά πόσο τα ενδεχόμενα A και B είναι αντίθετα.

Λύση



(α) Συμβολίζουμε με K την ένδειξη «Κορώνα» και με Γ την ένδειξη «Γράμματα». Συνεπώς, ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$, όπως φαίνεται και στο διπλανό δενδροδιάγραμμα.

Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται, όταν η πρώτη ένδειξη είναι γράμματα. Επομένως, επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του Ω που έχουν ως πρώτη ένδειξη γράμματα. Δηλαδή, $A = \{ΓΚ, ΓΓ\}$.

Το ενδεχόμενο B πραγματοποιείται, όταν και οι δύο ενδείξεις είναι κορώνα. Επομένως, επιλέγουμε εκείνο τα στοιχείο του Ω που έχει και τις δύο ενδείξεις του κορώνα. Δηλαδή, $B = \{ΚΚ\}$.

(β) Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα δύο ενδεχόμενα. Επομένως, επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του Ω που είναι είτε στοιχεία του A, είτε στοιχεία του B.
Δηλαδή, $A \cup B = \{ΚΚ, ΓΚ, ΓΓ\}$.
Το ενδεχόμενο $A \cap B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιηθούν συγχρόνως και τα δύο ενδεχόμενα. Επομένως, επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του Ω που είναι κοινά στοιχεία του A και του B. Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία. Δηλαδή, $A \cap B = \emptyset$.
Το ενδεχόμενο $A - B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιηθεί το A και δεν πραγματοποιηθεί το B. Επομένως, επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του Ω που είναι στοιχεία του A και δεν είναι στοιχεία του B. Δηλαδή, $A - B = \{ΓΚ, ΓΓ\}$.

(γ) Τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα, γιατί δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο ($A \cap B = \emptyset$).

(δ) Παρατηρούμε ότι $A' = \{ΚΚ, ΚΓ\}$. Επομένως, τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι αντίθετα, αφού το ένα δεν είναι το συμπλήρωμα του άλλου ($A' \neq B$).

3.8.4 Κλασσικός ορισμός Πιθανότητας

Κλασσικός ορισμός πιθανότητας κατά Laplace

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ ο πεπερασμένος δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, του οποίου όλα τα απλά ενδεχόμενα έχουν την ίδια πιθανότητα να πραγματοποιηθούν (δηλαδή είναι ισοπίθανα). Τότε, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A είναι το πηλίκο:

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος στοιχείων του } A}{\text{πλήθος στοιχείων του } \Omega} = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}$$

Τα στοιχεία του ενδεχομένου A ονομάζονται συνήθως και **«ευνοϊκές περιπτώσεις»** ή **«ευνοϊκά αποτελέσματα»**, ενώ τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω «**δυνατές περιπτώσεις**» ή **«δυνατά αποτελέσματα»**.

Παρατήρηση

Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου A εξαρτάται μόνο από το πλήθος $\nu(A)$ των στοιχείων του A και όχι από το ποια ακριβώς στοιχεία αποτελείται.

Παράδειγμα 4

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι μία φορά. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: «Η ένδειξη να είναι αριθμός μεγαλύτερος του 4»

B: «Η ένδειξη να είναι πρώτος αριθμός»

Λύση

Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, με $\nu(\Omega) = 6$.

Το ενδεχόμενο A είναι $A = \{5, 6\}$, με $\nu(A) = 2$. Οπότε:

$$P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Το ενδεχόμενο B είναι $B = \{2, 3, 5\}$, με $\nu(B) = 3$. Οπότε:

$$P(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 5

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι δύο φορές. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των πιο κάτω ενδεχομένων:

A: «Ίσες ενδείξεις και τις δύο φορές»

B: «Το άθροισμα των ενδείξεων να είναι 6»

Γ: «Το γινόμενο των ενδείξεων να είναι 12»

Δ: «Η πρώτη ένδειξη περιττή μικρότερη του 4 και η δεύτερη ένδειξη άρτια»

Λύση

Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β), όπου τα α, β οι φυσικοί αριθμοί από το 1 μέχρι και το 6, με το α να δείχνει την ένδειξη του ζαριού την πρώτη φορά και το β την ένδειξη του ζαριού τη δεύτερη φορά.

Σχηματικά, μπορούμε να τους τοποθετήσουμε σε ένα πίνακα διαστάσεων 6×6, όπως φαίνεται πιο κάτω, με τα στοιχεία του Ω.

Έχουμε ότι $\nu(\Omega) = 6^2 = 36$.

	1	2	3	4	5	6
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

Έχουμε:

$$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}, \quad \nu(A) = 6, \quad P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}, \quad \nu(B) = 5, \quad P(B) = \frac{5}{36}$$

$$\Gamma = \{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}, \quad \nu(\Gamma) = 4, \quad P(\Gamma) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\Delta = \{(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6)\}, \quad \nu(\Delta) = 6, \quad P(\Delta) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Παράδειγμα 6

Σε ένα δοχείο υπάρχουν μαύρες, κόκκινες και οκτώ άσπρες μπάλες. Αν επιλέξουμε τυχαία μια μπάλα από το δοχείο, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι 0,4 και η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι 0,5. Να υπολογίσετε:

(α) πόσες είναι όλες οι μπάλες

(β) πόσες είναι οι μαύρες και πόσες είναι οι κόκκινες μπάλες

(γ) την πιθανότητα του ενδεχομένου να επιλέξουμε κόκκινη μπάλα.

Λύση

(α) Το πλήθος των μπαλών στο δοχείο είναι ίσο με το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω.

Ορίζουμε το ενδεχόμενο

A: «Η μπάλα που επιλέγουμε είναι άσπρη»,

με $\nu(A) = 8$ και $P(A) = 0{,}4$.

Εφαρμόζουμε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας και έχουμε:

$$P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{4}{10} = \frac{8}{\nu(\Omega)} \Leftrightarrow \nu(\Omega) = 20$$

(β) Ορίζουμε το ενδεχόμενο

M: «Η μπάλα που επιλέγουμε είναι μαύρη»,

με $P(M) = 0{,}5$.

Εφαρμόζουμε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας και έχουμε:

$$P(M) = \frac{\nu(M)}{\nu(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\nu(M)}{20} \Leftrightarrow \nu(M) = 10$$

Συνεπώς, οι μαύρες μπάλες στο δοχείο είναι 10. Αφού όλες οι μπάλες είναι 20, οι άσπρες 8 και οι μαύρες 10, τότε οι κόκκινες μπάλες είναι $20 - 8 - 10 = 2$.

(γ) Ορίζουμε το ενδεχόμενο

K: «Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη»

Εφαρμόζουμε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας και έχουμε:

$$P(K) = \frac{\nu(K)}{\nu(\Omega)} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Ο δειγματικός χώρος είναι ένα βέβαιο ενδεχόμενο.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Όταν δύο ενδεχόμενα πραγματοποιηθούν συγχρόνως, τότε πραγματοποιείται η τομή των δύο ενδεχομένων.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Το ενδεχόμενο $A - B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιηθούν συγχρόνως το A και το συμπλήρωμα του B.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα και πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A, τότε πραγματοποιείται το συμπλήρωμα του B.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ε)	Δυο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα είναι πάντα αντίθετα.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(στ)	Ισχύει ότι $A' \cup A = \Omega$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(ζ)	Τα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω στα πιο κάτω πειράματα τύχης:
   (α) Ρίχνουμε ένα νόμισμα μία φορά που έχει δύο όψεις, «Κορώνα» **Κ** και «Γράμματα» **Γ**.
   (β) Ρίχνουμε δύο νομίσματα μία φορά.
   (γ) Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι μία φορά.
   (δ) Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι δύο φορές.

3. Μια οικογένεια έχει τρία παιδιά. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
   A: «Το πρώτο παιδί είναι αγόρι»
   B: «Το τρίτο παιδί είναι κορίτσι»
   Γ: «Το πρώτο παιδί είναι αγόρι και το τρίτο παιδί κορίτσι»

   Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω και τα ενδεχόμενα A, B και Γ.

4. Να βρείτε τον πληθικό αριθμό των πιο κάτω πειραμάτων τύχης:
   (α) Ρίψη τριών ζαριών.
   (β) Μια οικογένεια έχει τέσσερα παιδιά.
   (γ) Επιλογή τριών παιδιών από μία τάξη των 18 μαθητών.
   (δ) Επιλογή δύο μπαλών από ένα δοχείο που περιέχει τέσσερεις άσπρες και πέντε μαύρες μπάλες.
   (ε) Ρίψη ενός νομίσματος 10 φορές.
   (στ) Τα αποτελέσματα σε πέντε αγώνες σκακιού μεταξύ δύο παικτών.

5. Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Να αντιστοιχίσετε κάθε πρόταση της 1ης στήλης με το αντίστοιχο ενδεχόμενο της 2ης στήλης (πιθανόν να αντιστοιχούν και περισσότερα από ένα ενδεχόμενα).

1η στήλη	**2η στήλη**
(α) Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα και το A και το B.	1. $A \cup B$
(β) Δεν πραγματοποιείται το B.	2. A
(γ) Πραγματοποιείται το A.	3. $A - B$
(δ) Πραγματοποιείται μόνο το B.	4. B'
(ε) Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A και B.	5. $A' \cap B'$
(στ) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B.	6. $A' \cup B'$
	7. $A \cap B$
	8. $A' \cap B$

6. Σε ένα συνεργείο αυτοκινήτων γίνεται έλεγχος κατά πόσο ένα αυτοκίνητο έχει είτε μηχανική είτε ηλεκτρική βλάβη. Επιλέγουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: «Το αυτοκίνητο να έχει μηχανική βλάβη»
B: «Το αυτοκίνητο να έχει ηλεκτρική βλάβη»

(α) Τι εκφράζει το ενδεχόμενο A';
(β) Τι εκφράζει το ενδεχόμενο $A \cap B'$;
(γ) Τι εκφράζει το ενδεχόμενο $A \cup B$;
(δ) Πώς συμβολίζεται το ενδεχόμενο «Το αυτοκίνητο δεν έχει βλάβη»;
(ε) Πώς συμβολίζεται το ενδεχόμενο «Το αυτοκίνητο έχει μόνο ηλεκτρική βλάβη»;
(στ) Πώς συμβολίζεται το ενδεχόμενο «Το αυτοκίνητο έχει ακριβώς μία από τις δύο βλάβες»;

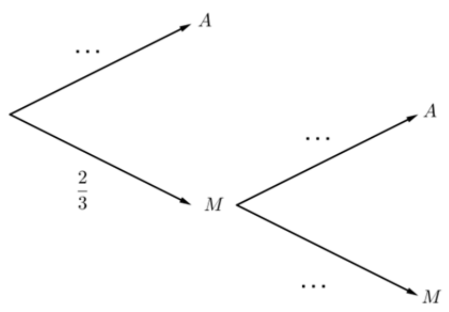
7. Σε ένα δοχείο υπάρχουν μαύρες και άσπρες μπάλες. Αν επιλέξουμε τυχαία μια μπάλα από το δοχείο, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι 0,4. Αν στο δοχείο τοποθετούσαμε ακόμα δύο άσπρες και επιλέγαμε τυχαία μια μπάλα, η πιθανότητα να πάρουμε άσπρη μπάλα θα ήταν 0,5. Να βρείτε πόσες είναι οι μαύρες και πόσες είναι άσπρες μπάλες στο δοχείο.

3.8.5 Αξιωματικός ορισμός Πιθανότητας

Διερεύνηση

Ένα κουτί περιέχει δύο άσπρες και τέσσερεις μαύρες μπάλες. Κάποιος επιλέγει τυχαία μία μπάλα από το κουτί. Αν η μπάλα είναι άσπρη, τότε κερδίζει. Αν είναι μαύρη, την αφήνει έξω από το κουτί και επιλέγει τυχαία ακόμα μία μπάλα. Αν αυτή είναι άσπρη, τότε κερδίζει.

(α) Να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος και να συμπληρώσετε τις αντίστοιχες πιθανότητες στο πιο κάτω δενδροδιάγραμμα.



(β) Να εξηγήσετε γιατί τα τρία ενδεχόμενα του πειράματος δεν είναι ισοπίθανα, δηλαδή ότι οι $P(A), P(MA)$ και $P(MM)$ δεν είναι μεταξύ τους ίσες.

(γ) Να αιτιολογήσετε γιατί $P(\text{να κερδίσει}) \neq \frac{2}{3}$.

Τα μειονεκτήματα του κλασσικού ορισμού της πιθανότητας είναι ότι εφαρμόζεται σε δειγματικούς χώρους με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και απλά ενδεχόμενα με την ίδια δυνατότητα να εμφανιστούν. Το 1933 ο Kolmogorov παρουσίασε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας, ο οποίος δεν έχει τα πιο πάνω μειονεκτήματα.

Αξιωματικός ορισμός Kolmogorov

Αν Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, ονομάζουμε συνάρτηση πιθανότητας κάθε συνάρτηση P, με πεδίο ορισμού το σύνολο των ενδεχομένων του πειράματος τύχης και με τιμές στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα αξιώματα

(αξιώματα Kolmogorov)

(α) $P(A) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο A

(β) $P(\Omega) = 1$

(γ) Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα τότε ισχύει: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Άμεσες συνέπειες των πιο πάνω αξιωμάτων είναι ότι:

- ✓ $P(\emptyset) = 0$ και $0 \leq P(A) \leq 1$, για κάθε ενδεχόμενο A
- ✓ $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$ για όλα τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3, \dots$ που είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους.

Πρόταση

Έστω A και B ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Τότε, ισχύουν οι σχέσεις:

(α) $P(A') = 1 - P(A)$

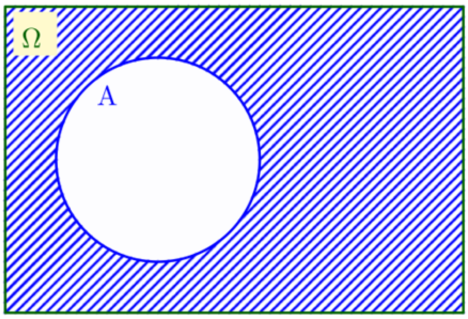
(β) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(γ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Απόδειξη

(α) Αφού τα ενδεχόμενα A και A' είναι ασυμβίβαστα και ισχύει ότι $A \cup A' = \Omega$. Έτσι, εφαρμόζουμε το τρίτο αξίωμα του Kolmogorov και έχουμε:

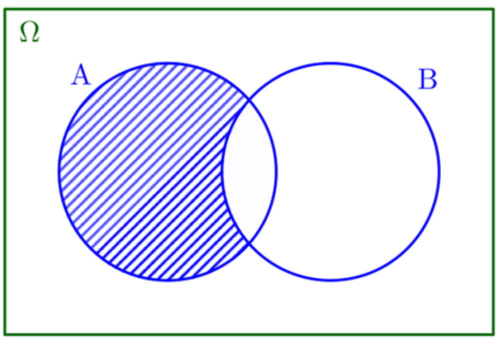
$$P(A \cup A') = P(\Omega) \Rightarrow P(A) + P(A') = 1$$
$$\Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$



Έχουμε εφαρμόσει και το δεύτερο αξίωμα του Kolmogorov ($P(\Omega) = 1$).

(β) Τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα, γιατί δεν υπάρχουν στοιχεία του Ω που να είναι ταυτόχρονα στοιχεία του $A - B$ και του $A \cap B$. Ισχύει ότι $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, γιατί ένα στοιχείο του A είτε θα είναι στοιχείο του A και του B είτε θα είναι στοιχείο του A και του συμπληρώματος του B. Αφού ισχύουν τα πιο πάνω, εφαρμόζουμε το τρίτο αξίωμα του Kolmogorov:

$$P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)] \Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$
$$\Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$



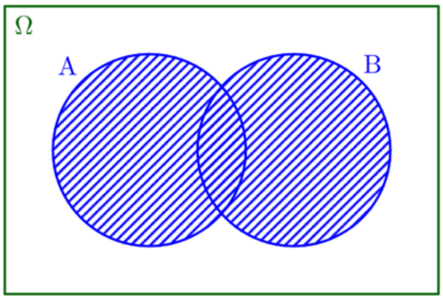
(γ) Τα ενδεχόμενα $A - B$ και B είναι ασυμβίβαστα, γιατί δεν υπάρχουν στοιχεία του Ω που να είναι ταυτόχρονα στοιχεία του $A - B$ και του B. Ισχύει ότι $A \cup B = (A - B) \cup B$, γιατί ένα στοιχείο της ένωσης $A \cup B$ είτε θα είναι στοιχείο μόνο του A είτε θα είναι στοιχείο του B.

Αφού ισχύουν τα πιο πάνω, εφαρμόζουμε το τρίτο αξίωμα του Kolmogorov:

$$P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B] \Rightarrow P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$$

Θα εφαρμόσουμε την σχέση $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ από το (β). Έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Παράδειγμα 7

Σε ένα τμήμα με 24 μαθητές, οι 10 επέλεξαν Βιολογία, οι οκτώ Χημεία και έξι επέλεξαν και τα δύο μαθήματα.

Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: «Ο μαθητής έχει επιλέξει και τα δύο μαθήματα»
B: «Ο μαθητής δεν έχει επιλέξει Χημεία»
Γ: «Ο μαθητής έχει επιλέξει μόνο Βιολογία»
Δ: «Ο μαθητής έχει επιλέξει τουλάχιστον ένα από τα δύο μαθήματα»
E: «Ο μαθητής δεν έχει επιλέξει κανένα από τα δύο μαθήματα»

Λύση

Ορίζουμε τα απλά ενδεχόμενα

H: «Ο μαθητής επιλέγει Βιολογία»
Θ: «Ο μαθητής επιλέγει Χημεία»

Παρατηρούμε ότι:

$$P(H) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12},\ P(\Theta) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3},\ P(H \cap \Theta) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Έχουμε:

$$P(A) = P(H \cap \Theta) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = P(\Theta') = 1 - P(\Theta) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(\Gamma) = P(H - \Theta) = P(H) - P(H \cap \Theta) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$P(\Delta) = P(H \cup \Theta) = P(H) + P(\Theta) - P(H \cap \Theta) = \frac{5}{12} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(E) = P(\Delta') = 1 - P(\Delta) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 8

Η πιθανότητα να απουσιάζει κάποια μέρα ένας μαθητής του τμήματος Γ_6 από το σχολείο είναι 0,01, η πιθανότητα να απουσιάζει ένας μαθητής του τμήματος Γ_7 είναι 0,05 και η πιθανότητα να απουσιάζουν τουλάχιστον ένας από τους δύο είναι 0,055.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: «Να μην απουσιάζει κανένας από τους δύο»

B: «Να απουσιάζουν και οι δύο»

Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

M: «Απουσιάζει ο μαθητής του τμήματος Γ_6»

Φ: «Απουσιάζει ο μαθητής του τμήματος Γ_7»

Από τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε ότι $P(M) = 0{,}01$, $P(\Phi) = 0{,}05$ και $P(M \cup \Phi) = 0{,}055$. Έτσι:

$$P(A) = P(M \cup \Phi)' = 1 - P(M \cup \Phi) = 1 - 0{,}055 = 0{,}945$$
$$P(B) = P(M \cap \Phi) = P(M) + P(\Phi) - P(M \cup \Phi) = 0{,}01 + 0{,}05 - 0{,}055 = 0{,}005$$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα, τότε ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Ισχύει ότι $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν ισχύει ότι $P(B) = 1 - P(A)$, τότε τα ενδεχόμενα A και B είναι αντίθετα.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν $P(A) = P(B)$, τότε ισχύει σίγουρα $A = B$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου με

$$P(A) = \frac{2}{3}\,, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6} \text{ και } 3P(B) = P(B').$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

(α)	$P(A')$	(β)	$P(A - B)$	(γ)	$P(B)$
(δ)	$P(A \cap B')$	(ε)	$P(A \cup B)$	(στ)	$P(A' \cup B)$

3. Ένα ταξιδιωτικό γραφείο είχε 72 πελάτες για το μήνα Απρίλιο. Από αυτούς, 34 ταξίδεψαν στην Ευρώπη, 16 ταξίδεψαν στην Ασία και 6 πελάτες ταξίδεψαν και στις δύο ηπείρους. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα πελάτη, να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων ο πελάτης αυτός:

A: «Να έχει ταξιδέψει και στις δύο ηπείρους»
B: «Να μην έχει ταξιδέψει στην Ευρώπη»
Γ: «Να έχει ταξιδέψει μόνο στην Ασία»
Δ: «Να έχει ταξιδέψει σε τουλάχιστον μία από τις δύο ηπείρους»
E: «Να μην έχει ταξιδέψει σε καμία από τις δύο ηπείρους»
Z: «Να έχει ταξιδέψει ακριβώς μία από τις δύο ηπείρους»
H: «Να έχει ταξιδέψει σε το πολύ μία από τις δύο ηπείρους»

4. Η πιθανότητα να πάει σήμερα στην προπόνηση της ομάδας ένας ποδοσφαιριστής είναι 0,7. Η πιθανότητα να πάει στην προπόνηση και να μην αγωνιστεί στον αυριανό αγώνα είναι 0,3, ενώ η πιθανότητα να μην πάει στην προπόνηση και να αγωνιστεί στον αυριανό αγώνα είναι 0,1. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να αγωνιστεί στον αυριανό αγώνα.

5. Ένα κουτί περιέχει δύο άσπρες, τρεις κόκκινες και μία πράσινη μπάλα. Παίρνουμε τυχαία δύο μπάλες μαζί. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: «Και οι δύο μπάλες είναι άσπρες»
B: «Οι δύο μπάλες έχουν διαφορετικό χρώμα»

6. Σε μια ομάδα εργασίας για το περιβάλλον συμμετέχουν οκτώ Ευρωπαίοι και τρεις Αμερικανοί επιστήμονες. Από αυτούς, θα επιλεγεί τυχαία μια τετραμελής επιτροπή. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

   A: «Η επιτροπή να αποτελείται από δύο Ευρωπαίους και δυο Αμερικανούς»

   B: «Η επιτροπή να αποτελείται από τρεις τουλάχιστον Ευρωπαίους»

   Γ: «Η επιτροπή να αποτελείται από επιστήμονες της ίδιας ηπείρου»

   Δ: «Στην επιτροπή να αντιπροσωπεύονται και οι δύο ήπειροι»

7. Η ομάδα καλαθόσφαιρας του σχολείου μας αποτελείται από δύο μαθητές της Α΄ Λυκείου, τέσσερεις μαθητές της Β΄ Λυκείου και από τρεις μαθητές της Γ΄ Λυκείου. Ο γυμναστής προβληματίζεται ποιους να διαλέξει ως πρώτη πεντάδα, γιατί είναι όλοι τους ισοδύναμοι. Αν η επιλογή του γίνει τυχαία, ποια είναι η πιθανότητα στην πρώτη του επιλογή:

   (α) να υπάρχουν δύο μαθητές της Γ΄, δύο της Β΄ και ένας από την Α΄ Λυκείου

   (β) να μην υπάρχει μαθητής από την Α΄ Λυκείου

   (γ) να υπάρχουν τουλάχιστον τρεις μαθητές από την Β΄ Λυκείου.

3.9 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

3.9.1 Ενδεχόμενα υπό συνθήκη – Δεσμευμένη Πιθανότητα

Διερεύνηση

Κατά τη διάρκεια του 2016 δοκιμάστηκε μια νέα μέθοδος θεραπείας για την αντιμετώπιση μιας παιδικής ασθένειας παράλληλα με την παραδοσιακή μέθοδο, με σκοπό να γίνουν συγκρίσεις για την απόδοση των δύο μεθόδων θεραπείας. Τα αποτελέσματα καταγράφηκαν στον πιο κάτω πίνακα.

	Παραδοσιακή μέθοδος	Νέα μέθοδος	Συνολικός αριθμός ατόμων
Επιτυχία	960	1120	2080
Αποτυχία	640	280	920
Συνολικός αριθμός ατόμων	1600	1400	3000

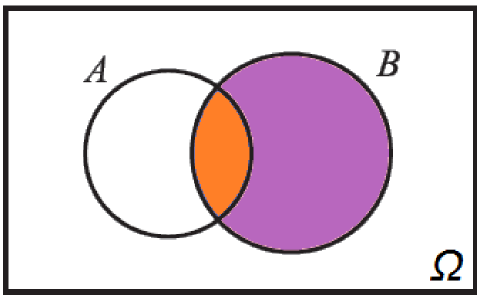
(α) Ποια είναι η πιθανότητα ένα παιδί με τη συγκεκριμένη ασθένεια να θεραπεύτηκε με βάση τα πιο πάνω στοιχεία;

(β) Αν γνωρίζουμε ότι σε κάποιο παιδί εφαρμόστηκε η νέα μέθοδος θεραπείας, ποια είναι η πιθανότητα να έχει θεραπευτεί;

(γ) Αν γνωρίζουμε ότι ένα παιδί έχει θεραπευτεί, ποια είναι η πιθανότητα να του είχε παρασχεθεί η νέα μέθοδος θεραπείας;

Πολλές φορές ο υπολογισμός της πιθανότητας πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου επηρεάζεται σημαντικά από την πληροφορία ότι ένα άλλο ενδεχόμενο έχει ήδη πραγματοποιηθεί.

Έχουμε δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(B) > 0$, και ζητούμε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου A, με δεδομένο ότι έχει ήδη πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B. Η πραγματοποίηση του ενδεχομένου B μας περιορίζει στα στοιχεία του B για να βρούμε «ευνοϊκά στοιχεία» για το A. Άρα, θεωρούμε ως νέο σύνολο αναφοράς το B και το ενδεχόμενο A περιορίζεται στο $A \cap B$.



Δηλαδή, η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A, δεδομένου ότι έχει ήδη πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B, συμβολίζεται με $P(A|B)$ και υπολογίζεται ως εξής:

$$P(A|B)=\frac{\nu(A\cap B)}{\nu(B)}=\frac{\frac{\nu(A\cap B)}{\nu(\Omega)}}{\frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Δεσμευμένη ή υπό συνθήκη πιθανότητα

Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(B)>0$, τότε η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A, δεδομένου ότι πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο B, λέγεται **δεσμευμένη ή υπό συνθήκη πιθανότητα** του A με δεδομένο το B. Συμβολίζεται με $P(A|B)$ και ισχύει η σχέση:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Ως άμεση συνέπεια της πιο πάνω σχέσης έχουμε ότι

$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)$ ή αντίστοιχα $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)$.

Παράδειγμα 1

Μια αντιπροσωπεία αποτελείται από τρεις γυναίκες και πέντε άντρες. Δύο από τους άντρες και μια από τις γυναίκες είναι αριστερόχειρες. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Ορίζουμε το ενδεχόμενο A: «Το άτομο να είναι αριστερόχειρας».

(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A)$.

(β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου A, όταν γνωρίζουμε ότι το άτομο το οποίο έχει επιλεγεί είναι γυναίκα.

Λύση

(α) Έχουμε:

$$P(A)=\frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}=\frac{3}{8}$$

(β) Ορίζουμε το ενδεχόμενο $B=$\{Το άτομο να είναι γυναίκα\} με $\nu(B)=3$. Έχουμε:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}$$

Παράδειγμα 2

Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A|B)=\frac{3}{5}$, $P(B|A)=\frac{2}{5}$ και $P(A-B)=\frac{1}{2}$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.

Λύση

Έχουμε:

$$P(A|B)=\frac{3}{5}\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{5}P(B) \quad (1)$$

$$P(B|A)=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{5}P(A) \quad (2)$$

$$P(A-B)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3), έχουμε:

$$P(A)-\frac{2}{5}\cdot P(A)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{5}\cdot P(A)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow P(A)=\frac{5}{6}$$

Από τη σχέση (2), έχουμε:

$$P(A\cap B)=\frac{2}{5}P(A)\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{3}$$

Από τη σχέση (1), έχουμε:

$$P(A\cap B)=\frac{3}{5}\cdot P(B)\Leftrightarrow\frac{1}{3}=\frac{3}{5}\cdot P(B)\Leftrightarrow P(B)=\frac{5}{9}$$

Παράδειγμα 3

Σε μια έρευνα, 1000 άτομα ρωτήθηκαν αν είναι ικανοποιημένοι από το οδικό δίκτυο της χώρας τους. Οι απαντήσεις τους δίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

	Ναι	Όχι	Σύνολο
Άντρες	400	150	550
Γυναίκες	350	100	450
Σύνολο	750	250	1000

Επιλέγουμε ένα ερωτηματολόγιο στην τύχη.

(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η απάντηση στην πιο πάνω ερώτηση να είναι «Ναι».

(β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η απάντηση στην ερώτηση να είναι «Ναι» και να έχει απαντηθεί από άντρα.

(γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η απάντηση στη ερώτηση να είναι «Ναι», αν γνωρίζουμε ότι έχει απαντηθεί από άντρα.

(δ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η απάντηση στη ερώτηση να είναι «Όχι», αν γνωρίζουμε ότι έχει απαντηθεί από γυναίκα.

(ε) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η ερώτηση να απαντήθηκε από άντρα, αν γνωρίζουμε ότι η απάντηση ήταν «Ναι».

Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: «Το άτομο είναι άντρας»
Γ: «Το άτομο είναι γυναίκα»
N: «Το άτομο απάντησε «Ναι»»
O: «Το άτομο απάντησε «Όχι»»

(α) Έχουμε:

$$P(N) = \frac{\nu(N)}{\nu(\Omega)} = \frac{750}{1000} = \frac{3}{4}$$

(β) Έχουμε:

$$P(N \cap A) = \frac{\nu(N \cap A)}{\nu(\Omega)} = \frac{400}{1000} = \frac{2}{5}$$

(γ) Έχουμε:

$$P(N|A) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{550}{1000}} = \frac{8}{11}$$

(δ) Έχουμε:

$$P(O|\Gamma) = \frac{P(O \cap \Gamma)}{P(\Gamma)} = \frac{\frac{100}{1000}}{\frac{450}{1000}} = \frac{2}{9}$$

(ε) Έχουμε:

$$P(A|N) = \frac{P(N \cap A)}{P(N)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{15}$$

Παράδειγμα 4

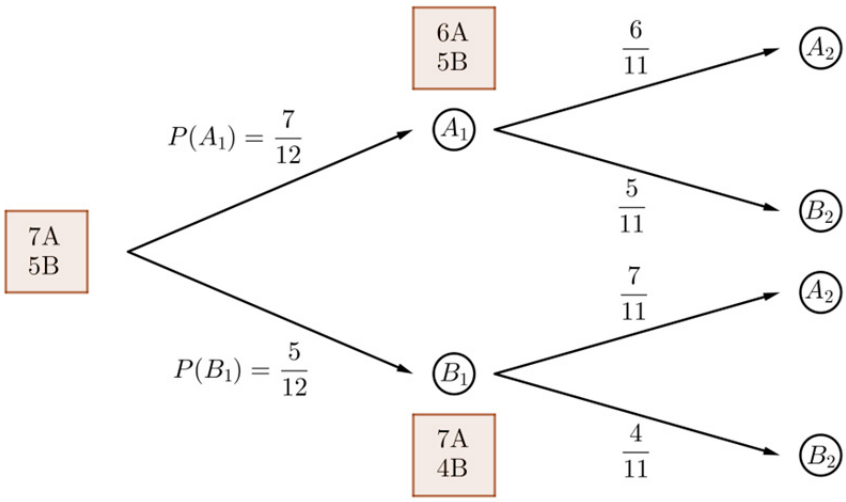
Στην κληρωτίδα για δύο μεγάλα δώρα υπάρχουν τα ονόματα επτά μαθητών της Α΄ τάξης και πέντε μαθητών της Β΄ τάξης που διακρίθηκαν για την προσφορά τους στο σχολείο.
Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

E_1: «Το 1$^{\text{ο}}$ δώρο να το κερδίσει μαθητής της Α΄ και το 2$^{\text{ο}}$ μαθητής της Β΄ τάξης»
E_2: «Ένα μόνο από τα δύο δώρα να το κερδίσει μαθητής της Β΄ τάξης»
E_3: «Το 2$^{\text{ο}}$ δώρο να το κερδίσει μαθητής της Α΄ τάξης»
E_4: «Το 1$^{\text{ο}}$ δώρο να το κερδίσει μαθητής της Β΄ τάξης, δεδομένου ότι το 2$^{\text{ο}}$ το κέρδισε μαθητής της Α΄ τάξης»

Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A_i: «Το i −δώρο να το κερδίσει μαθητής της Α΄ τάξης», $i = 1,2$
B_i: «Το i −δώρο να το κερδίσει μαθητής της Β΄ τάξης», $i = 1,2$



Έχουμε:

$$P(E_1) = P(A_1 \cap B_2) = P(A_1) \cdot P(B_2|A_1) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$$

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1) \cdot P(B_2|A_1) + P(B_1) \cdot P(A_2|B_1) \\ &= \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{35}{132} + \frac{35}{132} \\ &= \frac{70}{132} = \frac{35}{66} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(E_3) &= P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) + P(B_1) \cdot P(A_2|B_1) \\ &= \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{42}{132} + \frac{35}{132} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

$$P(E_4) = P(B_1|A_2) = \frac{P(B_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(B_1) \cdot P(A_2|B_1)}{P(E_3)} = \frac{\frac{35}{132}}{\frac{7}{12}} = \frac{5}{11}$$

Δραστηριότητες

1. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A) = \frac{8}{15}$, $P(B) = \frac{9}{20}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A|B)$ και $P(B|A)$.

2. Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να εκφράσετε λεκτικά τις πιθανότητες $P(A|B)$ και $P(B|A')$.

3. Δίνονται δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A|B) = \frac{7}{10}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$ και $P(A) + P(B) = \frac{6}{5}$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.

4. Μια αεροπορική εταιρεία κατέγραψε σε ερωτηματολόγια κάποια στοιχεία σχετικά με τη μεταφορά επιπλέον αποσκευών (πέραν από τις αποσκευές καμπίνας) από τους επιβάτες της.

		Μεταφορά επιπλέον αποσκευής		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Ηλικία	Κάτω των 30 ετών	80	100	180
	$30 - 50$ ετών	150	200	350
	Άνω των 50 ετών	100	50	150
	Σύνολο	330	350	680

Επιλέγουμε ένα ερωτηματολόγιο στην τύχη.

(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η απάντηση στην πιο πάνω ερώτηση να είναι «Ναι».

(β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η απάντηση στην ερώτηση να είναι «Ναι» και να έχει απαντηθεί από άτομο κάτω των 30 ετών.

(γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η απάντηση στη ερώτηση να είναι «Όχι», αν γνωρίζουμε ότι έχει απαντηθεί από άτομο άνω των 30 ετών.

(δ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου να απαντήθηκε από άτομο $30 - 50$ ετών, αν γνωρίζουμε ότι η απάντηση ήταν «Όχι».

5. Η Μαρία έχει δύο κουτιά. Το κουτί A περιέχει έξι μαύρες και τέσσερεις λευκές σφαίρες ενώ το κουτί B περιέχει τρεις μαύρες και εφτά λευκές σφαίρες. Η Μαρία ρίχνει ένα ζάρι και αν η ένδειξή του είναι $1, 2, 3$ ή 4 παίρνει μια σφαίρα από το κουτί A, διαφορετικά παίρνει μια σφαίρα από το κουτί B. Την επόμενη μέρα πληροφόρησε την φίλη της Γεωργία ότι τράβηξε λευκή σφαίρα. Ποια είναι η πιθανότητα να την έχει πάρει από το κουτί A;

6. Στις εξετάσεις του Ιουνίου το 15% των μαθητών έγραψε στα Μαθηματικά κάτω από τη βάση, το 10% των μαθητών έγραψε στα Νέα Ελληνικά κάτω από τη βάση και το 5% των μαθητών έγραψε και στα δύο μαθήματα κάτω από τη βάση. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή και θεωρούμε αποτυχία όταν ο μαθητής γράψει κάτω από τη βάση.

   (α) Αν γνωρίζουμε ότι ο μαθητής που επιλέξαμε έχει αποτύχει στα Νέα Ελληνικά, ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στα Μαθηματικά;

   (β) Αν γνωρίζουμε ότι ο μαθητής που επιλέξαμε έχει αποτύχει στα Μαθηματικά, ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στα Νέα Ελληνικά;

7. Σε ένα παραλιακό θέρετρο φτάνουν καθημερινά πλοία, που αναχωρούν από τον Λίβανο και το Ισραήλ σε ποσοστά 30% και 70%, αντίστοιχα. Το 15% των πλοίων από τον Λίβανο και το 5% των πλοίων από το Ισραήλ φθάνουν με καθυστέρηση. Αν μια μέρα επιλέξουμε τυχαία ένα πλοίο που φτάνει στο θέρετρο, να υπολογίσετε την πιθανότητα:

   (α) το πλοίο να έχει φτάσει με καθυστέρηση

   (β) το πλοίο να έχει αναχωρήσει από τον Λίβανο, αν γνωρίζουμε ότι έφτασε με καθυστέρηση.

3.9.2 Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Διερεύνηση

Σε ένα κουτί υπάρχουν οκτώ μαύρες και πέντε άσπρες μπάλες. Θέλουμε να επιλέξουμε τυχαία δύο μπάλες.

Σενάριο Α
Επιλέγουμε μια μπάλα και ακολούθως μια άλλη, χωρίς να τοποθετήσουμε την πρώτη πίσω στο κουτί.

Σενάριο Β
Επιλέγουμε μια μπάλα και ακολούθως μια άλλη, τοποθετώντας την πρώτη ξανά στο κουτί.

(α) Αν γνωρίζουμε ότι η πρώτη μπάλα ήταν μαύρη, ποια η πιθανότητα η δεύτερη να ήταν άσπρη για το κάθε ένα από τα πιο πάνω σενάρια;
(β) Ποια η πιθανότητα η δεύτερη μπάλα να ήταν άσπρη για το κάθε ένα από τα πιο πάνω σενάρια;
(γ) Σε ποιο σενάριο η πιθανότητα επιλογής της δεύτερης μπάλας επηρεάζεται από την επιλογή της πρώτης μπάλας και γιατί;

Στην προηγούμενη διερεύνηση μπορούμε να ορίσουμε τα ενδεχόμενα:

M_i: «Να επιλέξω την i-μπάλα μαύρη», $i = 1,2$

A_j: «Να επιλέξω την j −μπάλα άσπρη», $j = 1,2$

Παρατηρώ ότι για το *σενάριο Β* ισχύει:

$$P(A_2|M_1) = P(A_2)$$
$$P(A_2|A_1) = P(A_2)$$
$$P(M_2|M_1) = P(M_2)$$
$$P(M_2|A_1) = P(M_2)$$

Δηλαδή, η πιθανότητα επιλογής της δεύτερης μπάλας δεν επηρεάζεται από την επιλογή της πρώτης μπάλας. Στην περίπτωση αυτή, θα λέμε ότι τα ενδεχόμενα είναι **ανεξάρτητα**.

Η πιθανότητα να πάρω δύο μαύρες μπάλες είναι:

$$P(M_1 \cap M_2) = P(M_1) \cdot P(M_2|M_1)$$

Στο *σενάριο Β* όμως (με τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα) ισχύει $P(M_2|M_1) = P(M_2)$.
Άρα:

$$P(M_1 \cap M_2) = P(M_1) \cdot P(M_2)$$

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ανεξάρτητα**, αν η πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του άλλου. Ισχύει:

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Παρατηρήσεις

- Δύο ενδεχόμενα που δεν είναι ανεξάρτητα λέγονται **εξαρτημένα**.
- Αν δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ανεξάρτητα, τότε και τα ακόλουθα ζεύγη ενδεχομένων είναι ανεξάρτητα:
  i. A', B
  ii. A, B'
  iii. A', B'

Παράδειγμα 5

Να εξετάσετε και να δικαιολογήσετε αν τα πιο κάτω ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα ή όχι, από τη «φύση» του πειράματος τύχης, από το οποίο προκύπτουν τα πιο κάτω ενδεχόμενα.

Σενάριο Α

Ρίχνουμε ένα ζάρι τρεις φορές. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

E_1: «Την πρώτη φορά το ζάρι φέρει ένδειξη άρτιο αριθμό»
E_2: «Τη δεύτερη φορά το ζάρι φέρει ένδειξη τον αριθμό 6»
E_3: «Την τρίτη φορά το ζάρι φέρει ένδειξη αριθμό μικρότερο του 3»

Σενάριο Β

Υπάρχουν 15 χαρτάκια σε ένα καλάθι που αντιστοιχούν σε οκτώ κορίτσια και επτά αγόρια μιας τάξης. Επιλέγουμε ένα χαρτάκι που κερδίζει το δώρο A. Ακολούθως, αφήνουμε το χαρτάκι που επιλέξαμε έξω από το καλάθι και επιλέγουμε ένα άλλο χαρτάκι που θα κερδίσει το δώρο Β. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

E_1: «Το δώρο A κέρδισε αγόρι»
E_2: «Το δώρο B κέρδισε κορίτσι»

Λύση

Τα τρία ενδεχόμενα του *σεναρίου Α* είναι ανεξάρτητα, διότι η ένδειξη του ζαριού κάθε φορά που το ρίχνουμε, δεν επηρεάζει την ένδειξη που θα φέρει την επόμενη φορά.

Στο *σενάριο Β* τα ενδεχόμενα είναι εξαρτημένα. Αυτό συμβαίνει, διότι όταν επιλέξω το πρώτο χαρτάκι, υπάρχουν λιγότερα πλέον χαρτάκια για να επιλέξω το δεύτερο. Αν γνωρίζω λοιπόν ότι πραγματοποιήθηκε το E_1, επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του E_2.

Παράδειγμα 6

Σε ένα δοχείο υπάρχουν τρεις κόκκινες και τέσσερις μπλε μπάλες. Παίρνουμε μια μπάλα και στη συνέχεια την επανατοποθετούμε στο δοχείο. Ακολούθως, παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

(α) A: «Οι δύο μπάλες να είναι κόκκινες»
(β) B: «Οι δύο μπάλες να έχουν διαφορετικό χρώμα»

Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

K_i: «Να πάρω κόκκινη μπάλα στην i –επιλογή», $i = 1, 2$
M_i: «Να πάρω μπλε μπάλα στην i –επιλογή», $i = 1, 2$

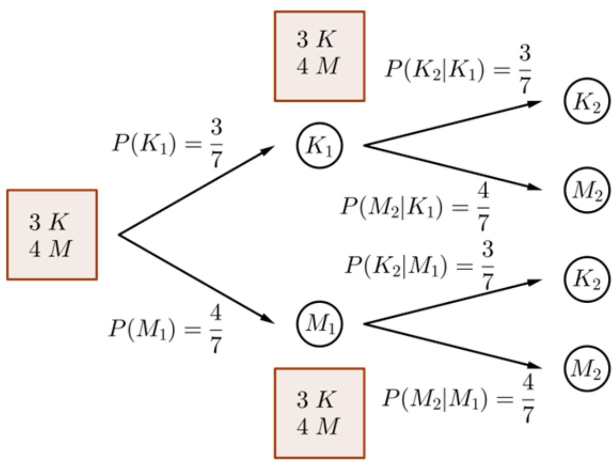
Έχουμε:

$$P(A) = P(K_1 \cap K_2) = P(K_1) \cdot P(K_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49} \qquad (K_1, K_2 \text{ Ανεξάρτητα ενδεχόμενα})$$

$$P(B) = P(K_1 \cap M_2) + P(M_1 \cap K_2) = P(K_1) \cdot P(M_2) + P(M_1) \cdot P(K_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{24}{49}$$

Σημείωση

Η χρήση του πιο κάτω δενδροδιαγράμματος μπορεί να είναι βοηθητική.



Δραστηριότητες

1. Μια εταιρεία πωλεί υψηλής απόδοσης οικονομικούς λαμπτήρες. Μόνο το $0{,}4\%$ των λαμπτήρων είναι ελαττωματικό. Αν κάποιος αγόρασε δύο λαμπτήρες, να υπολογίσετε την πιθανότητα:
   (α) να είναι και οι δύο ελαττωματικοί
   (β) να είναι μόνο ο ένας ελαττωματικός
   (γ) να μην είναι κανένας ελαττωματικός

2. Η πιθανότητα να παρουσιάσει πρόβλημα μέσα στον χρόνο εγγύησής της μια μηχανή ορισμένου τύπου είναι 5%. Ένα εργοστάσιο έχει δύο τέτοιες μηχανές, οι οποίες αγοράστηκαν συγχρόνως και λειτουργούν ανεξάρτητα η μια από την άλλη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα μόνο η μία μηχανή να πάθει βλάβη μέσα στον χρόνο εγγύησής της.

3. Ένα σακουλάκι περιέχει σπόρους λουλουδιών. Στο σακουλάκι αναγράφεται ότι η πιθανότητα να φυτρώσει ο κάθε σπόρος αν ακολουθούν τις οδηγίες είναι 65%. Αν φυτέψαμε τρεις σπόρους σε ξεχωριστές γλάστρες, σύμφωνα με τις οδηγίες, να υπολογίσετε την πιθανότητα:
   (α) να φύτρωσαν και οι τρείς σπόροι
   (β) να φύτρωσαν μόνο οι δύο σπόροι
   (γ) να φυτρώσει τουλάχιστον ένας σπόρος.

4. Η πιθανότητα να πηδήξει ένας αθλητής ένα συγκεκριμένο ύψος είναι $\frac{3}{4}$ σε κάθε προσπάθειά του. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο αθλητής αυτός να πηδήξει το ύψος στις τρεις προσπάθειες που δικαιούται.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Ένας ελαιοχρωματιστής θα βάψει τους τέσσερις τοίχους σε ένα δωμάτιο. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους να βάψει το δωμάτιο, αν οι δύο τοίχοι πρέπει να είναι μπλε και οι άλλοι δύο πράσινοι.

2. Να λύσετε την εξίσωση:
$$3\binom{2\nu}{3} = 22\Delta_2^{\nu}$$

3. Τρία αγόρια και τρία κορίτσια θα τοποθετηθούν τυχαία σε κυκλικό τραπέζι.
   (α) Με πόσους τρόπους μπορεί να πραγματοποιηθεί η τοποθέτηση;
   (β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα τα αγόρια να καθίσουν σε συνεχόμενες θέσεις.

4. Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία ισχύει
$$P(A) = \frac{1}{2},\ \ P(A - B) = \frac{1}{3} \ \text{ και } \ P(B') = \frac{2}{3}.$$
   Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(B), P(A \cap B), P(A \cup B)$.

5. Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, για τα οποία ισχύει:
$$P(A) = \frac{3}{4},\ \ P(A \cup B) = \frac{9}{10} \ \text{ και } \ P(B) = \frac{3}{4}$$
   Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
   Γ: «Δεν πραγματοποιείται το A»
   Δ: «Πραγματοποιείται το A και το B»
   E: «Πραγματοποιείται μόνο το B»
   Z: «Δεν πραγματοποιείται ούτε το A ούτε το B»
   H: «Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B»

6. Σε ένα πρωτάθλημα σκακιού θα γίνουν συνολικά 9 αγώνες. Σε κάθε αγώνα μεταξύ δύο παικτών Α και Β σημειώνουμε 1 αν νικήσει ο Α, 2 αν νικήσει ο Β και Χ αν έρθουν ισοπαλία. Πόσα δυνατά αποτελέσματα μπορούμε να έχουμε μετά το τέλος των 9 παιχνιδιών;

7. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2. Στην ε_1 ορίζουμε 10 σημεία και στην ε_2 15 σημεία.
   (α) Πόσα τρίγωνα ορίζουν τα σημεία αυτά;
   (β) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα τέτοιο τρίγωνο, ποια είναι η πιθανότητα να έχει μία πλευρά του στην ε_2;

8. Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A και B είναι $\frac{1}{3}$ και η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν και τα δύο ενδεχόμενα συγχρόνως είναι $\frac{1}{4}$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα δύο ενδεχόμενα A και B.

9. Τρεις από τους δέκα υπαλλήλους που εργάζονται σε μια εταιρεία θα ταξιδέψουν σε τρεις διαφορετικές πόλεις για επαγγελματικούς λόγους.

   (α) Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των τριών υπαλλήλων.

   (β) Αν η επιλογή των υπαλλήλων γίνεται τυχαία, να υπολογίσετε την πιθανότητα δύο συγκεκριμένοι υπάλληλοι να μην ταξιδέψουν.

10. (α) Να βρείτε πόσες διαφορετικές λέξεις μπορούν να σχηματιστούν με 4 από τα γράμματα $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$, αν το κάθε γράμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί περισσότερες από μία φορά.

    (β) Αν επιλέξουμε τυχαία μια λέξη από τις πιο πάνω, να υπολογίσετε την πιθανότητα όλα τα γράμματα της λέξης να είναι διαφορετικά.

11. Η πιθανότητα να λύσει ένα πρόβλημα ο A είναι $\frac{7}{10}$ και η πιθανότητα να το λύσει ο B είναι $\frac{4}{5}$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:

    (α) να το λύσουν και οι δύο

    (β) να το λύσει μόνο ο B

    (γ) να το λύσει τουλάχιστον ο ένας

    (δ) να το λύσει ένας από τους δύο

12. Δίνονται δύο κύβοι K_1 και K_2. Οι έδρες του K_1 είναι αριθμημένες με $1, 1, 2, 3, 4, 4$ και του K_2 με $1, 1, 1, 2, 2, 3$. Ρίχνουμε τους δύο κύβους από μια φορά τον καθένα και παρατηρούμε την ένδειξη της πάνω έδρας του καθενός. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

    A: «Ο κύβος K_1 φέρνει ένδειξη περιττή}
    B: «Ο κύβος K_2 φέρνει ένδειξη περιττή»
    Γ: «Τουλάχιστον ο ένας κύβος φέρνει ένδειξη περιττή»
    Δ: «Μόνο ο K_1 φέρνει ένδειξη περιττή»
    E: «Μόνο ο ένας από τους δύο κύβους φέρνει ένδειξη περιττή»

    (α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A, B, Γ, Δ και E.

    (β) Δοθέντος ότι παρουσιάστηκε μόνο μια περιττή ένδειξη, ποια είναι η πιθανότητα να είναι η ένδειξη του πρώτου κύβου;

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. (α) Να αποδείξετε χρησιμοποιώντας την αρχή της απαρίθμησης, ή διαφορετικά, ότι κάθε σύνολο με ν στοιχεία έχει 2^{ν} υποσύνολα.

   (β) Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α), ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{1} + \cdots + \binom{\nu}{\nu} = 2^{\nu}$$

2. Επιλέγουμε τυχαία ένα φυσικό αριθμό μικρότερο του 1000000000000. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο αριθμός που έχει επιλεγεί να περιέχει το ψηφίο 3.

3. Δίνεται το σύνολο $A = \{1\,,2,3,4\}$ και το σύνολο $B = \{5,6,7,8,9\}$. Να υπολογίσετε το πλήθος των συναρτήσεων που μπορούμε να σχηματίσουμε:

   (α) από το σύνολο A στο B

   (β) από το σύνολο B στο A

   (γ) από το σύνολο A στο B, όπου κάθε δύο διαφορετικά στοιχεία του A δεν επιτρέπεται να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του B ($1-1$ συναρτήσεις)

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

4.1 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Μέτρα θέσης και διασποράς

Σε προηγούμενες τάξεις έχουμε μάθει τις πιο κάτω στατιστικές έννοιες:

- **Συχνότητα** μιας παρατήρησης ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που εκφράζει πόσες φορές εμφανίζεται η παρατήρηση αυτή.
- **Επικρατούσα τιμή** είναι η παρατήρηση που εμφανίζεται με την μεγαλύτερη συχνότητα και συμβολίζεται με x_ε.
- **Μέση τιμή** είναι το πηλίκο του αθροίσματος όλων των παρατηρήσεων διά το πλήθος τους και συμβολίζεται με $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu}{\nu}, \text{ όπου } x_1, x_2, \ldots, x_\nu \text{ οι παρατηρήσεις}$$

- Η **διάμεσος** υπολογίζεται όταν κατατάξουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά. Αν το πλήθος των διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, τότε η διάμεσος είναι η «μεσαία» παρατήρηση, ενώ αν το πλήθος είναι άρτιος αριθμός, τότε η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο «μεσαίων» παρατηρήσεων. Η διάμεσος συμβολίζεται με x_δ:

$$x_\delta = \begin{cases} x_{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}, & \nu - \text{περιττός} \\ \dfrac{x_{\left(\frac{\nu}{2}\right)} + x_{\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}}{2}, & \nu - \text{άρτιος} \end{cases},$$

  όπου $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(\nu)}$ οι διατεταγμένες παρατηρήσεις

- **Εύρος** είναι η διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από τη μεγαλύτερη:

$$R = x_{max} - x_{min}$$

- **Διακύμανση ή διασπορά** ν παρατηρήσεων $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ είναι ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή. Συμβολίζεται με s^2 και ισχύει:

$$\mathrm{s}^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_\nu - \bar{x})^2}{\nu}$$

- **Τυπική απόκλιση** είναι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς, συμβολίζεται με s και ισχύει:

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_\nu - \bar{x})^2}{\nu}}$$

Επίσης, έχουμε μάθει να δημιουργούμε (με ή χωρίς χρήση λογιστικού φύλλου στον υπολογιστή) κατάλληλα διαγράμματα (ραβδόγραμμα, κυκλικό διάγραμμα, ιστόγραμμα) για να παρουσιάσουμε στατιστικά δεδομένα.

Ιστορικό Σημείωμα

Ο όρος «Στατιστική» προέρχεται είτε από τη λατινική λέξη "status" που σημαίνει πολιτεία, είτε από την ελληνική λέξη στατίζω που σημαίνει τοποθετώ, ταξινομώ και συμπεραίνω. Η στατιστική, στην αρχαιότητα, ήταν εργαλείο των ηγεμόνων που ήθελαν πληροφορίες σχετικές με τα εδάφη, τη γεωργία, το εμπόριο, τον πληθυσμό, την αξιολόγηση της στρατιωτικής τους δυνατότητας, τον πλούτο τους και τη φορολογία.

Η αρχαιότερη, εξακριβωμένη, συλλογή στατιστικών στοιχείων είναι η απογραφή πληθυσμού που έγινε το 2238 π.Χ. στην Κίνα από τον αυτοκράτορα Yao. Απογραφές στην Αρχαία Ελλάδα έγιναν από τον Λυκούργο στη Σπάρτη, όταν έγινε διαίρεση της γης σε κλήρους και από τον Σόλωνα στη Αθήνα όταν έγινε διαίρεση των πολιτών σε τάξεις ανάλογα με τα εισοδήματα τους.

Στα χρόνια της Αναγέννησης ξεκίνησε μια συστηματική συλλογή στατιστικών στοιχείων για τον πληθυσμό και την οικονομία στις ευρωπαϊκές πόλεις. Στις αρχές του 18^{ου} αιώνα ο Jacob Bernoulli παρουσιάζει τον νόμο των μεγάλων αριθμών και στις αρχές του επόμενου αιώνα ο Gauss παρουσιάζει την κανονική κατανομή, η οποία είναι σημαντική τόσο στη Στατιστική όσο και στη Θεωρία Πιθανοτήτων.

Στο τέλος του 19^{ου} αιώνα η Στατιστική αρχίζει να παίρνει τη σύγχρονη μορφή της με τον Francis Galton που έκανε εισαγωγή εννοιών, όπως η τυπική απόκλιση, η συσχέτιση και η παλινδρόμηση και τον Karl Pearson που έκανε τα πρώτα βήματα στη μαθηματική θεμελίωση της στατιστικής.

Πατέρας της σύγχρονης στατιστικής θεωρείται ο R.A. Fisher (1890-1962). Ο Fisher εισήγαγε μεταξύ άλλων τις έννοιες της πιθανοφάνειας, της συνέπειας, της αποδοτικότητας και της επάρκειας. Το βιβλίο του, statistical methods for research workers, θεωρείται ένα από τα πιο σημαντικά στην εξέλιξη της επιστήμης.

Η Στατιστική σήμερα, είναι ένας πολύ σημαντικός κλάδος των μαθηματικών, ο οποίος χρησιμοποιείται σε όλους σχεδόν τους τομείς των σύγχρονων επιστημών.

4.2. ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΑ – ΕΝΔΟΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΑΚΟ ΕΥΡΟΣ

Διερεύνηση

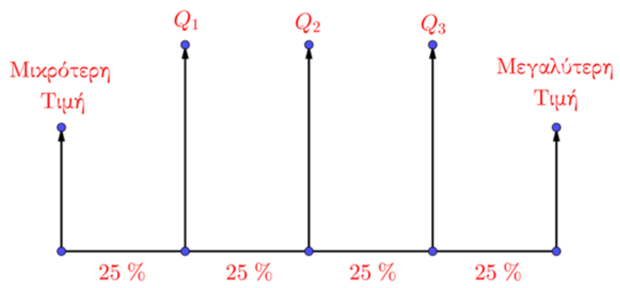
Οι βαθμοί των 18 μαθητών ενός τμήματος Γυμνασίου σε μιαν εξέταση είναι:

$$8, 9, 12, 15, 11, 13, 13, 17, 19, 14, 15, 17, 18, 15, 17, 8, 16, 9$$

Ο καθηγητής θέλει να δώσει βραβείο στους μαθητές που πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο από το 75% του πλήθους των μαθητών της τάξης και να δώσει επιπλέον εργασία για το σπίτι στους μαθητές που πήραν βαθμό μικρότερο ή ίσο από το 25% του πλήθους των μαθητών της τάξης. Να βρείτε τους βαθμούς των μαθητών που θα βραβευτούν και τους βαθμούς των μαθητών που θα πάρουν επιπλέον εργασία.

4.2.1 Τεταρτημόρια

Η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα δείγμα, έτσι ώστε το πολύ το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες από αυτή και το πολύ το 50% να είναι μεγαλύτερες από αυτή. Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε ως **πρώτο τεταρτημόριο** την τιμή που χωρίζει το δείγμα, έτσι ώστε το πολύ το 25% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες από αυτή και το πολύ το 75% των παρατηρήσεων μεγαλύτερες από αυτή και ως **τρίτο τεταρτημόριο** την τιμή που χωρίζει το δείγμα, έτσι ώστε το πολύ το 75% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες από αυτό και το πολύ το 25% μεγαλύτερες από αυτό. Το **πρώτο τεταρτημόριο** συμβολίζεται με $\boldsymbol{Q_1}$ και το **τρίτο τεταρτημόριο** με $\boldsymbol{Q_3}$. Η διάμεσος είναι το **δεύτερο τεταρτημόριο** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{Q_2}$.



Παρατηρήσεις

- Για να υπολογίσουμε το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο βρίσκουμε τη διάμεσο του πρώτου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων και τη διάμεσο του δεύτερου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων, αντίστοιχα.
    - Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός, είναι εύκολο να διακρίνουμε το πρώτο και δεύτερο μισό των διατεταγμένων παρατηρήσεων για να υπολογίσουμε το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο.
    - Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, αφαιρούμε τη διάμεσο από το δείγμα και διακρίνουμε το πρώτο και το δεύτερο μισό των υπολοίπων διατεταγμένων παρατηρήσεων.

Παράδειγμα 1

Τα ύψη των παικτών μιας ομάδας καλαθόσφαιρας σε cm είναι:

$$181\ ,210, 193, 197, 196, 205, 189, 204, 193, 199, 205, 187$$

(α) Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2 και Q_3.

(β) Αν στην ομάδα ενταχθούν ακόμα τρεις παίκτες με ύψη (σε cm) $182, 195$ και 209, να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2 και Q_3 της νέας σύνθεσης της ομάδας.

Λύση

(α) Για να υπολογίσουμε τα τεταρτημόρια, πρέπει πρώτα να κατατάξουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

$$181, 187, 189, 193, 193, 196, 197, 199, 204, 205, 205, 210$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός. Επομένως, η διάμεσος είναι:

$$Q_2 = \frac{196 + 197}{2} = 196{,}5$$

Για να υπολογίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο, βρίσκουμε τη διάμεσο του πρώτου μισού των παρατηρήσεων:

$$181, 187, 189, 193, 193, 196$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός. Επομένως, το πρώτο τεταρτημόριο είναι:

$$Q_1 = \frac{189 + 193}{2} = 191$$

Για να υπολογίσουμε το τρίτο τεταρτημόριο, βρίσκουμε τη διάμεσο του δεύτερου μισού των παρατηρήσεων:

$$197, 199, 204, 205, 205, 210$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός. Επομένως, το τρίτο τεταρτημόριο είναι:

$$Q_3 = \frac{204 + 205}{2} = 204{,}5$$

(β) Οι παρατηρήσεις της νέας σύνθεσης της ομάδας σε αύξουσα σειρά είναι:

$$181, 182, 187, 189, 193, 193, 195, 196, 197, 199, 204, 205, 205, 209, 210$$

Η διάμεσος είναι μεσαία παρατήρηση των διατεταγμένων παρατηρήσεων:

$$Q_2 = 196$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός. Επομένως, αφαιρούμε τη διάμεσο Q_2 από τις διατεταγμένες παρατηρήσεις, για να διακρίνουμε το πρώτο και το δεύτερο μισό των υπολοίπων διατεταγμένων παρατηρήσεων:

$$181, 182, 187, 189, 193, 193, 195, 197, 199, 204, 205, 205, 209, 210$$

Για να υπολογίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο, βρίσκουμε τη διάμεσο των παρατηρήσεων:

$$181, 182, 187, 189, 193, 193, 195$$

Άρα, $Q_1 = 189$.

Για να υπολογίσουμε το τρίτο τεταρτημόριο, βρίσκουμε τη διάμεσο των παρατηρήσεων:

$$197, 199, 204, 205, 205, 209, 210$$

Άρα, $Q_3 = 205$.

4.2.2 Ενδοτεταρτημοριακό εύρος

Το εύρος, η διασπορά και η τυπική απόκλιση επηρεάζονται από ακραίες παρατηρήσεις. Ένα μέτρο διασποράς, το οποίο δεν επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις, είναι το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

Το **ενδοτεταρτημοριακό εύρος** είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου από το τρίτο τεταρτημόριο και συμβολίζεται με IQR. Δηλαδή,

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος περιλαμβάνει το «ενδιάμεσο» 50% των παρατηρήσεων.

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων του *Παραδείγματος 1(α).*

Λύση

Έχουμε υπολογίσει το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο:

$$Q_1 = 191 \text{ και } Q_3 = 204{,}5$$

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι:

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 204{,}5 - 191 = 13{,}5$$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων:

$$9, 7, 10, 9, 7, 6, 5, 7, 10, 7, 8$$

Ακολούθως, να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

Λύση

Για να υπολογίσουμε τα τεταρτημόρια, πρέπει πρώτα να κατατάξουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

$$5, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 12$$

Εύρος= 12 − 5=7 (διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη τιμή)

Για το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, θα πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε τα Q_1 και Q_3.

Το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu = 11$.

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός. Επομένως, η διάμεσος είναι:

$$Q_2 = 7$$

Για να υπολογίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο, βρίσκουμε τη διάμεσο του πρώτου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων που είναι αριστερά του Q_2:

$$5, 6, 7, 7, 7$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός. Επομένως, το πρώτο τεταρτημόριο είναι η παρατήρηση:

$$Q_1 = 7$$

Για να υπολογίσουμε το τρίτο τεταρτημόριο, βρίσκουμε τη διάμεσο του δεύτερου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων που είναι δεξιά του Q_2:

$$8, 9, 10, 10, 12$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός. Επομένως, το τρίτο τεταρτημόριο είναι:

$$Q_3 = 10$$

$$\text{Ενδοτεταρτημοριακό εύρος} = Q_3 - Q_1 = 10 - 7 = 3$$

Το εύρος ($R = 7$) μας δίνει απλά τη διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη τιμή που είναι επτά μονάδες, χωρίς να δίνει οποιεσδήποτε άλλες πληροφορίες για υπόλοιπες τιμές.

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος ($IQR = 3$) μας δίνει ένα διάστημα μήκους τριών μονάδων για το ενδιάμεσο 50% των παρατηρήσεων αποκλείοντας τόσο το 25% των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του Q_1 όσο και το 25% των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες του Q_3.

Παράδειγμα 4

Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι βαθμοί μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών. Να υπολογίσετε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των βαθμών.

Βαθμός (x_i)	Αριθμός Μαθητών (f_i)
9	3
10	2
11	3
14	4
15	1
16	5
18	3
20	3

Λύση

Αρχικά, υπολογίζουμε τα Q_1 και Q_3. Το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu = 24$.

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός. Επομένως, η διάμεσος είναι:

$$Q_2 = \frac{14 + 15}{2} = 14{,}5$$

Για να υπολογίσουμε το πρώτο τεταρτημόριο, βρίσκουμε τη διάμεσο του πρώτου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων που είναι αριστερά του Q_2:

$$9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 14, 14, 14, 14$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός.

Επομένως, το πρώτο τεταρτημόριο είναι:

$$Q_1 = \frac{11 + 11}{2} = 11$$

Για να υπολογίσουμε το τρίτο τεταρτημόριο, βρίσκουμε τη διάμεσο του δεύτερου μισού των διατεταγμένων παρατηρήσεων που είναι δεξιά του Q_2:

$$15, 16, 16, 16, 16, 16, 18, 18, 18, 20, 20, 20$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός.

Επομένως, το τρίτο τεταρτημόριο είναι:

$$Q_3 = \frac{16 + 18}{2} = 17$$

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος$= Q_3 - Q_1 = 17 - 11 = 6$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Τα τεταρτημόρια είναι ένα μέτρο θέσης.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι ένα μέτρο διασποράς.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι μεγαλύτερος αριθμός από το εύρος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Το εύρος είναι η διαφορά του πρώτου τεταρτημορίου από το τρίτο τεταρτημόριο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Το τρίτο τεταρτημόριο είναι ίσο με το άθροισμα του πρώτου τεταρτημορίου και του ενδοτεταρτημοριακού εύρους.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Το δεύτερο τεταρτημόριο (Q_2) είναι η διάμεσος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Δίνεται ο αριθμός των μαθητών σε κάθε τμήμα σε ένα σχολείο:

$$21, 25, 25, 23, 20, 25, 24, 24, 20, 24, 25, 21, 25, 24, 23, 23, 20, 22$$

Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2 και Q_3.

3. Ο χρόνος που χρειάζονται 25 εργαζόμενοι για να πάνε στην δουλειά τους σε λεπτά είναι:

$$14, 15, 10, 11, 31, 20, 20, 22, 22, 23, 27, 25, 12, 12, 12, 17, 19, 35, 30 ,41, 23, 27, 17, 28, 27$$

Να υπολογίσετε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος και να εξηγήσετε τι εκφράζουν για το συγκεκριμένο δείγμα.

4. Σε ένα εργοστάσιο ρωτήθηκαν 10 εργάτες για τον εβδομαδιαίο μισθό τους και οι απαντήσεις τους ήταν σε ευρώ:

$$280, 210, 300, 280, 190, 330, 215, 270, 220, 300$$

Να υπολογίσετε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των μισθών των εργατών.

5. Να επεξηγήσετε λεκτικά τις πιο κάτω προτάσεις.

(α) Σε ένα διαγωνισμό Μαθηματικών με χρόνο, το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 για τους χρόνους των διαγωνιζόμενων ήταν 35 λεπτά.

Σε ένα διαγωνισμό 40 ερωτήσεων, το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 για τον αριθμό των ορθών απαντήσεων είναι 32.

6. Ο πίνακας δείχνει τις επιπλέον ώρες που δουλεύουν οι υπάλληλοι μιας εταιρείας.

Αριθμός επιπλέον ωρών	Αριθμός υπαλλήλων
0	20
1	15
2	25
3	18
4	12
5	10

Να υπολογίσετε το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των επιπλέον ωρών που δουλεύουν οι υπάλληλοι της εταιρείας.

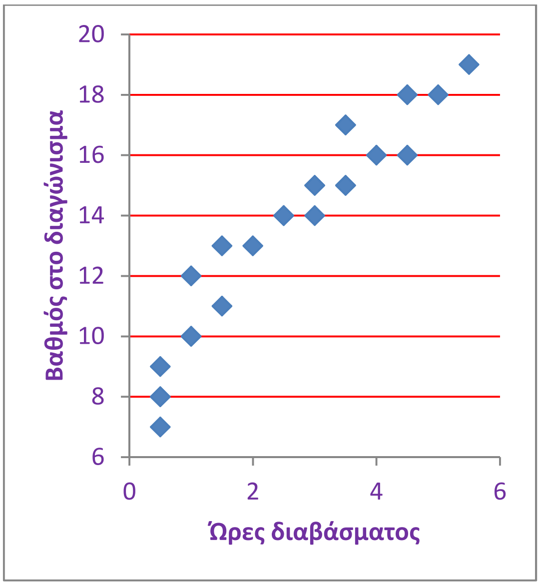
4.3 ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

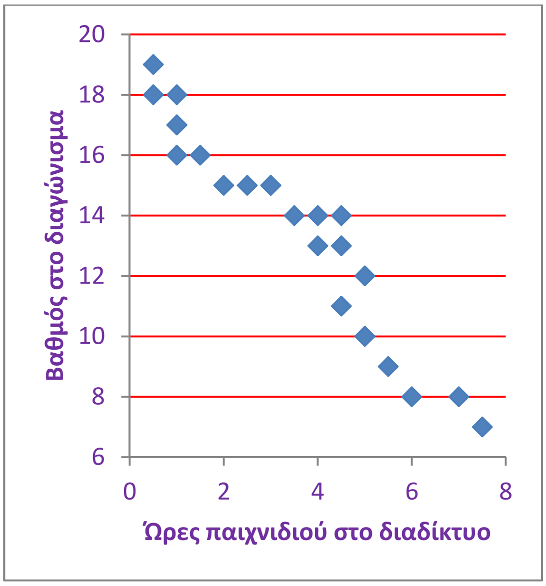
Διερεύνηση

Τα πιο κάτω διαγράμματα παρουσιάζουν τον βαθμό των μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών σε σχέση με τον χρόνο που αφιέρωσαν τις προηγούμενες δύο μέρες για διάβασμα και για ενασχόληση με το διαδίκτυο.

(α) Ποια σχέση έχουν οι μεταβλητές βαθμός και ώρες διαβάσματος;

(β) Να συγκρίνετε τη σχέση των μεταβλητών βαθμός και ώρες διαβάσματος με τη σχέση των μεταβλητών βαθμός και ώρες στο διαδίκτυο.



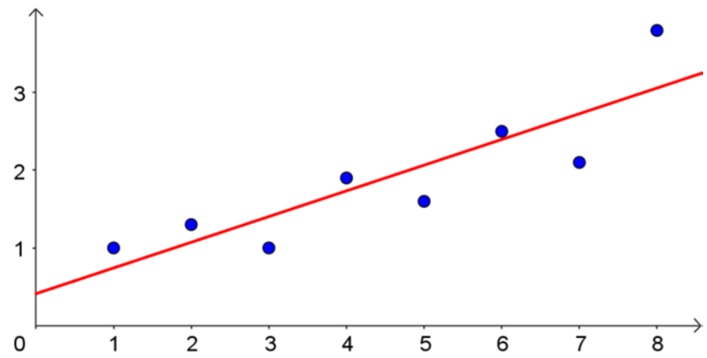


4.3.1 Συσχέτιση δύο μεταβλητών

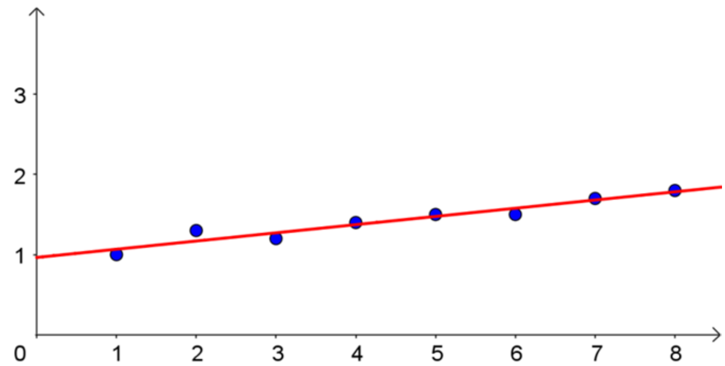
Ένα χρήσιμο εργαλείο όταν θέλουμε να μελετήσουμε δύο μεταβλητές από ένα πληθυσμό είναι το **διάγραμμα διασποράς**. Αν έχουμε παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ από μια μεταβλητή X και $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ από μια μεταβλητή Y, τότε το διάγραμμα διασποράς είναι η γραφική παράσταση των σημείων $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_\nu, y_\nu)$ σε ένα σύστημα αξόνων. Η μεταβλητή X ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** και η μεταβλητή Y **εξαρτημένη μεταβλητή**. Μελετούμε την επίδραση της ανεξάρτητης μεταβλητής X πάνω στην εξαρτημένη μεταβλητή Y.

Με τα διαγράμματα διασποράς μπορούμε να μελετήσουμε τη σχέση που ενδέχεται να έχουν οι δύο μεταβλητές. Η πιο απλή σχέση που μπορεί να έχουν δυο μεταβλητές είναι η **συσχέτιση**. Στην πιο πάνω διερεύνηση, οι μεταβλητές ώρες διαβάσματος και βαθμός στο διαγώνισμα έχουν θετική συσχέτιση, γιατί όσο αυξάνονται οι ώρες διαβάσματος αυξάνεται και ο βαθμός, ενώ οι μεταβλητές ώρες στο διαδίκτυο και ο βαθμός στο διαγώνισμα παρουσιάζουν αρνητική συσχέτιση, γιατί όσο αυξάνονται οι ώρες στο διαδίκτυο μειώνεται ο βαθμός.

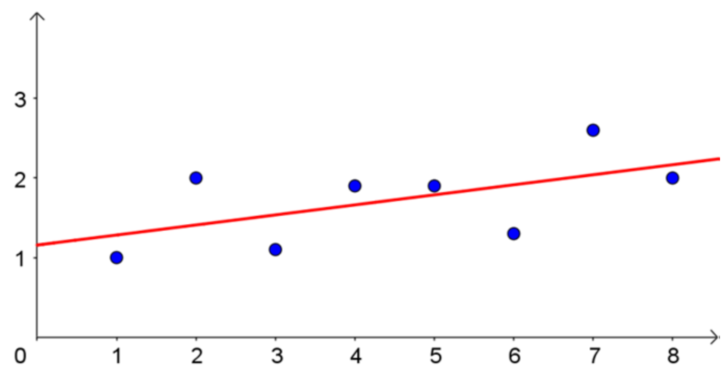
- Δύο μεταβλητές έχουν **θετική συσχέτιση**, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής τείνουν να αυξάνονται και οι τιμές της άλλης μεταβλητής.



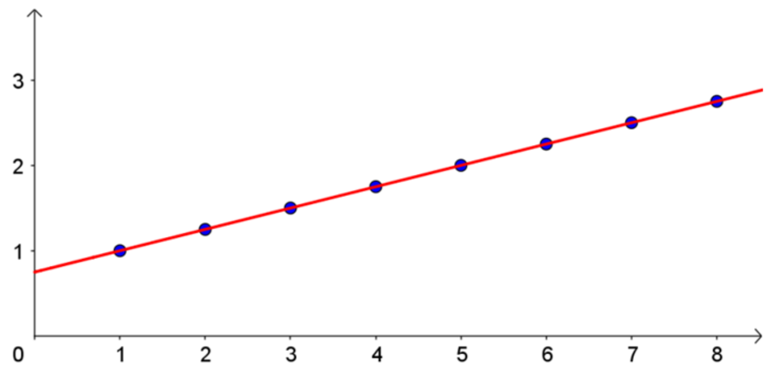
- Δύο μεταβλητές έχουν **ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση**, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής τείνουν να αυξάνονται και οι τιμές της άλλης μεταβλητής και τα σημεία στο διάγραμμα διασποράς έχουν σχετικά μικρή διασπορά γύρω από μια συγκεκριμένη ευθεία.



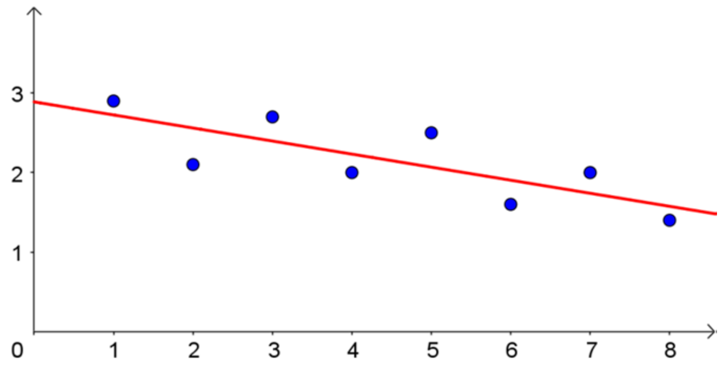
- Δύο μεταβλητές έχουν **ασθενή θετική γραμμική συσχέτιση**, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής τείνουν να αυξάνονται και οι τιμές της άλλης μεταβλητής και τα σημεία στο διάγραμμα διασποράς έχουν σχετικά μεγάλη διασπορά γύρω από μια συγκεκριμένη ευθεία.



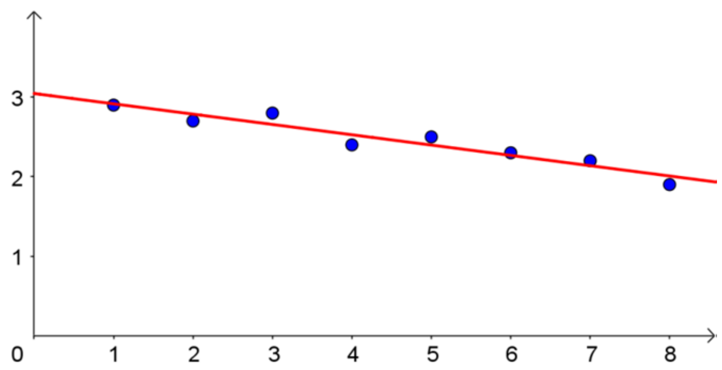
- Δύο μεταβλητές έχουν **τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση**, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής αυξάνονται και οι τιμές της άλλης μεταβλητής και όλα τα σημεία στο διάγραμμα διασποράς ανήκουν σε μια συγκεκριμένη ευθεία.



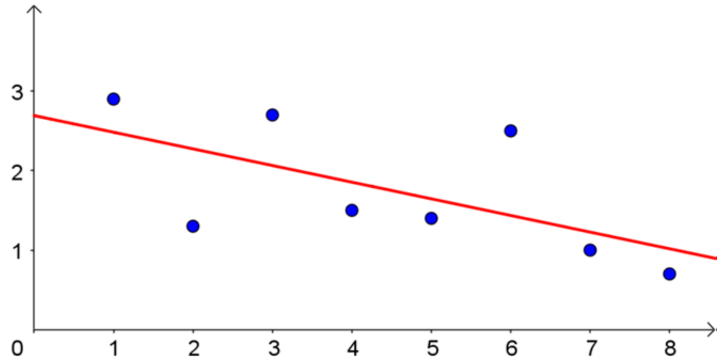
- Δύο μεταβλητές έχουν **αρνητική συσχέτιση**, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής τείνουν να μειώνονται οι τιμές της άλλης μεταβλητής.



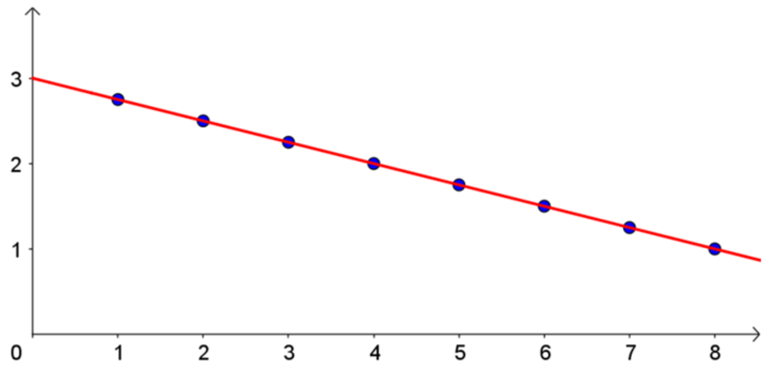
- Δύο μεταβλητές έχουν **ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση**, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής τείνουν να μειώνονται οι τιμές της άλλης μεταβλητής και τα σημεία στο διάγραμμα διασποράς έχουν σχετικά μικρή διασπορά γύρω από μια συγκεκριμένη ευθεία.



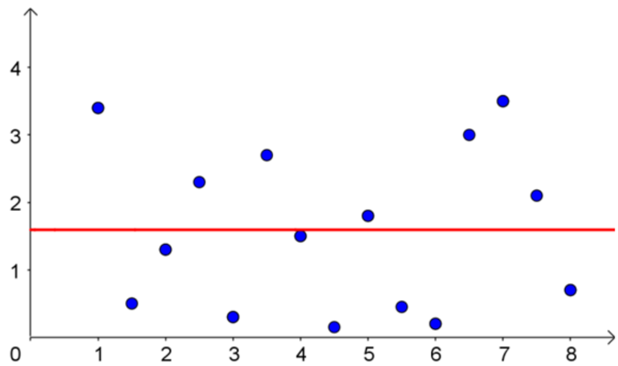
- Δύο μεταβλητές έχουν **ασθενή αρνητική γραμμική συσχέτιση**, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής τείνουν να μειώνονται οι τιμές της άλλης μεταβλητής και τα σημεία στο διάγραμμα διασποράς έχουν σχετικά μεγάλη διασπορά γύρω από μια συγκεκριμένη ευθεία.



- Δύο μεταβλητές έχουν **τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση**, όταν όσο αυξάνονται οι τιμές της μιας μεταβλητής μειώνονται οι τιμές της άλλης μεταβλητής και όλα τα σημεία στο διάγραμμα διασποράς ανήκουν σε μια συγκεκριμένη ευθεία.



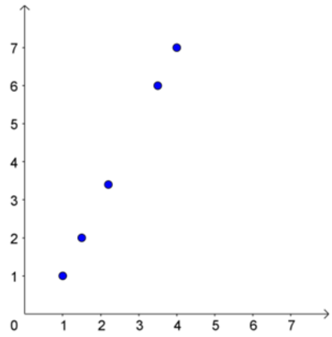
- Όταν οι μεταβλητές δεν παρουσιάζουν συσχέτιση λέμε ότι έχουν **μηδενική συσχέτιση**.



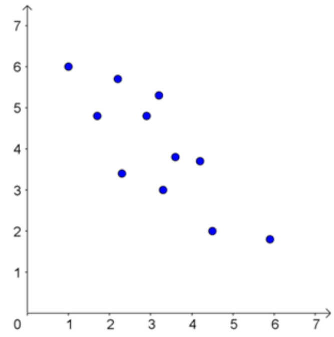
Παράδειγμα 1

Δίνονται τα πιο κάτω διαγράμματα διασποράς:

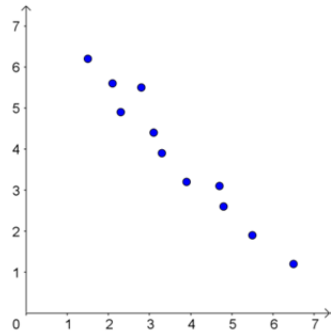
(I)



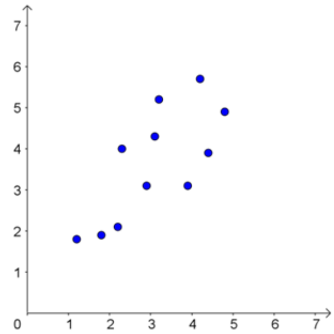
(II)



(III)



(IV)



(α) Να βρείτε ποια διαγράμματα παρουσιάζουν θετική συσχέτιση και ποια διαγράμματα παρουσιάζουν αρνητική συσχέτιση.

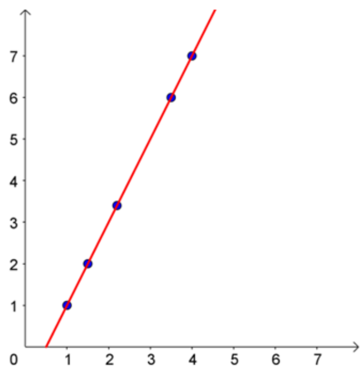
(β) Ποιο διάγραμμα παρουσιάζει ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση και ποιο ασθενή αρνητική γραμμική συσχέτιση;

(γ) Ποιο διάγραμμα παρουσιάζει τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση;

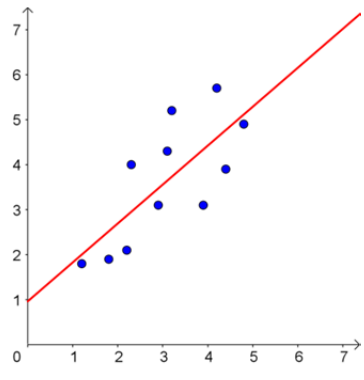
Λύση

(α) Θετική συσχέτιση παρουσιάζουν τα διαγράμματα (I) και (IV), γιατί όσο αυξάνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή αυξάνεται, η εξαρτημένη μεταβλητή τείνει να αυξάνεται.

(I)

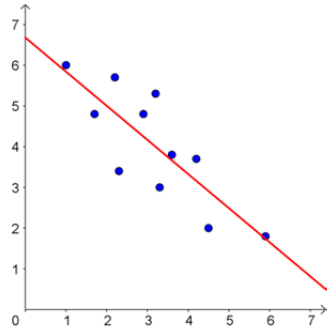


(IV)

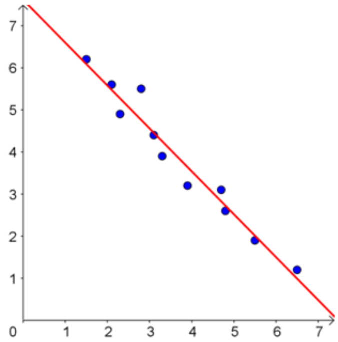


Αρνητική συσχέτιση τα διαγράμματα (ΙΙ) και (ΙΙΙ), γιατί όσο αυξάνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, η εξαρτημένη μεταβλητή τείνει να μειώνεται.

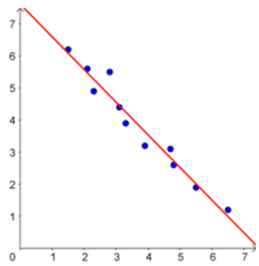
(ΙΙ)



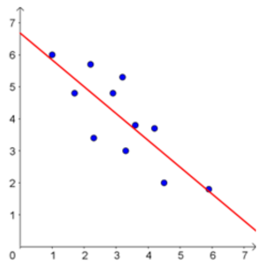
(ΙΙΙ)



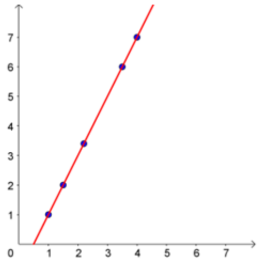
(β) Ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση παρουσιάζει το διάγραμμα (ΙΙΙ), γιατί τα σημεία παρουσιάζουν σχετικά μικρή διασπορά και όσο αυξάνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, η εξαρτημένη μεταβλητή τείνει να μειώνεται.



Ασθενή αρνητική γραμμική συσχέτιση παρουσιάζει το διάγραμμα (ΙΙ), γιατί τα σημεία παρουσιάζουν σχετικά μεγάλη διασπορά και όσο αυξάνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, η εξαρτημένη μεταβλητή τείνει να μειώνεται.



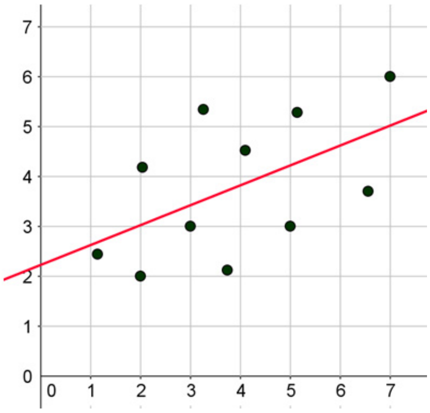
(γ) Τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση παρουσιάζει το διάγραμμα (Ι), γιατί όλα τα σημεία του διαγράμματος είναι σημεία μιας ευθείας με θετική κλίση.



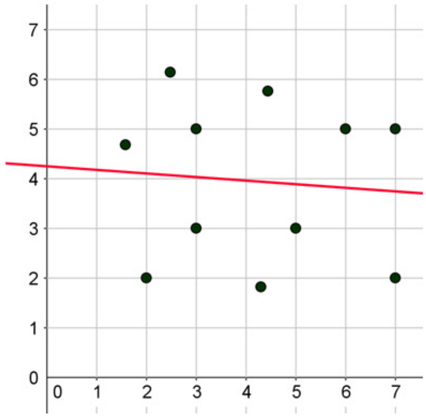
Παράδειγμα 2

Να περιγράψετε το είδος της συσχέτισης των δύο μεταβλητών με τους χαρακτηρισμούς «Τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση, Τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση, Μηδενική συσχέτιση, Ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση, Ασθενής θετική γραμμική συσχέτιση, Ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση, Ασθενής αρνητική γραμμική συσχέτιση» στα πιο κάτω διαγράμματα:

(I)

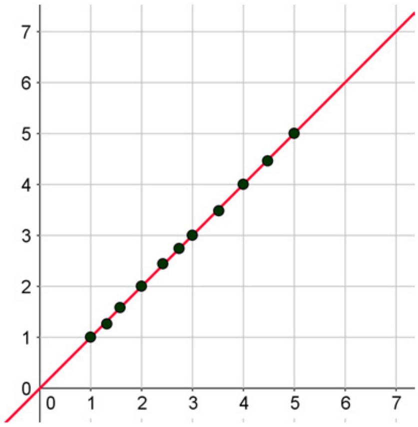


(II)



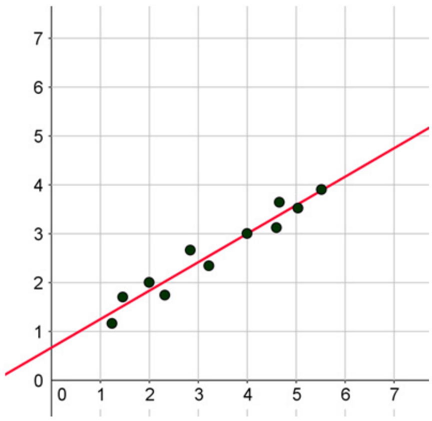
(III)

(IV)



(V)

(VI)



Λύση

Στο διάγραμμα I έχουμε ασθενή θετική γραμμική συσχέτιση, γιατί η ευθεία έχει θετική κλίση και τα σημεία έχουν μεγάλη διασπορά γύρω από την ευθεία.
Στο διάγραμμα II έχουμε μηδενική γραμμική συσχέτιση, γιατί τα σημεία δεν παρουσιάζουν γραμμική συσχέτιση.
Στα διαγράμματα III και IV έχουμε τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση και τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση, αντίστοιχα.
Στα διαγράμματα V και VI έχουμε ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση και ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση, αντίστοιχα.

4.3.2 Συντελεστής συσχέτισης

Διερεύνηση 1

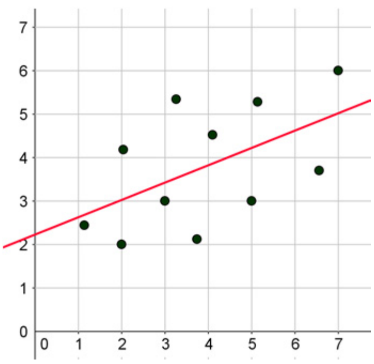
Για το κάθε ένα διάγραμμα διασποράς του τελευταίου παραδείγματος, υπολογίζουμε το συντελεστή r, ο οποίος θα αντιστοιχεί με τη γραμμική συσχέτιση.

(α) Σε ποια διαγράμματα ο συντελεστής r είναι θετικός και σε ποια αρνητικός;

(β) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή που μπορεί να έχει ο συντελεστής r κατά τη γνώμη σας;

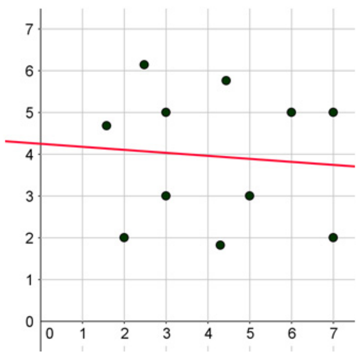
(γ) Ποια η σχέση του συντελεστή r με την ασθενή, την ισχυρή, την τέλεια και τη μηδενική γραμμική συσχέτιση;

(I)



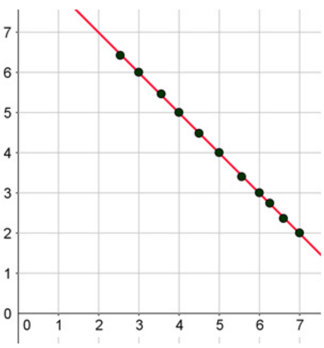
$r = 0{,}63$

(II)



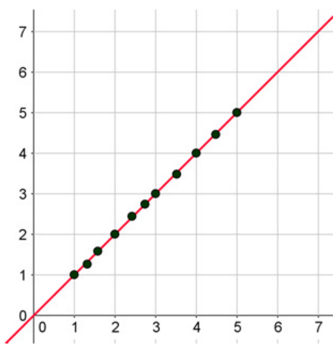
$r = 0$

(III)



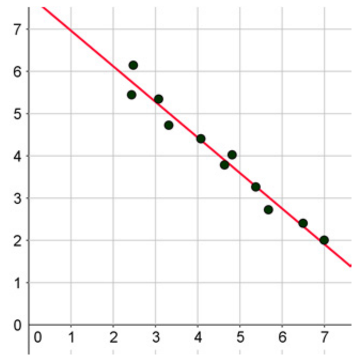
$r = -1$

(IV)



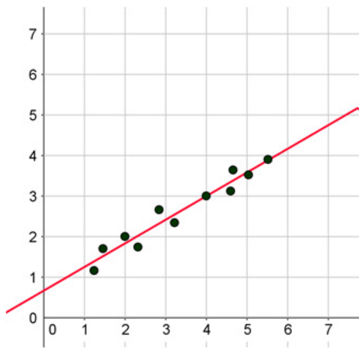
$r = 1$

(V)



$r = -0{,}98$

(VI)



$r = 0{,}97$

Ένας σημαντικός συντελεστής που **καθορίζει τον βαθμό γραμμικής συσχέτισης** δύο μεταβλητών είναι ο **συντελεστής συσχέτισης** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{r}$.

Ο συντελεστής συσχέτισης δεν εκφράζεται σε συγκεκριμένες μονάδες μέτρησης και είναι πάντα ένας αριθμός στο διάστημα $[-1, 1]$.
Σημειώνεται ότι όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι πάνω από 0,7 θεωρείται, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, ως ένδειξη ισχυρής θετικής συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών.
Με ανάλογο τρόπο εξηγείται και η αρνητική συσχέτιση (π.χ όταν ο δείκτης συσχέτισης κυμαίνεται από το -1 μέχρι και το $-0{,}7$ θεωρείται ως ένδειξη ισχυρής αρνητικής συσχέτισης).

Αν έχουμε παρατηρήσεις $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ από μια μεταβλητή X και παρατηρήσεις $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ από μια μεταβλητή Y, τότε ο συντελεστής συσχέτισης των δύο μεταβλητών υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{r = \frac{\Sigma_{xy} - \nu\overline{x}\overline{y}}{\nu S_x S_y}}, \textbf{ όπου } \boldsymbol{\Sigma_{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_\nu y_\nu}$$

Παράδειγμα 3

Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι βαθμοί 12 μαθητών ενός τμήματος Α΄ Λυκείου στο διαγώνισμα των Μαθηματικών (x_i) και στο διαγώνισμα της Φυσικής (y_i), αντίστοιχα.

Μαθητής	**Βαθμός Μαθηματικά (x_i)**	**Βαθμός Φυσική (y_i)**
M_1	10	8
M_2	14	13
M_3	17	16
M_4	12	13
M_5	15	15
M_6	16	16
M_7	20	19
M_8	18	19
M_9	10	12
M_{10}	13	13
M_{11}	12	10
M_{12}	11	14

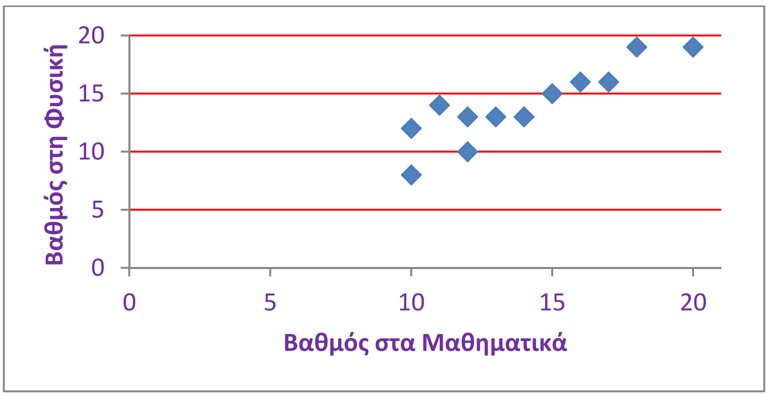
(α) Να σημειώσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα σημεία $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, 12$, σύμφωνα με τον πιο πάνω πίνακα.

(β) Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης των βαθμών στα Μαθηματικά και στη Φυσική.

(γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης των βαθμών στα Μαθηματικά και στη Φυσική και να το ερμηνεύσετε.

Λύση

(α)



(β) Ο συντελεστής συσχέτισης είναι:

$$r = \frac{\Sigma_{xy} - \nu\bar{x}\bar{y}}{\nu S_x S_y}, \text{ όπου } \Sigma_{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_\nu y_\nu$$

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
10	8	80	16	36
14	13	182	0	1
17	16	272	9	4
12	13	156	4	1
15	15	225	1	1
16	16	256	4	4
20	19	380	36	25
18	19	342	16	25
10	12	120	16	4
13	13	169	1	1
12	10	120	4	16
11	14	154	9	0
$\Sigma_x = 168$	$\Sigma_y = 168$	$\Sigma_{xy} = 2456$	$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 116$	$\Sigma(y_i - \bar{y})^2 = 118$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma_X}{\nu} = \frac{168}{12} = 14, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma_y}{\nu} = \frac{168}{12} = 14, \qquad s_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{116}{12}} = 3{,}109$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{118}{12}} = 3{,}136$$

Άρα:

$$r = \frac{\Sigma_{xy} - \nu\bar{x}\bar{y}}{\nu S_x S_y} = \frac{2456 - 12 \cdot 14 \cdot 14}{12 \cdot 3{,}109 \cdot 3{,}136} = 0{,}89$$

(γ) Παρατηρούμε ότι υπάρχει ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των βαθμών στα Μαθηματικά και στη Φυσική, αφού ο συντελεστής συσχέτισης r είναι μεγαλύτερος από 0,7. Αυτό ερμηνεύεται ως ακολούθως:

Όσο η γραπτή επίδοση ενός μαθητή αυξάνεται στο διαγώνισμα των Μαθηματικών, τόσο αναμένεται να αυξάνεται η αντίστοιχη γραπτή του επίδοση στο διαγώνισμα της Φυσικής.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Όταν έχουμε τελεία θετική γραμμική συσχέτιση, ο συντελεστής συσχέτισης είναι 1.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν για το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης ισχύει $r = 0$, τότε οι μεταβλητές X και Y είναι γραμμικά ασυσχέτιστες.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(γ)	Ο συντελεστής συσχέτισης $r = 0{,}1$ δείχνει πιο ισχυρή γραμμική συσχέτιση των δύο μεταβλητών από ότι ο συντελεστής συσχέτισης $r = -0{,}8$.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
(δ)	Όταν ερευνούμε το βάρος των παιδιών καθώς αλλάζει το ύψος τους, τότε η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το βάρος και η εξαρτημένη μεταβλητή το ύψος.	ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

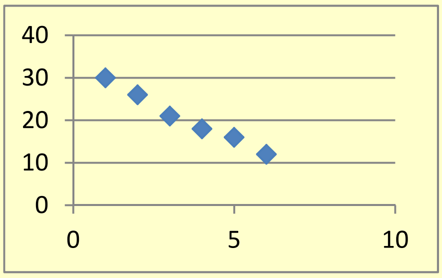
2. Μια εταιρεία ενδιαφέρεται να ερευνήσει την επίδραση των εξόδων για διαφήμιση τους τελευταίους έξι μήνες πάνω στα έσοδα από τις πωλήσεις.

Έξοδα για διαφήμιση	Έσοδα
2,5	56,2
3,4	77,2
2,7	59,3
3,1	68,4
4,0	75,7

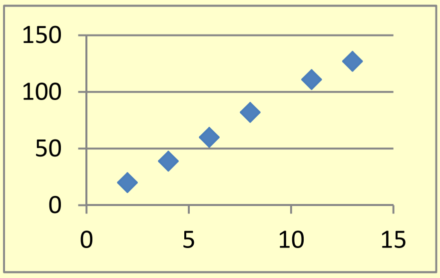
Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς και να χαρακτηρίσετε τη συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών.

3. Να περιγράψετε το είδος της συσχέτισης των δύο μεταβλητών με τους χαρακτηρισμούς «Τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση, Τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση, Μηδενική συσχέτιση, Ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση, Ασθενής θετική γραμμική συσχέτιση, Ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση, Ασθενής αρνητική γραμμική συσχέτιση» στα πιο κάτω διαγράμματα:

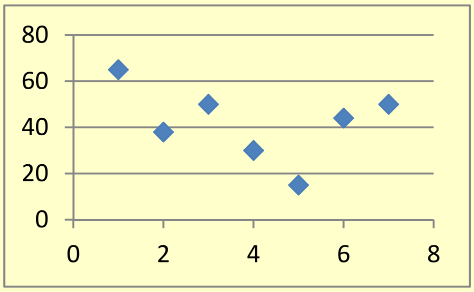
(α)



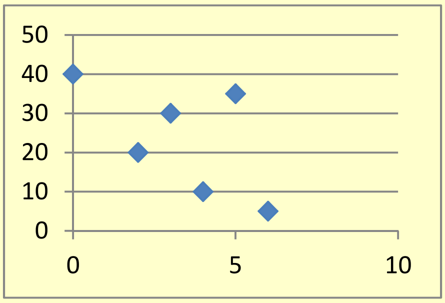
(β)



(γ)



(δ)



4. Δίνονται οι βαθμοί 8 μαθητών σε δύο διαγωνίσματα.

Διαγώνισμα A (x)	Διαγώνισμα B (y)
13	17
16	18
16	18
15	13
20	20
13	14
9	12
18	16

(α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς.

(β) Να υπολογίσετε τον γραμμικό συντελεστή συσχέτισης.

(γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών.

5. Ο συντελεστής συσχέτισης των μεταβλητών α, β είναι $+0{,}96$, ενώ ο συντελεστής συσχέτισης των μεταβλητών γ, δ είναι $-0{,}96$. Να αναφέρετε τη διαφορά των δύο αυτών συντελεστών συσχέτισης.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Μια εταιρεία εξετάζει τη διάρκεια ζωής δύο ειδών μπαταριών A και B. Παίρνει τυχαία 7 μπαταρίες από το κάθε είδος και καταγράφει τις ώρες λειτουργίας τους. Οι ώρες (σε χιλιάδες) φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

Είδος A	22	20	22	26	24	22	18
Είδος B	24	26	32	24	19	23	20

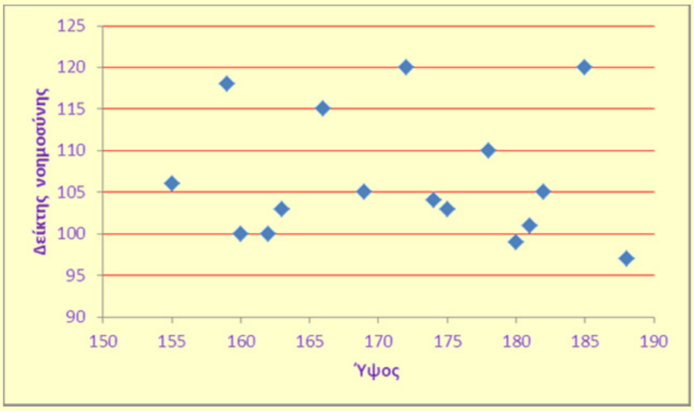
(α) Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια για τη διάρκεια ζωής των δύο ειδών μπαταριών A και B.

(β) Να υπολογίσετε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των δύο ειδών μπαταριών A και B.

2. Για τις μεταβλητές X και Y σε δέκα ζεύγη (x_i, y_i) δίνονται: $\bar{x} = 16$, $CV_x = 0{,}4$, $\bar{y} = 15$, $CV_y = 0{,}5$ και $\Sigma_{xy} = 2832$.

Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης των μεταβλητών x, y.

3. Δίνεται το πιο κάτω διάγραμμα διασποράς.



Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

4. Σε ένα τμήμα Α΄ Λυκείου στο μάθημα των Μαθηματικών έγιναν 5 διαγωνίσματα. Ο καθηγητής έδωσε στους μαθητές δύο τρόπους υπολογισμού της συνολικής γραπτής βαθμολογίας τους και ζήτησε από τους μαθητές να επιλέξουν τον τρόπο που θα ήθελαν. Ο πρώτος τρόπος ήταν να μην ληφθεί υπόψη ο μικρότερος από τους βαθμούς στα 5 διαγωνίσματα και να υπολογιστεί ο μέσος όρος των υπολοίπων 4 βαθμών. Ο δεύτερος τρόπος ήταν να ληφθούν όλα τα διαγωνίσματα υπόψη και να υπολογιστεί η διάμεσος των βαθμών και των 5 διαγωνισμάτων. Αν οι βαθμοί του Σόλωνα στα διαγωνίσματα είναι $8, 15, 18, 18, 19$, να βρείτε ποιο από τους δύο τρόπους πρέπει να επιλέξει, ώστε να έχει την καλύτερη γραπτή βαθμολογία.

5. Στο μάθημα των Μαθηματικών και της Φυσικής 10 μαθητές πήραν τους βαθμούς που φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

Μαθητής	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
Μαθηματικά	12	19	15	16	10	11	17	20	18	12
Φυσική	14	18	14	16	9	12	15	19	16	13

(α) Να κάνετε διάγραμμα διασποράς.

(β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή συσχέτισης του βαθμού των Μαθηματικών με το βαθμό της Φυσικής.

6. Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζεται ο αριθμός των προϊόντων που πώλησε μια εταιρεία για 13 εβδομάδες και ο χρόνος που χρειάστηκε για να κατασκευαστούν.

Αριθμός Προϊόντων	Χρόνος σε λεπτά
22	51
48	106
45	91
77	165
71	148
63	133
34	75
56	120
47	95
53	110
55	111
76	163
77	171

(α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς.

(β) Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης.

(γ) Να χαρακτηρίσετε τη συσχέτιση του αριθμού των προϊόντων με τον χρόνο που χρειάστηκε για να κατασκευαστούν.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

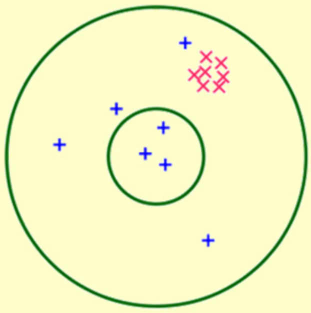
1. Δύο μεταβλητές x, y έχουν συντελεστή συσχέτισης $+0{,}85$. Να αναφέρετε ποιος θα είναι ο συντελεστής συσχέτισης των μεταβλητών $A = x - 10$ και $B = y + 100$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

2. Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι γραμμικές συσχετίσεις των γραπτών βαθμολογιών στις εξετάσεις Ιουνίου στα 5 εξεταζόμενα μαθήματα του τμήματος A_4.

	Μαθηματικά	Βιολογία	Νέα Ελληνικά	Φυσική	Χημεία
Μαθηματικά	1,00				
Βιολογία	0,54	1,00			
Νέα Ελληνικά	0,76	0,81	1,00		
Φυσική	0,70	0,73	0,71	1,00	
Χημεία	0,41	0,80	0,67	0,66	1,00

Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει, ισχυρή ή όχι, γραμμική συσχέτιση ανάμεσα στις βαθμολογίες στα πέντε εξεταζόμενα μαθήματα των μαθητών αυτών.

3. Δύο τοξότες ρίχνουν βέλη στο διπλανό στόχο. Με κόκκινο σημειώνουμε τις βολές του τοξότη A και με μπλε σημειώνουμε τις βολές του τοξότη B.



(α) Να βρείτε ποιου τοξότη οι βολές έχουν τη μικρότερη διασπορά.

(β) Ποιος είναι ο καλύτερος τοξότης;

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

Η Στερεομετρία είναι ο κλάδος της γεωμετρίας, ο οποίος μελετά τις ιδιότητες σχημάτων που εμφανίζονται στον γεωμετρικό χώρο. Ο γεωμετρικός χώρος έχει τρεις διαστάσεις, μήκος, πλάτος και ύψος. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το σημείο, την ευθεία, το επίπεδο στον γεωμετρικό χώρο και σχήματα που παράγονται από την πλήρη περιστροφή επίπεδου σχήματος γύρω από έναν σταθερό άξονα. Η Γεωμετρία στο χώρο βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στην Αρχιτεκτονική, στη Βιολογία, στην Ιατρική, στη Χημεία και σε άλλες επιστήμες.

Ιστορικό σημείωμα

Η διαφορά στην προσέγγιση της γεωμετρίας του χώρου των αρχαίων Ελλήνων έναντι των άλλων αρχαίων λαών βρίσκεται στο γεγονός ότι οι αρχαίοι Έλληνες έδιναν σημασία στη θεωρητική διάσταση της στερεομετρίας και όχι μόνο στην πρακτική.

Οι πρώτες γραπτές αναφορές για τη γεωμετρία στο χώρο παρατηρούνται από τον αρχαίο ζωγράφο Αγάθαρχο τον Σάμιο, ο οποίος κατασκεύαζε σκηνικά με προοπτική για τραγωδίες του Αισχύλου. Ο Δημόκριτος και ο Αναξαγόρας τον $5^{ο}$ αιώνα π.Χ κατέγραψαν μια γενική θεωρία περί προοπτικής.

Ο πατέρας της γεωμετρίας στο χώρο είναι ο Ευκλείδης (325 π.Χ—265 π.Χ) ο οποίος στο έργο του «Στοιχεία» θεμελιώνει την στερεομετρία.

Αρχαίοι έλληνες που συνέβαλαν στην ανάπτυξη της γεωμετρίας στο χώρο είναι ο Αρχιμήδης, ο Αριστοτέλης, ο Πλάτωνας, ο Ήρωνας και πολλοί άλλοι.

Στα χρόνια της αναγέννησης παρατηρούμε πρακτικές εφαρμογές της γεωμετρίας στο χώρο στους πίνακες ζωγραφικής. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο πίνακας του Leonardo Da Vinci, ο Μυστικός Δείπνος.

Στη σύγχρονη εποχή η γεωμετρία στο χώρο έχει εφαρμογές στο αρχιτεκτονικό σχέδιο, στη μελέτη του ανθρώπινου εγκεφάλου, στη δομή οργανικών χημικών ενώσεων και σε άλλους τομείς.

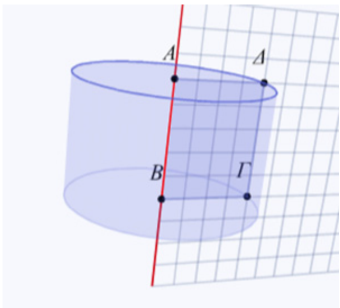
5.2 ΣΤΕΡΕΑ ΑΠΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

5.2.1 Κύλινδρος

Διερεύνηση 1

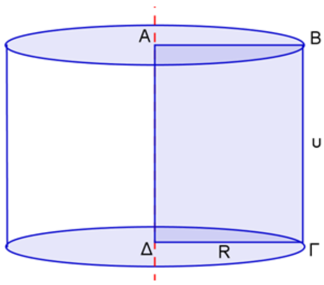
Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο *«ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ26. Στερεά εκ περιστροφής (Κύλινδρος, Κώνος)»*.

Να επιλέξετε την *«ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Κύλινδρος»* και να ακολουθήσετε τις οδηγίες της παραγράφου 1.1.



Ορισμός

Ορθός κύλινδρος ή κύλινδρος εκ περιστροφής ή απλά κύλινδρος λέγεται το στερεό που παράγεται, όταν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο εκτελέσει μιαν πλήρη περιστροφή γύρω από μιαν πλευρά του.



Στοιχεία ορθού κυλίνδρου

- Η πλευρά γύρω από την οποία περιστρέφεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο λέγεται **άξονας περιστροφής** και η πλευρά του ορθογωνίου που είναι παράλληλη με τον άξονα λέγεται **γενέτειρα** του κυλίνδρου.

- Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή της γενέτειρας του κυλίνδρου λέγεται **κυρτή επιφάνεια** του κυλίνδρου.

- Οι κυκλικοί δίσκοι που δημιουργούνται από την περιστροφή των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που είναι κάθετες στον άξονα του κυλίνδρου λέγονται **βάσεις** του κυλίνδρου.

- Η ακτίνα των βάσεων του κυλίνδρου λέγεται **ακτίνα** του κυλίνδρου και συμβολίζεται με R.

- Η απόσταση των δύο βάσεων του κυλίνδρου λέγεται **ύψος** του κυλίνδρου και συμβολίζεται με υ.

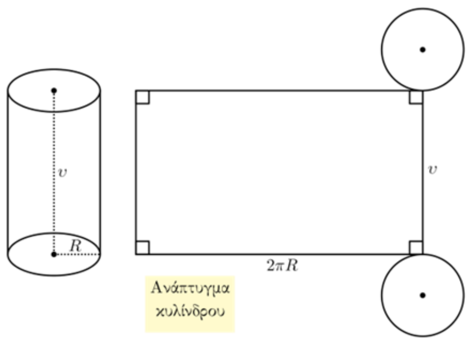
Διερεύνηση 2

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο *«ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ26. Στερεά εκ περιστροφής (Κύλινδρος, Κώνος)»*.

Να επιλέξετε την *«ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Κύλινδρος»* και να ακολουθήσετε τις οδηγίες της παραγράφου 1.2.

- Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή της γενέτειρας του κυλίνδρου είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές το ύψος και το μήκος της βάσης του κυλίνδρου. Συνεπώς, το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $E_\kappa = 2\pi R\upsilon$.
- Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου προκύπτει, όταν προσθέσουμε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας με την επιφάνεια των βάσεων του κυλίνδρου. Δηλαδή, $E_{o\lambda} = E_\kappa + 2\pi R^2 = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2$.

Το εμβαδόν της κυρτής και της ολικής επιφάνειας κυλίνδρου με ακτίνα R και ύψος υ ισούται με $E_\kappa = 2\pi R\upsilon$ και $E_{o\lambda} = E_\kappa + 2E_\beta = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2$, αντίστοιχα.



Παράδειγμα 1

Δίνεται κύλινδρος με ύψος $\upsilon = 6$ cm και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $E_\kappa = 24\pi$ cm^2. Να υπολογίσετε:

(α) το μήκος της ακτίνας του κυλίνδρου

(β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου

Λύση

(α) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $E_\kappa = 2\pi R\upsilon$. Επομένως, έχουμε:

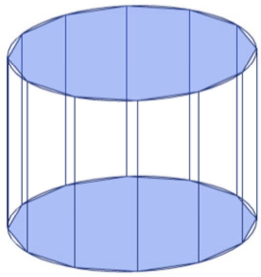
$$24\pi = 2\pi R6 \Rightarrow 24\pi = 12\pi R \Rightarrow R = 2 \text{ cm}$$

(β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $E_{o\lambda} = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2$. Επομένως, έχουμε:

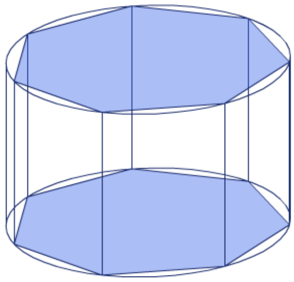
$$E_{o\lambda} = 2\pi 2(6+2) = 4\pi 8 \Rightarrow E_{o\lambda} = 32\pi \text{ cm}^2$$

Διερεύνηση 3

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο *«ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ26. Στερεά εκ περιστροφής (Κύλινδρος, Κώνος)»*.
Να επιλέξετε την *«ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Κύλινδρος»* και να ακολουθήσετε τις οδηγίες της παραγράφου 1.3.



Έστω ένα κανονικό πρίσμα με ύψος υ και βάση ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές και ακτίνα R. Όταν το ν αυξάνεται απεριόριστα (ν τείνει στο άπειρο), το εμβαδόν της βάσης του πρίσματος τείνει στο εμβαδόν του κυκλικού δίσκου. Επομένως, δημιουργείται ένας κύλινδρος με ακτίνα R και ύψος υ.
Συνεπώς, ο όγκος του κυλίνδρου είναι το γινόμενο του εμβαδού του κύκλου επί το ύψος. Δηλαδή, $V = \pi R^2 \upsilon$.



Ο όγκος κυλίνδρου με ακτίνα R και ύψος υ ισούται με: $\boldsymbol{V = \pi R^2 \upsilon}$**.**

Παράδειγμα 2

Κύλινδρος με ύψος $\upsilon = 10$ cm έχει όγκο $V = 360\pi$ cm^3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

Λύση

Ο όγκος του κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $V = \pi R^2 \upsilon$. Έχουμε:

$$V = \pi R^2 \upsilon \Rightarrow 360\pi = \pi R^2 \upsilon \Longrightarrow 360\pi = \pi R^2 10 \Longrightarrow R^2 = 36 \Longrightarrow R = 6 \text{ cm}$$

Άρα. το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας είναι:

$$E_{o\lambda} = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2 = 2\pi 6 \cdot 10 + 2\pi 6^2 = 120\pi + 72\pi = 192\pi \text{ cm}^2$$

Παράδειγμα 3

Στο διπλανό σχήμα το χαρτί κουζίνας είναι τυλιγμένο γύρω από έναν γκρίζο κύλινδρο με ύψος 40 cm και ακτίνα βάσης 2 cm. Αν η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου που σχηματίζεται, όταν τυλίγεται όλο το χαρτί, είναι 7 cm, να υπολογίσετε τον όγκο του χαρτιού.

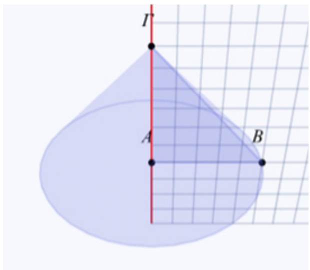
Λύση

Αφαιρούμε τον όγκο του γκρίζου κυλίνδρου από τον όγκο του κυλίνδρου που σχηματίζεται όταν τυλίγεται όλο το χαρτί. Ο όγκος του κυλίνδρου είναι $V = \pi R^2 \upsilon$. Επομένως:

$$V_{\chi\alpha\rho\tau\iota o\acute{\upsilon}} = \pi 7^2 40 - \pi 2^2 40 = 1800\pi \text{ cm}^3$$

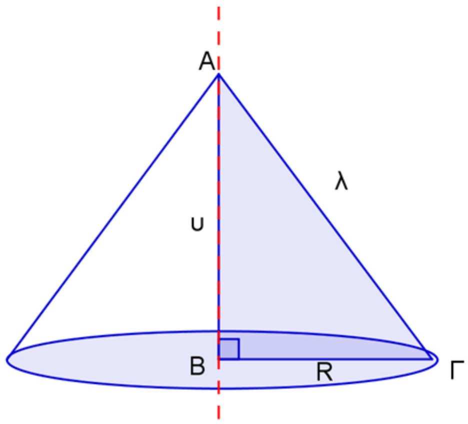
5.2.2 Κώνος

Διερεύνηση 1



Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο *«ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ26. Στερεά εκ περιστροφής (Κύλινδρος, Κώνος)»*.
Να επιλέξετε την *«ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Κώνος»* και να ακολουθήσετε τις οδηγίες της παραγράφου 2.1.

Ορισμός
Ορθός κώνος ή κώνος εκ περιστροφής ή απλά κώνος λέγεται το στερεό που παράγεται, όταν ένα ορθογώνιο τρίγωνο εκτελέσει μιαν πλήρη περιστροφή γύρω από μιαν κάθετη πλευρά του.



Στοιχεία ορθού κώνου

- Η κάθετη πλευρά γύρω από την οποία περιστρέφεται το ορθογώνιο τρίγωνο λέγεται **άξονας περιστροφής** και η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου λέγεται **γενέτειρα** του κώνου και συμβολίζεται με λ.

- Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή της γενέτειρας του κώνου λέγεται **κυρτή επιφάνεια** του κώνου.

- Ο κυκλικός δίσκος που δημιουργείται από την περιστροφή της πλευράς που είναι κάθετη στον άξονα περιστροφής λέγεται **βάση** του κώνου.

- Η ακτίνα της βάσης του κώνου λέγεται **ακτίνα** του κώνου και συμβολίζεται με R.

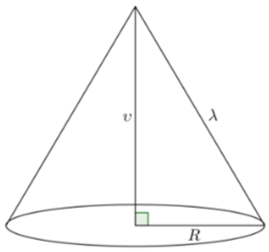
- Η απόσταση της κορυφής του κώνου από τη βάση του λέγεται **ύψος** του κώνου και συμβολίζεται με υ.

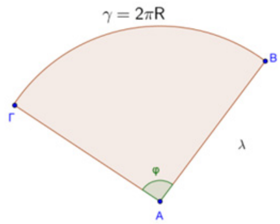
Διερεύνηση 2

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο *«ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ26. Στερεά εκ περιστροφής (Κύλινδρος, Κώνος)»*.

Να επιλέξετε την *«ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Κώνος»* και να ακολουθήσετε τις οδηγίες της παραγράφου 2.2.

- Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή της γενέτειρας του κώνου είναι ένας κυκλικός τομέας με ακτίνα τη γενέτειρα του κώνου λ και επίκεντρη γωνία φ.





Η γωνία φ του κυκλικού τομέα αντιστοιχεί σε τόξο μήκους $\gamma = 2\pi R$, όπου R είναι η ακτίνα της βάσης του κώνου. Η ακτίνα του κυκλικού τομέα είναι ίση με το μήκος λ της γενέτειρας του κώνου. Συνεπώς:

$$\gamma = 2\pi\lambda\frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow 2\pi R = \lambda\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi R}{\lambda}$$

Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι:

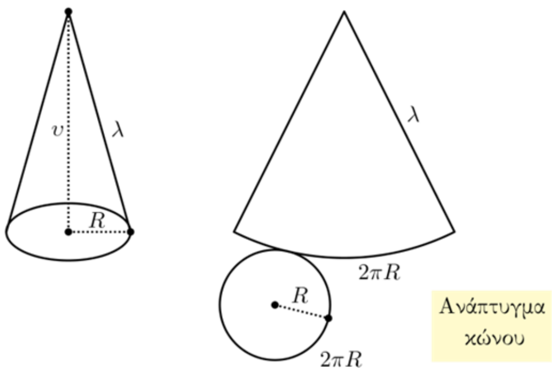
$$E = \pi\lambda^2\frac{\varphi}{2\pi} = \lambda^2\frac{2\pi R}{2\lambda} = \pi R\lambda$$

Άρα, το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι $E_\kappa = \pi R\lambda$.

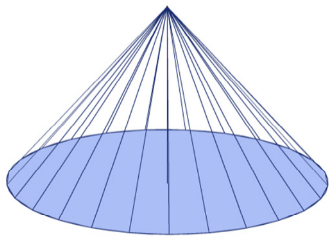
- Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι το άθροισμα του εμβαδού της κυρτής επιφάνειας και του εμβαδού της επιφάνεια της βάσης του κώνου. Δηλαδή:

$$E_{o\lambda} = E_\kappa + E_\beta = \pi R\lambda + \pi R^2$$

Το εμβαδόν της κυρτής και της ολικής επιφάνειας κώνου με ακτίνα R και ύψος υ ισούται με $E_\kappa = \pi R\lambda$ και $E_{o\lambda} = E_\kappa + E_\beta = \pi R\lambda + \pi R^2$, αντίστοιχα.

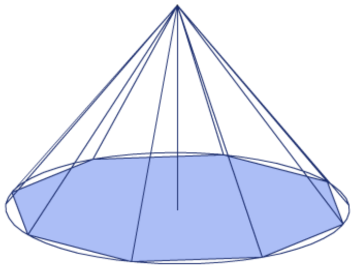


Διερεύνηση 3



Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο *«ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ26. Στερεά εκ περιστροφής (Κύλινδρος, Κώνος)»*.

Να επιλέξετε την *«ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Κώνος»* και να ακολουθήσετε τις οδηγίες της παραγράφου 2.3.



Έστω μια κανονική πυραμίδα με ύψος υ και βάση ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές και ακτίνα R. Όταν το ν τείνει στο άπειρο, το εμβαδόν της βάσης της πυραμίδας τείνει στο εμβαδόν του κυκλικού δίσκου. Επομένως, δημιουργείται ένας κώνος με ακτίνα R και ύψος υ. Συνεπώς, ο όγκος του κώνου είναι το ένα τρίτο του γινόμενου του εμβαδού του κύκλου επί το ύψος. Δηλαδή:

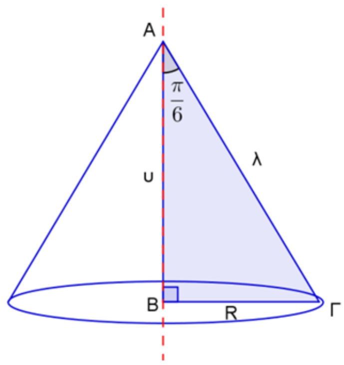
$$V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3}$$

Ο όγκος κώνου με ακτίνα R και ύψος υ είναι: $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi R^2 \upsilon}$

Παράδειγμα 4

Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου είναι $128\pi\ \mathrm{cm}^2$ και το μέτρο της γωνίας που σχηματίζει η γενέτειρα με το ύψος του είναι $\frac{\pi}{6}$. Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου.

Λύση



Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι $128\pi\ \mathrm{cm}^2$. Επομένως:

$$E_\kappa = \pi R\lambda \Rightarrow 128\pi = \pi R\lambda \Rightarrow R\lambda = 128$$

Η γωνία που σχηματίζει η γενέτειρα με το ύψος του κώνου είναι $\frac{\pi}{6}$. Επομένως, η υποτείνουσα του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι διπλάσια από τη πλευρά $B\Gamma$. Δηλαδή, $\lambda = 2R$. Συνεπώς:

$$R\lambda = 128 \Rightarrow R(2R) = 128 \Rightarrow R^2 = 64 \Rightarrow R = 8\ \mathrm{cm}, \lambda = 16\ \mathrm{cm}$$

Για το ύψος του κυλίνδρου έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\upsilon}{\lambda} \Rightarrow \upsilon = \lambda \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = 16\frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}\ \mathrm{cm}$$

Ο όγκος του κώνου είναι:

$$V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3} = \frac{\pi 8^2 8\sqrt{3}}{3} = \frac{512\sqrt{3}\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3$$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

   (α) Όταν διπλασιαστεί η ακτίνα του κυλίνδρου, τότε ο όγκος του διπλασιάζεται. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

   (β) Ο όγκος κυλίνδρου είναι τριπλάσιος από τον όγκο κώνου με την ίδια ακτίνα. Τότε, τα ύψη του κυλίνδρου και του κώνου είναι ίσα. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

   (γ) Το τετράγωνο της γενέτειρας κώνου είναι ίσο με το άθροισμα του τετραγώνου της ακτίνας του κώνου και του τετραγώνου του ύψους του κώνου. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Δίνεται κύλινδρος με εμβαδόν ολικής επιφάνειας $E_{ολ} = 216\pi\ \mathrm{cm}^2$ και ύψος διπλάσιο της ακτίνας του. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και τον όγκο του κυλίνδρου.

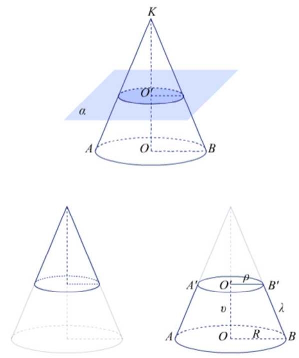
3. Να υπολογίσετε τον όγκο κώνου με εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $136\pi\ \mathrm{m}^2$ και εμβαδόν ολικής επιφάνειας $200\pi\ \mathrm{m}^2$.

4. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου είναι $36\sqrt{2}\pi\ \mathrm{cm}^2$ και η γενέτειρα του σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τη βάση του. Να υπολογίσετε τον όγκο του.

5. Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ = 4\ \mathrm{cm}$. Ο όγκος του στερεού που παράγεται όταν το ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από την πλευρά $ΑΒ$ είναι διπλάσιος από τον όγκο του στερεού που παράγεται, όταν το ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από την πλευρά $ΒΓ$. Να βρείτε το μήκος της πλευράς $ΒΓ$ του ορθογωνίου.

5.2.3 Κόλουρος κώνος

Διερεύνηση

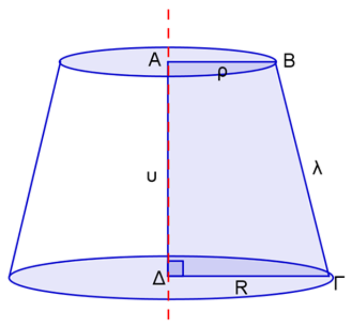


Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο *«ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ26. Στερεά εκ περιστροφής-Κόλουρος κώνος»*.

Να επιλέξετε την *«ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Κόλουρος Κώνος»* και να ακολουθήσετε τις οδηγίες της παραγράφων 1.1 και 1.3.

Ορισμός

Κόλουρος κώνος λέγεται το στερεό που παράγεται όταν ένα ορθογώνιο τραπέζιο περιστραφεί πλήρη περιστροφή γύρω από την πλευρά που είναι κάθετη στις βάσεις του.



Στοιχεία κόλουρου κώνου

- Η πλευρά γύρω από την οποία περιστρέφεται το ορθογώνιο τραπέζιο λέγεται **άξονας περιστροφής** και η πλευρά που δεν είναι κάθετη στις βάσεις του λέγεται **γενέτειρα** του κόλουρου κώνου και συμβολίζεται με λ.

- Η επιφάνεια που δημιουργείται από την περιστροφή της γενέτειρας του κόλουρου κώνου λέγεται **κυρτή επιφάνεια** του κόλουρου κώνου.

- Οι κυκλικοί δίσκοι που δημιουργούνται από την περιστροφή των δύο πλευρών που είναι κάθετες στον άξονα περιστροφής λέγονται **βάσεις** του κόλουρου κώνου.

- Η ακτίνα της μικρής και της μεγάλης βάσης του κόλουρου κώνου συμβολίζονται με ρ και R, αντίστοιχα.

- Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται **ύψος** του κόλουρου κώνου και συμβολίζεται με υ.

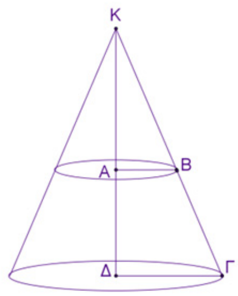
Ο όγκος, το εμβαδόν κυρτής επιφάνειας και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας κόλουρου κώνου με ύψος υ, γενέτειρα λ και ακτίνες βάσεων R και ρ ισούται με

$$V = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2),$$
$$E_\kappa = \pi(R+\rho)\lambda,$$

και

$$E_{o\lambda} = E_\kappa + E_{\beta_1} + E_{\beta_2} = \pi(R+\rho)\lambda + \pi R^2 + \pi\rho^2,$$

αντίστοιχα.



- Η κυρτή επιφάνεια του κόλουρου κώνου με γενέτειρα την $ΒΓ$ είναι η διαφορά των κυρτών επιφανειών των κώνων με γενέτειρες την $ΚΒ$ και την $ΚΓ$.

$$E_\kappa = \pi(ΓΔ)(ΚΓ) - \pi(ΑΒ)(ΚΒ) = \pi R(\lambda + ΚΒ) - \pi\rho(ΚΒ) \qquad (1)$$

Τα τρίγωνα $ΚΑΒ$ και $ΚΔΓ$ είναι όμοια. Επομένως:

$$\frac{ΚΒ}{ΚΓ} = \frac{ΑΒ}{ΓΔ} \Rightarrow \frac{ΚΒ}{\lambda + ΚΒ} = \frac{\rho}{R} \Rightarrow ΚΒ = \frac{\rho\lambda}{R-\rho}, \quad R \neq \rho$$

Από την (1) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E_\kappa &= \pi R\left(\lambda + \frac{\rho\lambda}{R-\rho}\right) - \pi\rho\left(\frac{\rho\lambda}{R-\rho}\right) \\ &= \pi\lambda\left(R\left(\frac{R-\rho+\rho}{R-\rho}\right) - \rho\left(\frac{\rho}{R-\rho}\right)\right) = \pi\lambda\left(\frac{R^2-\rho^2}{R-\rho}\right) \\ &= \frac{\pi\upsilon}{3}\left(\frac{(R-\rho)(R+\rho)}{R-\rho}\right) = \pi(R+\rho)\lambda \end{aligned}$$

- Ο όγκος του κόλουρου κώνου με γενέτειρα την $ΒΓ$ είναι η διαφορά των όγκων των κώνων με γενέτειρες την $ΚΒ$ και την $ΚΓ$. Δηλαδή:

$$V = \frac{\pi(ΓΔ)^2(ΚΔ)}{3} - \frac{\pi(ΑΒ)^2(ΚΑ)}{3} = \frac{\pi}{3}\left(R^2(\upsilon + ΚΑ) - \rho^2(ΚΑ)\right) \qquad (2)$$

Τα τρίγωνα $ΚΑΒ$ και $ΚΔΓ$ είναι όμοια. Επομένως:

$$\frac{ΚΑ}{ΚΔ} = \frac{ΑΒ}{ΓΔ} \Rightarrow \frac{ΚΑ}{\upsilon + ΚΑ} = \frac{\rho}{R} \Rightarrow ΚΑ = \frac{\upsilon\rho}{R-\rho}, \qquad R \neq \rho$$

Από την (2) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3}\left(R^2\left(\upsilon + \frac{\upsilon\rho}{R-\rho}\right) - \rho^2\left(\frac{\upsilon\rho}{R-\rho}\right)\right) \\ &= \frac{\pi\upsilon}{3}\left(R^2\left(\frac{R-\rho+\rho}{R-\rho}\right) - \rho^2\left(\frac{\rho}{R-\rho}\right)\right) = \frac{\pi\upsilon}{3}\left(\frac{R^3-\rho^3}{R-\rho}\right) \\ &= \frac{\pi\upsilon}{3}\left(\frac{(R-\rho)(R^2+R\rho+\rho^2)}{R-\rho}\right) = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2+R\rho+\rho^2) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5

Το ύψος ενός κόλουρου κώνου είναι 9 cm, η ακτίνα της μικρής βάσης του 4 cm και η ακτίνα της μεγάλης βάσης του 12 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο του κόλουρου κώνου.

Λύση

Έχουμε ότι $\upsilon = 9 \text{ cm}$, $\rho = 4 \text{ cm}$ και $R = 12 \text{ cm}$. Επομένως:

$$V = \frac{9\pi}{3}(12^2 + 4 \cdot 12 + 4^2) = 624\pi \text{ cm}^3$$

Παράδειγμα 6

Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κόλουρου κώνου είναι $E_\kappa = 25\pi \text{ cm}^2$. Η γενέτειρα και η ακτίνα της μικρής βάσης του κόλουρου κώνου είναι $\lambda = 5 \text{ cm}$ και $\rho = 1 \text{ cm}$, αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τον εμβαδόν ολικής επιφάνειας του κόλουρου κώνου.

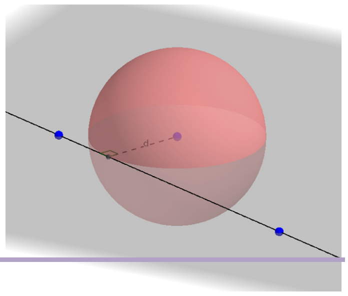
Λύση

$E_\kappa = \pi(R + \rho)\lambda \Rightarrow 25\pi = \pi(1 + R)5 \Rightarrow R + 1 = 5 \Rightarrow R = 4 \text{ cm}$

$E_{o\lambda} = E_\kappa + E_{\beta_1} + E_{\beta_2} = 25\pi + \pi 4^2 + \pi 1^2 = 42\pi \text{ cm}^2$

5.2.4 Σφαίρα

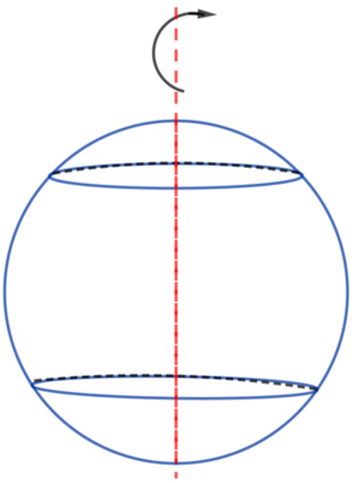
Διερεύνηση



Να ανοίξετε το αρχείο *«CLyk_En05_SferaEftheia.ggb»* και να διερευνήσετε τις πιθανές θέσεις της ευθείας σε σχέση με τη σφαίρα.

Ορισμός

Σφαίρα λέγεται το στερεό που παράγεται όταν ένας κύκλος περιστραφεί κατά π γύρω από μια διάμετρό του.



Στοιχεία σφαίρας

- **Χορδή** της σφαίρας λέγεται κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα δύο σημεία της σφαίρας.

- Κάθε χορδή που διέρχεται από το κέντρο της λέγεται **διάμετρος** της σφαίρας.

Ο όγκος και το εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας με ακτίνα R ισούται με

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

και

$$E = 4\pi R^2,$$

αντίστοιχα.

Παράδειγμα 7

Η ακτίνα σφαίρας είναι 6 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο και την επιφάνεια της σφαίρας.

Λύση

$V = \frac{4\pi 6^3}{3} = 288\pi \text{ cm}^3$

$E = 4\pi R^2 = 4\pi 6^2 = 144\pi \text{ cm}^2$

Παράδειγμα 8

Ο όγκος σφαίρας είναι $36\pi \text{ cm}^3$. Να υπολογίσετε την επιφάνεια της σφαίρας.

Λύση

$V = 36\pi \Rightarrow \frac{4\pi R^3}{3} = 36\pi \Rightarrow R^3 = 27 \Rightarrow R = 3 \text{ cm}$

$E = 4\pi R^2 = 4\pi 3^2 = 36\pi \text{ cm}^2$

5.2.5 Περιστροφή επίπεδων σχημάτων γύρω από άξονα

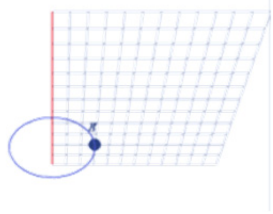
Διερεύνηση

Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο *«ΛΤ_ΜΑΘ_Β_ΨΕΠ26. Στερεά εκ περιστροφής-Κόλουρος κώνος»*.

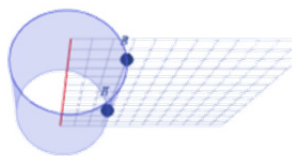
Να επιλέξετε την *«ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Κόλουρος Κώνος»* και στη συνέχεια την παράγραφο 1.3.

- ✓ Να σχηματίσετε ένα σημείο και να το περιστρέψετε μιαν πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα. Ποιο σχήμα έχει κατασκευαστεί;
- ✓ Να σχηματίσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο με τον άξονα και να το περιστρέψετε μιαν πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα. Ποιο σχήμα έχει κατασκευαστεί;
- ✓ Να σχηματίσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στον άξονα και να το περιστρέψετε μιαν πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα. Ποιο σχήμα έχει κατασκευαστεί;

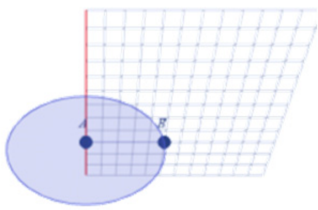
- Ένα σημείο, που δεν ανήκει στον άξονα περιστροφής, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει έναν κύκλο.



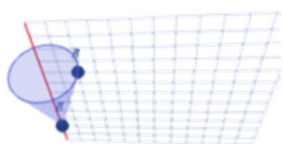
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, παράλληλο με τον άξονα περιστροφής, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει την κυρτή επιφάνεια κυλίνδρου.



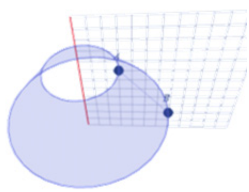
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, κάθετο στον άξονα περιστροφής, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω τον άξονα περιστροφής παράγει έναν κυκλικό δίσκο.



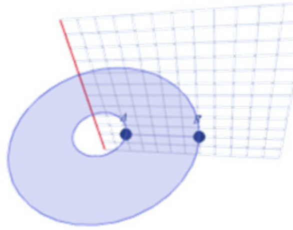
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο τέμνει κατά οξεία γωνία τον άξονα περιστροφής, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω τον άξονα περιστροφής παράγει την κυρτή επιφάνεια κώνου.



- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο δεν τέμνει τον άξονα περιστροφής και σχηματίζει οξεία γωνία με αυτόν, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής παράγει την κυρτή επιφάνεια κόλουρου κώνου.

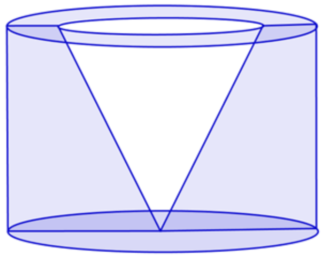


- Ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο δεν τέμνει τον άξονα περιστροφής και σχηματίζει ορθή γωνία με αυτόν, όταν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω τον άξονα περιστροφής παράγει έναν δακτύλιο.

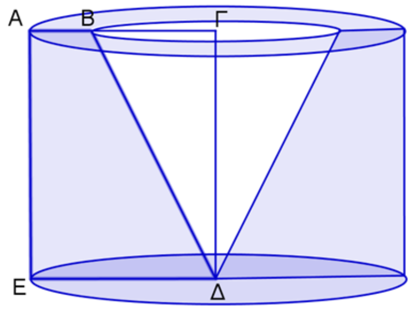


Παράδειγμα 9

Το διπλανό στερεό είναι ένα κυλινδρικό καλούπι που χρησιμοποιείται για την κατασκευή κώνων. Η διάμετρος της βάσης του κυλίνδρου είναι $16\ \text{cm}$ και η διάμετρος της βάσης του κώνου $12\ \text{cm}$. Το ύψος του κυλίνδρου είναι $8\ \text{cm}$. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.



Λύση



Γράφουμε τα σημεία $A, B, Γ, Δ$ και E και φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $BΓ$ και $ΓΔ$. Τότε, η ακτίνα του κυλίνδρου και του κώνου είναι $AΓ = \frac{16}{2} = 8\ \text{cm}$ και $BΓ = \frac{12}{2} = 6\ \text{cm}$, αντίστοιχα.

Το ύψος του κώνου είναι ίσο με το ύψος του κυλίνδρου $AE = 8\ \text{cm}$.

Η γενέτειρα του κώνου είναι $BΔ = 10\ \text{cm}$ και προκύπτει από την εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $BΓΔ$. Ο όγκος του στερεού προκύπτει ως η διαφορά του όγκου του κώνου από τον όγκο του κυλίνδρου. Συνεπώς:

$$V = \pi(AΓ)^2(AE) - \frac{\pi(BΓ)^2(AE)}{3} = \pi 8^2 8 - \frac{\pi 6^2 8}{3} = 416\pi\ \text{cm}^3$$

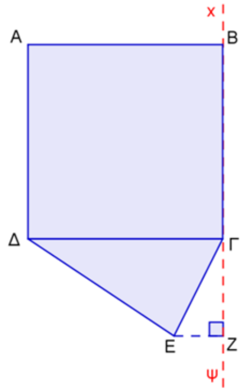
Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού είναι το άθροισμα των εμβαδών των επιφανειών που δημιουργούνται από την περιστροφή των ευθύγραμμων τμημάτων $AB, BΔ, EΔ$ και AE γύρω από το ευθύγραμμο τμήμα $ΓΔ$.

Τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, BΔ, EΔ$ και AE παράγουν επιφάνεια δακτυλίου, κυρτή επιφάνεια κώνου, επιφάνεια κυκλικού δίσκου και κυρτή επιφάνεια κυλίνδρου αντίστοιχα. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} E_{ολ} &= E_{AB} + E_{BΔ} + E_{EΔ} + E_{AE} \\ &= \pi(AΓ)^2 - \pi(BΓ)^2 + \pi(BΓ)(BΔ) + \pi(EΔ)^2 + 2\pi(AΓ)(AE) \\ &= \pi 8^2 - \pi 6^2 + \pi 6 \cdot 10 + \pi 8^2 + 2\pi 8 \cdot 8 = 280\pi\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 10

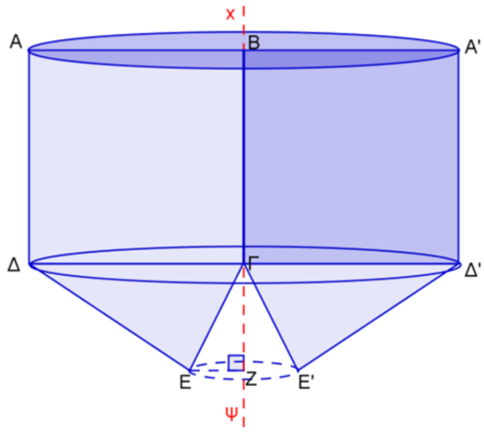
Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο με πλευρά $AB = 21$ cm και το τρίγωνο $ΓΕΖ$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές $ΓΖ = 8$ cm και $ΕΖ = 6$ cm. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σχήματος $ΑΒΓΕΔΑ$ γύρω από τον άξονα $xψ$.



Λύση

<u>Κύλινδρος $ΑΑ'Δ'Δ$:</u>

$R = 21$ cm, $υ = 21$ cm



<u>Κόλουρος κώνος $ΔΔ'Ε'Ε$:</u>

$υ_1 = 8$ cm, $ρ = 6$ cm, $R = 21$ cm

$λ^2 = 8^2 + (21-6)^2 = 289 \Rightarrow λ = 17$ cm

<u>Κώνος $ΓΕΕ'$:</u>

$υ_1 = 8$ cm, $R_1 = 6$ cm

$λ_1^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow λ_1 = 10$ cm

$$\begin{aligned} V &= V_{κυλ} + V_{κ.κων} - V_{κων} \\ &= πR^2υ + \frac{πυ_1[R^2 + Rρ + ρ^2]}{3} - \frac{πR_1^2υ_1}{3} \\ &= π21^2 21 + \frac{π8[21^2 + 21 \cdot 6 + 6^2]}{3} - \frac{π6^2 8}{3} = 10773π \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{ολ} &= E_{βάσης\ κυλ.} + E_{κυρτής.κων.} + E_{κυρτής\ κολ.κων.} + E_{κυρτής\ κυλ.} \\ &= πR^2 + πR_1λ_1 + π(R+ρ)λ + 2πRυ \\ &= π21^2 + π6 \cdot 10 + π(21+6)17 + 2π21 \cdot 21 = 1842π \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Δραστηριότητες

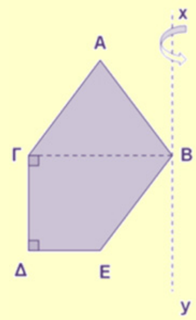
1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

   (α) Όταν διπλασιαστεί το ύψος του κόλουρου κώνου, τότε ο όγκος του διπλασιάζεται. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

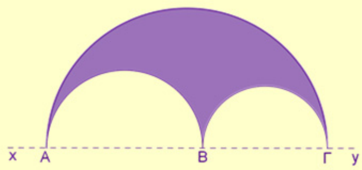
   (β) Όταν τετραπλασιαστεί η επιφάνεια σφαίρας, τότε ο όγκος της οκταπλασιάζεται. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Δίνεται κόλουρος κώνος με γενέτειρα $\lambda = 5\,\text{cm}$ και εμβαδό κυρτής επιφάνειας $E_\kappa = 45\pi\,\text{cm}^2$. Αν η ακτίνα της μεγάλης του βάσης είναι διπλάσια από την ακτίνα της μικρής βάσης, να υπολογίσετε το ύψος του.

3. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $B\Gamma = 6\,\text{cm}$ και $AB = A\Gamma = 5\,\text{cm}$. Το $BE\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις $B\Gamma$ και ΔE, ύψος $\Gamma\Delta = 4\,\text{cm}$ και πλευρά $BE = 5\,\text{cm}$. Το σκιασμένο πολύγωνο $ABE\Delta\Gamma$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xBy που είναι κάθετος στη $B\Gamma$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο που παράγεται.



4. Στο διπλανό σχήμα τα τόξα $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ είναι ημικύκλια. Δίνεται ότι το τμήμα ΑΓ είναι $18\,\text{cm}$ και $4AB = 5B\Gamma$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του σκιασμένου χωρίου γύρω από τον άξονα xy.



5. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις $AB = 5a\,\text{cm}$ και $\Gamma\Delta = 3a\,\text{cm}$ και $\hat{B} = \frac{\pi}{3}$. Το τραπέζιο περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από ευθεία $xB\psi$ κάθετη στην AB στο σημείο B. Αν ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή είναι $160\sqrt{3}\pi\,\text{cm}^3$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να υπολογίσετε τον όγκο κώνου με ακτίνα $4\,\text{cm}$ και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $20\pi\ \text{cm}^2$.

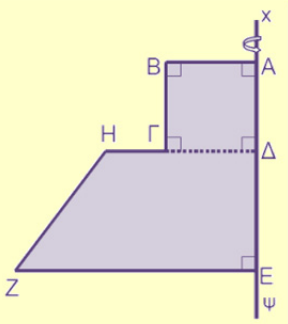
2. Ένας κύλινδρος και ένας κώνος έχουν το ίδιο ύψος. Ο όγκος του κώνου είναι $12\pi\ \text{cm}^3$ και το εμβαδόν κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $24\pi\ \text{cm}^2$. Αν οι ακτίνες των δύο στερεών είναι ίσες, να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.

3. Η στάθμη του νερού σε κυλινδρικό δοχείο ακτίνας $3\,\text{cm}$ είναι $4\,\text{cm}$. Μέσα στο δοχείο τοποθετούμε μια σφαίρα, η οποία καλύπτεται πλήρως από το νερό και η στάθμη του νερού διπλασιάζεται. Να υπολογίσετε την επιφάνεια της σφαίρας.

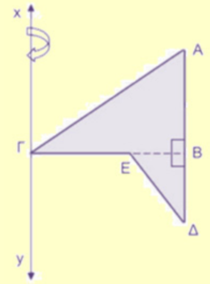
4. Κύλινδρος είναι εγγεγραμμένος σε σφαίρα ακτίνας $7\sqrt{2}\,\text{cm}$. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι διπλάσιο από την ακτίνα του, να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου.

5. Ορθογώνιο τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $\hat{Γ} = \hat{Δ} = 90°$ και πλευρές $ΑΔ = 12\,\text{cm}$, $ΒΓ = 8\,\text{cm}$ και $ΔΓ = 3\,\text{cm}$, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από ευθεία ε, που είναι παράλληλη προς την $ΑΔ$ και απέχει $2\,\text{cm}$ από αυτή. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή.

6. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο με πλευρά $3\,\text{cm}$ και το τετράπλευρο $ΔΗΖΕ$ ορθογώνιο τραπέζιο $\left(\hat{Δ} = \hat{Ε} = \pi/2\right)$ με $ΔΗ = 5\,\text{cm}$, $ΕΖ = 8\,\text{cm}$ και $ΗΖ = 5\,\text{cm}$. Το σκιασμένο μέρος του σχήματος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $x\psi$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

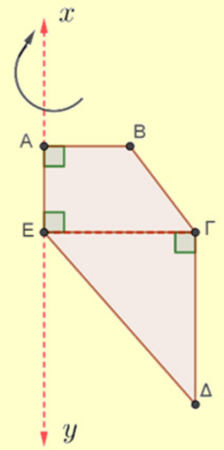


7. Στο διπλανό σχήμα δίνονται $ΒΓ \perp ΑΔ$, $ΑΒ = 6\,\text{cm}$, $ΒΓ = 8\,\text{cm}$, $ΒΕ = 3\,\text{cm}$ και $ΕΔ = 5\,\text{cm}$. Το σκιασμένο τετράπλευρο $ΑΔΕΓ$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy που περνά από το σημείο $Γ$ και είναι παράλληλος προς την $ΑΔ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



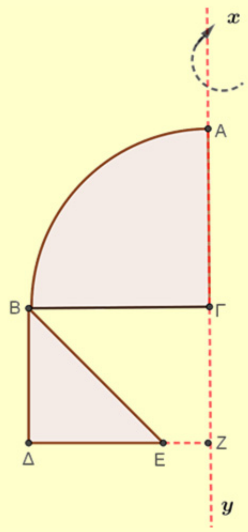
8. Ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις $7\ \mathrm{cm}$ και $10\ \mathrm{cm}$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τη μεγάλη βάση του. Αν ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή είναι $128\pi\ \mathrm{cm}^3$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.

9. Στο διπλανό σχήμα $AE = 4\ \mathrm{cm}$, $B\Gamma = 5\ \mathrm{cm}$, $\Gamma\Delta = 8\ \mathrm{cm}$, $\Delta E = 10\ \mathrm{cm}$, $\widehat{E\Gamma\Delta} = \pi/2$ και οι $AB, E\Gamma$ είναι κάθετες στον άξονα xy. Το σκιασμένο μέρος του σχήματος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του παραγόμενου στερεού.



10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $\left(\hat{A} = \pi/2\right)$ με πλευρά $AB = 6\ \mathrm{cm}$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Gamma$ προς το μέρος του A κατά τμημα $A\Delta = A\Gamma$. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα $x\Delta\psi$, ο οποίος είναι κάθετος στην $\Delta\Gamma$ στο Δ και παράγει όγκο ίσο με $512\pi\ \mathrm{cm}^3$. Να υπολογίσετε:
(α) το μήκος της πλευράς $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$
(β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται

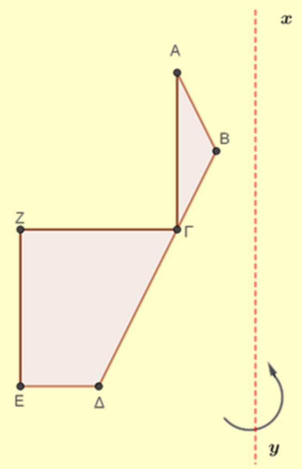
11. Στο διπλανό σχήμα ο κυκλικός τομέας $AB\Gamma$ είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα $B\Gamma = 8\ \mathrm{cm}$ και το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $B\Delta = \Delta E = 6\ \mathrm{cm}$. Αν η ΔZ είναι κάθετη στον άξονα xy, να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου σχήματος γύρω από τον άξονα xy.



Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ πλευράς $α$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα $xAψ$ που είναι κάθετος στη διαγώνιο $ΑΓ$ του τετραγώνου. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του $α$, τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

2. Το διπλανό σκιασμένο σχήμα αποτελείται από το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΒΓ)$ και το ορθογώνιο τραπέζιο $ΖΓΔΕ$ $\left(Ε\hat{Ζ}Γ = Ζ\hat{Ε}Δ = \frac{\pi}{2}\right)$. Ο άξονας xy είναι παράλληλος με το ευθύγραμμο τμήμα $ΖΕ$ και απέχει $6\ \mathrm{m}$ από αυτό. Αν $Α\hat{Γ}Ζ = \frac{\pi}{2}$, $ΖΓ = ΖΕ = ΑΓ = 4\ \mathrm{m}$, $ΕΔ = 2\ \mathrm{m}$ και $ΒΔ = 3\sqrt{5}\ \mathrm{m}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου σχήματος γύρω από τον άξονα xy.



3. Κόλουρος κώνος και κώνος έχουν ίσα ύψη και η ακτίνα της μικρής βάσης του κόλουρου κώνου είναι ίση με την ακτίνα της βάσης του κώνου. Συμβολίζουμε με R την ακτίνα της μεγάλης βάσης του κόλουρου κώνου, ρ την ακτίνα της μικρής βάσης του κόλουρου κώνου, λ_1 την γενέτειρα του κόλουρου κώνου και λ_2 την γενέτειρα του κώνου.

   (α) Να αποδείξετε ότι:

   $$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{R^2 - 2R\rho}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

   (β) Να αποδείξετε ότι αν η ακτίνα της μεγάλης βάσης του κόλουρου κώνου είναι μεγαλύτερη από το διπλάσιο της ακτίνας της μικρής βάσης του κόλουρου κώνου, τότε $\lambda_1 > \lambda_2$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$\in$	ανήκει
$\notin$	δεν ανήκει
$\forall$	για κάθε
$\exists$	υπάρχει
$\cup$	ένωση συνόλων
$\cap$	τομή συνόλων
$\subset$	γνήσιο υποσύνολο
$\subseteq$	υποσύνολο
$\emptyset$ ή $\{\ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
$\neq$	άνισο
$\equiv$	ταυτοτικά ίσο
$\cong$	κατά προσέγγιση ίσο
$\mathbb{N}$	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{N}_0$	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{Z}$	ακέραιοι αριθμοί $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\dots\}$
$\mathbb{Z}^+$	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{Z}^-$	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1,-2,-3,-4,\dots\}$
$\mathbb{Q}$	ρητοί αριθμοί $\{α/β:\ α,β\in Z$ και $β\neq0\}$
$\mathbb{Q}^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{Q}_0^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
$\mathbb{Q}^-$	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{R}$	πραγματικοί αριθμοί
$\Rightarrow$	απλή συνεπαγωγή
$\Leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
$\perp$	κάθετες
$\parallel$	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή

=		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
.		Υποδιαστολή
EXP		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
Ans		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
$x^{\square}$	ή x^y ή ^	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
SHIFT	ή 2^{nd} F	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
AC		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
DEL		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
Abs		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
(-)		Εισαγωγή Προσήμου –
a b/c	ή $\frac{\square}{\square}$	Κλάσμα
S⇔D	ή a b/c	Μετατροπή Κλάσματος ⇔ Δεκαδικό
CLR		Σβήσιμο μνήμης
M+		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
M-		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
M		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3+4$	[3] [+] [4] [=]	3+4 7
2,34 – 1,1	[2] [·] [3] [4] [–] [1] [·] [1] [=]	2.34 – 1.1 1.24
$3 \cdot 2$	[3] [x] [2] [=]	$3X2$ 6
2^5	[2] [x^y] [5] [=]	2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$	[5] [EXP] [3] [=]	$5E3$ ή $5X103$ 5000
$\frac{3}{4}$	[a b/c] [3] [↓] [4] [→] [=] ή [3] [a b/c] [4] [=]	$\frac{3}{4}$ 3⌟4
$2\frac{3}{4}$	[SHIFT] [$\frac{\blacksquare}{\square}$] [2] [→] [3] [↓] [4] [=] ή [2] [a b/c] [3] [a b/c] [4] [=]	$2\frac{3}{4}$ 2 ⌟3 ⌟4
$\sqrt{4}$	[√] [4] [=]	$\sqrt{4}$ 2
5^2	[5] [X²] [=]	5^2 25
$2 \cdot (7-3)$	[2] [x] [(] [7] [–] [3] [)] [=]	$2X(7-3)$ 8
$2 \cdot (7-3)$	[7] [–] [3] [=] [2] [x] [Ans] [=]	$2XAns$ 8
$2-(-3)$	[2] [–] [(] [(-)] [3] [)] [=]	$2-(-3)$ 5
$\vert -3 \vert$	[Abs] [(-)] [3] [=]	$\vert -3 \vert$ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	[S⇔D] ή [SHIFT] [a b/c]	$\frac{1}{4}$
$9-6:2$	Υπολογισμός και αποθήκευση [9] [–] [6] [÷] [2] [=] [M+]	$9-6:\ 2M+$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9-6:2)-6:(9-6:2)$	[3] [X] [M] [–] [6] [÷] [M] [=]	$3\ X\ M-6:\ M$ 17

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ 1°- 89°

Γωνία	ημω	συνω	εφω
1°	0,017	0,999	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,395	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,348
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
28°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
38°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Γωνία	ημω	συνω	εφω
46°	0,720	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,470	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,748
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,333
78°	0,978	0,203	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	0,999	0,018	57,290