ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Λυκείου Κατεύθυνσης

Α΄ τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Γ΄ Λυκείου Κατεύθυνσης, Α΄ Τεύχος

Το παρόν τεύχος αφιερώνεται στην μνήμη της Επιθεωρήτριας Μαθηματικών Μέσης Εκπαίδευσης Ευτυχίας Καλλεπίτη.

Συγγραφή: Βολακάκη Μαρία, Κοντοβούρκης Μιχάλης, Κυριάκου Κυριάκος, Λοϊζιάς Σωτήρης, Ματθαίου Κυριάκος, Παπαγιάννης Κωνσταντίνος, Σαλονικίδης Ιωάννης, Σεργίδης Μάριος, Τιμοθέου Σάββας

Συντονιστές: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*
Βίδρας Αλέκος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*

Εποπτεία: Φιλίππου Ανδρέας, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Γιασουμής Νικόλας, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*
Χατζηχρίστου Χρυσούλα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*

Γλωσσική επιμέλεια: Παλάτου – Χριστόφια Μαριάννα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ έκδοση 2018
Β΄ έκδοση 2019

Εκτύπωση:

ISBN:

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε τέσσερα τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Κατεύθυνσης», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Το βιβλίο έχει έναν διττό ρόλο να εκπληρώσει, να μυηθεί ο μαθητής στη συλλογιστική την οποία εκφράζει το αξεπέραστο λογικό - επαγωγικό σύστημα των Μαθηματικών και παράλληλα να ανταποκριθεί στις σύγχρονες εκπαιδευτικές επιταγές.

Όλο το υλικό που περιλαμβάνεται στο παρόν βιβλίο, σύμφωνο με τα Νέα Αναλυτικά Προγράμματα και τους Δείκτες Επιτυχίας και Επάρκειας που τίθενται από την εκπαιδευτική μεταρρύθμιση, αποσκοπεί αφενός στη βοήθεια των μαθητών/τριών να κατανοήσουν τη μαθηματική λογική και σκέψη και αφετέρου στη συνεισφορά της μαθηματικής παιδείας του τόπου.

Το βιβλίο «Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Κατεύθυνσης» περιλαμβάνει την ύλη των Μαθηματικών που προβλέπεται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Γ΄ τάξης Λυκείου, του οποίου η εφαρμογή άρχισε από το σχολικό έτος 2017 – 2018 και είναι εμπλουτισμένο με αυστηρούς ορισμούς και αποδείξεις όπως επίσης με πολλές εφαρμογές και παραδείγματα, που ανταποκρίνονται στις δυνατότητες και στα ενδιαφέροντα των μαθητών/τριών. Επιπρόσθετα, καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια, ώστε να είναι δυνατή η ολοκλήρωση της διδασκαλίας του στον διδακτικό χρόνο, ο οποίος προβλέπεται από το εγκεκριμένο ωρολόγιο πρόγραμμα.

Το κλειδί της επιτυχίας στο μάθημα των Μαθηματικών είναι η ουσιαστική κατανόηση των εννοιών, η ανάπτυξη αναλυτικής και συνθετικής σκέψης, η μεθοδολογική αντιμετώπιση ομαδοποιημένων προβλημάτων και η αποφυγή της αποστήθισης. Η ορθή χρήση του βιβλίου δημιουργεί στον μαθητή, εκτός από το φιλικό περιβάλλον, όλες εκείνες τις προϋποθέσεις, κυριότερες των οποίων είναι ο προβληματισμός και η αυτενέργεια, για ανάπτυξη μιας κριτικής, διερευνητικής και ορθολογιστικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τους Καθηγητές του Πανεπιστημίου Κύπρου Κωνσταντίνο Χρίστου και Αλέκο Βίδρα.

Δρ Κυπριανός Δ. Λούης
Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	**Σελίδα**

ΕΝΟΤΗΤΑ 1

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1.1 ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΟΡΙΩΝ – ΚΑΝΟΝΕΣ ΤΟΥ DE L'HOSPITAL

Ιστορικό Σημείωμα

Ο **Guillaume de l'Hospital** (νέα γραφή l'Hôpital) (1661-1704) ήταν Γάλλος μαθηματικός με αριστοκρατική καταγωγή. Έδειξε την κλίση του στα μαθηματικά, όταν 15 ετών έλυσε ένα πρόβλημα που τέθηκε από τον Blaise Pascal. Υπήρξε μαθητής του Johann Bernoulli και αλληλογραφούσε με τους Leibniz και Huygens. Το 1696 δημοσίευσε το πρώτο σύγγραμμα στον διαφορικό λογισμό με τίτλο *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* (Ανάλυση των απείρως μικρών, για την κατανόηση των καμπυλών). Στο έργο αυτό εμφανίζεται για πρώτη φορά το αποτέλεσμα που είναι σήμερα γνωστό ως κανόνας του de L'Hospital, ο οποίος όμως στην πραγματικότητα οφείλεται στον Bernoulli. Τελικά, την απόδειξη του κανόνα αυτού την έδωσε ο Γάλλος μαθηματικός Augustin Cauchy το 1823 στο βιβλίο του *Résumé des Leçons sur le Calcul infinitésimal.*

CINQUIÈME LEÇON.

Détermination des valeurs que prennent les fonctions réelles d'une seule variable, quand elles se présentent sous les formes indéterminées $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0\times\pm\infty$, 0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$, **etc....**

Διερεύνηση

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\frac{e^x-1}{x},\ \ x\in\mathbb{R},\ \ x\neq 0$$

και η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x)=\frac{e^x-1}{\eta\mu x},\ \ x\in\mathbb{R},\ \ \eta\mu x\neq 0$$

Να μελετήσετε τη συμπεριφορά των f και g, όταν το $x\to 0$.

Από τη Β΄ Λυκείου έχουμε μάθει ότι ορισμένες από τις αλγεβρικές πράξεις του $\mathbb{R}$ δεν μπορούν να επεκταθούν στο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, γιατί δεν έχουν μονοσήμαντα ορισμένη τιμή. Οι μορφές αυτές των πράξεων λέγονται απροσδιόριστες και μερικές από αυτές, οι οποίες προκύπτουν ως άμεση συνέπεια ορίων, είναι οι:

$$(+\infty) + (-\infty),\ \ (-\infty) + (+\infty),\ \ (+\infty) - (+\infty),\ \ (-\infty) - (-\infty),\ \ 0 \cdot (\pm\infty),\ \ \frac{0}{0},\ \ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Για να υπολογίσουμε τα όρια, τα οποία κατέληγαν στις μορφές αυτές, χρησιμοποιήσαμε διάφορες τεχνικές, όπως απλοποίηση κλασμάτων

$$\text{π.χ. } \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1},\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1},$$

γεωμετρικές μεθόδους

$$\text{π.χ. } \lim_{x\to 0} \frac{\text{ημ}x}{x},$$

και άλλες.

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο που θα μας βοηθήσει να υπολογίζουμε τα όρια συναρτήσεων που καταλήγουν σε απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ χρησιμοποιώντας παραγώγους.

Θεώρημα (Κανόνες De l΄ Hospital)

(α) Αν

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0,\quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0,\quad x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

και υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (πεπερασμένο ή άπειρο),}$$

τότε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(β) Αν

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty,\quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty,\quad x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

και υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (πεπερασμένο ή άπειρο),}$$

τότε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Παρατηρήσεις

- Η υπόθεση ότι το όριο
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
υπάρχει, περιέχει δύο παραδοχές:
    - Υπάρχει περιοχή $\pi(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta > 0$, τέτοια ώστε οι συναρτήσεις f και g να είναι παραγωγίσιμες για κάθε $x \in \pi(x_0)$, με εξαίρεση ίσως το $x = x_0$.
    - Ισχύει $g'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \pi(x_0)$, με εξαίρεση ίσως το $x = x_0$.
- Οι συναρτήσεις f και g δεν είναι απαραίτητο να ορίζονται στο $x = x_0$.
- Το θεώρημα ισχύει και για πλευρικά όρια, νοουμένου φυσικά ότι πληρούνται οι υποθέσεις.
- Αν το όριο
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
δεν υπάρχει, τότε το όριο
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$
ενδέχεται να υπάρχει, πρέπει, όμως, να υπολογιστεί με άλλη μέθοδο.
- Στην περίπτωση που οι υποθέσεις του θεωρήματος ικανοποιούνται και από τις παραγώγους f' και g', οι κανόνες μπορούν να εφαρμοστούν και για την εύρεση του ορίου
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
κ.ο.κ.

Théorème 1.er *Lorsqu'une valeur particulière du rapport* $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ *se présente sous la forme* $\dfrac{0}{0}$, *cette valeur coïncide avec la valeur correspondante du rapport* $\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$.

Exemples. En vertu du théorême qui précède, on aura, pour $x = 0$,

$$\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2,\quad \frac{\sin x^2}{x}=\frac{2x\cos x^2}{1}=0,\quad \frac{\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{2x}=\frac{1}{0},\quad \text{etc...};$$

pour $x = 1$,

$$\frac{l(x)}{x-1}=\frac{1}{x}=1,\quad \frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2},\quad \frac{x-1}{x^n-1}=\frac{1}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n},\quad \text{etc....}$$

Résumé des Leçons sur le Calcul infinitésimal., par M.Augustin-Louis Cauchy (Παρίσι, 1829)

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

Λύση

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2}(x-2)=0$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De l' Hospital. Είναι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{1}=2\cdot 2=4$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$$

Λύση

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\ln(x+1)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}x=0$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De l' Hospital. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(x+1))'}{x'}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{x+1}}{1}\right)=1$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

Παράδειγμα 3

Να μελετήσετε τη συμπεριφορά της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}\ ,\ \ x \neq 0$$

όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο 0.

Λύση

Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0} f(x)$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}(e^x - 1 - x) = 0 \ \ \text{και}\ \ \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De l' Hospital. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x}$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το συγκεκριμένο όριο, επειδή:

$$\lim_{x\to 0}(\ e^x - 1) = 0 \ \ \text{και}\ \ \lim_{x\to 0} 2x = 0$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Εξετάζουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De l' Hospital. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x - 1 - x)''}{(x^2)''} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{\ln x}$$

Λύση

Έχουμε:

$$\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty \ \ \text{και}\ \ \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De l' Hospital. Είναι:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(e^x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{e^x}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to +\infty}(xe^x) = +\infty$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x}=+\infty$$

Παράδειγμα 5

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln x)$$

Λύση

Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}x=0 \text{ και } \lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$. Επειδή δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο αυτό, θα προσπαθήσουμε να μετατρέψουμε το γινόμενο σε πηλίκο, έτσι ώστε να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τον αντίστοιχο κανόνα του De l' Hospital. Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{-\infty}{+\infty}$. Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De l' Hospital. Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)=-\lim_{x\to0^+}x=0$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=0$$

Παράδειγμα 6

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$$

Λύση

Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty \text{ και } \lim_{x\to0^+}\frac{1}{e^x-1}=+\infty$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$. Επειδή δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο αυτό, θα προσπαθήσουμε να μετατρέψουμε τη διαφορά σε πηλίκο, έτσι ώστε να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τον αντίστοιχο κανόνα του De l' Hospital.

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}(e^x-1-x)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0^+}x(e^x-1)=0$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De l' Hospital. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^x-1-x)'}{\left(x(e^x-1)\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^x-1)}{(e^x-1+xe^x)}$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το συγκεκριμένο όριο, επειδή:

$$\lim_{x\to 0^+}(e^x-1)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0^+}(e^x-1+xe^x)=0$$

Έχουμε δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De l' Hospital. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^x-1-x)''}{\left(x(e^x-1)\right)''}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 7

Να βρείτε τις τιμές των $a,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{ημ}3x+ax+\beta x^3}{x^3}=0$$

Λύση

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}(\text{ημ}3x+ax+\beta x^3)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+}x^3=0$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0^+}(\text{ημ}3x+ax+\beta x^3)'=\lim_{x\to 0^+}(3\text{συν}3x+a+3\beta x^2)=3+a$$

και:

$$\lim_{x\to 0^+}(x^3)'=\lim_{x\to 0^+}3x^2=0$$

Τώρα, αφού ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{ημ}3x+ax+\beta x^3}{x^3}=0,$$

και το όριο

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3\text{συν}3x+a+3\beta x^2}{3x^2}$$

υπάρχει, τότε υποχρεωτικά:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3\text{συν}3x+a+3\beta x^2}{3x^2}=0 \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι αν $\lim_{x\to 0^+}(3\text{συν}3x+a+3\beta x^2)=3+a\neq 0$, τότε η (1) δεν θα ισχύει, αφού το όριο

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3\text{συν}3x+a+3\beta x^2}{3x^2}$$

δεν θα είναι πεπερασμένο.
Επομένως:

$$\lim_{x\to 0^+}(3\text{συν}3x+a+3\beta x^2)=3+a=0\Rightarrow a=-3$$

Τότε, η (1) γίνεται:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3\text{συν}3x-3+3\beta x^2}{3x^2}=0$$

Αλλά επειδή έχουμε πάλι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, το όριο αυτό θα είναι ίσο με:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-9\text{ημ}3x+6\beta x}{6x}=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{9}{2}\cdot\frac{\text{ημ}3x}{3x}+\beta\right)=-\frac{9}{2}+\beta=0\Longrightarrow \beta=\frac{9}{2}$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ (β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

(γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{e^x-1}$

2. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2+x-2}$ (β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\eta\mu(x-2)}$

(γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sigma\upsilon\nu x^2)}{x^2\eta\mu x^2}$ (δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}$

3. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+\ln x}{x+\ln x}$ (β) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^x}{e^x}$

(γ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+e^{2x})}{x}$ (δ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(ε) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x-e^{-x}}{x^2}$

4. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x$ (β) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x\ln x)$

(γ) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ (δ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\eta\mu x}\right)$

5. Να βρείτε την τιμή του $a\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{9x-3\eta\mu 3x}{5x^3}, & x\neq 0\\ a \quad , & x=0\end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $x=0$.

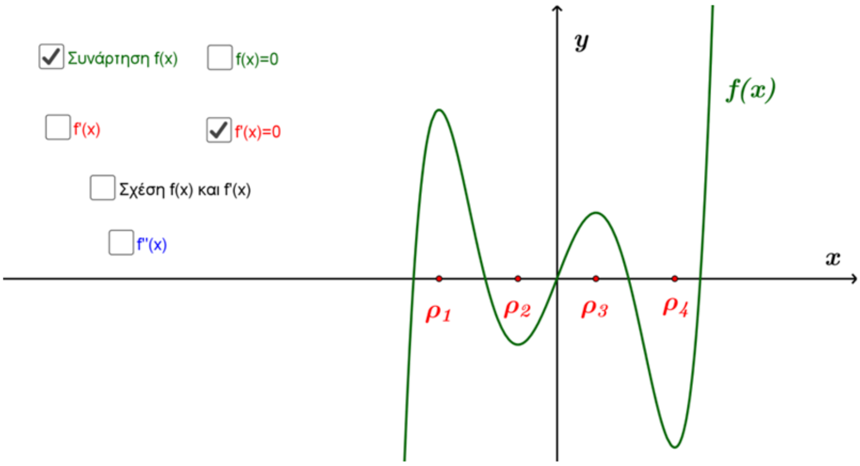
6. Να βρείτε τις τιμές των $a,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+ax+\beta x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

1.2 ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο *«CLyk_En01_Rolle.ggb»*.



- Να επιλέξετε τα Συνάρτηση f(x) και f(x)=0 . Εμφανίζεται η γραφική παράσταση της f και τα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$.
  Πόσες είναι οι λύσεις της $f(x) = 0$;

- Στη συνέχεια, να επιλέξετε το f'(x) και το f'(x)=0 . Εμφανίζεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f'.
  Πόσες είναι οι λύσεις της $f'(x) = 0$;

- Να απο – επιλέξετε τα Συνάρτηση f(x) και f'(x) .

  Ποια είναι η σχέση μεταξύ των λύσεων της f(x)=0 και f'(x)=0 ;

- Στη συνέχεια, να επιλέξετε τα Συνάρτηση f(x) και Σχέση f(x) και f'(x) .

  Τι παρατηρείτε για τη σχέση μεταξύ των λύσεων της $f'(x) = 0$ και της συνάρτησης f;

Ιστορικό Σημείωμα

Ο Michel Rolle (1652-1719) ήταν ένας Γάλλος μαθηματικός και μέλος της Βασιλικής Ακαδημίας Επιστημών. Στο κυριότερο έργο του *Traité d'algèbre* καθιέρωσε τον συμβολισμό $\sqrt[v]{x}$, ασχολήθηκε με την επίλυση γραμμικών Διοφαντικών εξισώσεων και διατύπωσε το γνωστό ομώνυμο θεώρημα, το οποίο εφάρμοσε σε ρίζες πολυωνύμων. Αν και υπήρξε πολέμιος της Μαθηματικής Ανάλυσης και των υποστηρικτών της, εν τούτοις το θεώρημά του σήμερα είναι βασικό για τη θεμελίωσή της.

Θεώρημα Rolle

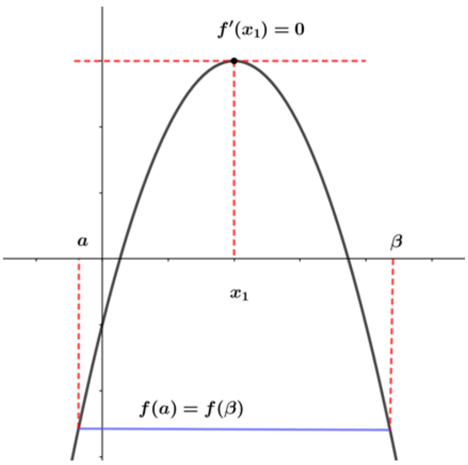
Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει ότι

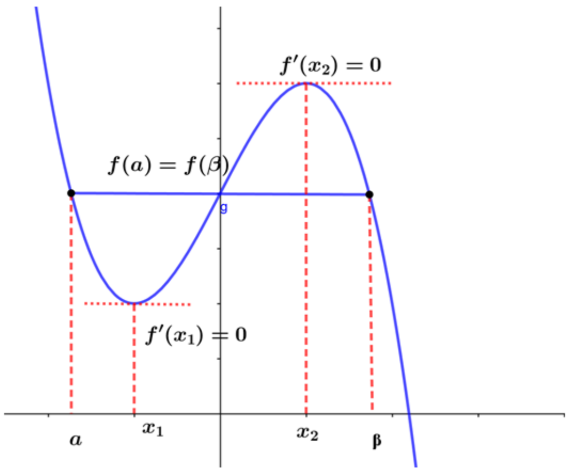
(α) η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$,
(β) η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και
(γ) $f(\alpha)=f(\beta)$,

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει $f'(\xi)=0$.

Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle

Αν για τη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα των τετμημένων ή να ταυτίζεται με αυτόν.

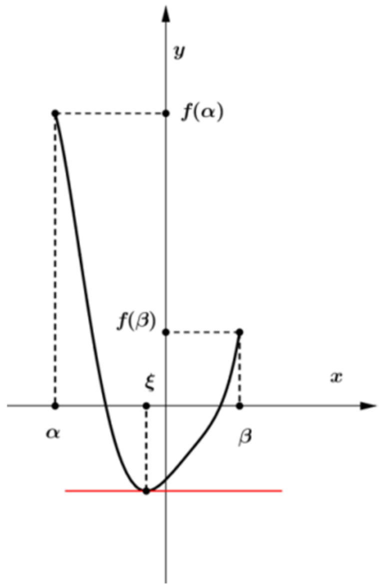




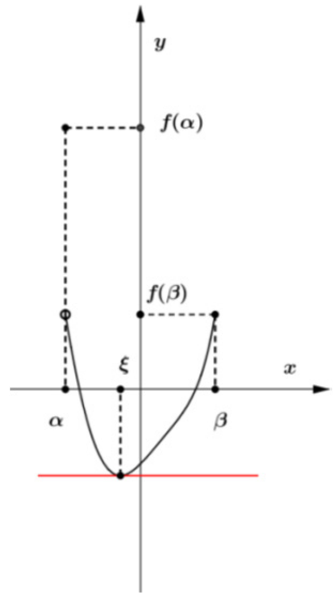
Παρατηρήσεις

- Αν για μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ισχύει το θεώρημα του Rolle και επιπλέον $f(a)=f(\beta)=0$, δηλαδή αν τα a και β είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$, τότε αυτό που συμπεραίνουμε είναι ότι μεταξύ των δύο λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$ υπάρχει τουλάχιστον μια λύση της εξίσωσης $f'(x)=0$.
- Το Θεώρημα ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.
- Οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle είναι ικανές συνθήκες, αλλά όχι αναγκαίες για να ισχύει το συμπέρασμά του. Στα παρακάτω παραδείγματα δεν ικανοποιείται κάποια από τις υποθέσεις, αλλά υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, στο οποίο υπάρχει η $f'(\xi)$ και είναι ίση με 0:

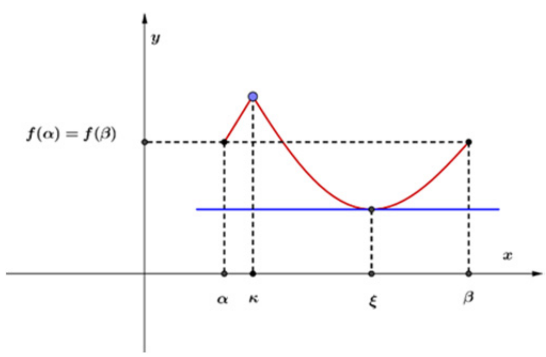
  - $f(\alpha)\neq f(\beta)$



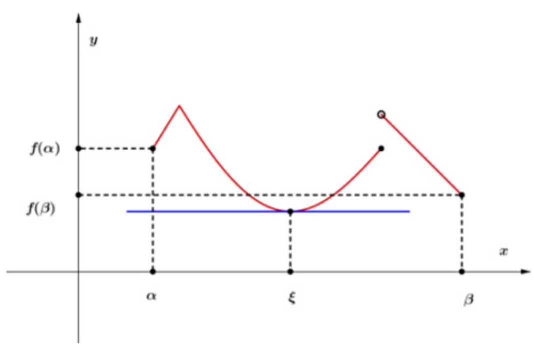
  - Η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.



  - Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=\kappa$, $\kappa\in(\alpha,\beta)$.



  - Η f δεν ικανοποιεί καμία από τις υποθέσεις.



Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$. Να εξετάσετε κατά πόσο ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Αν ισχύουν, να βρείτε όλα τα $\xi \in (-2, 2)$, για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Λύση

Για την $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$ ισχύουν τα εξής:

- η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-2, 2]$,
- η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ και
- $f(-2) = f(2) = 0$

Άρα, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, σύμφωνα με το οποίο υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (-2, 2)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi) = 0$.
Η παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Είναι $f'(\xi) = 0$ για $\xi = 0$ και αφού $0 \in (-2, 2)$, η τιμή $\xi = 0$ είναι δεκτή.

Παράδειγμα 2

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β).

(α) Να δείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ της $f(x) = 0$, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα (λύση) της εξίσωσης $f'(x) = 0$.

(β) Να δείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $e^x \eta\mu x = 1$ υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της $e^x \sigma\upsilon\nu x = -1$.

Λύση

(α) Έστω $x_1, x_2 \in (a, \beta)$, με $x_1 < x_2$, ρίζες της $f(x) = 0$. Τότε, $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, β) και $x_1, x_2 \in (a, \beta)$, τότε η f είναι:

- συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq [a, \beta]$,
- παραγωγίσιμη στο $(x_1, x_2) \subseteq (a, \beta)$ και
- $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Άρα, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, σύμφωνα με το οποίο υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$, για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$.
Κατά συνέπεια, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$ μεταξύ των ριζών $x_1, x_2 \in (a, \beta)$.

(β) Η εξίσωση $e^x \eta\mu x = 1$ γράφεται ισοδύναμα:

$$\eta\mu x = e^{-x} \Leftrightarrow \eta\mu x - e^{-x} = 0 \qquad (1)$$

Έστω x_1, x_2 δύο λύσεις της (1), με $x_1 < x_2$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ημx - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Η f είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Σύμφωνα με το ερώτημα (α), μεταξύ των ριζών x_1, x_2 της f υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$. Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow συνx + e^{-x} = 0 \Leftrightarrow συνx = -e^{-x} \Leftrightarrow e^x συνx = -1$$

Άρα, η εξίσωση $e^x συνx = -1$ έχει μία τουλάχιστον λύση μεταξύ των λύσεων της $e^x ημx = 1$.

Παράδειγμα 3

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα (λύση) στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση fμε τύπο $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 5x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$f(-1) = -2 < 0 \text{ και } f(1) = 4 > 0$$

Άρα, $f(-1)f(1) < 0$. Έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει άλλη ρίζα.
Έστω ότι η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο πραγματικές ρίζες και ρ_1, ρ_2 δύο τυχαίες ρίζες με $\rho_1 < \rho_2$. Για το διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ ισχύουν τα εξής:

- η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) και
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

Έτσι, το θεώρημα Rolle ισχύει για την f στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$. Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Όμως:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 + 5$$

Επομένως,

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 15\xi^4 - 15\xi^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3\xi^4 - 3\xi^2 + 1 = 0.$$

Θέτουμε $\omega = \xi^2$. Η εξίσωση $3\omega^2 - 3\omega + 1 = 0$ δεν έχει πραγματικές λύσεις, αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 9 - 12 = -3 < 0$. Επομένως, ούτε και η εξίσωση $3\xi^4 - 3\xi^2 + 1 = 0$ έχει πραγματικές λύσεις.
Έτσι, η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες. Επειδή όμως αποδείξαμε προηγουμένως ότι έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα, αυτή θα είναι και η μοναδική.

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε κατά πόσο ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τις πιο κάτω συναρτήσεις στο δοσμένο διάστημα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές του ξ που ικανοποιούν το συμπέρασμα του θεωρήματος.
   (α) $f(x) = x^2 - 8x + 15$, στο $[3, 5]$
   (β) $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$, στο $[0, 4]$
   (γ) $f(x) = 1 + \text{ημ}3x$, στο $[0, \pi]$
   (δ) $f(x) = |x - 2|$, στο $[1, 3]$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ και να δείξετε ότι $f'(\xi) = 0$, για κάποιο ξ ανάμεσα στις τετμημένες αυτές.

3. Να βρείτε τη σχέση των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta \ln x\,, a \neq 0$ στο διάστημα $[1, e]$. Να βρείτε την τιμή του $\xi \in (1, e)$ για την οποία επαληθεύεται.

4. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

(α)	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και $f(a) = f(\beta)$, τότε υπάρχει $\xi \in [a, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in [a, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το γράφημα G_f της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε τρία σημεία, τότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο $\mathbb{R}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 3x + 1 = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{R}$.

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2 - \ln x = x^2$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, e)$.

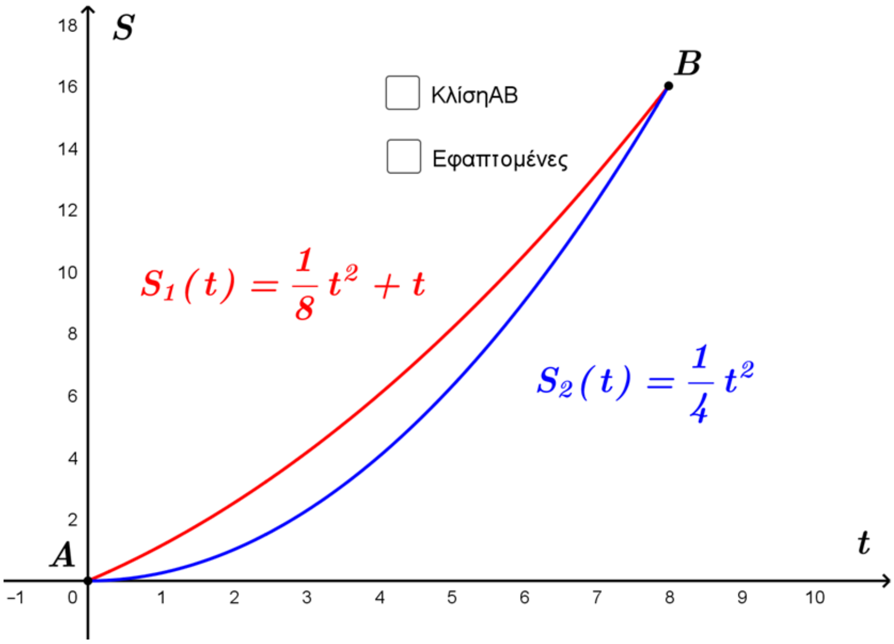
1.3 ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Εξερεύνηση

Ένα αυτοκίνητο κινείται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα και διανύει μια απόσταση 200 km σε 2 ώρες. Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή κατά την οποία το αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 100 km/h;

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο *«CLyk_En01_TheorimaMesisTimis.ggb»*.



Δύο κινητά ξεκινούν από τη θέση A και διανύουν αποστάσεις, σύμφωνα με τις συναρτήσεις

$$S_1 = \frac{1}{8}t^2 + t \text{ και } S_2 = \frac{1}{4}t^2,$$

όπου t σε min και S σε km.

Σε 8 min τα δύο αυτοκίνητα συναντιούνται στο σημείο B και έχουν διανύσει 16 km. Υπάρχει χρονική που κάποιο από τα κινητά τρέχει με ταχύτητα $u = 2\ \frac{\text{km}}{\text{min}} = 120\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$;

- Επιλέξτε το ☐ **ΚλίσηΑΒ** . Ποια είναι η φυσική σημασία της;
- Επιλέξτε το ☐ **Εφαπτομένες** . Ποια είναι η φυσική σημασία των κλίσεων των εφαπτομένων και πώς συνδέεται με τη γεωμετρική σημασία της κλίσης;

Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού (Lagrange)

Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

(α) η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

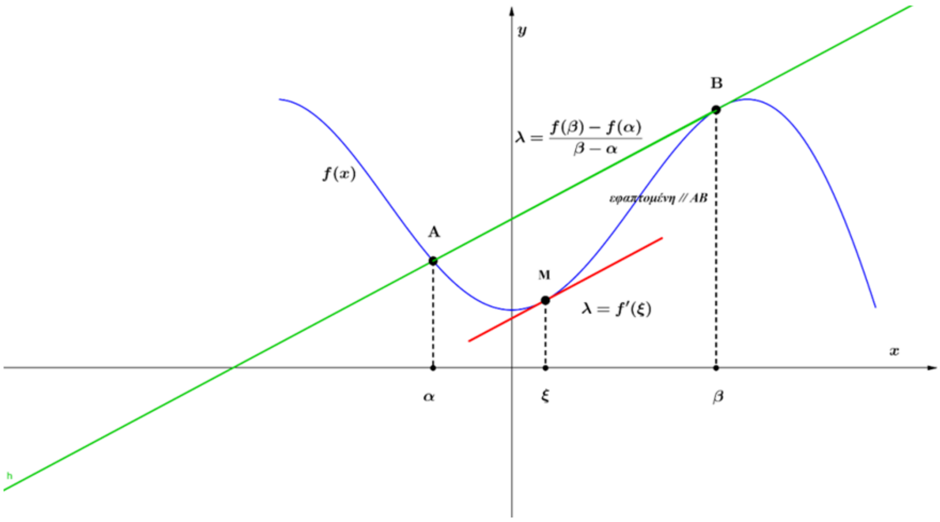
(β) η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)

Τότε, υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρική σημασία

Αν για τη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.



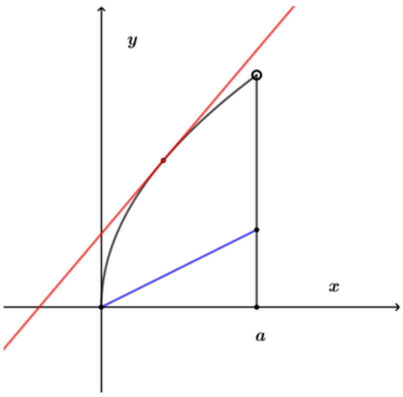
Παρατηρήσεις

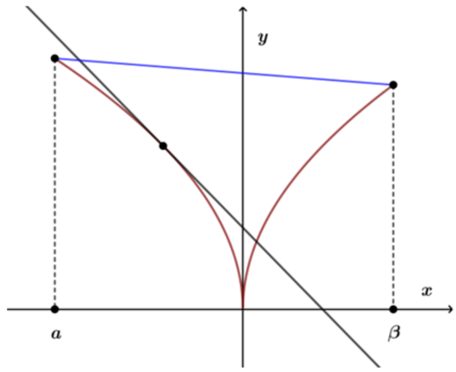
- Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του (α, β), αρκεί η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο (α, β).

- Είναι προφανές ότι αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής προκύπτει το θεώρημα του Rolle.

- Τόσο το Θεώρημα Μέσης Τιμής όσο και το Θεώρημα του Rolle πιστοποιούν την ύπαρξη τουλάχιστον ενός ξ που ανήκει στο (α, β), χωρίς όμως να το προσδιορίζουν. Είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότερες από μία τέτοιες τιμές, για τις οποίες να ικανοποιούνται τα δύο Θεωρήματα.

- Όπως και το Θεώρημα του Rolle, αν μία από τις συνθήκες του Θεωρήματος δεν ικανοποιείται, τότε δεν μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα Μέσης Τιμής.





- Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και ισχύει $f(a) \neq f(\beta)$ τότε:
  - ✓ αν $f(a) < f(\beta)$, υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) > 0$.
  - ✓ αν $f(a) > f(\beta)$, υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) < 0$.

Πόρισμα

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η συνάρτηση f είναι **σταθερή** στο $[a, \beta]$. Δηλαδή:

$$f(x) = c, \quad \forall x \in [a, \beta]$$

Απόδειξη

Παίρνουμε δύο τυχαία σημεία $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ τέτοια, ώστε $x_1 < x_2$.

Τότε, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), διότι ισχύει $[x_1, x_2] \subseteq [a, \beta]$ και $(x_1, x_2) \subseteq (a, \beta)$. Παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Η εφαρμογή του συνεπάγεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Όμως, $f'(\xi) = 0$ από την υπόθεση. Άρα, $f(x_2) = f(x_1)$.

Επειδή η σχέση αυτή ισχύει για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in [a, \beta]$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή στο διάστημα $[a, \beta]$. Άρα, $f(x) = c, \forall x \in [a, \beta]$.

Γεωμετρική Ερμηνεία Πορίσματος

Όταν η γραφική παράσταση της f στα εσωτερικά σημεία του $[a, \beta]$ έχει παντού οριζόντια εφαπτομένη, τότε είναι μία ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

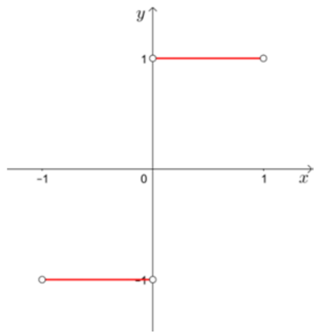
Παρατηρήσεις

- Μία συνάρτηση μπορεί να έχει παράγωγο που μηδενίζεται σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, παρόλα αυτά να μην είναι σταθερή.

  Για παράδειγμα, η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0\\ 1\,, & 0<x<1\end{cases}$$

  Ισχύει ότι $g'(x)=0,\ \ \forall x\in(-1,0)$ και $\forall x\in(0,1)$, αλλά η g δεν είναι σταθερή στο πεδίο ορισμού της. Αυτό συμβαίνει, γιατί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι **ένωση διαστημάτων και όχι διάστημα, όπως απαιτεί το πόρισμα**.



- Αν για δύο συναρτήσεις f,g συνεχείς σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο διάστημα (a,β), ισχύει ότι $f'(x)=g'(x),\ \ \forall x\in(a,\beta)$, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $f(x)=g(x)+c,\ \ \forall x\in[a,\beta]$. Δηλαδή, η διαφορά των δύο αυτών συναρτήσεων $f(x)-g(x)=c$ είναι σταθερή.

Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x},\ \ x\in[1,4]$.

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(1,4)$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1,4] και παραγωγίσιμη στο (1,4), με:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,,\quad \forall x\in(1,4)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[1,4]$.

Έτσι, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\ \in(1,4)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{1}}{4-1}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{\xi}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\sqrt{\xi}=\frac{3}{2}\Rightarrow\xi=\frac{9}{4}$$

Επομένως, υπάρχει ο μοναδικός αριθμός $\frac{9}{4}\in(1,4)$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^2,\ \kappa \neq 0$, ορισμένη στο διάστημα $[a, \beta]$.
Να εξετάσετε κατά πόσο ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής και αν ναι, να βρείτε για ποια τιμή του ξ στο διάστημα $[a, \beta]$ ισχύει το Θεώρημα.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) ως πολυωνυμική.
Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\ \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = \frac{\kappa\beta^2 - \kappa a^2}{\beta - a} = \frac{\kappa(\beta + a)(\beta - a)}{\beta - a} = \kappa(a + \beta)$$

Όμως $f'(x) = 2\kappa x,\ \ \forall x \in (a, \beta)$.
Έτσι, έχουμε:

$$f'(\xi) = 2\kappa\xi \Rightarrow 2\kappa\xi = \kappa(a + \beta) \Leftrightarrow \xi = \frac{a + \beta}{2}$$

Δηλαδή, το σημείο ξ, για το οποίο ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής, είναι το μέσο του διαστήματος $[a, \beta]$.

Παράδειγμα 3

Αν ισχύει ότι $0 < a < \beta$, τότε να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\frac{\beta - a}{\beta} < \ln\left(\frac{\beta}{a}\right) < \frac{\beta - a}{a}$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x\,,\ x \in [a, \beta]$.
Η f είναι:

- συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο (a, β).

Ισχύει για την f το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[a, \beta]$. Δηλαδή, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

Όμως:

$$f'(x) = \frac{1}{x},\quad \forall x \in (a, \beta)$$

Άρα:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln\beta - \ln a}{\beta - a} \tag{1}$$

Ισχύει:

$$0 < a < \xi < \beta \Rightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{\ln\beta - \ln a}{\beta - a} < \frac{1}{a} \qquad (\text{Από την } (1))$$

$$\Rightarrow \frac{\beta - a}{\beta} < \ln\beta - \ln a < \frac{\beta - a}{a} \Rightarrow \frac{\beta - a}{\beta} < \ln\left(\frac{\beta}{a}\right) < \frac{\beta - a}{a} \qquad (\beta - a > 0)$$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε, αν υπάρχουν, όλα τα ξ που ικανοποιούν το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την κάθε μία από τις πιο κάτω συναρτήσεις στο δοσμένο διάστημα:

   (α) $f(x) = x^2 + 2x - 1,\ \ x \in [0,1]$

   (β) $f(x) = \dfrac{3}{x},\ \ x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

   (γ) $f(x) = \sqrt{x-1},\ \ x \in [1,3]$

   (δ) $f(x) = \ln(x-1),\ \ x \in [2,4]$

2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (a,β) και ισχύει $f(a) = \beta\sqrt{3}$ και $f(\beta) = a\sqrt{3}$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της καμπύλης της f σε σημείο της $\big(x_0, f(x_0)\big)$ να σχηματίζει με τον άξονα των $x'x$ γωνία ίση με $\frac{2\pi}{3}$.

3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις πιο κάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (a,β), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [a,\beta]$ τέτοιο, ώστε: ΣΩΣΤΟ /ΛΑΘΟΣ
   $$f(\beta) - f(a) = f'(\xi)(\beta - a)$$

   (β) Αν η f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ και
   $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R},\ \ \forall x_0 \in (a,\beta),$$
   τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,\beta)$ τέτοιο, ώστε: ΣΩΣΤΟ /ΛΑΘΟΣ
   $$f(\beta) - f(a) = f'(\xi)(\beta - a)$$

   (γ) Αν $f: A \to \mathbb{R}$ και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, τότε $f(x) = c$ στο A. ΣΩΣΤΟ /ΛΑΘΟΣ

4. Δίνεται συνάρτηση $f: [0,\kappa] \to \mathbb{R}$, όπου $\kappa > 0$, με τύπο $f(x) = e^x$. Να δείξετε ότι:

   (α) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0\,,\kappa)$ τέτοιο, ώστε:
   $$e^{\xi} = \frac{e^{\kappa} - 1}{\kappa}$$

   (β) Ισχύει η ανισότητα $1 + x \le e^x \le 1 + xe^x,\ \ \ x \ge 0$.

5. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:
   $$1 - \frac{1}{x} \le \ln x \le x - 1, \qquad x > 0$$

6. Δίνεται συνάρτηση $f: [a,\beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a,β), για την οποία ισχύει $f(a) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2a$. Να δείξετε ότι:

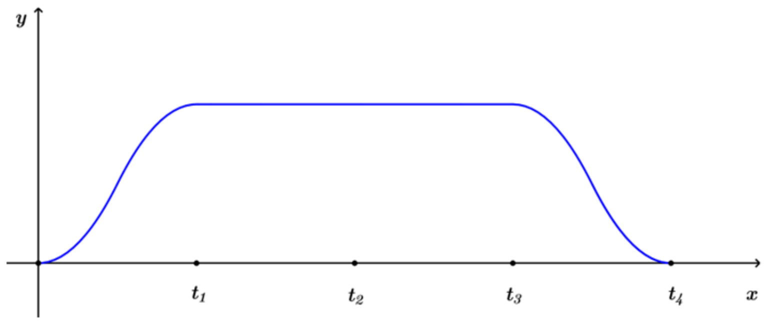
   (α) Η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a,β).

   (β) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a,\beta)$ τέτοια, ώστε να ισχύει $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 4$.

1.4 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (ΟΡΙΣΜΟΙ)

Διερεύνηση

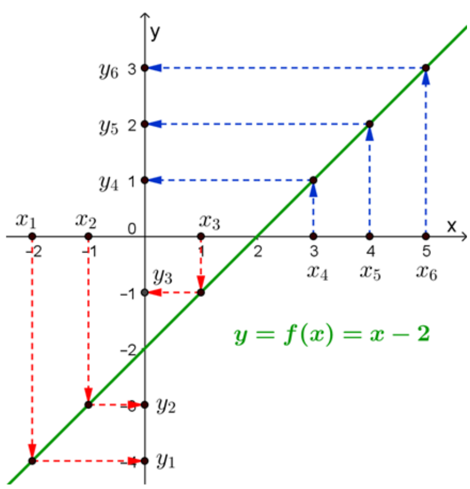
Η πιο κάτω γραφική παράσταση μας δίνει πληροφορίες για την πορεία ενός αεροπλάνου. Στον άξονα x μετρούμε τον χρόνο πτήσης και στον άξονα y το ύψος στο οποίο βρίσκεται το αεροπλάνο.



- Σε ποια χρονική στιγμή το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος;
- Για πόσο χρόνο βρίσκεται στο ύψος αυτό;
- Πόσο χρόνο χρειάζεται, μετά την απογείωσή του, για να φτάσει στο μέγιστο ύψος;
- Πόσο χρόνο χρειάζεται για να προσγειωθεί από το μέγιστο ύψος;

- Στα πιο κάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις και οι αντίστοιχοι πίνακες τιμών των συναρτήσεων $f(x) = x - 2$ και $g(x) = -x + 4$, $x \in \mathbb{R}$.

Γραφική παράσταση της f

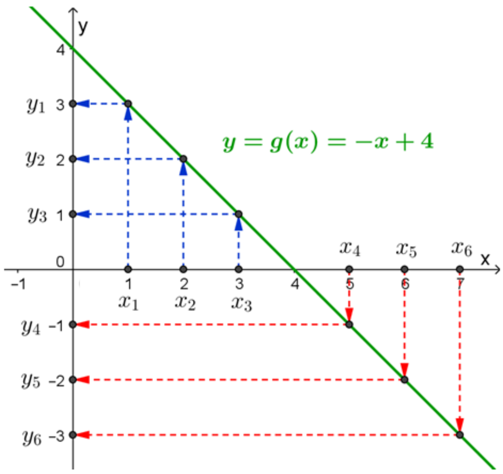


Πίνακας τιμών για την f

x	-2	-1	1	3	4	5
$y = f(x)$	-4	-3	-1	1	2	3

Τόσο από το σχήμα όσο και από τον αντίστοιχο πίνακα τιμών για την f, παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνουν οι τιμές του x, αυξάνουν και οι αντίστοιχες τιμές του y. Η συμπεριφορά αυτή της συνάρτησης f ισχύει για όλα τα x στο πεδίο ορισμού της.

Γραφική παράσταση της g

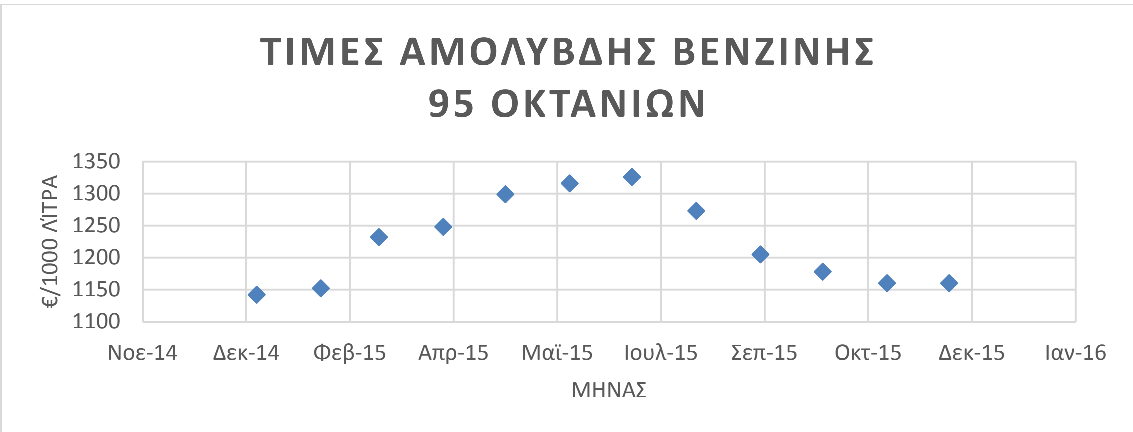


Πίνακας τιμών για την g

x	1	2	3	5	6	7
$y = g(x)$	3	2	1	-1	-2	-3

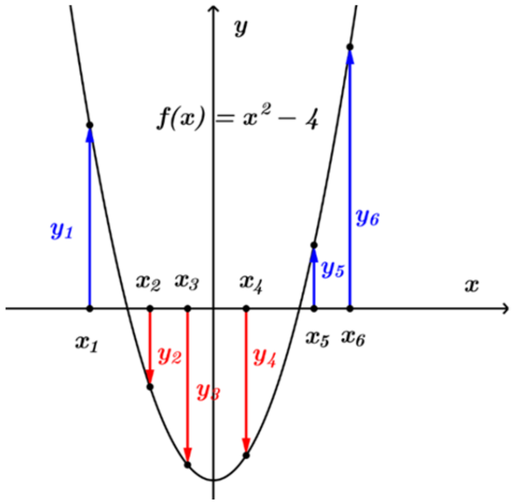
Τόσο από το σχήμα όσο και από τον αντίστοιχο πίνακα τιμών για την g, παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνουν οι τιμές του x, οι αντίστοιχες τιμές του y φθίνουν. Η συμπεριφορά αυτή της συνάρτησης g ισχύει για όλα τα x στο πεδίο ορισμού της.

- Στην πιο κάτω γραφική παράσταση, φαίνεται η μηνιαία μεταβολή της μέσης τιμής της βενζίνης στην Κύπρο για το έτος 2015. Όπως βλέπουμε, οι τιμές αυξάνονται από τον Ιανουάριο μέχρι τον Ιούλιο και στη συνέχεια μειώνονται από τον Ιούλιο μέχρι τον Νοέμβριο. Φαίνεται ότι κατά τους μήνες Νοέμβριο και Δεκέμβριο του 2015 η τιμή παραμένει σταθερή.



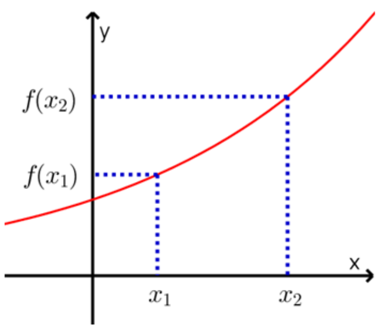
- Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-4$. Παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά της συνάρτησης είναι διαφορετική στο διάστημα $(-\infty,0]$ από ότι στο διάστημα $[0,+\infty)$.

  Συγκεκριμένα, στο διάστημα $(-\infty,0]$, όταν αυξάνονται οι τιμές του x, οι αντίστοιχες τιμές του y φθίνουν.
  Δηλαδή, για $x_1<x_2<x_3$, ισχύει ότι $y_1>y_2>y_3$.
  Αντίθετα, στο διάστημα $[0,+\infty)$, όταν αυξάνονται οι τιμές του x, αυξάνονται και οι αντίστοιχες τιμές του y.
  Δηλαδή, για $x_4<x_5<x_6$, ισχύει ότι $y_4<y_5<y_6$.

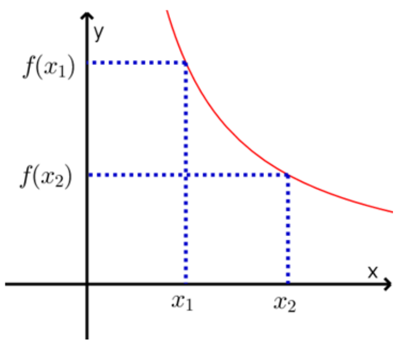


Ορισμός
Έστω η συνάρτηση $f\colon A\to\mathbb{R}$ και $\Delta\subseteq A$, $\Delta\neq\emptyset$.

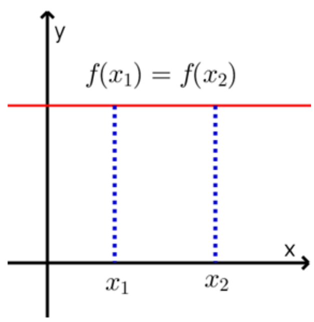
(α) Η συνάρτηση f ονομάζεται **γνησίως αύξουσα στο *Δ***, αν, $\forall\, x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$, ισχύει ότι $f(x_1)<f(x_2)$.
(β) Η συνάρτηση f ονομάζεται **γνησίως φθίνουσα στο *Δ***, αν, $\forall\, x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$, ισχύει ότι $f(x_1)>f(x_2)$.
(γ) Η συνάρτηση f ονομάζεται **σταθερή στο *Δ***, αν, $\forall\, x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$, ισχύει ότι $f(x_1)=f(x_2)$.
(δ) Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως μονότονη στο *Δ***, αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.



f γνησίως αύξουσα



f γνησίως φθίνουσα



f σταθερή

Παρατηρήσεις

- Οι ορισμοί δεν αναφέρονται απαραίτητα σε όλο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, αλλά σε ένα μη κενό υποσύνολό του, το $Δ$.
  - Αν το $Δ$ είναι διάστημα, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη** στο διάστημα $Δ$.
  - Αν το $Δ$ είναι το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα στο οποίο η f είναι μονότονη, τότε θα λέμε ότι το $Δ$ είναι **διάστημα μονοτονίας** για τη συνάρτηση f.
- Για μια γνησίως μονότονη συνάρτηση σε ένα διάστημα $Δ$ ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, για μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση f σε διάστημα $Δ$ ισχύει:

  $$\forall\, x_1, x_2 \in Δ\colon\ f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

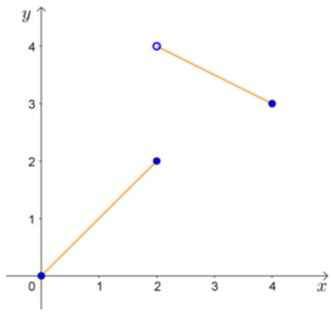
  Όμοια, για μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση σε ένα διάστημα $Δ$ ισχύει:

  $$\forall\, x_1, x_2 \in Δ\colon\ f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

  Γενικά, ισχύουν οι ισοδυναμίες:

  $$\forall\, x_1, x_2 \in Δ\colon x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

  $\forall\, x_1, x_2 \in Δ\colon x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα $Δ$, τότε η f είναι $1-1$ συνάρτηση. Δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή, υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες είναι $1-1$, χωρίς να είναι γνήσια μονότονες, όπως φαίνεται στο παράδειγμα του διπλανού σχήματος.



Παράδειγμα 1

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις πιο κάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = 2x + 3,\ \ x \in \mathbb{R}$
(β) $g(x) = 6 - x,\ \ x \in \mathbb{R}$
(γ) $h(x) = 2,\ \ x \in [-1, 2]$

Λύση

(α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Longrightarrow 2x_1 + 3 < 2x_2 + 3 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Longrightarrow 6 - x_1 > 6 - x_2 \Longrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Επομένως, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

(γ) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $-1 \le x_1 < x_2 \le 2$. Έχουμε:

$$-1 \le x_1 < x_2 \le 2 \Rightarrow h(x_1) = h(x_2) = 2$$

Επομένως, η h είναι σταθερή στο $[-1, 2]$.

Ορισμός

Έστω η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και $\Delta \subseteq A$, $\Delta \neq \emptyset$.

(α) Η συνάρτηση f ονομάζεται **αύξουσα στο *Δ***, αν, $\forall\, x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) \leq f(x_2)$.

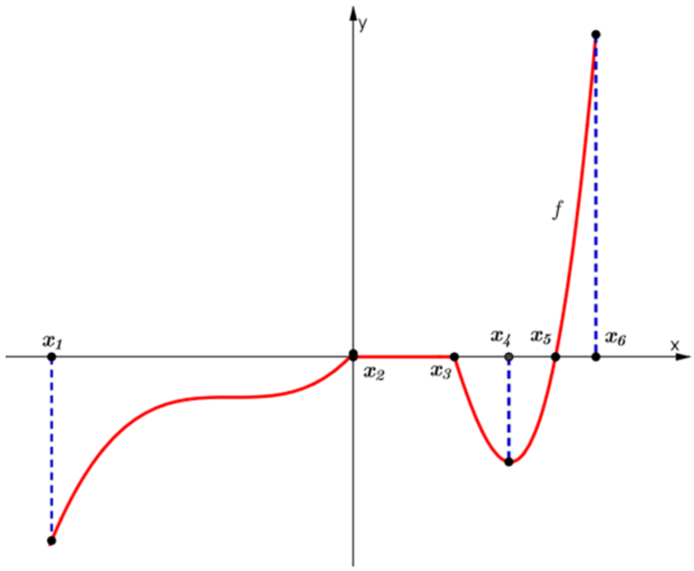
(β) Η συνάρτηση f ονομάζεται **φθίνουσα στο *Δ***, αν, $\forall\, x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) \geq f(x_2)$.

(γ) Η συνάρτηση f λέγεται **μονότονη στο *Δ***, αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

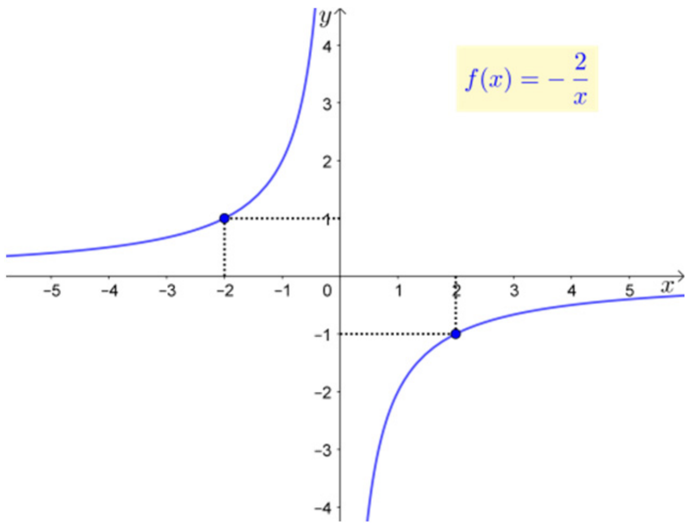
Παρατηρήσεις

- Οι ορισμοί δεν αναφέρονται απαραίτητα σε όλο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, αλλά σε ένα μη κενό υποσύνολό του, το Δ.
  - Αν το Δ είναι διάστημα, τότε λέμε ότι η f είναι **μονότονη** στο διάστημα Δ.
  - Αν το Δ είναι το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα στο οποίο η f είναι μονότονη, τότε θα λέμε ότι το Δ είναι **διάστημα μονοτονίας** για τη συνάρτηση f.

  Το πιο κάτω σχήμα δίνει παραδείγματα διαστημάτων μονοτονίας για τη συνάρτηση f.



  - Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και στο διάστημα $[x_4, x_6]$.
  - Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_3, x_4]$.
  - Η f είναι σταθερή στο διάστημα $[x_2, x_3]$.
  - Η f είναι αύξουσα στο διάστημα $[x_1, x_3]$.
  - Η f είναι φθίνουσα στο διάστημα $[x_2, x_4]$.
- Αν μία συνάρτηση f είναι αύξουσα (ή φθίνουσα) σε δύο υποσύνολα A και B του πεδίου ορισμού της, δεν σημαίνει ότι αυτή είναι αύξουσα (αντιστοίχως φθίνουσα) στην ένωσή τους $A \cup B$.



Στο πιο πάνω σχήμα η συνάρτηση $f(x) = -\frac{2}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, αλλά δεν είναι αύξουσα στην ένωση των διαστημάτων αυτών. Συγκεκριμένα, αν $x_1 = -2, x_2 = 2$, τότε έχουμε $f(x_1) = f(-2) = 1 > -1 = f(2) = f(x_2)$, ενώ $x_1 = -2 < 2 = x_2$.

Παράδειγμα 2

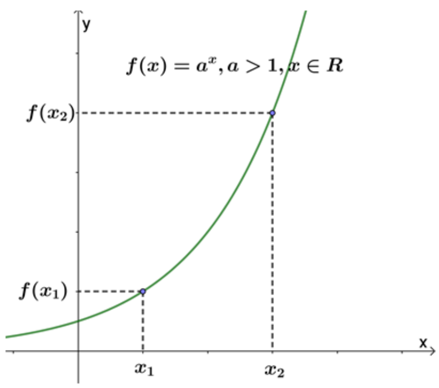
Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις πιο κάτω συναρτήσεις:

(α) $f_1(x) = a^x,\ a > 1,\ x \in \mathbb{R}$

(β) $f_2(x) = \log_a x\,,\ a < 1,\ x > 0$

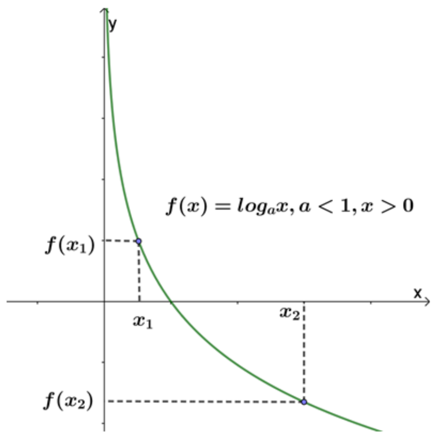
Λύση

(α) Το πεδίο ορισμού της f_1 είναι το $\mathbb{R}$. Επειδή $a > 1$, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $a^{x_1} < a^{x_2}$. Επομένως, ισχύει ότι $f_1(x_1) < f_1(x_2)$.



Άρα, η συνάρτηση f_1 είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(β) Το πεδίο ορισμού της f_2 είναι το $(0, +\infty)$. Επειδή $a < 1$, για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $\log_a x_1 > \log_a x_2$. Επομένως, ισχύει ότι $f_2(x_1) > f_2(x_2)$.



Άρα, η συνάρτηση f_2 είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 3

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 + 1, x \in [1, 3]$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνεχούς συνάρτησης f είναι το διάστημα $[1, 3]$.
Εξετάζουμε τη μονοτονία της f.
Για κάθε $x_1, x_2 \in [1, 3]$, με $1 \leq x_1 < x_2 \leq 3$, ισχύει ότι:

$$\left.\begin{matrix} x_1 < x_2 \\ x_1^2 < x_2^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 3]$ και, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$, το σύνολο τιμών της είναι το:

$$[f(1), f(3)] = [2, 10]$$

Παράδειγμα 4

Έστω οι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \ln\big(f(x) + g(x)\big)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Αφού οι f, g είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$, τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι:

$$0 < f(x_1) < f(x_2) \qquad (1)$$
$$0 < g(x_1) < g(x_2) \qquad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2), έχουμε:

$0 < f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$

$\Rightarrow \ln\big(f(x_1) + g(x_1)\big) < \ln\big(f(x_2) + g(x_2)\big)$ (Η $y = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^+$)

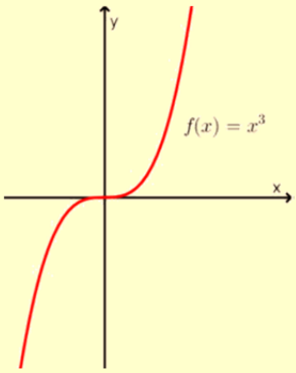
$\Longrightarrow h(x_1) < h(x_2)$

Επομένως, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

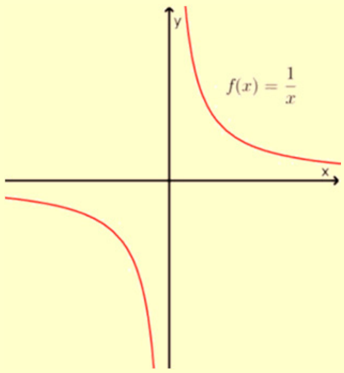
Δραστηριότητες

1. Να βρείτε ποιες από τις πιο κάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες στο πεδίο ορισμού τους:

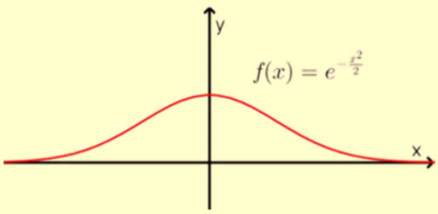
(α)



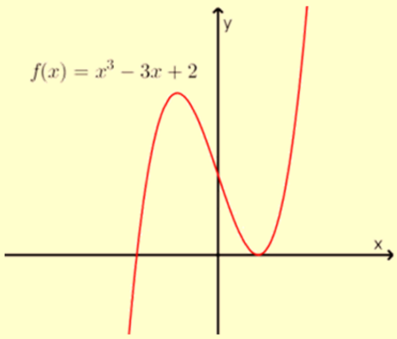
(β)



(γ)



(δ)



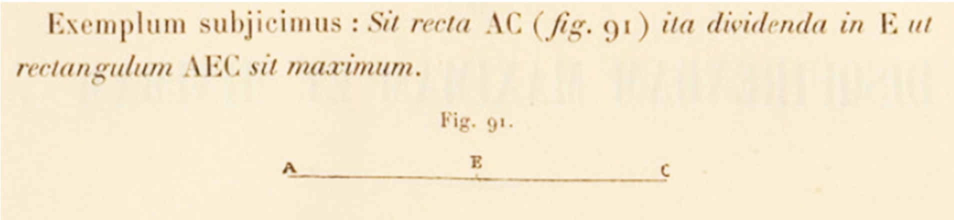
2. Να βρείτε ποιες από τις πιο κάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες στο πεδίο ορισμού τους:
(α) $f(x) = 5 - 3x$
(β) $f(x) = 4\ln x + 1$
(γ) $f(x) = 2e^{x-1} + 1$

3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = -x^2 + 4x - 5$ στο διάστημα $[1, 4]$.

1.5 ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (ΟΡΙΣΜΟΙ)

Εξερεύνηση

Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου με σταθερό άθροισμα των δύο διαστάσεών του, έτσι ώστε το εμβαδόν του να έχει την μέγιστη τιμή.



Exemplum subjicimus : *Sit recta* AC (*fig.* 91) *ita dividenda in* E *ut rectangulum* AEC *sit maximum.*

Fig. 91.

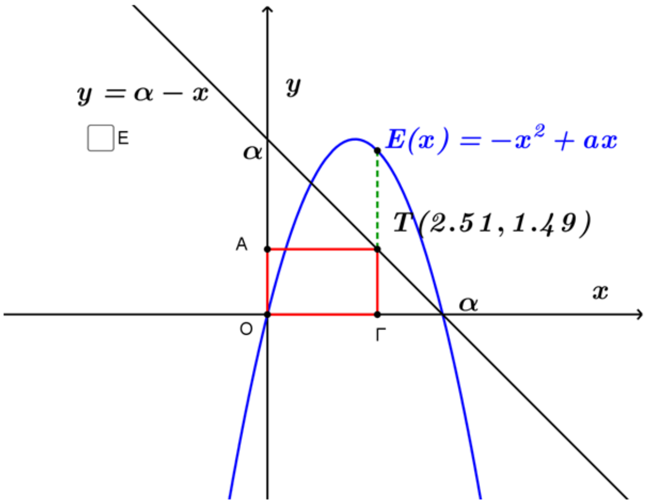
A E C

Να διαιρεθεί η γραμμή AC στο E, έτσι ώστε το ορθογώνιο $AE \times EC$ να είναι μέγιστο.

∗ Από το Βιβλίο του Pierre de Fermat *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (Μέθοδος για τα μέγιστα και ελάχιστα).

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο *«CLyk_En01_Akrotata.ggb»*.



- Το σημείο T βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = a - x$. Τι παρατηρείτε για το άθροισμα των συντεταγμένων του σημείου T;
- Τι παριστάνει η συνάρτηση $E(x) = -x^2 + ax, x \in (0, a)$;
- Να επιλέξετε το E και να μετακινήσετε το σημείο T. Τι παρατηρείτε για τη μεταβολή του εμβαδού του ορθογωνίου $OAT\Gamma$;
- Πότε το εμβαδόν παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή του;

Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι:

(α) η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in A$$

(β) η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in A$$

(γ) το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f είναι τα **ολικά ακρότατα** της f

Παρατηρήσεις

- Στην αναζήτηση των ολικά μέγιστων τιμών μιας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$, δεν αρκεί η ανισότητα $f(x) \leq M, \ \forall x \in A$, να μας εξασφαλίσει ότι η τιμή M είναι ολικά μέγιστη. Θα πρέπει να εξετάζεται ότι υπάρχει $x_1 \in A$ με $f(x_1) = M$. Δηλαδή, πρέπει να αποδείξουμε ότι:
  - υπάρχει κάποιο $x_1 \in A$ με $f(x_1) = M$ και
  - $\forall\, x \in A, \ f(x) \leq \ f(x_1) = M.$

- Στην αναζήτηση των ολικά ελάχιστων τιμών μιας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$, δεν αρκεί η ανισότητα $f(x) \geq m$, $\forall x \in A$, να μας εξασφαλίσει ότι η τιμή m είναι ολικά ελάχιστη. Θα πρέπει να εξετάζεται ότι υπάρχει $x_1 \in A$ με $f(x_1) = m$. Δηλαδή, πρέπει να αποδείξουμε ότι:
  - υπάρχει κάποιο $x_1 \in A$ με $f(x_1) = m$ και
  - $\forall\, x \in A, \ f(x) \geq \ f(x_1) = m.$

- Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν ολικά μέγιστη ή ολικά ελάχιστη τιμή.

- Οι σταθερές συναρτήσεις σε διάστημα A έχουν συγχρόνως και ολικά μέγιστη και ολικά ελάχιστη τιμή σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους.

- Αφού η αναζήτηση των ολικά ακρότατων τιμών είναι βασισμένη σε ανισότητες της μορφής $f(x) \geq m$ ή $f(x) \leq M$, τότε αρκετές φορές μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα χρησιμοποιώντας «βασικές ανισοτικές ταυτότητες», όπως:
  - $a^2 \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$
  - $-a^2 \leq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$
  - $\sqrt{a} \geq 0, \ \forall a \in \ \mathbb{R}^+$
  - $|a| \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ολικά ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = (x-2)^2 - 4,\ x \in \mathbb{R}$
(β) $f(x) = |x-2| - 1,\quad x \in \mathbb{R}$
(γ) $f(x) = -(x-1)^2,\quad x \in \mathbb{R}$

Λύση

(α) Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ (x-2)^2 \geq 0 \Longrightarrow (x-2)^2 - 4 \geq -4,$$

με την ισότητα να ισχύει, όταν $x = 2$.

Η συνάρτηση $f(x) = (x-2)^2 - 4,\ x \in \mathbb{R}$, έχει ολικά ελάχιστη τιμή στο $x_0 = 2$ με αντίστοιχη τιμή $f(2) = -4$, αφού $2 \in \mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) \geq f(2) = -4,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Σημειώνουμε εδώ ότι αν το πεδίο ορισμού της f ήταν διαφορετικό και δεν περιείχε το $x_0 = 2$, τότε δεν θα ίσχυε το πιο πάνω αποτέλεσμα.

(β) Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ |x-2| \geq 0 \Longrightarrow |x-2| - 1 \geq -1,$$

με την ισότητα να ισχύει, όταν $x = 2$.

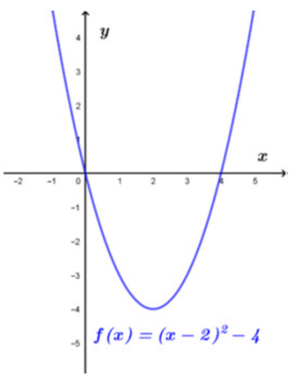
Η συνάρτηση $f(x) = |x-2| - 1, x \in \mathbb{R}$, έχει ολικά ελάχιστη τιμή στο $x_0 = 2$ με αντίστοιχη τιμή $f(2) = -1$, αφού $2 \in \mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) \geq f(2) = -1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

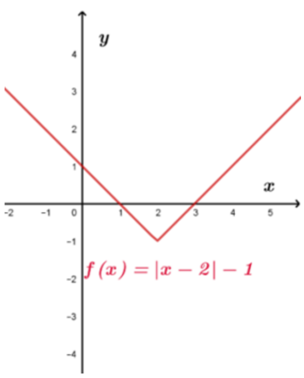
(γ) Γνωρίζουμε ότι ισχύει

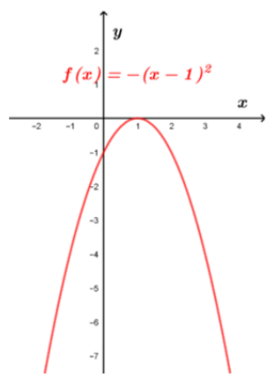
$$\forall x \in \mathbb{R}:\ -(x-1)^2 \leq 0,$$

με την ισότητα να ισχύει, όταν $x = 1$.

Η συνάρτηση $f(x) = -(x-1)^2, x \in \mathbb{R}$, έχει ολικά μέγιστη τιμή στο $x_0 = 1$ με αντίστοιχη τιμή $f(1) = 0$, αφού $1 \in \mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) \leq f(1) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.







Παράδειγμα 2

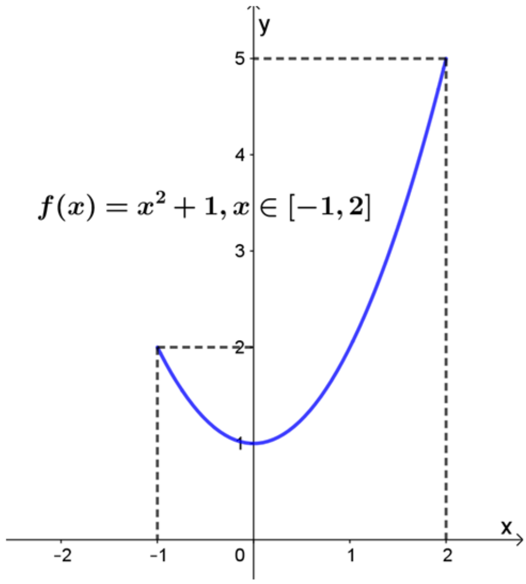
Να βρείτε, αν υπάρχουν, το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης:

$$f(x) = x^2 + 1, \ \ x \in [-1, 2]$$

Λύση

Τα ολικά ακρότατα της f υπάρχουν, γιατί η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 2]$.
Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1, \ x \in [-1, 2]$ ισχύει $f(x) \geq 0$.

- Για κάθε $x_1, x_2 \in [-1, 0]$ με $x_1 < x_2$, ισχύει $x_1^2 + 1 > x_2^2 + 1$. Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$. Έτσι, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f στο $[-1, 0]$ είναι η $f(-1) = 2$ και $f(0) = 1$, αντίστοιχα.
- Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, 2]$ με $x_1 < x_2$, ισχύει $x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1$. Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$. Έτσι, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f στο $[0, 2]$ είναι η $f(2) = 5$ και $f(0) = 1$, αντίστοιχα.



Επομένως, το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης f στο $[-1, 2]$ είναι η $f(2) = 5$ και $f(0) = 1$, αντίστοιχα.

Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$.

- Η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

  $$f(x_0) \geq f(x), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

  Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μέγιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

  $$f(x_0) \leq f(x), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

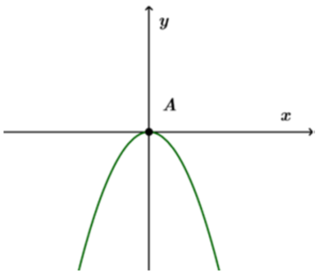
  Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελάχιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f.

Παρατηρήσεις

- Το τοπικό μέγιστο και το τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f είναι τα τοπικά ακρότατά της.
- Αν η συνεχής συνάρτηση f αλλάζει μονοτονία στα διαστήματα $(x_0 - \delta, x_0) \cap A$ και $(x_0, x_0 + \delta) \cap A$, $\delta > 0$, τότε παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0.
- Όταν μια συνάρτηση παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ μέγιστη τιμή (αντίστοιχα ελάχιστη), τότε θα λέμε ότι στο x_0 έχουμε ολικό μέγιστο (ολικό ελάχιστο). Οι τιμές αυτές λέγονται ολικά ακρότατα.
- Κάθε ολικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) είναι και τοπικό ακρότατο. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

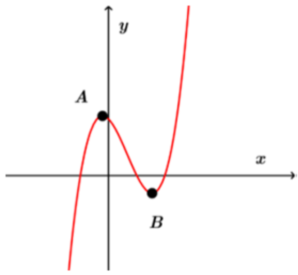
Παραδείγματα

(α)



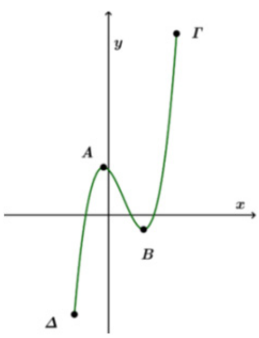
Στο σχήμα (α) το y_A είναι τοπικό μέγιστο και συγχρόνως ολικό μέγιστο.

(β)



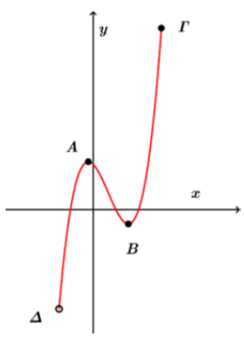
Στο σχήμα (β) τα y_A και y_B είναι τοπικά ακρότατα, αλλά όχι ολικά. Η αντίστοιχη συνάρτηση δεν έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.

(γ)



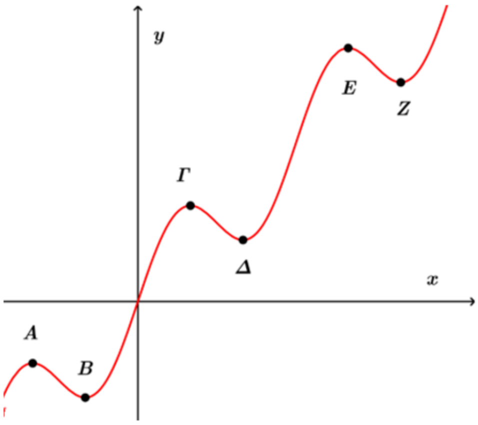
Στο σχήμα (γ) τα y_A, y_B, y_Γ και y_Δ είναι τοπικά ακρότατα. Ακρότατα (ολικά) είναι μόνο τα y_Γ και y_Δ.

(δ)



Στο σχήμα (δ) τα y_A, y_B και y_Γ είναι τοπικά ακρότατα. Ολικό ακρότατο είναι μόνο το y_Γ. Η αντίστοιχη συνάρτηση δεν έχει ελάχιστη τιμή.

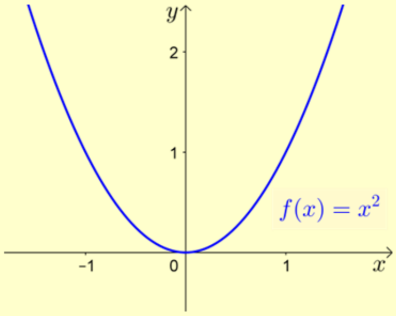
Ένα τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) μπορεί να είναι μικρότερο (μεγαλύτερο) από ένα τοπικό ελάχιστο (μέγιστο). Παράδειγμα η συνάρτηση με την πιο κάτω γραφική παράσταση.



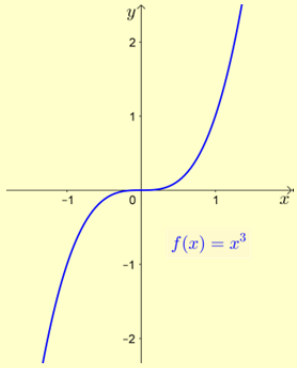
Δραστηριότητες

1. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα τοπικά ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων:

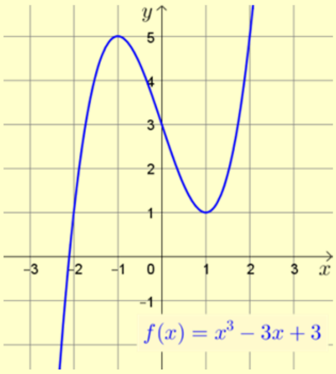
(α)



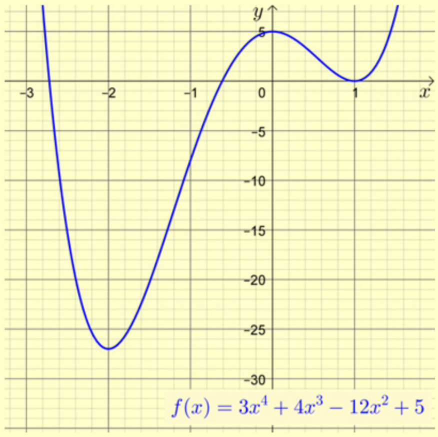
(β)



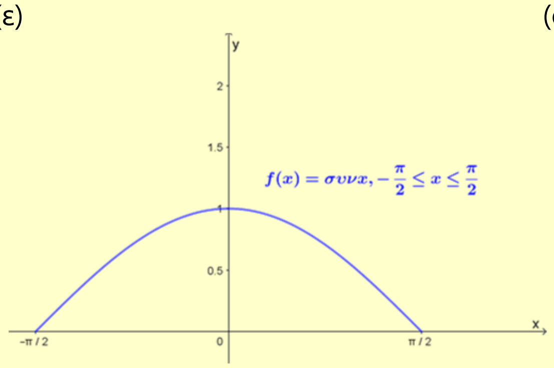
(γ)



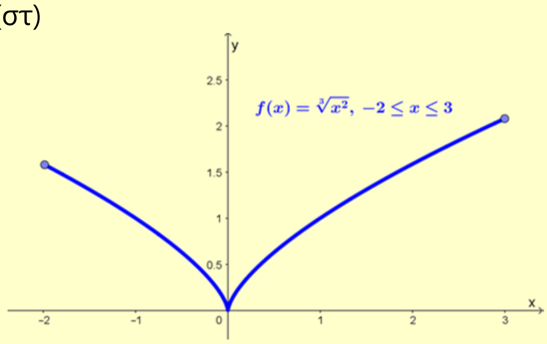
(δ)



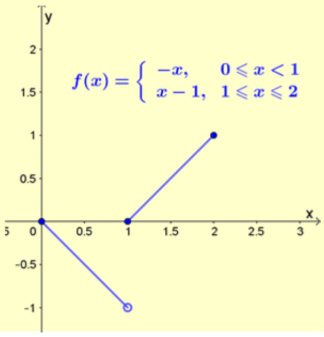
(ε)



(στ)



(ζ)



2. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(α) Αν η f είναι συνεχής στο $\Delta = [\alpha, \beta]$, τότε στα άκρα του Δ η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(β) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και έχει πεπερασμένα το πλήθος τοπικά ακρότατα, τότε το μεγαλύτερο τοπικό μέγιστο της f στο $[\alpha, \beta]$ είναι και το ολικό μέγιστο της f στο διάστημα αυτό. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(γ) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - 4x + 12,\ \ x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $x = 2$, την $f(2) = 8$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(δ) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα ακρότατο. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ολικά ακρότατες τιμές των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^2 + 4x + 6,\ \ x \in \mathbb{R}$ (β) $f(x) = 4 - x^2,\ \ -3 \leq x \leq 1$

1.6 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ)

Θεώρημα (Κριτήριο Μονοτονίας)

Έστω $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση συνεχής στο $[a,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a,β). Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(a,\beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a,\beta]$.
(β) Αν $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(a,\beta)$, τότε η f είναι αύξουσα στο $[a,\beta]$.
(γ) Αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(a,\beta)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a,\beta]$.
(δ) Αν $f'(x)\leq 0$ για κάθε $x\in(a,\beta)$, τότε η f είναι φθίνουσα στο $[a,\beta]$.
(ε) Αν $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(a,\beta)$, τότε η f είναι σταθερή στο $[a,\beta]$.

Απόδειξη

(α) Έστω τυχαία σημεία $x_1,x_2\in[a,\beta]$ με $a\leq x_1<x_2\leq\beta$.

Τότε, η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2).
Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε:

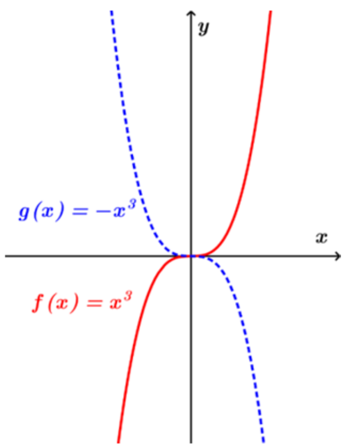
$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$$

Αφού $x_1<x_2$, ισχύει ότι $x_2-x_1>0$.
Επομένως, $f(x_2)-f(x_1)>0$, δηλαδή $f(x_2)>f(x_1)$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Ανάλογες είναι και οι αποδείξεις των υπόλοιπων κριτηρίων.

Παρατηρήσεις

- Το αντίστροφο δεν ισχύει για τις περιπτώσεις (α) και (γ). Δηλαδή, σε μια γνησίως μονότονη συνάρτηση μπορούν να υπάρχουν μεμονωμένα σημεία x_0, για τα οποία να ισχύει $f'(x_0)=0$.
  Παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=-x^3$, $x\in\mathbb{R}$. Ισχύει ότι $f'(0)=0$, $g'(0)=0$ και οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως μονότονες στο $\mathbb{R}$.



- Το αντίστροφο ισχύει στις περιπτώσεις (β) και (δ).

- Το ίδιο κριτήριο ισχύει όταν, αντί για κλειστό διάστημα $[a,\beta]$, θεωρήσουμε τα διαστήματα $[a,\beta)$, $(a,\beta]$, (a,β).

Παράδειγμα 1

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις πιο κάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$
(β) $g(x) = 2\sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty)$

Λύση

(α) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

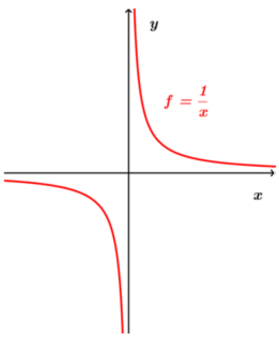
Ισχύει ότι $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

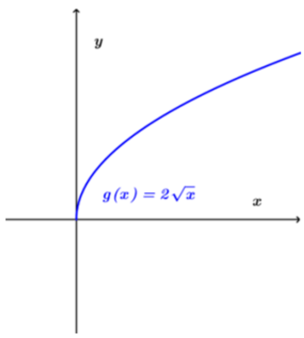
Παρατήρηση

Δεν μπορούμε να γράψουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, γιατί τότε θα ίσχυε $-1 < 1 \Rightarrow f(-1) > f(1) \Rightarrow -1 > 1$, άτοπο. Το σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ δεν είναι διάστημα.

(β) Για τη συνάρτηση g ισχύει $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Επομένως, αφού η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.





Παράδειγμα 2

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & x < 2 \\ 3x^2 - 6x + 9, & x \geq 2 \end{cases}$$

Λύση

Για τη συνάρτηση f, έχουμε ότι:

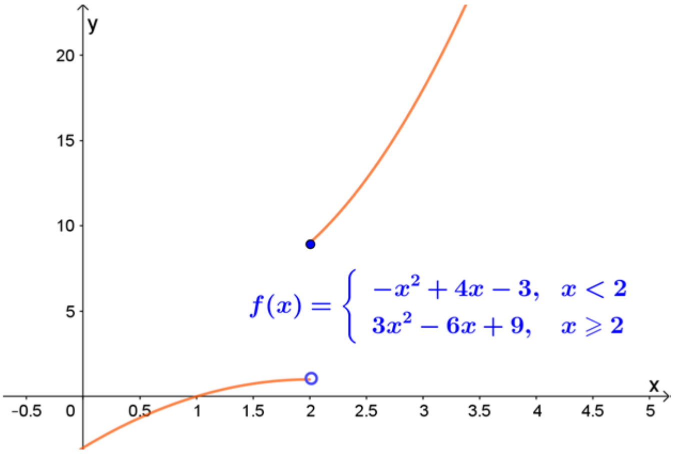
$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 4, & x < 2 \\ 6x - 6, & x > 2 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 2)$ και για κάθε $x \in (2, +\infty)$.

Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 9, \quad f(2) = 9$$

Επομένως, η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x = 2$. Έτσι, η συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $[2, +\infty)$.



Παρατήρηση

Αν μια συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, x_0)$, $[x_0, +\infty)$ και δεν είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για να ισχύει αυτό, πρέπει:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Έτσι, η συνάρτηση f που εμφανίζεται στο Παράδειγμα 2 είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θεώρημα του Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

Απόδειξη

Έστω ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Αφού το x_0 είναι ένα εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σε αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και:

$$f(x_0) \geq f(x), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει ότι:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επομένως:

- Αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, ισχύει

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

αφού $x - x_0 < 0$. Οπότε, έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad (1)$$

- Αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, ισχύει

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

αφού $x - x_0 > 0$. Οπότε, έχουμε:

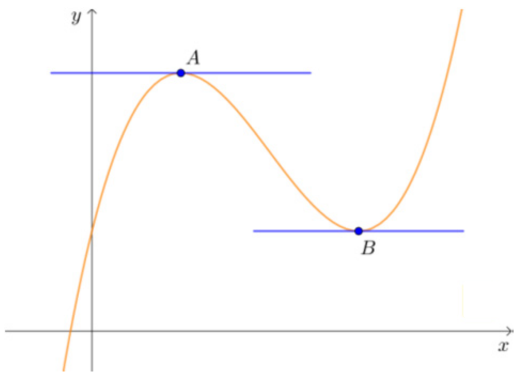
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad (2)$$

Έτσι, από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $f'(x_0) = 0$.

Με ανάλογο τρόπο το θεώρημα αποδεικνύεται και για το τοπικό ελάχιστο.

Γεωμετρική Ερμηνεία του Θεωρήματος Fermat

Το Θεώρημα του Fermat δηλώνει ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\big(x_0, f(x_0)\big)$ είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.



Παρατηρήσεις

- Σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat, τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f' υπάρχει και είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων. Επομένως, οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι:
  - Τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
  - Τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
  - Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f).
- Τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ.

Παράδειγμα 3

Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^3, \quad x \in \mathbb{R}$
(β) $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$
(γ) $f(x) = |x - 1|, \quad x \in \mathbb{R}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Άρα, για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία της, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

Έχουμε ότι:

$$f'(x) = 3x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

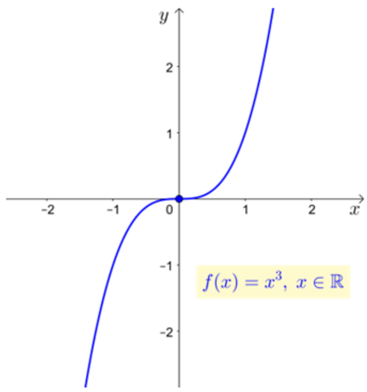
Άρα:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Συνεπώς, έχουμε κρίσιμο σημείο, το $x = 0$.

Παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι το $x = 0$ είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f αλλά δεν είναι θέση τοπικού ακρότατου, όπως αυτό επιβεβαιώνεται από τη γραφική παράσταση της f στο διπλανό σχήμα.



(β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Άρα, για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία της, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

Έχουμε ότι:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

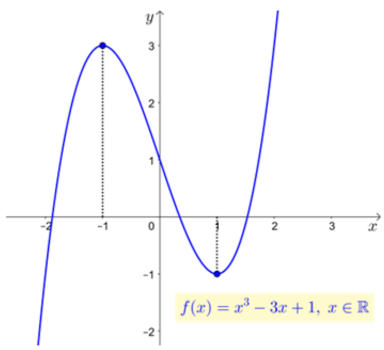
Άρα:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, \quad x = -1$$

Συνεπώς, έχουμε κρίσιμα σημεία, τα $x = 1$ και $x = -1$.

Παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι τα $x = 1$ και $x = -1$ είναι κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f αλλά και θέσεις τοπικών ακρότατων, όπως αυτό επιβεβαιώνεται από τη γραφική παράσταση της f στο διπλανό σχήμα.



(γ) Ο τύπος της συνάρτησης f γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x\in[1,+\infty)\\ 1-x, & x\in(-\infty,1)\end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x=1$, και συνεπώς σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)=0$$

Η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$, αφού:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1\neq1=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

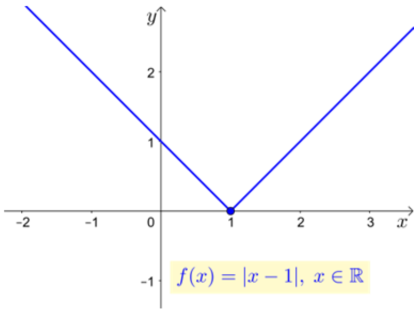
Επομένως, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{1\}$, με:

$$f'(x)=\begin{cases}1, & x\in(1,+\infty)\\ -1, & x\in(-\infty,1)\end{cases}$$

Άρα, είναι $f'(x)\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ Συνεπώς, έχουμε κρίσιμο σημείο, το $x=1$.

Παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι το $x=1$ είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f αλλά και θέση τοπικού ακρότατου, όπως αυτό επιβεβαιώνεται από τη γραφική παράσταση της f στο διπλανό σχήμα.



Παράδειγμα 4

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\big(f(x)\big)^2+x^2=1+2xf(x),\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της *απαγωγής σε άτοπο*.

Έστω ότι η f έχει τοπικά ακρότατα. Αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, πρέπει να ισχύει το Θεώρημα Fermat, δηλαδή να υπάρχει τιμή x_0, τέτοια ώστε:

$$f'(x_0)=0 \tag{1}$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση που μας δίνεται και έχουμε:

$$2f(x)f'(x)+2x=2f(x)+2xf'(x) \tag{2}$$

Λόγω της (1), η σχέση (2) μας δίνει $f(x_0)=x_0$.

Δηλαδή, στο σημείο x_0 το γράφημα G_f της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $y=x$. Άρα, στο σημείο αυτό έχουμε

$$\big(f(x_0)\big)^2+x_0^2=x_0^2+x_0^2=2x_0^2=1+2x_0f(x_0)=1+2x_0^2,$$

η οποία προφανώς δεν ισχύει, άτοπο.

Επομένως, η συνάρτηση f, αφού έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παντού παραγωγίσιμη, δεν θα έχει τοπικά ακρότατα.

Για ειδικές κατηγορίες συναρτήσεων, η μονοτονία και η ύπαρξη ή μη των ακροτάτων ελέγχεται με σχετική ευκολία.

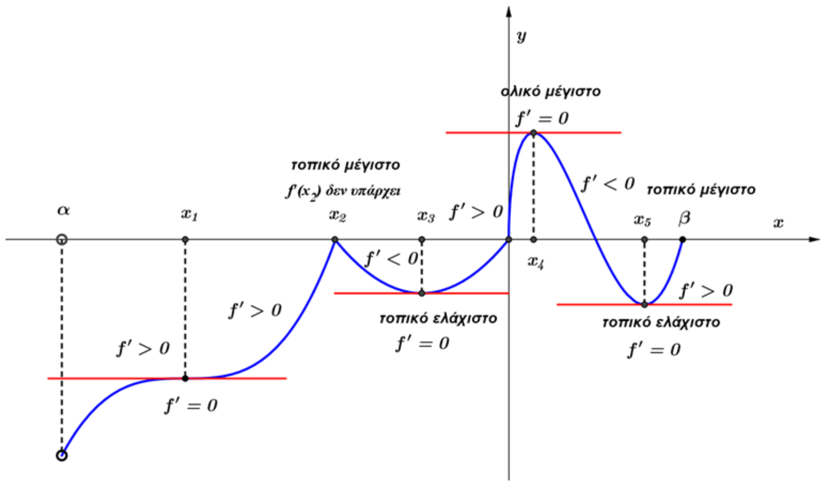
Θεώρημα (Κριτήρια πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα)

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, όπου A είναι ένα διάστημα και x_0 εσωτερικό σημείο του A. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(x_0 - \delta, x_0)$ και $(x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, που περιέχονται στο A. Τότε, ισχύει ότι:

(α) Αν $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε η f παρουσιάζει στο $x = x_0$ **τοπικό μέγιστο**.

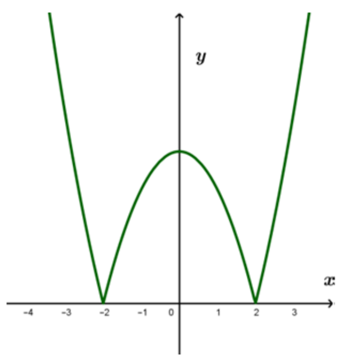
(β) Αν $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε η f παρουσιάζει στο $x = x_0$ **τοπικό ελάχιστο**.

(γ) Αν η f' διατηρεί το πρόσημό της σταθερό στο $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και στο σημείο $x = x_0$ η f **δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο**.

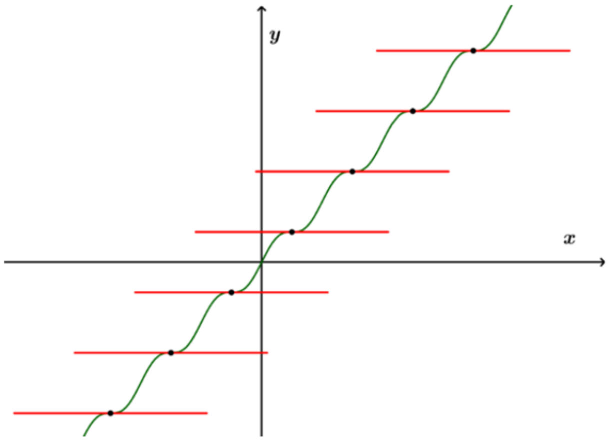


Παρατηρήσεις

- Στη διατύπωση του προηγούμενου θεωρήματος δεν απαιτείται η ύπαρξη της παραγώγου της f στο σημείο x_0. Για παράδειγμα, στο πιο κάτω σχήμα δεν υπάρχει η παράγωγος για $x = -2$ και $x = 2$. Παρόλα αυτά, τα $f(-2) = 0$ και $f(2) = 0$ είναι τοπικά ακρότατα της f.



- Για τη συνάρτηση $f(x) = x + ημx$ ισχύει ότι $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Τα σημεία, στα οποία μηδενίζεται η f', είναι μεν άπειρα το πλήθος, αλλά είναι μεμονωμένα (δηλαδή αν $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f'(x_0) = 0$, τότε στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, με $\delta > 0$, η f' μηδενίζεται μόνο στο x_0). Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.



Θεώρημα (Κριτήρια δεύτερης παραγώγου για ακρότατα)

Έστω $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(x_0) = 0$. Έστω ότι υπάρχει η $f''(x_0)$. Τότε, ισχύει ότι:

(α) Αν $f''(x_0) > 0$, η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο στο x_0.**

(β) Αν $f''(x_0) < 0$, η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο στο x_0.**

Απόδειξη

(α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, έχουμε ότι:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Όμως, $f'(x_0) = 0$. Άρα:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

Αφού

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

υπάρχει διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \text{ με } x \neq x_0$$

Παρατηρούμε ότι:

- αν $x_0 - \delta < x < x_0$, τότε $f'(x) < 0$
- αν $x_0 < x < x_0 + \delta$, τότε $f'(x) > 0$

Αν ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} g(x) > 0,$$

τότε $\exists\, \pi(x_0)$, ώστε:

$$g(x) > 0, \forall x \in \pi(x_0)$$

Αν ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} g(x) < 0,$$

τότε $\exists\, \pi(x_0)$, ώστε:

$$g(x) < 0, \forall x \in \pi(x_0)$$

x	$x_0-\delta$		x_0		$x_0+\delta$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$		min		$\nearrow$

Δηλαδή από τον πιο πάνω πίνακα, βλέπουμε ότι:

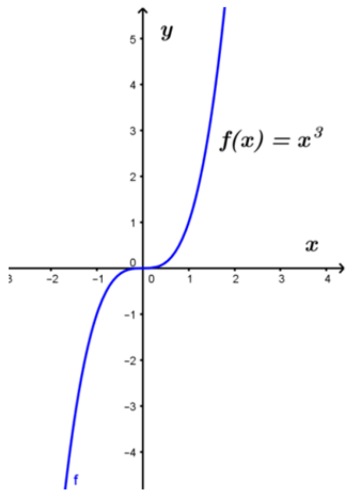
- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(x_0-\delta, x_0]$
- η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, x_0+\delta)$.

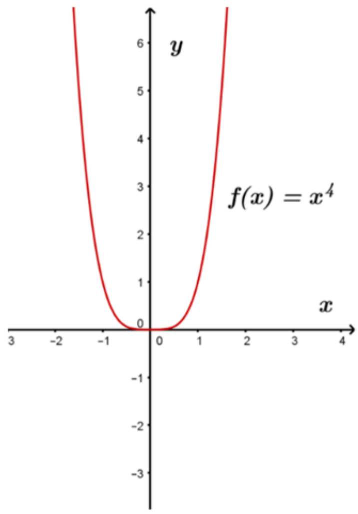
Συνεπώς, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και το κριτήριο (β).

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που η δεύτερη παράγωγος στο x_0 μηδενίζεται, τότε εξετάζουμε την ύπαρξη ή όχι τοπικού ακρότατου με τη βοήθεια της μεταβολής ή μη της μονοτονίας της συνάρτησης f εκατέρωθεν του σημείου αυτού.





Παράδειγμα 5

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα, αν υπάρχουν, των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x)=x^2,\ x\in[-2,3)$

(β) $f(x)=x^3,\ x>-2$

(γ) $f(x)=x^3-3x+1,\ x\in\mathbb{R}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f ορίζεται στο $[-2,3)$.

Η παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο $f'(x)=2x,\ x\in[-2,3)$.

Είναι:

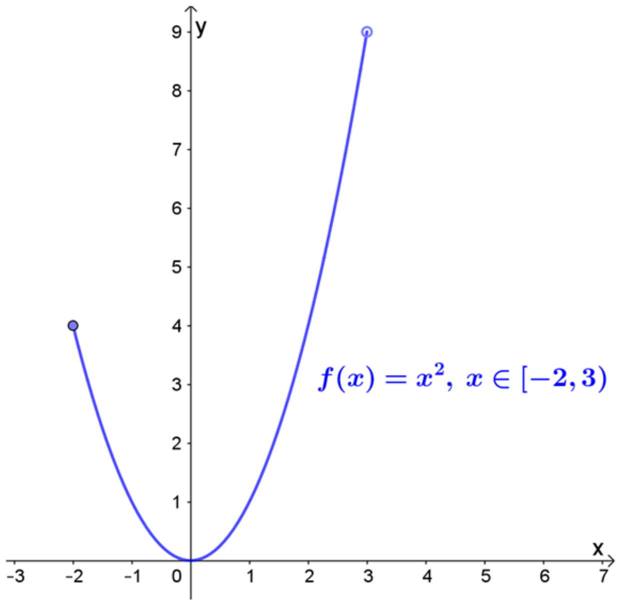
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f'.

x	-2		0		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Από τον πιο πάνω πίνακα, παίρνουμε τις εξής πληροφορίες:

- Μονοτονία: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0]$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 3)$.
- Ακρότατα: Η f παρουσιάζει τοπικό (ολικό) ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$ και τοπικό μέγιστο για $x = -2$, το $f(-2) = 4$.



(β) Η συνάρτηση f ορίζεται στο $(-2, +\infty)$.

Η παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο $f'(x) = 3x^2,\ x \in (-2, +\infty)$.
Είναι:

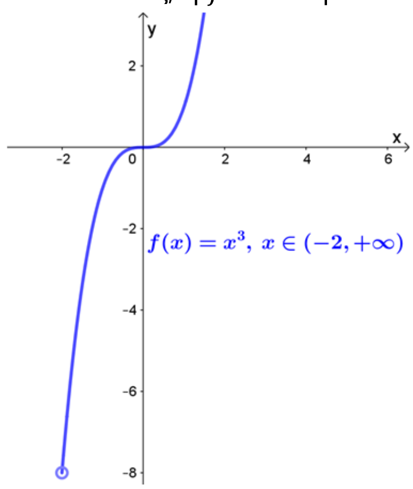
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f'.

x	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$			$\nearrow$		

Από τον πιο πάνω πίνακα, παίρνουμε τις εξής πληροφορίες:

- <u>Μονοτονία:</u> Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-2,+\infty)$.
- <u>Ακρότατα:</u> Από τον πίνακα προσήμου της f', βλέπουμε ότι το πρόσημο της f' δεν αλλάζει στο $x=0$. Συνεπώς, η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.



(γ) Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Η παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x)=3x^2-3,\ \ x\in\mathbb{R}$$

Είναι:

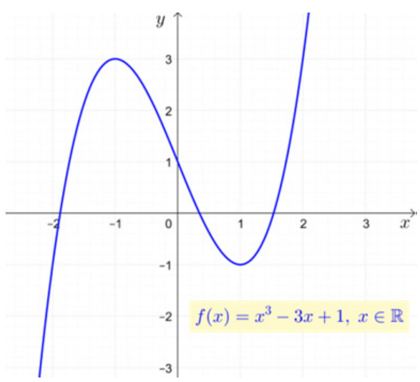
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Longrightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f'.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Από τον πιο πάνω πίνακα, παίρνουμε τις εξής πληροφορίες:

- <u>Μονοτονία:</u> Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$.
- <u>Ακρότατα:</u> Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=1$, το $f(1)=-1$ και τοπικό μέγιστο για $x=-1$, το $f(-1)=3$.



Παράδειγμα 6

Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 3\eta\mu x - \eta\mu 3x$ στο διάστημα $(0, \pi)$.

Λύση

Η πρώτη παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = 3\sigma\upsilon\nu x - 3\sigma\upsilon\nu 3x = 3(\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 3x) = 6\eta\mu x\eta\mu 2x,\ \ x \in (0, \pi)$$

Η $f'(x) = 0$ έχει μόνο μία ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$, την $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Η δεύτερη παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο:

$$f''(x) = 6\sigma\upsilon\nu x\eta\mu 2x + 12\eta\mu x\sigma\upsilon\nu 2x, x \in (0, \pi)$$

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -12 < 0$$

Επομένως, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = \frac{\pi}{2}$, το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 - \eta\mu\frac{3\pi}{2} = 4$.

Παράδειγμα 7

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{ax} + (a-2)x$, όπου a θετικός πραγματικός αριθμός. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$. Να βρείτε την τιμή του a.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x) = ae^{ax} + a - 2$$

Για να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο η f στο $x_0 = 0$, πρέπει να ισχύει $f'(0) = 0$. Ισοδύναμα, έχουμε:

$$f'(0) = 0 \Rightarrow ae^0 + a - 2 = 0 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

Παράδειγμα 8

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Η παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\,\right)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Επομένως, $f'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 9

Να δείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $e^x \geq 1 + x,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ και να αναφέρετε πότε ισχύει η ισότητα.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x - 1 - x$.

Η παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = e^x - 1,\ \ x \in \mathbb{R}$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f'.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Από τον πιο πάνω πίνακα, παίρνουμε τις εξής πληροφορίες:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- Για $x = 0$, έχουμε ολικό ελάχιστο, το $f(0) = 0$.

Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

- $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}: f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 - x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 + x$
- Για $x = 0$, ισχύει: $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 + x$

Άρα, τελικά ισχύει ότι

$$e^x \geq 1 + x,\ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $x = 0$.

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^2 - 4x + 8$ (β) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

(γ) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - x + 1}$ (δ) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

2. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα, αν υπάρχουν, των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ (β) $f(x) = (x+1)^3$

(γ) $f(x) = (x+1)e^x$ (δ) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

3. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα, αν υπάρχουν, των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = e^x \eta\mu x,\ \ x \in (0, \pi)$ (β) $f(x) = 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 2x,\ \ x \in (0, 2\pi)$

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4, & x < -1 \\ 2 - x, & x \geq -1 \end{cases}$$

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{2x^2 - ax + \beta}{x^2 + 1}$$

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = -2$, να δείξετε ότι $3a + 4\beta = 8$.

6. Η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = a \ln 2x + \frac{\beta}{x} + a,\ \ x > 0$$

παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 2 + \ln 2$.
Να βρείτε τις τιμές $a, \beta \in \mathbb{R}$.

7. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10,\ \ x \in [-3, 3]$$

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

9. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)	Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (a,\beta)$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο (a,β).	ΣΩΣΤΟ /ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a,β), τότε ισχύει $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (a,\beta)$.	ΣΩΣΤΟ /ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in (a,\beta)$ και η f' αλλάζει πρόσημο στο x_0, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο.	ΣΩΣΤΟ /ΛΑΘΟΣ

10. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 6x + 5$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

11. Αν $a, \beta \in \mathbb{R}$ και ισχύει $a^2 < 4(\beta - 1)$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (x^2 + ax + \beta)e^x$ δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

12. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x - 1 - \ln x\,, x > 0$.
    (α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά της ακρότατα.
    (β) Να αποδείξετε ότι $\ln x \leq x - 1,\ \ \forall x > 0$.
    (γ) Να αποδείξετε ότι $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x,\ \ \forall x > 0$.

13. Να αποδείξετε ότι:
    (α) $e^x \geq x + 1,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$
    (β) $e^x \geq x^e,\ \ \forall x > 0$

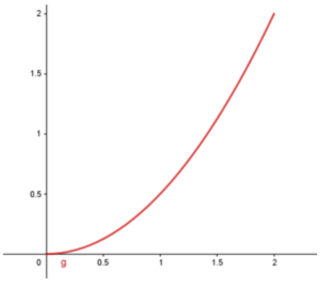
14. Αν $f''(x) < 0$, $\forall x \in [a,\beta]$ και $f(a) = f(\beta) = 0$, να δείξετε ότι $f(x) > 0$, $\forall x \in (a,\beta)$.

1.7 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

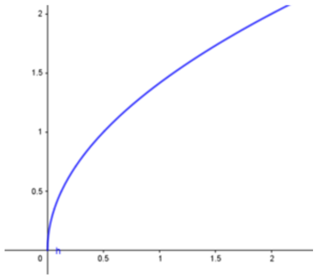
Διερεύνηση 1

Στα πιο κάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Να τις μελετήσετε ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις διαφορές τους.

i.

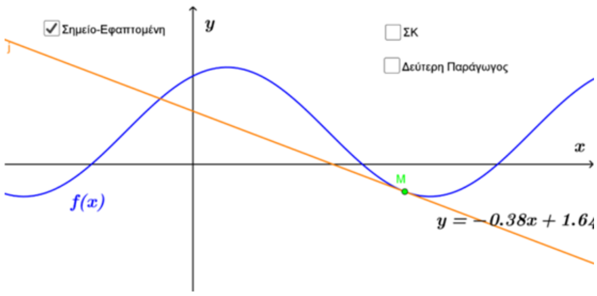


ii.



Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε το αρχείο *«CLyk_En01_Kirti01.ggb»*.



- Να επιλέξετε το ☑ Σημείο-Εφαπτομένη. Εμφανίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η εφαπτομένη της σε μεταβλητό σημείο της M.
- Στη συνέχεια να επιλέξετε το ☐ ΣΚ . Εμφανίζονται τρία σταθερά σημεία A, B και Γ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.
  - ➢ Ποια είναι η σχέση της εφαπτομένης και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στις περιπτώσεις που το M ταυτίζεται με καθένα από τα σταθερά αυτά σημεία;
  - ➢ Τι παρατηρείτε για τη σχέση αυτή, όταν το M κινείται μεταξύ των A και B ή μεταξύ των B και Γ;
- Στη συνέχεια, να επιλέξετε το ☐ Δεύτερη Παράγωγος . Εμφανίζεται η γραφική παράσταση της f''.
  - ➢ Ποια είναι η σχέση μεταξύ του προσήμου της f'' και της θέσης της εφαπτομένης ως προς την γραφική παράστασης της συνάρτησης f;

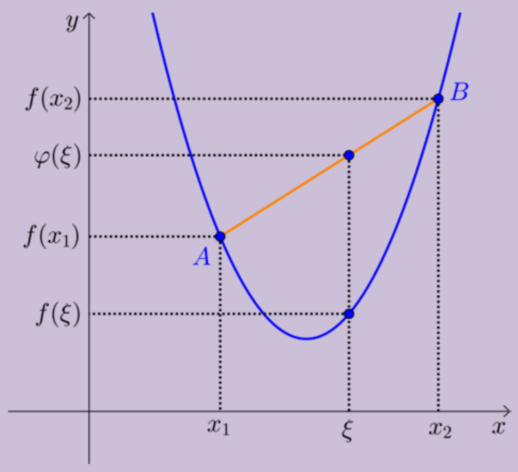
Κυρτές συναρτήσεις

Ορισμοί

(α) Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$, όπου $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα. Αν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, τότε έστω $y = \varphi(x)$ η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A\big(x_1, f(x_1)\big)$ και $B\big(x_2, f(x_2)\big)$.

Θα λέμε ότι η f είναι **κυρτή** στο Δ, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

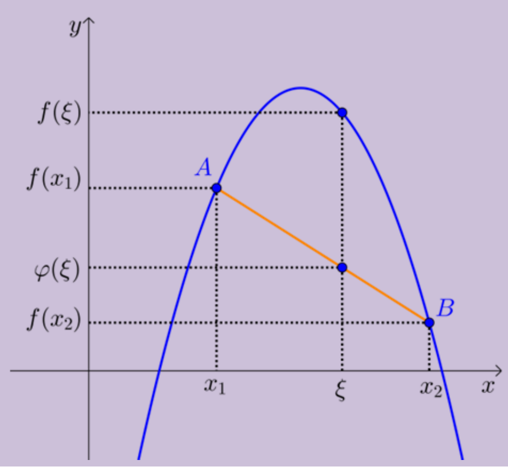
$$f(\xi) \le \varphi(\xi),\ \ \forall\, \xi \in (x_1, x_2)$$



(β) Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$, όπου $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα. Αν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, τότε έστω $y = \varphi(x)$ η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A\big(x_1, f(x_1)\big)$ και $B\big(x_2, f(x_2)\big)$.

Θα λέμε ότι η f είναι **κοίλη** στο Δ, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

$$f(\xi) \ge \varphi(\xi),\ \ \forall \xi \in (x_1, x_2)$$



- Όταν μια συνάρτηση είναι **κυρτή** λέμε ότι **στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω**, ενώ όταν είναι **κοίλη** λέμε ότι **στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω**.

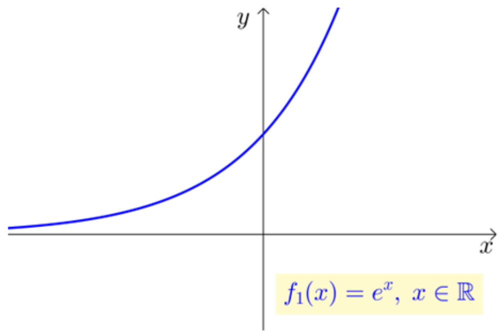
Γεωμετρική Ερμηνεία

Μια συνεχής συνάρτηση f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) σε διάστημα Δ, αν για κάθε δύο σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του πάνω (αντίστοιχα κάτω) από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $\left(x_1, f(x_1)\right)$ και $\left(x_2, f(x_2)\right)$.

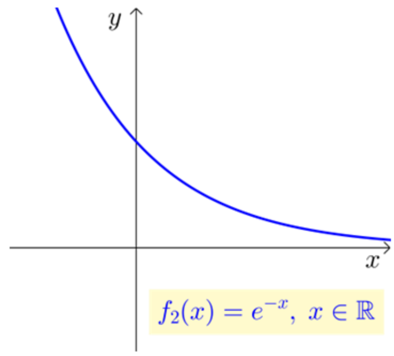
Παράδειγμα 1

Να χαρακτηρίσετε τις συναρτήσεις, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται πιο κάτω, ως κυρτές, ή κοίλες.

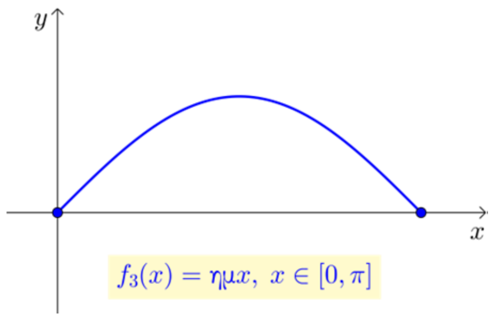
(α)



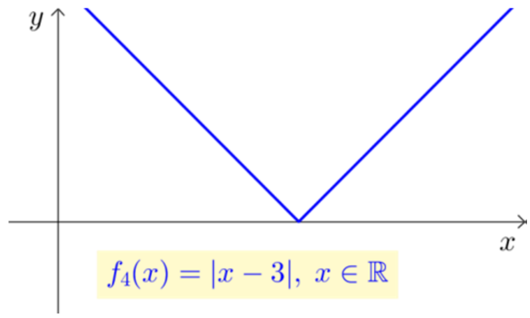
(β)



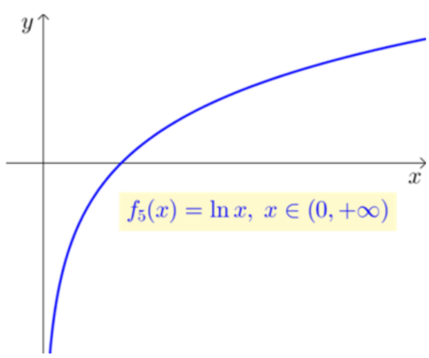
(γ)



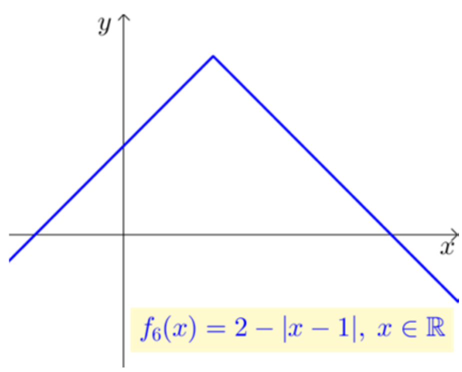
(δ)



(ε)



(στ)



Λύση

Με βάση τις πιο πάνω γραφικές παραστάσεις και τον ορισμό της κυρτής και της κοίλης συνάρτησης, συμπεραίνουμε ότι:

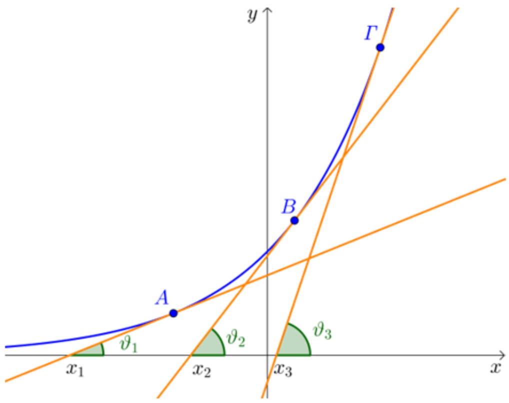
- Οι συναρτήσεις f_1, f_2 και f_4 είναι κυρτές, αφού κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο οποιαδήποτε σημεία της αντίστοιχης γραφικής παράστασης βρίσκεται πάνω από την καμπύλη της ή και πάνω σε αυτήν.
- Οι συναρτήσεις f_3, f_5 και f_6 είναι κοίλες, αφού κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο οποιαδήποτε σημεία της αντίστοιχης γραφικής παράστασης βρίσκεται κάτω από την καμπύλη της ή και πάνω σε αυτήν.

Μελετώντας τις κλάσεις των **συνεχών και παραγωγίσιμων** συναρτήσεων υπάρχουν θεωρήματα, τα οποία αποτελούν κριτήρια για το κατά πόσο μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα.

Παρατήρηση

Παίρνοντας μία κυρτή συνάρτηση σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, παρατηρούμε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, ότι σε διαδοχικά σημεία του Δ με $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$, ισχύει ότι $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \cdots < \frac{\pi}{2}$.

Αυτό μας οδηγεί στην παρατήρηση ότι
εφ$\theta_1 <$ εφ$\theta_2 <$ εφ$\theta_3 < \cdots$ ή ότι
$f'(x_1) < f'(x_2) < f'(x_3) < \cdots$.
Δηλαδή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.



Ανάλογες παρατηρήσεις έχουμε και όταν η συνάρτηση είναι κοίλη. Έτσι, έχουμε τα θεωρήματα τα οποία αναφέρονται σε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι μια συνάρτηση κυρτή ή κοίλη.

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:

(α) Η f είναι **κυρτή** ή **στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο Δ**, αν και μόνο αν η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

(β) Η f είναι **κοίλη** ή **στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο Δ**, αν και μόνο αν η f' είναι φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Παράδειγμα 2

Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα τις πιο κάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}$

(β) $g(x) = \ln x\,,\ x \in (0, +\infty)$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 3x^2$.

Η συνάρτηση f' είναι αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Έτσι:

- Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$.
- Η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.

(β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με $g'(x) = \frac{1}{x}$.

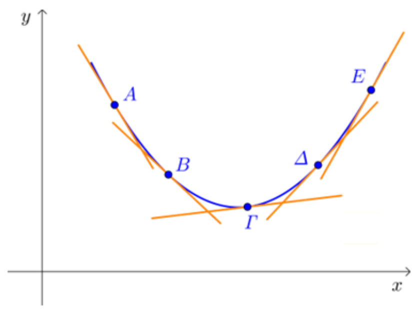
Η συνάρτηση g' είναι φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Έτσι, η g είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

Σχόλιο

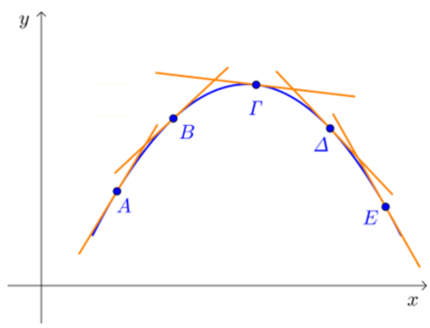
Για να δηλώσουμε στον πίνακα μεταβολών ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\smile$ (αντιστοίχως $\frown$).

Γεωμετρική Ερμηνεία

(α) Η f είναι κυρτή ή στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο (α, β), αν το διάγραμμά της βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος (α, β), εκτός από το σημείο επαφής.



(β) Η f είναι κοίλη ή στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο (α, β), αν το διάγραμμά της βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο του (α, β), εκτός από το σημείο επαφής.



Όταν για τη συνεχή συνάρτηση $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι, εκτός από την ύπαρξη της f', υπάρχει και η δεύτερη παράγωγος $f'' = (f')'$ στο εσωτερικό του Δ, τότε έχουμε μια παραλλαγή του προηγούμενου θεωρήματος.

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

(α) Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η f κυρτή στο Δ είναι $f''(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

(β) Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η f κοίλη στο Δ είναι $f''(x) \leq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

Απόδειξη

(α) Από το προηγούμενο θεώρημα, η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η f κυρτή στο διάστημα Δ είναι όπως η παράγωγος της f' να είναι αύξουσα στο Δ. Όμως, για να είναι η f' αύξουσα στο Δ πρέπει και αρκεί να ισχύει ότι $(f')'(x) = f''(x) \geq 0, \forall\, x \in \Delta$.

(β) Από το προηγούμενο θεώρημα, η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η f κοίλη στο διάστημα Δ είναι όπως η παράγωγος της f' να είναι φθίνουσα στο Δ. Όμως, για να είναι η f' φθίνουσα στο Δ πρέπει και αρκεί να ισχύει ότι $(f')'(x) = f''(x) \leq 0, \forall\, x \in \Delta$.

Παράδειγμα 3

Να μελετήσετε τις συναρτήσεις στο Παράδειγμα 2 ως προς την κυρτότητα τους, χρησιμοποιώντας το θεώρημα που αναφέρεται στο πρόσημο της δεύτερης παραγώγου.

Λύση

Εξετάζουμε το πρόσημο τη δεύτερης παραγώγου για την κάθε συνάρτηση.

(α) Έχουμε:

$$f(x) = x^3,\ \ x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f'(x) = 3x^2,\ \ f''(x) = 6x$$

- Ισχύει $f''(x) \geq 0, \forall x \in [0, +\infty)$. Επομένως, η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.
- Ισχύει $f''(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty, 0]$. Επομένως, η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$.

(β) Έχουμε:

$$g(x) = \ln x\,, x \in (0, +\infty) \Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{x},\ \ g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

Επομένως, η g είναι κοίλη στο $(0\ \ , +\infty)$.

Παράδειγμα 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2, \ \ x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη.

Λύση

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγό της

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x, \ \ x \in \mathbb{R}$$

και στη συνέχεια τη δεύτερη παράγωγό της:

$$f''(x) = 12x^2 - 48x + 36, \ \ x \in \mathbb{R}$$

Μελετούμε το πρόσημο της f''. Για τον λόγο αυτό, πρέπει να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης $f''(x) = 0$ και στη συνέχεια να κατασκευάσουμε τον πίνακα μεταβολής της f''. Έχουμε:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

Ισχύει ότι:

- $f''(x) \geq 0, \ \ \forall x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ και
- $f''(x) \leq 0, \ \forall x \ \in [1\,, 3]$

Επομένως, η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$, ενώ είναι κοίλη στο διάστημα $[1\,, 3]$.

Σημεία Καμπής

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ με Δ διάστημα, $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0 \in \Delta$. Το σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, αν η f είναι:

(α) συνεχής στο x_0

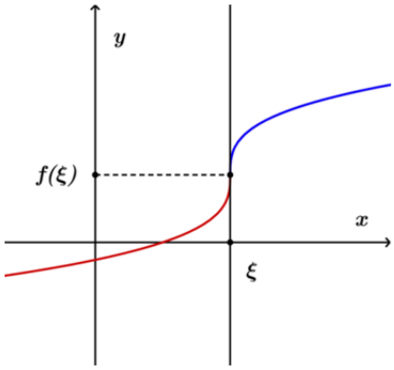
(β) κυρτή στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0)$ και κοίλη στο διάστημα $(x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ (ή αντιστρόφως) και

(γ) η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη στο σημείο της $A\big(x_0, f(x_0)\big)$.

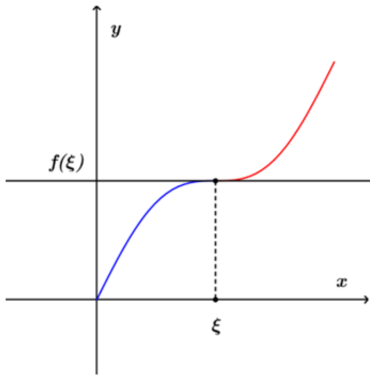
Παρατηρήσεις

- Στα πιο κάτω σχήματα όπως παρατηρούμε, όταν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο καμπής $M\big(\xi, f(\xi)\big)$, τότε η κλίση της θα ισούται είτε με πραγματικό αριθμό, είτε δεν θα ορίζεται (δηλαδή η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής $x = \xi$).

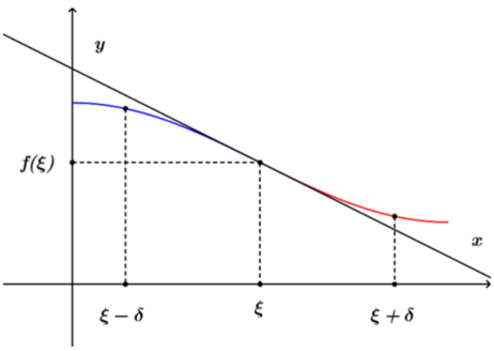
- Στην περίπτωση που η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο καμπής ισούται με πραγματικό αριθμό (Σχήμα (β), (γ) και (δ)), τότε η εφαπτομένη είναι είτε πλάγια, είτε οριζόντια ευθεία. Κατά συνέπεια, η κλίση της εφαπτομένης $f'(\xi)$ υπάρχει και η εφαπτόμενη ευθεία διαπερνά τη γραφική παράσταση της f.
- Αν δεν ορίζεται η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο καμπής (Σχήμα (α)), τότε η εφαπτομένη θα είναι κατακόρυφη ευθεία.



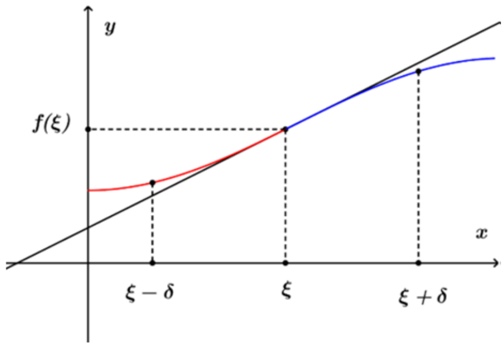
Σχήμα (α)



Σχήμα (β)



Σχήμα (γ)



Σχήμα (δ)

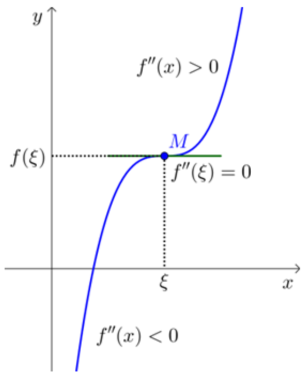
- Αν ένα σημείο της γραφικής παράστασης $M\big(\xi, f(\xi)\big)$ είναι σημείο καμπής, αυτό σημαίνει ότι εκατέρωθεν του ξ, η f'' (όταν υπάρχει) αλλάζει πρόσημο.

  Για παράδειγμα, από $f''(x) \geq 0$ γίνεται $f''(x) \leq 0$ ή αντίστροφα.
  Άρα, σε ένα σημείο καμπής $M\big(\xi, f(\xi)\big)$, όταν υπάρχει η $f''(\xi)$, αναγκαστικά ισχύει $f''(\xi)$=0.

- Αν το σημείο $M\big(\xi, f(\xi)\big)$ είναι σημείο καμπής της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f\colon (\alpha, \beta\,) \to \mathbb{R}$, τότε το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f'.

Θεώρημα (Σημεία Καμπής)
Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = \xi$, είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα της μορφής $(\xi - \delta,\ \xi + \delta)$, $\delta > 0$, και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x = \xi$, τότε $f''(\xi) = 0$.

Απόδειξη
Έστω ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $\xi - \delta < x < \xi$, $\delta > 0$ και στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο διάστημα $\xi < x < \xi + \delta$.



Τότε, η f' είναι φθίνουσα $(f''(x) \leq 0)$ στο διάστημα $\xi - \delta < x < \xi$ και αύξουσα $(f''(x) \geq 0)$ στο διάστημα $\xi < x < \xi + \delta$.
Επομένως, η f' παρουσιάζει μέγιστο για $x = \xi$, λαμβάνοντας υπόψη ότι η f' είναι συνεχής στο $x = \xi$ (αφού η f' είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό).
Σύμφωνα, λοιπόν, με το Θεώρημα του Fermat περί ύπαρξης ακροτάτων, θα ισχύει $f''(x) = 0$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Παρατηρήσεις

- Το διάστημα $(\xi - \delta,\ \xi + \delta)$ περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f.

- Όπως και το Θεώρημα Fermat για ακρότατα, έτσι και το Θεώρημα αυτό ισχύει μόνο για εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f.

- **Το αντίστροφο του Θεωρήματος για σημεία καμπής δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν $f''(\xi) = 0$, τότε δεν υπάρχει απαραίτητα σημείο καμπής στο ξ. Για παράδειγμα, η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^4$ στο διάστημα $(-1, 1)$.

Συμπέρασμα
Για να εξετάσουμε αν η γραφική παράσταση μιας δύο φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης $f\colon (a, \beta) \to \mathbb{R}$ έχει σημείο καμπής στο σημείο της $(\xi, f(\xi))$, πρέπει να ισχύει ότι $f''(\xi) = 0$ και η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του ξ.

Παράδειγμα 5

Να βρείτε τα σημεία καμπής των γραφικών παραστάσεων των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 17,\ x \in \mathbb{R}$ (β) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1},\quad x \in \mathbb{R}$

Λύση

(α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = -3x^2 + 12x$ και $f''(x) = -6x + 12$.

Η f'' μηδενίζεται για $x = 2$ και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x = 2$. Συγκεκριμένα, ισχύει $f''(x) < 0,\ \forall\, x > 2$ και $f''(x) > 0,\ \forall\, x < 2$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			ΣΚ		

Άρα, η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 2]$ και κοίλη στο $[2, +\infty)$ με $f''(2) = 0$.
Επομένως, το σημείο $\big(2, f(2)\big) = (2, 33)$ είναι σημείο καμπής για τη γραφική παράσταση της f.

(β) Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$g'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$g''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^2 - (2-2x^2)\cdot 2\cdot (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-4x(x^2+1)\cdot[(x^2+1)-(2-2x^2)]}{(x^2+1)^4} = \frac{-4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

Έχουμε:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ή } \ x = \pm\sqrt{3}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			ΣΚ		ΣΚ		ΣΚ		

Επομένως, τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της g είναι τα:

$$\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad (0,0),\quad \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Παράδειγμα 6

Δίνεται συνάρτηση $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = a\ln^2 x + \beta \ln x + \alpha x + \beta,\ \ a,\beta \in \mathbb{R}$$

Το σημείο $(1,3)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. Να βρείτε τις τιμές των a,β.

Λύση

Αφού το σημείο $(1,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, ισχύει ότι:

$$f(1) = 3 \Longrightarrow\ a + \beta = 3 \qquad (1)$$

Βρίσκουμε την πρώτη και στη συνέχεια την δεύτερη παράγωγο της f. Έχουμε:

$$f'(x) = 2a \cdot \frac{\ln x}{x} + \frac{\beta}{x} + a$$

$$f''(x) = 2a \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} - \frac{\beta}{x^2} = \frac{1}{x^2}[2a(1-\ln x) - \beta]$$

Επειδή όμως το $(1,3)$ είναι σημείο καμπής, ισχύει:

$$f''(1) = 0 \Longrightarrow 2a - \beta = 0 \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των $(1),(2)$ βρίσκουμε ότι $a = 1$ και $\beta = 2$.

Παράδειγμα 7

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ανοικτό διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο Δ. Αν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, να δείξετε ότι:

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2)$$

Λύση

Για τη συνάρτηση f ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x_1, x_2]$.
Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\ \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Επειδή η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο Δ (δηλαδή είναι κυρτή), ισχύει ότι η f' είναι αύξουσα στο Δ.

Επομένως, η σχέση $x_1 < \xi < x_2$ συνεπάγεται τη σχέση $f'(x_1) \le f'(\xi) \le f'(x_2)$, δηλαδή ισχύει:

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2)$$

Παράδειγμα 8

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathit{\Delta} \to (0, +\infty)$, με $\mathit{\Delta} \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, για την οποία ισχύει $f(x) \cdot f''(x) > \left(f'(x)\right)^2$, $\forall x \in \mathit{\Delta}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \ln(f(x))$ είναι κυρτή στο $\mathit{\Delta}$.

Λύση

Ισχύει για κάθε $x \in \mathit{\Delta}$ ότι

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

και:

$$g''(x) = \frac{f''(x) \cdot f(x) - \left(f'(x)\right)^2}{\left(f(x)\right)^2}$$

Από την υπόθεση, γνωρίζουμε ότι $f(x) \cdot f''(x) > \left(f'(x)\right)^2$, $\forall x \in \mathit{\Delta}$. Άρα, ισχύει ότι $g''(x) > 0$, $\forall x \in \mathit{\Delta}$.

Επομένως, η g στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο $\mathit{\Delta}$. Είναι δηλαδή κυρτή στο $\mathit{\Delta}$.

Δραστηριότητες

1. Να σχεδιάσετε πρόχειρα τις γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω συναρτήσεων και να αναφέρετε κατά πόσο είναι κυρτές ή κοίλες, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

   (α) $f(x) = (x-2)^2 + 1,\ \ x \in \mathbb{R}$ (β) $f(x) = 4 - (x-1)^2,\ \ x \in \mathbb{R}$

   (γ) $f(x) = -2x + 6\,,\ \ x \in \mathbb{R}$ (δ) $f(x) = |x+1| + 1,\ \ x \in (-2\,,3)$

2. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα τις πιο κάτω συναρτήσεις:

   (α) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ (β) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

   (γ) $f(x) = \text{ημ}x,\ \ x \in [0, 2\pi]$ (δ) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

3. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις πιο κάτω συναρτήσεις:

   (α) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ (β) $f(x) = xe^x$

   (γ) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ (δ) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x\ln\ x\,,\ \ x > 0$.

   (α) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

   (β) Να αποδείξετε ότι:
   $$\frac{a\ln a + \beta\ln\beta}{a+\beta} \geq \ln\left(\frac{a+\beta}{2}\right),\ \ \forall a,\beta > 0$$

5. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - \lambda x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$ να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = xe^{-x} + ax + \beta,\ x \in \mathbb{R},\ a,\beta\ \in\ \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

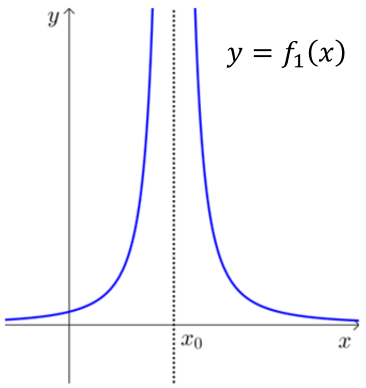
1.8 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Διερεύνηση 1

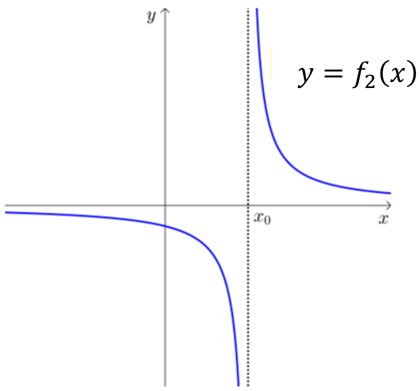
Στα πιο κάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$.

Να μελετήσετε τη συμπεριφορά των τιμών των συναρτήσεων, όταν $x \to x_0$.

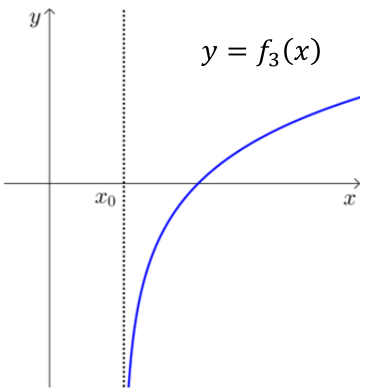
(α)



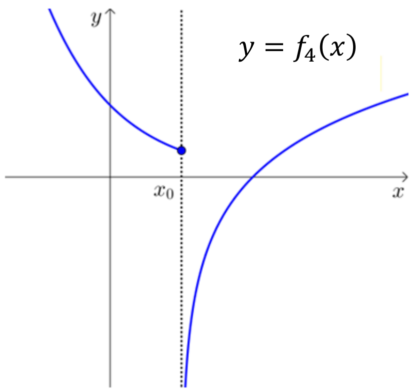
(β)



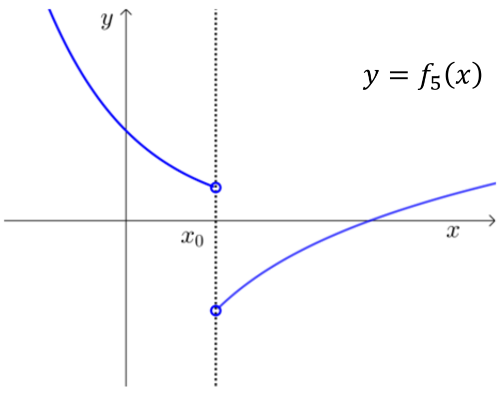
(γ)



(δ)



(ε)

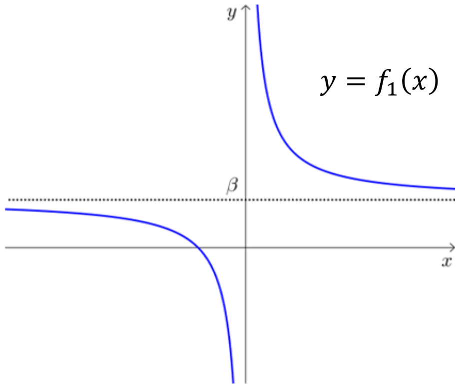


Διερεύνηση 2

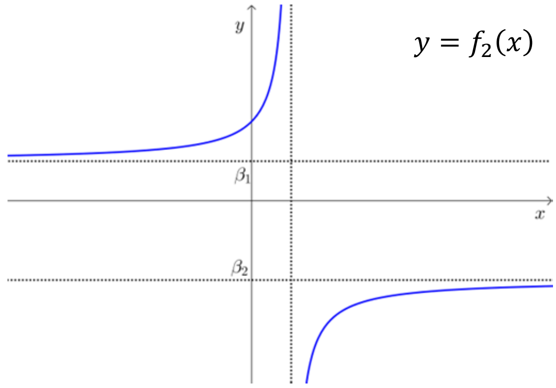
Στα πιο κάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$.

Να μελετήσετε τη συμπεριφορά των τιμών των συναρτήσεων, όταν $x \to \pm\infty$.

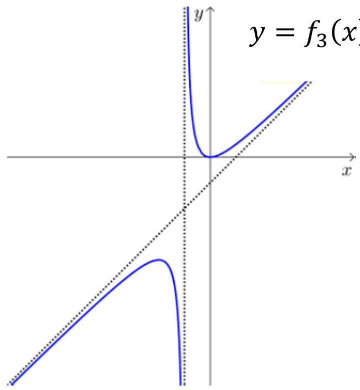
(α)



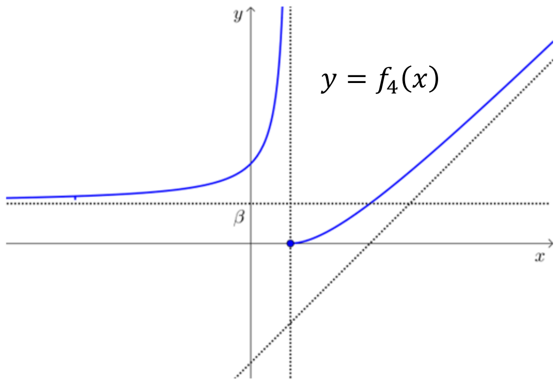
(β)



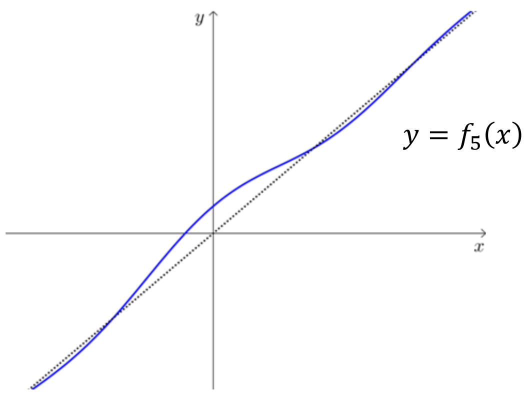
(γ)



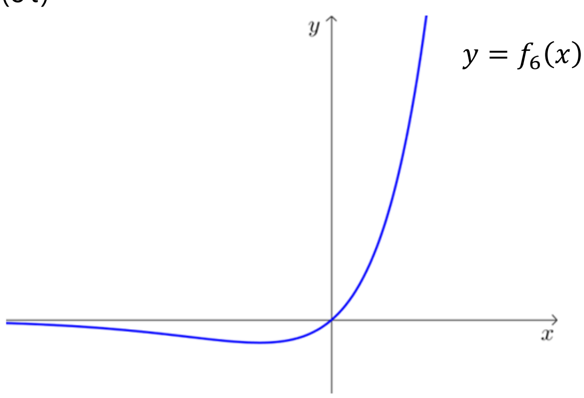
(δ)



(ε)



(στ)



Ορισμοί

(α) Δίνεται η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε για κάθε περιοχή $\pi(x_0)$ να ισχύει ότι $\pi(x_0) \cap (A - \{x_0\}) \neq \emptyset$.
Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x), \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, όπου το A περιέχει ένα τουλάχιστον διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$ ή διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$.

i. Αν

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \beta, \;\; \beta \in \mathbb{R} \;\; \left(\text{αντιστοίχως } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \beta\right),$$

τότε η ευθεία $y = \beta$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

ii. Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta, \lambda \neq 0$, λέγεται **πλάγια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, όταν

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (\lambda x + \beta)\big) = 0,$$

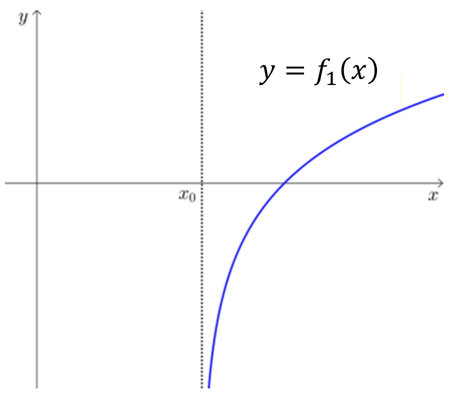
αντίστοιχα

$$\lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - (\lambda x + \beta)\big) = 0.$$

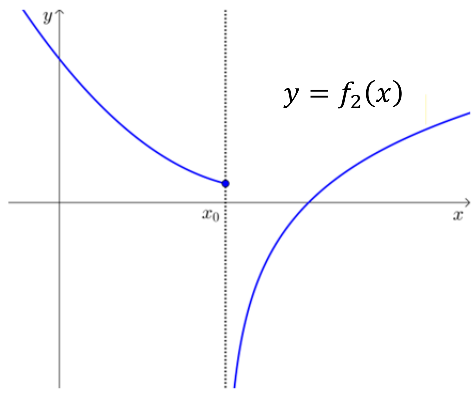
Παρατηρήσεις

- Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f τις αναζητούμε:
  i. στα άκρα ανοικτών διαστημάτων, τα οποία διαστήματα περιέχονται στο πεδίο ορισμού της και
  ii. στα σημεία που η συνάρτηση δεν είναι συνεχής.

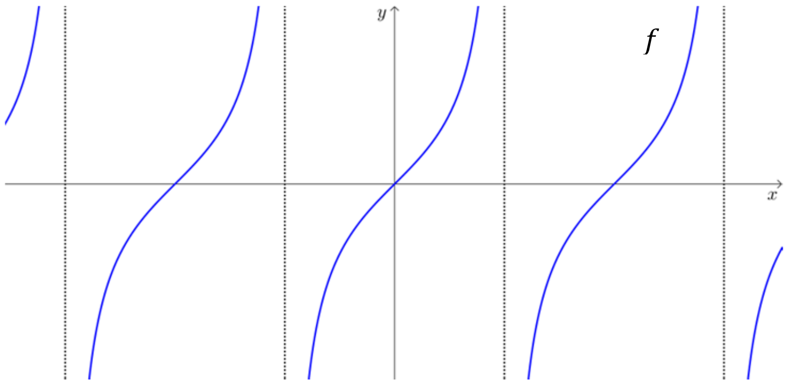
i.



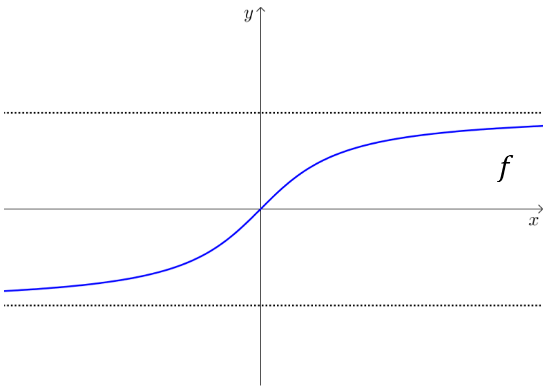
ii.

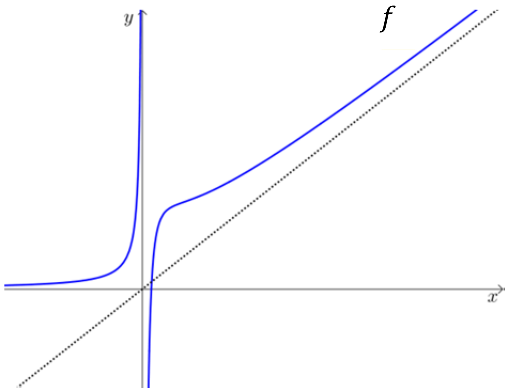


- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορεί να έχει πολλές κατακόρυφες ασύμπτωτες.

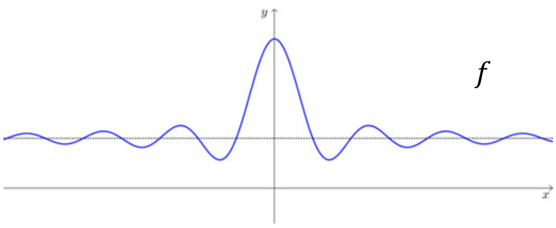


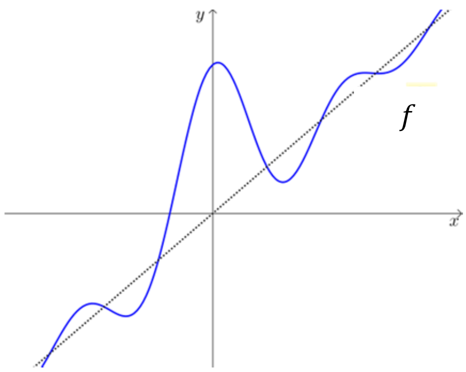
- Η οριζόντια ασύμπτωτη $y=\beta$ είναι ειδική περίπτωση της πλάγιας ασύμπτωτης $y=\lambda x+\beta$ όταν $\lambda=0$.
- Μια συνάρτηση f μπορεί να έχει διαφορετικές ασύμπτωτες, όταν $x\to+\infty$ και όταν $x\to-\infty$.





- Μια συνάρτηση f μπορεί να έχει το πολύ είτε μία οριζόντια είτε μία πλάγια ασύμπτωτη, όταν $x\to+\infty$ (αντίστοιχα όταν $x\to-\infty$).
- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορεί να τέμνει την οριζόντια ή την πλάγια ασύμπτωτή της.





Θεώρημα

Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνον αν

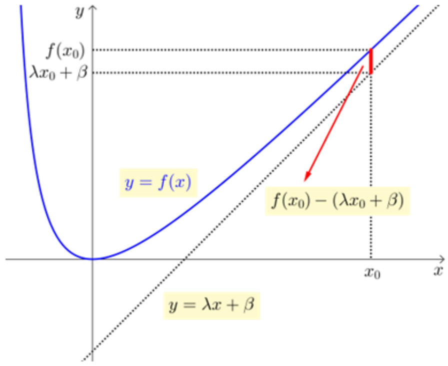
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R},$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη

Για την **πλάγια ασύμπτωτη** $y = \lambda x + \beta$, $\lambda \neq 0$, αυτό σημαίνει ότι όταν $x \to +\infty$, η διαφορά μεταξύ των δύο γραφικών παραστάσεων τείνει στο 0.



Δηλαδή,

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (\lambda x + \beta)\big) = 0 \qquad (1)$$

που ισοδυναμεί με:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta$$

Αν $x \neq 0$, τότε:

$$\frac{f(x) - (\lambda x + \beta)}{x} = \frac{f(x)}{x} - \lambda - \frac{\beta}{x}$$

Αν ισχύει η (1), τότε

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \lambda - \frac{\beta}{x}\right) = 0$$

ή

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$$

Αντίστροφα, αν

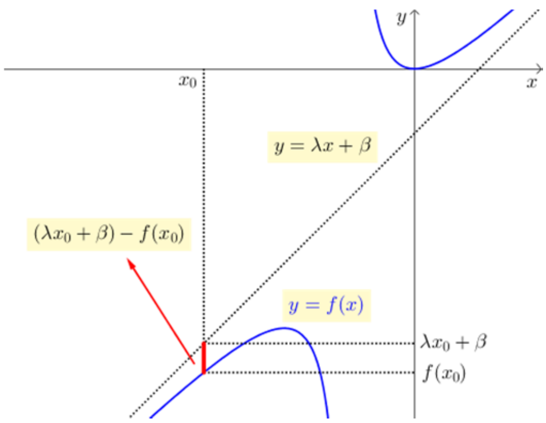
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta,$$

τότε ισχύει η (1).

Όμοια είναι και η περίπτωση όταν $x \to -\infty$. Η «απόσταση» μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της πλάγιας ασύμπτωτης και της συνάρτησης τείνει στο 0.



Παράδειγμα 1

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{1\}$ και είναι συνεχής σε αυτό.

Έτσι, αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x = 1$ και οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη, όταν $x \to +\infty$ και όταν $x \to -\infty$.

Για $x > 1$, ισχύει:

$$x - 1 > 0 \Longrightarrow \lim_{x \to 1^+}(2x-1) = 1 \text{ και } \lim_{x \to 1^+}(x-1) = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = +\infty$$

Για $x < 1$, ισχύει:

$$x - 1 < 0 \Longrightarrow \lim_{x \to 1^-}(2x-1) = 1 \text{ και } \lim_{x \to 1^-}(x-1) = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x-1}{x-1} = -\infty$$

Έτσι, η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 1$.

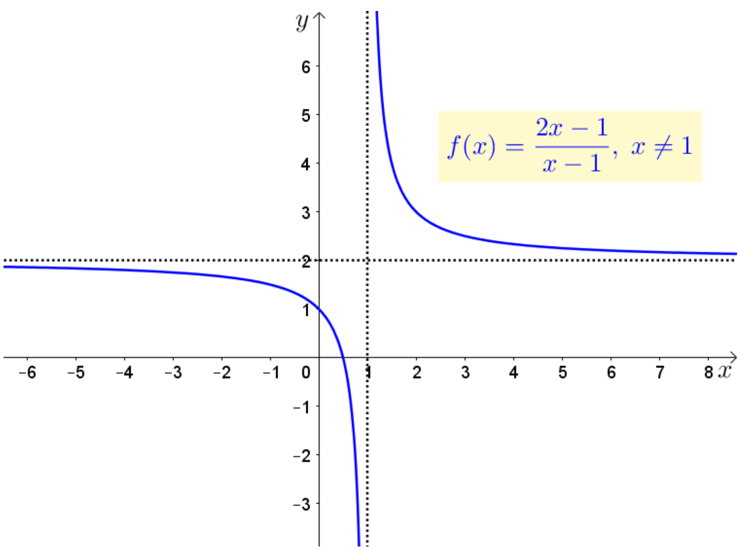
Υπολογίζουμε το όριο της $f(x)$ όταν $x \to +\infty$ και όταν $x \to -\infty$. Έχουμε

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

και:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2$, όταν $x \to +\infty$ και όταν $x \to -\infty$.



Παράδειγμα 2

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$$

Λύση

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{1\}$ και είναι συνεχής σε αυτό.

Έτσι, αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x = 1$ και οριζόντια, ή πλάγια ασύμπτωτη όταν $x \to +\infty$ και όταν $x \to -\infty$.

Ισχύει ότι

Για $x > 1$, ισχύει:

$$x - 1 > 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 1^+}(2x^2 - x) = 1 \text{ και } \lim_{x\to 1^+}(x - 1) = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2 - x}{x - 1} = +\infty$$

Για $x < 1$, ισχύει:

$$x - 1 < 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 1^-}(2x^2 - x) = 1 \text{ και } \lim_{x\to 1^-}(x - 1) = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2 - x}{x - 1} = -\infty$$

Έτσι, η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 1$.

Παρατηρούμε ότι, από το όριο ρητής συνάρτησης:

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1} = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1} = +\infty$

Επομένως η γραφική παράσταση της f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες. Θα ελέγξουμε αν υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

Θα βρούμε το όριο της $\frac{f(x)}{x}$, όταν $x \to +\infty$. Έχουμε από το όριο ρητής συνάρτησης, ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2 - x}{x^2 - x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Άρα, $\lambda = 2$.

Όταν $x \to +\infty$, ισχύει πάλι από το όριο ρητής συνάρτησης ότι:

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2 - x}{x - 1} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x - 1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$$

Επομένως, η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν $x \to +\infty$.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε αν υπάρχει το όριο της $\frac{f(x)}{x}$, όταν $x \to -\infty$.

Με όμοιο τρόπο από το όριο ρητής συνάρτησης, έχουμε

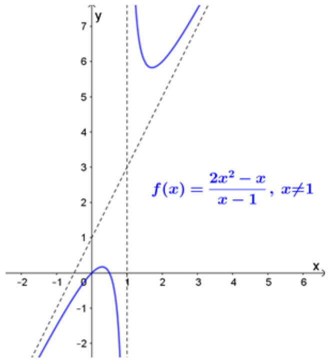
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2 - x}{x^2 - x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2} = 2$$

και:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2-x}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$$

Άρα, $\beta=1$.

Επομένως, η γραφική παράσταση της f έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y=2x+1$, όταν $x\to+\infty$ και όταν $x\to-\infty$.



Παράδειγμα 3

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x)=\frac{2e^x+1}{e^x-1}$$

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{0\}$ και είναι συνεχής σε αυτό. Έτσι, αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x=0$ και οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη όταν $x\to+\infty$ και όταν $x\to-\infty$.

Για $x>0$, ισχύει:

$$e^x-1>0\Longrightarrow\lim_{x\to0^+}(2e^x+1)=3\ \text{ και }\ \lim_{x\to0^+}(e^x-1)=0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2e^x+1}{e^x-1}=+\infty$$

Για $x<0$, ισχύει:

$$e^x-1<0\Longrightarrow\lim_{x\to0^-}(2e^x+1)=3\ \text{ και }\ \lim_{x\to0^-}(e^x-1)=0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{2e^x+1}{e^x-1}=-\infty$$

Έτσι, η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$.

Θα βρούμε το όριο της $f(x)$, όταν $x\to+\infty$, με χρήση του κανόνα του De L' Hospital.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}(2e^x+1)=+\infty\ \text{ και }\ \lim_{x\to+\infty}(e^x-1)=+\infty$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Εξετάζουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De l' Hospital. Είναι:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(2e^x + 1)'}{(e^x - 1\,)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{e^x} = 2$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x + 1}{e^x - 1} = 2$$

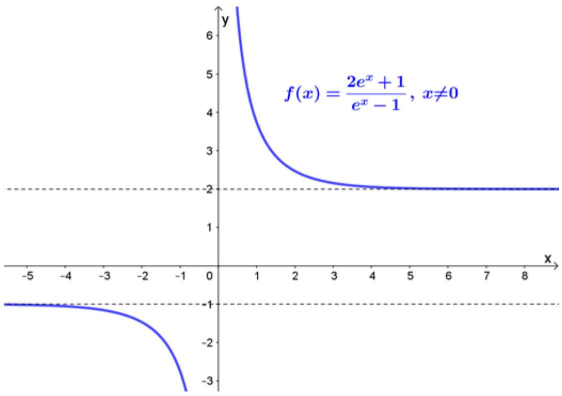
Άρα, η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2$, όταν $x \to +\infty$.

Θα ελέγξουμε αν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη όταν $x \to -\infty$.

Ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{0 + 1}{0 - 1} = -1$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = -1$, όταν $x \to -\infty$.



Παράδειγμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{ax^2 - \beta x + 5}{x - 3}$$

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 3x - 2$, να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Λύση

Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Είναι:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 - \beta x + 5}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2}{x^2} = a$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 3x - 2$, όταν $a = 3$.

Ακολούθως, υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-\beta x+5}{x-3}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(9-\beta)x+5}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(9-\beta)x}{x}=9-\beta$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=3x-2$, όταν:

$$9-\beta=-2\Rightarrow\beta=11$$

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y=3x-2$, όταν $a=3$ και $\beta=11$.

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των πιο κάτω συναρτήσεων:

   (α) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ (β) $f(x)=\ln(x-1)$

   (γ) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\ln x$ (δ) $f(x)=\dfrac{x-5}{|x-3|}$

2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των πιο κάτω συναρτήσεων:

   (α) $f(x)=\dfrac{2x^4-3x+1}{x^4+1}$ (β) $f(x)=\sqrt{4x^2+1}+2x$

   (γ) $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}+x^2+1$

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(α)	Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει πλάγια ασύμπτωτη όταν $x\to+\infty$, τότε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ θα είναι $+\infty$ ή $-\infty$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν μπορεί να τέμνει μία πλάγια ασύμπτωτή της.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, έχει πλάγια ασύμπτωτη, τότε η συνάρτηση f είναι είτε κυρτή είτε κοίλη στο πεδίο ορισμού της.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε η γραφική της παράσταση, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Αν μία συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε η γραφική παράσταση της δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f είναι το κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, τότε η γραφική της παράσταση, δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

4. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις πλάγιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ (β) $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$

(γ) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ (δ) $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 2\lambda}{x - \lambda^2}$$

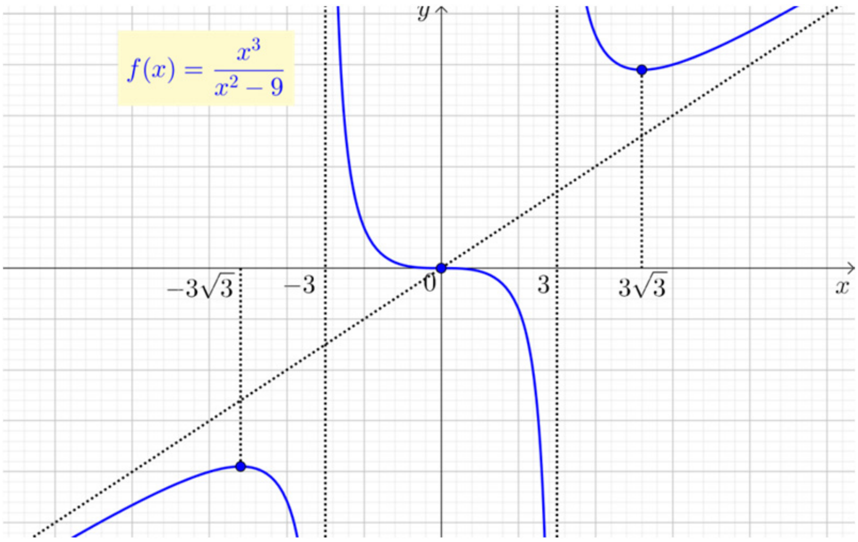
Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 4$, τότε να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.9 ΜΕΛΕΤΗ – ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Διερεύνηση

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}$$



Να βρείτε:

(α) Το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων.

(β) Τα διαστήματα μονοτονίας της f και τα τοπικά ακρότατά της.

(γ) Τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασής της.

(δ) Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Στην υποενότητα αυτή θα δούμε πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Για τον σκοπό αυτό, θα μας βοηθήσουν τα συμπεράσματα, στα οποία έχουμε καταλήξει μέχρι τώρα.

Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$
- Σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων: $(0, 0)$

Αφού μελετήσετε τον πίνακα προσήμου για τις f' και f'' που δίνεται πιο κάτω, να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

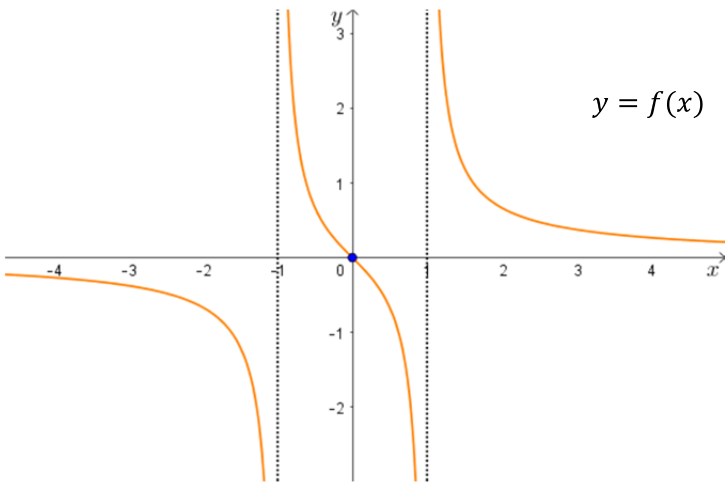
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	

Λύση

Με βάση τα δεδομένα της εκφώνησης, έχουμε:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ και $(1, +\infty)$.
- Η f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.
- Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $[0, 1)$, ενώ η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-1, 0]$ και $(1, +\infty)$.
- Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει σημείο καμπής το $(0, 0)$.
- Η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 1$, $x = -1$ και οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$ και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται πιο κάτω.



Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα διαστήματα στα οποία είναι συνεχής, τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$ και, ως πολυωνυμική συνάρτηση, είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Στη συνέχεια, βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες.

- Αν $x = 0$, τότε $y = 0$.
- Για να βρούμε τα σημεία τομής με τον άξονα των $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$. Έχουμε:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ \ x_2 = 3$$

Επομένως, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων είναι τα $(0,0)$ και $(3,0)$.

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της f και λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$. Έχουμε:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1,\ \ x = 3$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f'.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max $f(1) = 4$	$\searrow$	min $f(3) = 0$	$\nearrow$	

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα έχουμε:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$, το $f(1) = 4$, και τοπικό ελάχιστο για $x = 3$, το $f(3) = 0$.

Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της f και λύνουμε την εξίσωση $f''(x) = 0$. Έχουμε:

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f''.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	Σ.Κ. $(2,2)$	$\smile$	

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα έχουμε:

- Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$, ενώ η f είναι κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$.
- Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει σημείο καμπής, στο $(2, 2)$.

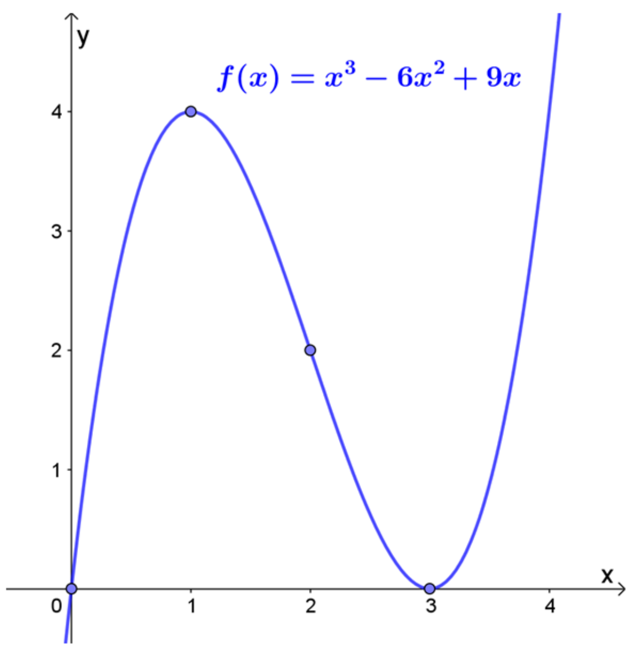
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική. Επομένως, για την εύρεση των ασύμπτωτων της γραφικής παράστασης, εξετάζουμε τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της. Δηλαδή, υπολογίζουμε τα όρια της συνάρτησης όταν $x \to \pm\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

Άρα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν έχει ασύμπτωτες.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται πιο κάτω.



Παράδειγμα 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Στη συνέχεια, βρίσουμε τα σημεία τομής με τους άξονες.

- Αν $x = 0$, τότε $y = 0$.
- Για να βρούμε τα σημεία τομής με τον άξονα των $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$. Έχουμε:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Επομένως, το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων είναι μόνο το $(0, 0)$.

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της f και λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$. Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f'.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		↗		↗	max $f(0) = 0$	↘		↘	

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα έχουμε:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(-1, 0]$, ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0, 1)$ και $(1, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$.

Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της f. Έχουμε:

$$f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3} \neq 0, \quad \forall x \neq \pm 1$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f''.

x	$-\infty$ $\quad$ -1	$\quad$ 1	$\quad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$			

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα έχουμε:

- Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$, ενώ η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-1, 1)$.
- Η γραφική παράσταση της f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$, ως ρητή. Επομένως, για την εύρεση των ασύμπτωτων της γραφικής παράστασης, εξετάζουμε τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της. Δηλαδή, υπολογίζουμε τα όρια της συνάρτησης όταν $x \to \pm\infty$ και όταν $x \to \pm 1$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$, όταν $x \to +\infty$ και όταν $x \to -\infty$.

Για $x < -1$, ισχύει:

$$x < -1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \text{ και } \lim_{x\to-1^-} x^2 = 1, \lim_{x\to-1^-} (x^2-1) = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty$$

Για $x > -1$, ισχύει:

$$x > -1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \text{ και } \lim_{x\to-1^+} x^2 = 1, \lim_{x\to-1^+} (x^2-1) = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$$

Για $x < 1$, ισχύει:

$$x < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \text{ και } \lim_{x\to1^-} x^2 = 1, \lim_{x\to1^-} (x^2-1) = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$$

Για $x > 1$, ισχύει:

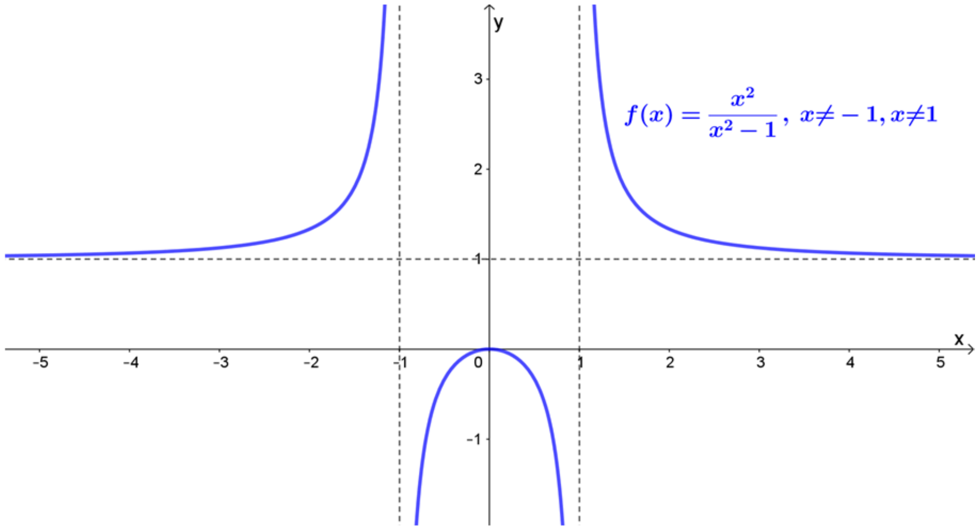
$$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \text{ και } \lim_{x\to1^+} x^2 = 1, \lim_{x\to1^+} (x^2-1) = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty$$

Έτσι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται πιο κάτω.



Παράδειγμα 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
Στη συνέχεια, βρίσουμε τα σημεία τομής με τους άξονες.

- Αν $x = 0$, τότε $y = 0$.
- Για να βρούμε τα σημεία τομής με τον άξονα των $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$. Έχουμε:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Επομένως, το σημείο τομής της γραφικής παράσταση της συνάρτησης f με τους άξονες των συντεταγμένων είναι το $(0, 0)$.

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της f και λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$. Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 12) = 0 \Rightarrow x = 0, \ \ x = \pm 2\sqrt{3}$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f'.

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max $f(-2\sqrt{3})$	$\searrow$	‖	$\searrow$		$\searrow$	‖	$\searrow$	min $f(2\sqrt{3})$	$\nearrow$	

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα έχουμε:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2\sqrt{3}]$ και $[2\sqrt{3}, +\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-2\sqrt{3}, -2)$, $(-2, 2)$ και $(2, 2\sqrt{3}]$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -2\sqrt{3}$, το $f(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$, και τοπικό ελάχιστο για $x = 2\sqrt{3}$, το $f(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$.

Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της f και λύνουμε την εξίσωση $f''(x) = 0$. Έχουμε:

$$f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} = 0 \Rightarrow 8x(x^2+12) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f''.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		$\frown$	‖	$\smile$	Σ.Κ. $(0,0)$	$\frown$	‖	$\smile$	

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα έχουμε:

- Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-2, 0]$ και $(2, +\infty)$, ενώ η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, -2)$ και $[0, 2)$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(0, 0)$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$, ως ρητή. Επομένως, για την εύρεση των ασύμπτωτων της γραφικής παράστασης, εξετάζουμε τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της. Δηλαδή, υπολογίζουμε τα όρια της συνάρτησης όταν $x \to \pm\infty$ και όταν $x \to \pm 2$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

Επομένως, η γραφική παράστασης της συνάρτησης f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη, όταν $x \to +\infty$ και όταν $x \to -\infty$.

Ακολούθως, έχουμε ότι:

Για $x < -2$, ισχύει:

$$x < -2 \Longrightarrow x^2 > 4 \Longrightarrow x^2 - 4 > 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-2^-} x^3 = -8, \ \lim_{x\to-2^-}(x^2-4) = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{x^3}{x^2-4} = -\infty$$

Για $x > -2$, ισχύει:

$$x > -2 \Longrightarrow x^2 < 4 \Longrightarrow x^2 - 4 < 0 \text{ και } \lim_{x \to -2^+} x^3 = -8, \lim_{x \to -2^+} (x^2 - 4) = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$$

Για $x < 2$, ισχύει:

$$x < 2 \Longrightarrow x^2 < 4 \Longrightarrow x^2 - 4 < 0 \text{ και } \lim_{x \to 2^-} x^3 = 8, \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 4) = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$$

Για $x > 2$, ισχύει:

$$x > 2 \Longrightarrow x^2 > 4 \Longrightarrow x^2 - 4 > 0 \text{ και } \lim_{x \to 2^+} x^3 = 8, \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 4) = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$$

Έτσι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = -2$ και $x = 2$.

Στη συνέχεια, ελέγχουμε την ύπαρξη πλάγιας ασύμπτωτης, όταν $x \to +\infty$ και όταν $x \to -\infty$, χρησιμοποιώντας το όριο ρητής συνάρτησης.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda,$$

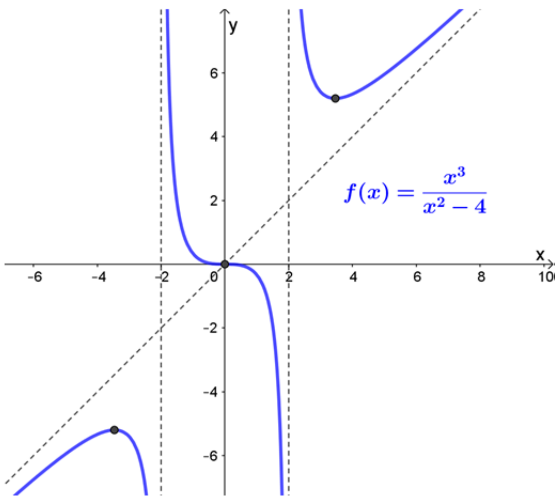
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0 = \beta$$

Ομοίως:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = \lambda, \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 0 = \beta$$

Επομένως, η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν $x \to +\infty$ και όταν $x \to -\infty$.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται πιο κάτω.



Παράδειγμα 5

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 1}$$

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{0\}$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν έχει σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων.

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της f. Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2} < 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f'.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα έχουμε:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.
- Η f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της f. Έχουμε:

$$f''(x) = \frac{3e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^3} \neq 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f''.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα έχουμε:

- Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0)$, ενώ η f είναι κυρτή στο διάστημα $(0, +\infty)$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$. Επομένως, για την εύρεση των ασύμπτωτων της γραφικής παράστασης, εξετάζουμε τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της. Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού. Δηλαδή, θα υπολογίσουμε τα όρια της συνάρτησης όταν $x \to \pm\infty$ και όταν $x \to 0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}(2e^x+1) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(e^x-1) = +\infty$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Εξετάζουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De l' Hospital. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2e^x+1)'}{(e^x-1\,)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x}{e^x} = 2$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x+1}{e^x-1} = 2$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=2$, όταν $x \to +\infty$.

Θα ελέγξουμε αν υπάρχει ασύμπτωτη όταν $x \to -\infty$.

Ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x+1}{e^x-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=-1$, όταν $x \to -\infty$.

Για $x<0$, ισχύει:

$$x<0 \Longrightarrow e^x<1 \Longrightarrow e^x-1<0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to0^-}(2e^x+1)=3,\ \lim_{x\to0^-}(e^x-1)=0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to0^-}f(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{2e^x+1}{e^x-1} = -\infty$$

Για $x>0$, ισχύει:

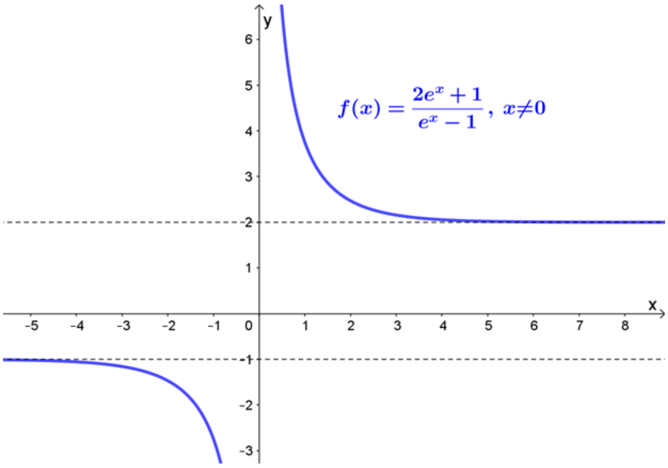
$$x>0 \Longrightarrow e^x>1 \Longrightarrow e^x-1>0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to0^+}(2e^x+1)=3,\ \lim_{x\to0^+}(e^x-1)=0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to0^+}f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{2e^x+1}{e^x-1} = +\infty$$

Έτσι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται πιο κάτω.



Δραστηριότητες

1. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης, να παραστήσετε γραφικά καθεμία από τις πιο κάτω συναρτήσεις.

(α) $f(x) = x^3 - 12x$

(β) $f(x) = (x-2)^2(x+1)$

(γ) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

(δ) $f(x) = \dfrac{4x}{(x+1)^2}$

(ε) $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+4)}{x+1}$

(στ) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}$

(ζ) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

(η) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

(θ) $f(x) = xe^x$

(ι) $f(x) = e^{-x^2}$

(ια) $f(x) = (x-1)e^{2x}$

(ιβ) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(ιγ) $f(x) = x^2 \ln x$

(ιδ) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

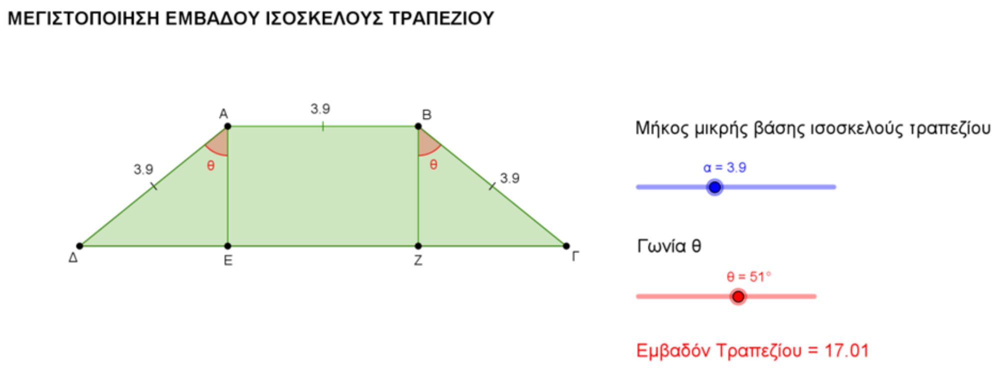
$$f(x) = \frac{x+\kappa}{\sqrt{x}},\ \ \kappa \in \mathbb{R}$$

Αν $f'(1) = -1$, να βρείτε την τιμή του κ. Στη συνέχεια, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

1.10 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΓΙΣΤΩΝ – ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο *«CLyk_En01_Provlimata 01.ggb»*.



Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$, στο οποίο το μήκος των μη παράλληλων πλευρών του είναι ίσο με το μήκος της μικρής βάσης.

- Με τη βοήθεια του δρομέα θ, να δώσετε διαφορετικές τιμές στο μέτρο της γωνίας θ. Για κάθε διαφορετική τιμή της γωνίας θ, να καταγράψετε το αντίστοιχο εμβαδόν του ισοσκελούς τραπεζίου στον πιο κάτω πίνακα και να απαντήσετε στις ερωτήσεις που ακολουθούν.

Γωνία θ	Εμβαδόν Τραπεζίου

(α) Για ποια τιμή της γωνίας θ μεγιστοποιείται το εμβαδόν του τραπεζίου;

(β) Ποιο είναι το μέγιστο εμβαδόν του τραπεζίου;

- Να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία μεταβάλλοντας το μήκος της μικρής βάσης του τραπεζίου. Τι παρατηρείτε;

Ο Μύθος της Διδούς

Η Διδώ ήταν η βασίλισσα της Καρχηδόνας κατά τον $9^{ο}$ περίπου π.Χ. αιώνα. Ήταν πριγκίπισσα με καταγωγή την Τύρο της Φοινίκης. Σύμφωνα με το μύθο, η Διδώ, προσπαθώντας να ξεφύγει από την καταδίωξη του αδελφού της και βασιλιά της Τύρου, αναχώρησε δυτικά παραπλέοντας τις ακτές της Μεσογείου, αναζητώντας άσυλο. Μία τοποθεσία στον κόλπο της Τύνιδας τράβηξε την προσοχή της. Η Διδώ ήρθε σε διαπραγμάτευση με τον τοπικό ηγεμόνα Ιάρβα για να αγοράσει γη, περιορίζοντας στο ελάχιστο τις απαιτήσεις της. Δεν ζητούσε παρά μόνο όση έκταση μπορούσε να περιφράξει με το δέρμα ενός ταύρου. Η Διδώ κατάφερε να πείσει τον Ιάρβα και η συμφωνία έκλεισε. Τότε η Διδώ τεμάχισε την προβιά ενός ταύρου σε λεπτές λωρίδες και τις έδεσε τη μία με την άλλη φτιάχνοντας ένα πολύ μακρύ σκοινί, με το οποίο κύκλωσε μια μεγάλη έκταση γης. Εκεί έκτισε ένα φρούριο, το οποίο ονόμασε Βύρσα (=δέρμα), και κοντά σε αυτό, την πόλη της Καρχηδόνας.

Από αυτό το μύθο της Διδούς, που διασώζει ο εθνικός ποιητής των Ρωμαίων Βιργίλιος – Publius Vergilius Maro (70 π.Χ. – 19π.Χ.) στο έργο του Αινειάδα, ανακύπτει το αρχαιότερο (σύμφωνα με ειδικούς) ίσως πρόβλημα μεγιστοποίησης, γνωστό έκτοτε ως το **Πρόβλημα της Διδούς** ή το **Ισοπεριμετρικό Πρόβλημα.** Πώς έπρεπε να τοποθετήσει πάνω στη γη η Διδώ το δερμάτινο σκοινί που έφτιαξε, ώστε να περικλείει στο εσωτερικό του τη μεγαλύτερη δυνατή έκταση. Η απάντηση είναι ότι η Διδώ έπρεπε να τοποθετήσει το δερμάτινο σκοινί με τέτοιο τρόπο ώστε να έχει **σχήμα κύκλου**.

Dido Purchases Land for the Foundation of Carthage. Engraving by Matthäus Merian the Elder, in *Historische Chronica*, Frankfurt a.M., 1630. Dido's people cut the hide of an ox into thin strips and try to enclose a maximal domain.

Σε αυτή την παράγραφο, θα δούμε πως μπορούμε να εφαρμόσουμε τις μεθόδους που έχουμε μάθει για εύρεση τοπικών και ολικών ακροτάτων, έτσι ώστε να επιλύσουμε προβλήματα βελτιστοποίησης. Τα προβλήματα αυτά δεν αφορούν μόνο στα Μαθηματικά, αλλά και σε ένα ευρύτερο φάσμα εφαρμογών των Μαθηματικών, όπως τις Φυσικές Επιστήμες και τα Οικονομικά.

Παράδειγμα 1

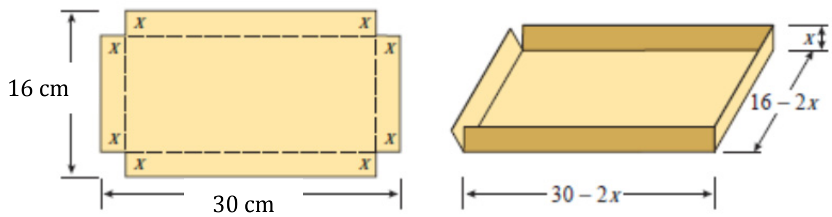
Πρόκειται να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κασόνι σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου από ένα ορθογώνιο χαρτόνι μήκους 30 cm και πλάτους 16 cm. Από κάθε γωνία του ορθογωνίου αποκόπτουμε ίσα τετράγωνα και λυγίζουμε προς τα πάνω τα πλαϊνά κομμάτια. Να βρείτε πόσο πρέπει να είναι το μήκος της πλευράς των τετραγώνων που θα αποκοπούν, έτσι ώστε το κασόνι να έχει μέγιστο όγκο.

Λύση

Διαβάζοντας το πρόβλημα, παίρνουμε τις εξής πληροφορίες:

- Μήκος χαρτονιού: 30 cm
- Πλάτος χαρτονιού: 16 cm
- Ποσότητα που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε: Όγκος παραλληλεπιπέδου
- Ζητούμενο: Μήκος της πλευράς των ίσων τετραγώνων που πρέπει να αποκοπούν από τις γωνιές του χαρτονιού.

Φτιάχνουμε σχήμα με τα δεδομένα του προβλήματός μας.



Εισάγουμε τις μεταβλητές μας:

- x: πλευρά των τεσσάρων ίσων τετραγώνων που θα αποκοπούν από κάθε γωνία του χαρτονιού.
- α: μήκος βάσης κασονιού
- β: πλάτος βάσης κασονιού
- γ: ύψος κασονιού

Με τη βοήθεια αλγεβρικών πράξεων **βρίσκουμε τον τύπο που εκφράζει την ποσότητα που θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε**. Ο τύπος πρέπει να είναι γραμμένος συναρτήσει της άγνωστης μεταβλητής.

Γνωρίζουμε ότι ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου δίνεται από τον τύπο
$$V = \alpha\beta\gamma, \tag{1}$$
όπου α, β, γ το μήκος, το πλάτος και το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, αντίστοιχα.
Έχουμε ότι:
$$\alpha = 30 - 2x \tag{2}$$
$$\beta = 16 - 2x \tag{3}$$
$$\gamma = x \tag{4}$$

Αντικαθιστώντας τις (2), (3) και (4) στην (1), καταλήγουμε στον τύπο:
$$V = (16 - 2x)(30 - 2x)x \Longrightarrow V(x) = 4x^3 - 92x^2 + 480x$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το **πρώτο κριτήριο εύρεσης ακροτάτων** για να βρούμε και να χαρακτηρίσουμε τα ακρότατα της συνάρτησης $V = V(x)$.

- Βρίσκουμε πρώτα το διάστημα, στο οποίο ορίζεται η μεταβλητή x. Από τη στιγμή που η μεταβλητή μας αντιπροσωπεύει μήκος, τότε παίρνει πάντοτε θετικές τιμές. Επομένως:
$$x > 0 \tag{5}$$

  Η μικρότερη διάσταση του χαρτονιού είναι $16\,\mathrm{cm}$. Έτσι, η μικρότερη πλευρά της βάσης του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου θα είναι ίση με $16 - 2x$. Αυτό σημαίνει ότι το μήκος x της πλευράς των τετραγώνων, δεν μπορεί να ξεπεράσει τα $8\,\mathrm{cm}$. Επομένως:
$$x < 8 \tag{6}$$

  Από τις (5) και (6), συμπεραίνουμε ότι $0 < x < 8$.

- Η πρώτη παράγωγος της V δίνεται από τον τύπο:
$$\begin{aligned}\frac{dV}{dx} &= 12x^2 - 184x + 480 = 4(3x^2 - 46x + 120)\\ &= 4(x - 12)(3x - 10),\ \ x \in (0\,,8)\end{aligned}$$

  Θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με μηδέν, έχουμε:
$$\frac{dV}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 12,\ \ x = \frac{10}{3}$$

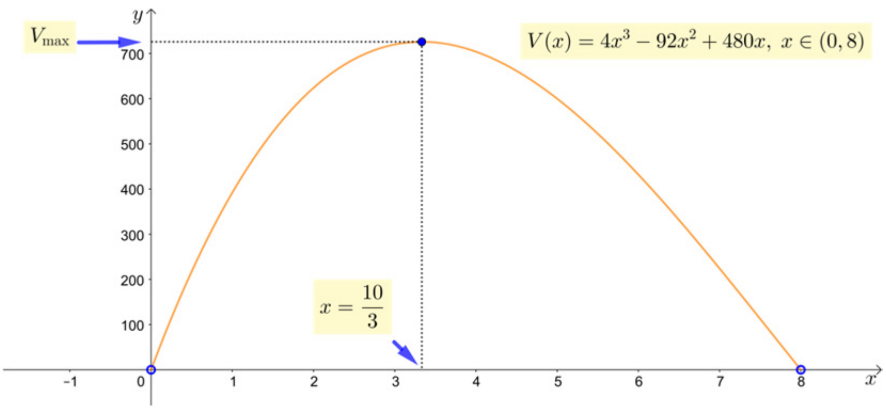
  Αφού $x \in (0\,,8)$, τότε απορρίπτουμε την τιμή $x = 12$. Επομένως, ο όγκος του παραλληλεπιπέδου πιθανόν να μεγιστοποιείται μόνον για $x = \frac{10}{3}$.

Κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας για τη συνάρτηση V.

x	0		$10/3$		8
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Συνεπώς, ο όγκος του παραλληλεπιπέδου μεγιστοποιείται όταν τα τετράγωνα που θα αφαιρέσουμε έχουν πλευρά ίση με $\frac{10}{3}$ cm.

Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται και από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $V = V(x)$.



Παράδειγμα 2

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κυλινδρικό δοχείο χωρητικότητας ενός λίτρου. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του, έτσι ώστε το δοχείο να έχει την ελάχιστη δυνατή επιφάνεια; Το πάχος του υλικού που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αμελητέο.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι ο όγκος και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κυλίνδρου δίνονται, αντίστοιχα, από τους τύπους:

$$V = \pi R^2 \upsilon \qquad (1)$$

$$E = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2 \qquad (2)$$

όπου R και υ η ακτίνα της βάσης και το ύψος του κυλίνδρου, αντίστοιχα.

Ερμηνεύουμε τη φράση «ελάχιστο δυνατό κατασκευαστικό υλικό» ως ελαχιστοποίηση της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου, αγνοώντας το πάχος του υλικού που θα χρησιμοποιηθεί. Στόχος μας είναι να βρούμε ένα τύπο για την ολική επιφάνεια E του κυλίνδρου, ο οποίος όμως να περιέχει μόνο μία μεταβλητή.

Αρχίζουμε από το δεδομένο ότι ο κύλινδρος που θέλουμε να κατασκευάσουμε πρέπει να έχει χωρητικότητα ένα λίτρο. Γνωρίζοντας ότι $1\ \mathrm{L} = 1000\ \mathrm{cm}^3$, έχουμε:

$$1000 = \pi R^2 \upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{1000}{\pi R^2} \tag{3}$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση (3) στη σχέση (2) και παίρνουμε:

$$E = 2\pi R \frac{1000}{\pi R^2} + 2\pi R^2 \Rightarrow E(R) = \frac{2000}{R} + 2\pi R^2 \tag{4}$$

Κατά συνέπεια, το ελάχιστο υλικό αντιστοιχεί στο ελάχιστο της συνάρτησης $E = E(R)$. Άρα, στόχος μας είναι να βρούμε εκείνη την τιμή $R > 0$, η οποία ελαχιστοποιεί την τιμή της συνάρτησης E.
Θα προχωρήσουμε χρησιμοποιώντας το **δεύτερο κριτήριο εύρεσης ακροτάτων.**

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, ισχύει ότι $R > 0$, αφού το R συμβολίζει την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου. Από τη στιγμή που δεν έχουμε άλλο περιορισμό που να αφορά την ακτίνα R, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $R \in (0, +\infty)$. Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη, για κάθε $R \in (0, +\infty)$. Επειδή όμως το διάστημα $(0, +\infty)$ είναι ένα ανοικτό διάστημα, η συνάρτηση E παίρνει την ελάχιστή της τιμή (αν υπάρχει) μόνο σε τιμές που μηδενίζει την πρώτη παράγωγό της.
Η πρώτη παράγωγος της E δίνεται από τον τύπο:

$$E'(R) = 4\pi R - \frac{2000}{R^2}, \ \ R > 0$$

Είναι:

$$E'(R) = 0 \Leftrightarrow 4\pi R - \frac{2000}{R^2} = 0 \Rightarrow 4\pi R^3 = 2000 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

Η δεύτερη παράγωγος της E δίνεται από τον τύπο:

$$E''(R) = 4\pi + \frac{4000}{R^3}, \ \ R > 0$$

Ισχύει $E''(R) > 0$, για κάθε $R \in (0, +\infty)$.
Άρα:

$$E''\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) > 0$$

Πρέπει τώρα να βρούμε την αντίστοιχη τιμή του ύψους του κυλίνδρου. Από την (3), έχουμε $\upsilon = 2R$.

Κατά συνέπεια, το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου ελαχιστοποιείται, όταν $R = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\ \mathrm{cm}$ και $\upsilon = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\ \mathrm{cm}$.

Παράδειγμα 3

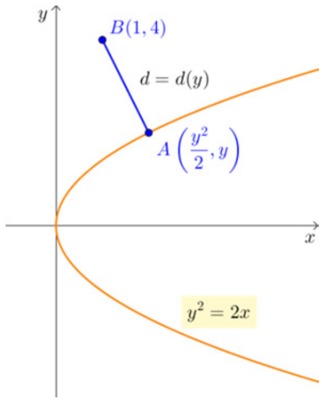
Να βρείτε το σημείο της καμπύλης $y^2 = 2x$, το οποίο βρίσκεται πλησιέστερα στο σημείο $B(1,4)$.

Λύση

Θεωρούμε το τυχαίο σημείο $A(x,y)$ της παραβολής $y^2 = 2x$, το οποίο γράφουμε $A\left(\frac{y^2}{2}, y\right)$ για ευκολία πράξεων.

Η απόσταση του σημείου $A\left(\frac{y^2}{2}, y\right)$ από το σημείο $B(1,4)$ δίνεται από τον τύπο:

$$d = d(y) = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2} \qquad (1)$$



Από τη στιγμή που δεν έχουμε περιορισμούς που να αφορούν το y, αρκεί να βρούμε τιμή y που να ανήκει στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, η οποία να ελαχιστοποιεί την d.

Για ευκολία πράξεων, παρατηρούμε ότι τόσο η απόσταση d, όσο και το τετράγωνο της απόστασης d^2 ελαχιστοποιούνται για την ίδια τιμή y. Έτσι, θέτουμε:

$$S(y) = d^2(y) = \left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2 \qquad (2)$$

Η πρώτη παράγωγος της S δίνεται από τον τύπο:

$$S'(y) = 2\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)y + 2(y-4) = y^3 - 8, \ \ y \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

Έχουμε:

$$S'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \qquad (4)$$

Η δεύτερη παράγωγος της S δίνεται από τον τύπο:

$$S''(y) = 3y^2 \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή $y = 2$ στην (5), έχουμε:

$$S''(2) = 12 > 0$$

Έτσι, η γραφική παράσταση της S έχει τοπικό ελάχιστο στο $y = 2$, το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο, αφού η $y = 2$ είναι η μόνη κρίσιμη τιμή της $S = S(y)$.

Κατά συνέπεια, το σημείο $A(x,y)$ της παραβολής $y^2 = 2x$ που βρίσκεται πιο κοντά στο σημείο $B(1,4)$, είναι το:

$$A(x,y) = A\left(\frac{y^2}{2}, y\right) = A(2,2)$$

Δραστηριότητες

1. Να αποδείξετε ότι:
   (α) από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν
   (β) από όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδόν, το τετράγωνο έχει την ελάχιστη περίμετρο

2. Να βρείτε τον θετικό αριθμό, του οποίου το άθροισμα με τον αντίστροφό του να είναι ελάχιστο.

3. Να βρείτε τον θετικό αριθμό, του οποίου το άθροισμα του αντίστροφού του με το τετραπλάσιο του τετραγώνου του να είναι ελάχιστο.

4. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο ακτίνας 2.
   (α) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.
   (β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν αυτό.

5. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου P της παραβολής $y = 1 - x^2,\ 0 < x \leq 1$, έτσι ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο P και τους άξονες Ox, Oy να έχει το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν.

6. Ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα ίση με $\sqrt{3}\,\mathrm{m}$ περιστρέφεται γύρω από μία από τις κάθετες πλευρές του και παράγει κώνο. Να υπολογίσετε την ακτίνα και το ύψος ώστε ο όγκος του κώνου που δημιουργείται να είναι ο μέγιστος δυνατός. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τον μέγιστο όγκο του κώνου.

7. Πρόκειται να κατασκευάσουμε ένα κλειστό δοχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τετραγωνική βάση, το οποίο θα έχει όγκο ίσο με $2250\ \mathrm{cm}^3$. Το υλικό που θα χρησιμοποιηθεί για τις βάσεις του στοιχίζει $€2/\mathrm{cm}^2$ και το υλικό που θα χρησιμοποιηθεί για την παράπλευρη επιφάνεια στοιχίζει $€3/\mathrm{cm}^2$. Να βρείτε τις διαστάσεις του δοχείου, έτσι ώστε να έχουμε το ελάχιστο δυνατό κόστος.

8. Το κόστος ημερήσιας παραγωγής x τόνων τσιμέντου σε δολάρια είναι:
$$K(x) = 50 + 70x + \frac{1}{20}x^2$$
   Μία ημερήσια παραγωγή x τόνων, μπορεί να πουληθεί στην τιμή των $270 - \frac{3x}{20}$ ανά τόνο.
   (α) Να βρείτε τη συνάρτηση του κέρδους $P = P(x)$ σε δολάρια.
   (β) Να υπολογίσετε την ημερήσια παραγωγή, ώστε το κέρδος P να είναι το μέγιστο δυνατό.

9. Μία αεροπορική εταιρεία εκτιμά ότι αν το εισιτήριο προς μία πόλη είναι €300, τότε θα μεταφέρει 5000 επιβάτες το χρόνο. Αν για κάθε αύξηση €100, πέραν από τα €300, χάνει 1000 πελάτες τον χρόνο, τότε:
   (α) Να εκφράσετε τα έσοδα της εταιρείας ως συνάρτηση της διαφοράς x του εισιτηρίου από τα €300.
   (β) Να υπολογίσετε ποια πρέπει να είναι η τιμή του εισιτηρίου, έτσι ώστε η εταιρεία να επιτύχει μεγιστοποίηση των εσόδων της.
   (γ) Να υπολογίσετε το μέγιστο κέρδος της εταιρείας.

10. Η χωρητικότητα (σε λίτρα) των πνευμόνων ενός ανθρώπου ηλικίας x ετών δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{5}x + 4, \quad 10 \leq x \leq 35$$

Σε ποια ηλικία οι πνεύμονες του ανθρώπου έχουν τη μέγιστη χωρητικότητα;

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-\beta^{x^2}}{\eta\mu x^2}=\ln\left(\frac{a}{\beta}\right),\quad a>0,\ \ \beta>0$$

2. Να αποδείξετε ότι για τις πιο κάτω συναρτήσεις ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που ορίζονται και να βρείτε όλες τις τιμές του ξ, ώστε να ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος:
   (α) $f(x)=x^2-2x+10,\ x\in[0,2]$
   (β) $f(x)=x+\frac{4}{x}$, $x\in[1,4]$

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $4x^3-21x^2+18x+\lambda=0,\ x\in\mathbb{R}$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[3,7]$ και παραγωγίσιμη στο $(3,7)$. Αν ισχύει $f(3)=14$ και $f(7)=6$, να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi,f(\xi))$ της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $2x-4y+5=0$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=2x+\frac{4}{\sqrt{x}}+1,\ \ x\in[1,4]$$

   Να εξετάσετε κατά πόσο ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής και να υπολογίσετε την τιμή του $\xi\in(1,4)$, το οποίο να ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος.

6. Να δείξετε ότι οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι γνήσια μονότονες και να αναφέρετε το είδος της μονοτονίας τους σε κάθε περίπτωση:
   (α) $f(x)=2x^3+3x-1,\ x\in\mathbb{R}$
   (β) $g(x)=x^2-4x+1,\ \ x\geq 2$

7. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και ισχύει $f(-2)=-3$ και $f(-3)=-2$.
   (α) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2)$ και $f(3)$.
   (β) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(f(2))$ και $f(f(3))$.
   (γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2+4x)<-2$.

8. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης g με τύπο:

$$g(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$$

Στη συνέχεια, να συγκρίνετε τους αριθμούς e^{π} και π^{e}, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

9. Να υπολογίσετε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$, ώστε η πολυωνυμική συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x^4 + kx^3 + 6x^2 + 1, \ \ x \in \mathbb{R}$$

να είναι κυρτή σε όλο το πεδίο ορισμού της.

10. Να εξηγήσετε γιατί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x + 1 + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y = x + 1$ όταν $x \to +\infty$, ενώ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη όταν $x \to -\infty$.

11. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες, να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

(α) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ (β) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 + 4}$ (γ) $f(x) = x - 1 + \frac{9}{x}$

12. Να υπολογίσετε τις διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλογράμμου εγγεγραμμένου σε ημικύκλιο ακτίνας R, ώστε αυτό να έχει μέγιστο εμβαδόν.

13. Σε κώνο με ακτίνα 6 cm και ύψος 15 cm εγγράφεται κύλινδρος. Να υπολογίσετε το ύψος και την ακτίνα του κυλίνδρου, ώστε:
(α) ο όγκος του κυλίνδρου να είναι μέγιστος
(β) το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου να είναι μέγιστο

14. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 9 - x^2, \ -3 < x < 3$. Να υπολογίσετε τις διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει τις δύο κορυφές του στον άξονα των τετμημένων και τις άλλες δύο πάνω στην γραφική παράσταση της f, ώστε να έχει μέγιστο εμβαδόν.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Αν η συνάρτηση $f: \Delta \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ και ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$, τότε να αποδείξετε ότι $x_1 < x_2$.

2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως αύξουσα συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, για την οποία να ισχύει $e^{f(x)} + 2x = x^2, \ \ \forall x \in (-\infty, 0)$.

3. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x - 1}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Να δείξετε ότι $g(x) < 0$, για κάθε $x \neq 0$.

4. Έστω ότι η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ, αν γνωρίζουμε ότι ισχύει:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\kappa f(x) + 4x}{x f(x) - 2x^2 + 3x} = 1$$

5. Έστω $f, g: [0,1] \to \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $f(0) = g(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0$.

6. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [-a, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-a, a)$, για την οποία ισχύει:
$$\frac{f(a) + f(-a)}{2} = f(0)$$
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-a, a)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

7. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση δεν έχει σημεία καμπής. Αν η f' είναι κυρτή, να δείξετε ότι είναι $1 - 1$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f'''(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, και $f''(0) = 0$. Να δείξετε ότι το σημείο $(0, f(0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

9. Δίνεται η κοίλη συνάρτηση $f: [a, \beta] \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι ισχύει:
$$f(x) + f(a + \beta - x) \leq 2f\left(\frac{a + \beta}{2}\right)$$

10. Να εξετάσετε κατά πόσο η συνάρτηση $f(x) = x + \text{συν}x$, $x \in \mathbb{R}$ έχει πλάγια ασύμπτωτη όταν $x \to +\infty$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

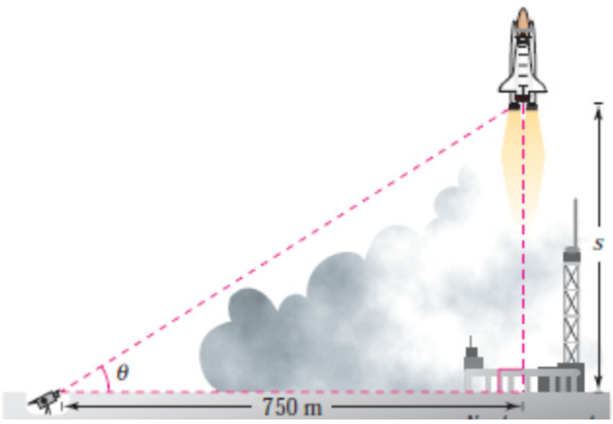
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

2.1 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Διερεύνηση 1

Μία τηλεοπτική κάμερα τοποθετημένη στο έδαφος βιντεογραφεί την εκτόξευση ενός διαστημικού λεωφορείου. Η κάμερα είναι τοποθετημένη σε σημείο το οποίο απέχει 750 μέτρα από την εξέδρα εκτόξευσης. Συμβολίζουμε με θ τη γωνία ανύψωσης και με s την απόσταση του διαστημικού λεωφορείου από τη γη.



Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας θ, όταν το διαστημικό λεωφορείο απέχει από τη γή:

(α) $300\ \text{m}$

(β) $1200\ \text{m}$

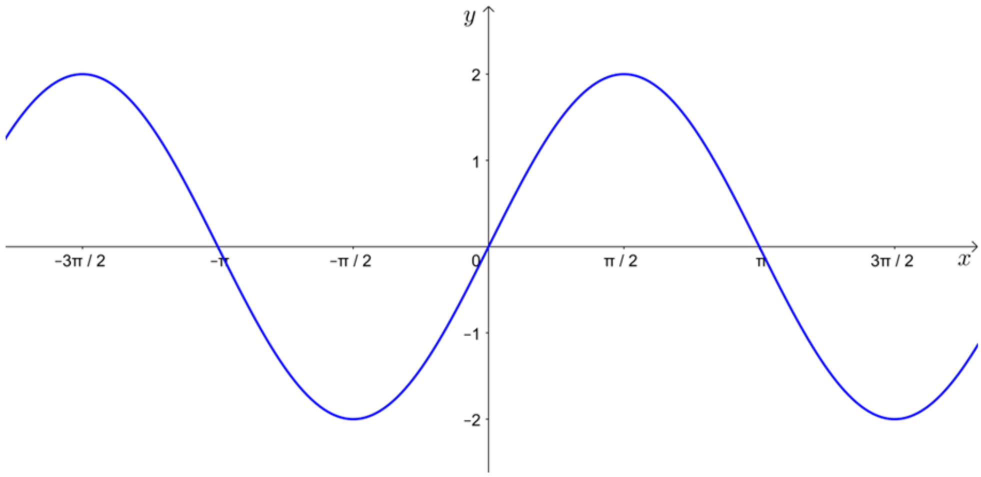
(γ) $7\ \text{km}$

Να συμπληρώσετε τις απαντήσεις σας στον πίνακα που ακολουθεί:

s	θ

Διερεύνηση 2

Δίνεται η γραφική παράσταση μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to [-2, 2]$, όπως φαίνεται πιο κάτω.



(α) Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν είναι αντιστρέψιμη στο $\mathbb{R}$.

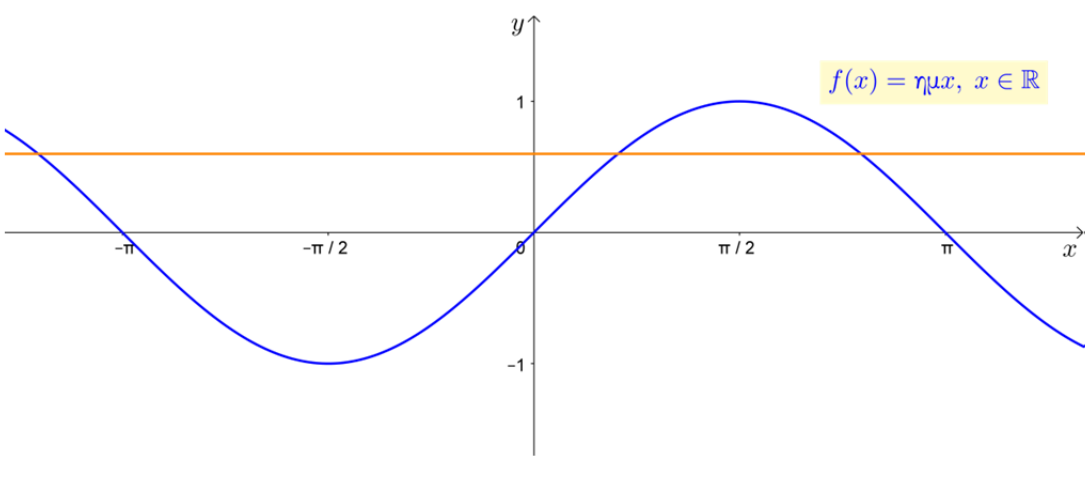
(β) Να εισηγηθείτε κατάλληλους περιορισμούς για τη συνάρτηση f, ώστε αυτή να αντιστρέφεται.

Η συνάρτηση $f(x) = ημx$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Η συνάρτηση $f(x) = ημx$ είναι μια περιοδική συνάρτηση:

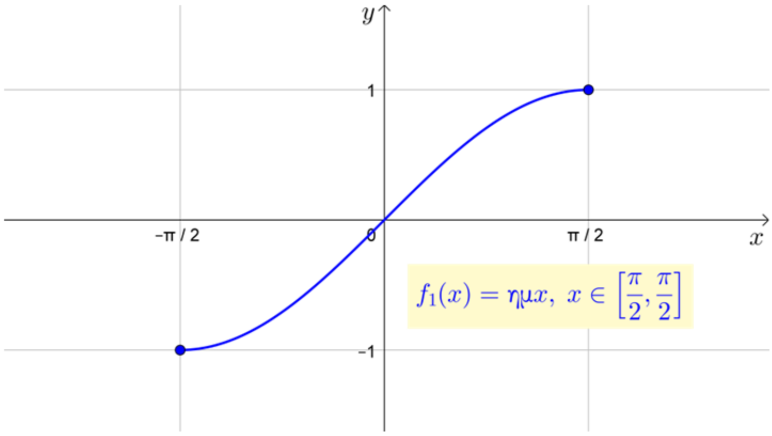
$$f(x) = f(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Άρα, η $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ δεν είναι $1 - 1$ συνάρτηση.

Το ίδιο διαπιστώνεται πολύ εύκολα με το κριτήριο της οριζόντιας ευθείας από τη γραφική της παράσταση. Αυτό σημαίνει ότι η f δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση.



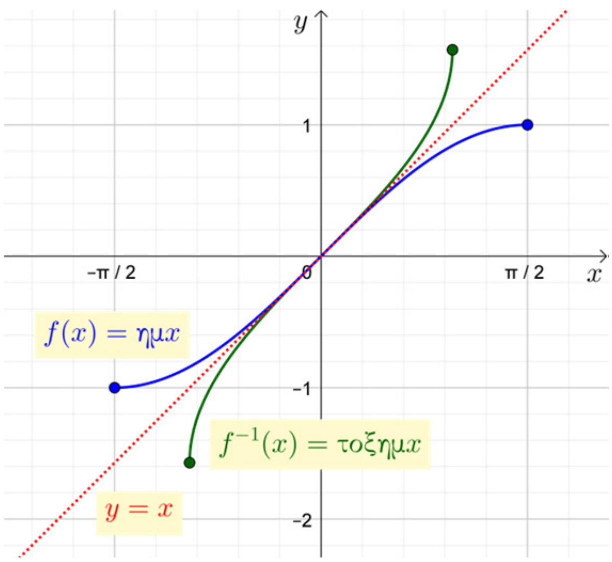
Αν, όμως, περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε το σύνολο τιμών της είναι πάλι το $[-1, 1]$ και η καινούργια συνάρτηση $f_1\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ είναι πλέον $1-1$ και επί. Επομένως, η f_1 είναι αντιστρέψιμη.



Ορισμός
Έστω η συνάρτηση $f(x) = ημx$ με πεδίο ορισμού το $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Τότε, η f έχει αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ που συμβολίζεται με τοξημx.
Η τιμή της συνάρτησης $f^{-1}(x) = τοξημx$ είναι ένα τόξο που ανήκει στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και συγκεκριμένα εκείνο το τόξο που έχει ημίτονο ίσο με $x \in [-1, 1]$.

Επομένως, αν $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y \in [-1, 1]$, τότε ισχύει $x = τοξημy$ αν και μόνο αν $y = ημx$.

Όπως γνωρίζουμε για τις αντίστροφες συναρτήσεις, οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.



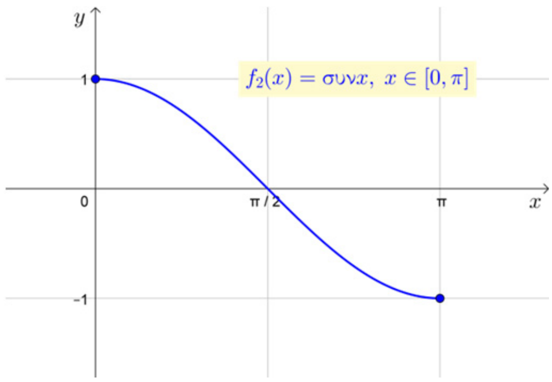
Παρατηρήσεις

- Αν, αντί για το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, διαλέγαμε ως πεδίο ορισμού της $f(x) = ημx$ το $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ή γενικότερα ένα διάστημα της μορφής $\left[κ\pi - \frac{\pi}{2}, κ\pi + \frac{\pi}{2}\right], κ \in \mathbb{Z}$, τότε η συνάρτηση θα ήταν πάλι $1-1$ και επί με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Επομένως, θα οριζόταν και πάλι η αντίστροφή της $f^{-1}(x) = τοξημx$. Η επιλογή του διαστήματος $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι συμβατική και στο διάστημα αυτό γραφική παράσταση της $f^{-1}(x) = τοξημx$ ονομάζεται **κύριος ή πρωτεύων κλάδος**.
- Η $f(x) = ημx$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Αποδεικνύεται ότι και η $f^{-1}(x) = τοξημx$ είναι επίσης συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$.

Η συνάρτηση $f(x) = συνx$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Η συνάρτηση $f(x) = συνx$ είναι μια περιοδική συνάρτηση:

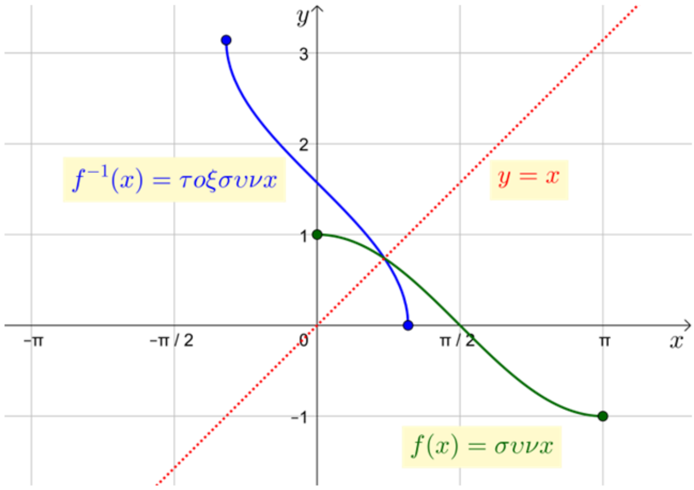
$$f(x) = f(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Άρα, η $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ δεν είναι $1-1$ συνάρτηση.
Αυτό σημαίνει ότι η f δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση.
Περιορίζοντάς όμως το πεδίο ορισμού της στο διάστημα $[0, \pi]$, το σύνολο τιμών της είναι πάλι το $[-1, 1]$ και η καινούργια συνάρτηση $f_2: [0, \pi] \to [-1, 1]$ είναι πλέον $1-1$ και επί. Επομένως, η f_2 είναι αντιστρέψιμη.



Ορισμός
Έστω η συνάρτηση $f(x) = συνx$ με πεδίο ορισμού το $[0, \pi]$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$
Τότε η f έχει αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: [-1, 1] \to [0, \pi]$ που συμβολίζεται με $τοξσυνx$.
Η τιμή της συνάρτησης $f^{-1}(x) = τοξσυνx$ είναι ένα τόξο που ανήκει στο διάστημα $[0, \pi]$ και συγκεκριμένα εκείνο το τόξο που έχει συνημίτονο ίσο με $x \in [0, 1]$.

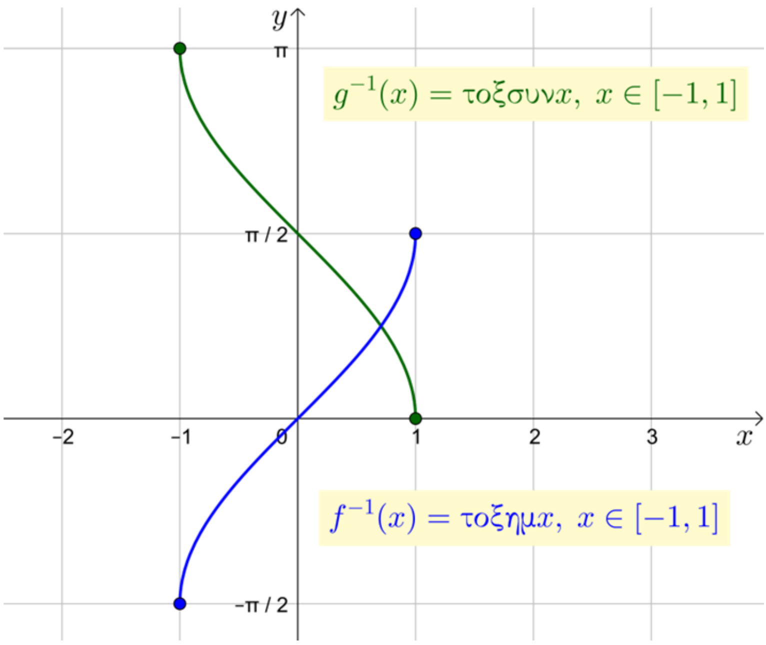
Επομένως, αν $x \in [0, \pi], y \in [-1, 1]$, τότε ισχύει $x = τοξσυνy$ αν και μόνο αν $y = συνx$.
Οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.



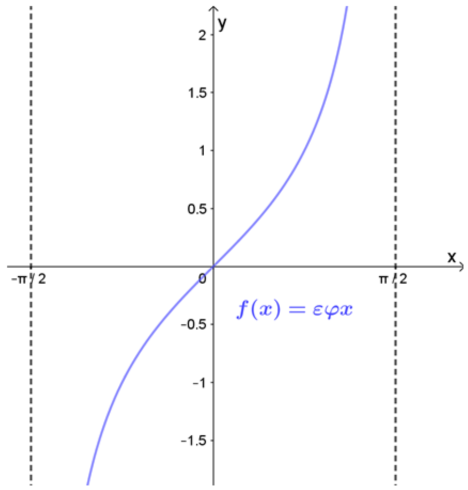
Παρατηρήσεις

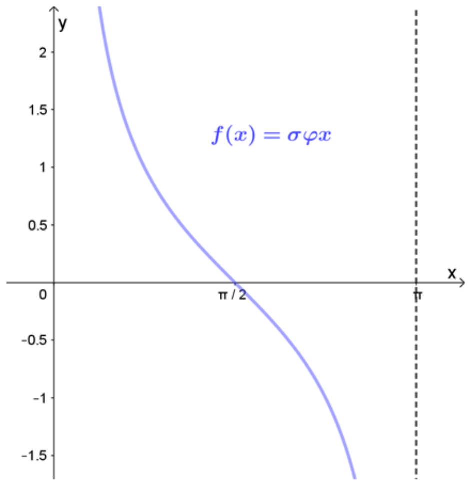
- Αν αντί για το διάστημα $[0, \pi]$ διαλέγαμε ως πεδίο ορισμού ένα διάστημα της μορφής $[\kappa\pi, \kappa\pi + \pi], \kappa \in \mathbb{Z}$, η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ θα ήταν πάλι $1 - 1$ και επί με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Επομένως, θα οριζόταν και πάλι η αντίστροφή της $f^{-1}(x) = \text{τοξσυν}x$. Η επιλογή του διαστήματος $[0, \pi]$ είναι συμβατική και ονομάζεται **κύριος ή πρωτεύων κλάδος**.
- Για την $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$. Επομένως, και η $f^{-1}(x) = \text{τοξσυν}x$ θα είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$.
- Η συνάρτηση $\text{τοξσυν}x$ μπορεί να ορισθεί συναρτήσει του $\text{τοξημ}x$ ως εξής:

$$\text{τοξσυν}x = \frac{\pi}{2} - \text{τοξημ}x, \quad x \in [-1, 1]$$



Με τον ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τις αντίστροφες συναρτήσεις της $f(x) = εφx$ και της $f(x) = σφx$.



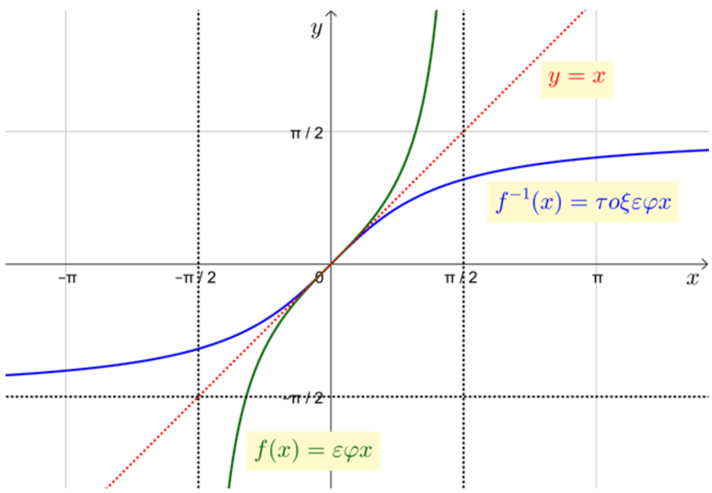


Ορισμός

Έστω η συνάρτηση $f(x) = εφx$ με πεδίο ορισμού το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Τότε, η f έχει αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: (-\infty, +\infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ που συμβολίζεται με τοξεφx.

Η τιμή της συνάρτησης $f^{-1}(x) = τοξεφx$ είναι ένα τόξο που ανήκει στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και συγκεκριμένα εκείνο το τόξο που έχει εφαπτομένη ίση με $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), y \in (-\infty, +\infty)$, τότε ισχύει $x = τοξεφy$, αν και μόνον αν $y = εφx$.



Παρατήρηση

Για την $f(x) = εφx$ γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Επομένως, η $f^{-1}(x) = τοξεφx$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

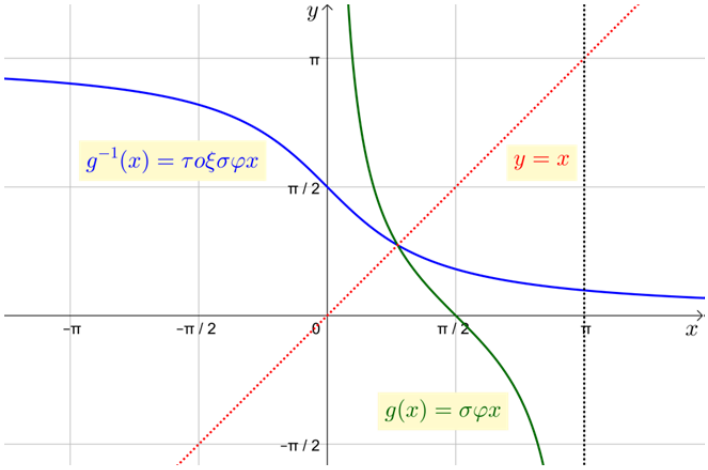
Ορισμός

Έστω η συνάρτηση $g(x) = σφx$ με πεδίο ορισμού το $(0, \pi)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Τότε, η g έχει αντίστροφη συνάρτηση $g^{-1}: (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$ που συμβολίζεται με τοξσφx.

Η g^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0, \pi)$.

Η τιμή της συνάρτησης $g(x) =$ τοξσφx είναι ένα τόξο που ανήκει στο διάστημα $(0, \pi)$, και συγκεκριμένα εκείνο το τόξο που έχει συνεφαπτομένη ίση με $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, αν $x \in (0, \pi), y \in (-\infty, +\infty)$, τότε ισχύει $x =$ τοξσφy, αν και μόνο αν $y = σφx$.



Παρατήρηση

Για την $g(x) = σφx$ γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi)$. Επομένως, η $g^{-1}(x) =$ τοξσφx είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

(α) $\text{τοξημ}\left(\frac{1}{2}\right)$ (β) $\text{τοξσυν}(0)$ (γ) $\text{τοξεφ}\left(-\sqrt{3}\right)$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\text{τοξημ}\left(\frac{1}{2}\right) = a \Leftrightarrow \text{ημ}a = \frac{1}{2}, \quad a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow a = \frac{\pi}{6}$$

(β) Έχουμε:

$$\text{τοξσυν}(0) = \beta \Leftrightarrow \text{συν}\beta = 0, \quad \beta \in [0, \pi] \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$$

(γ) Έχουμε:

$$\text{τοξεφ}\left(-\sqrt{3}\right) = \gamma \Leftrightarrow \text{εφ}\gamma = -\sqrt{3}, \quad \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \gamma = -\frac{\pi}{3}$$

Παράδειγμα 2

Να μετατρέψετε τις παρακάτω τριγωνομετρικές παραστάσεις σε αλγεβρικές παραστάσεις του x:

(α) $\eta\mu\big(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu(3x)\big),\ \ 0 \le x \le \frac{1}{3}$

(β) $\sigma\varphi\big(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu(3x)\big),\ \ 0 \le x < \frac{1}{3}$

Λύση

(α) Αν θέσουμε $\theta = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(3x)$, τότε $\sigma\upsilon\nu\theta = 3x$, όπου $0 \le 3x \le 1$ και $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\eta\mu\big(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu(3x)\big) = \eta\mu\theta$.

Έχουμε:

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Rightarrow \eta\mu^2\theta + 9x^2 = 1 \Rightarrow \eta\mu\theta = \sqrt{1-9x^2} \qquad (\eta\mu\theta \ge 0)$$

(β) Αν θέσουμε $\theta = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu(3x)$, τότε $\sigma\upsilon\nu\theta = 3x$, όπου $0 \le 3x < 1$ και $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε την $\sigma\varphi\big(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu(3x)\big) = \sigma\varphi\theta$.

Έχουμε:

$$\sigma\varphi\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}$$

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \sigma\upsilon\nu\left(\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{3}{5}\right) + \tau o\xi\eta\mu\left(\frac{5}{13}\right)\right)$$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{cases} \tau o\xi\eta\mu\left(\frac{3}{5}\right) = \theta \\ \tau o\xi\eta\mu\left(\frac{5}{13}\right) = \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta\mu\theta = \frac{3}{5}, & \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \eta\mu\varphi = \frac{5}{13}, & \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την παράσταση:

$$A = \sigma\upsilon\nu\left(\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{3}{5}\right) + \tau o\xi\eta\mu\left(\frac{5}{13}\right)\right) = \sigma\upsilon\nu(\theta+\varphi) = \sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi - \eta\mu\theta\eta\mu\varphi$$

Επομένως:

$$\begin{cases} συνθ = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \\ συνφ = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} \end{cases} \quad (συνθ, συνφ > 0)$$

Έτσι:

$$A = συν(\theta+\varphi) = συν\theta συν\varphi - ημ\theta ημ\varphi = \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} - \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{33}{65}$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

(α) $\text{τοξημ}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (β) $\text{τοξσυν}(1)$ (γ) $\text{τοξεφ}(1)$

(δ) $\text{τοξημ}\left(\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ (ε) $\text{συν}\left(\text{τοξημ}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ (στ) $\text{ημ}\left(2\text{τοξεφ}\sqrt{2}\right)$

2. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\text{ημ}\left(\text{τοξσφ}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \text{ και } \text{συν}\left(\text{τοξσφ}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}x, & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}x, & x < 0 \end{cases}$$

4. Να εκφράσετε τις παραστάσεις $\text{ημ}(\text{τοξεφ}x)$ και $\text{συν}(\text{τοξσφ}x)$ ως αλγεβρικές παραστάσεις του x.

2.2 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Θεώρημα

Οι παράγωγοι των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$(\text{τοξημ}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$(\text{τοξσυν}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$(\text{τοξεφ}x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in (-\infty,+\infty)$$

$$(\text{τοξσφ}x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in (-\infty,+\infty)$$

Απόδειξη

- Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

  $$y = f(x) = \text{τοξημ}x, \quad x \in [-1,1]$$

  Τότε:

  $$x = \text{ημ}y, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

  Έχουμε, για κάθε $x \in (-1,1)$, ότι:

  $$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\text{ημ}y) \Rightarrow 1 = \text{συν}y\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{συν}y}$$

  $$= \frac{1}{\sqrt{1-\text{ημ}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left(\text{συν}y > 0, \ \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο:

  $$y = g(x) = \text{τοξεφ}x, \quad x \in (-\infty,+\infty)$$

  Τότε:

  $$x = \text{εφ}y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

  Έχουμε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ότι:

  $$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\text{εφ}y) \Rightarrow 1 = \text{τεμ}^2 y\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{τεμ}^2 y} = \frac{1}{1+\text{εφ}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Η απόδειξη των υπολοίπων παραγώγων αφήνονται ως ασκήσεις για τους μαθητές.

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{τοξημ}x}{\text{τοξεφ}x}$ (β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{τοξεφ}(3x)}{e^x-1}$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\text{τοξημ}x=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}\text{τοξεφ}x=0$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Εξετάζουμε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De l' Hospital. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\text{τοξημ}x)'}{(\text{τοξεφ}x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{1+x^2}}=1$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{τοξημ}x}{\text{τοξεφ}x}=1$$

(β) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\text{τοξεφ}(3x)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}(e^x-1)=0$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De l' Hospital. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\big(\text{τοξεφ}(3x)\big)'}{(e^x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+9x^2}}{e^x}=3$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{τοξεφ}(3x)}{e^x-1}=3$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \text{τοξημ}(2x)$ (β) $f(x) = \text{τοξσυν}(x^2)$

(γ) $f(x) = \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{x}\right)$ (δ) $f(x) = e^{\text{τοξσφ}x}$

Λύση

(α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$A_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq 2x \leq 1\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right\} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Η παράγωγος της συνάρτησης f είναι:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$A_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x^2 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$$

Η παράγωγος της συνάρτησης f είναι:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot 2x = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}, \quad x \in (-1, 1)$$

(γ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$A_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης f είναι:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{x^2}{(x^2+1)x^2} = -\frac{1}{x^2+1}, \quad x \neq 0$$

(δ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$A_f = \mathbb{R}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης f είναι:

$$f'(x) = e^{\text{τοξσφ}x} \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{e^{\text{τοξσφ}x}}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{τοξημ}x}{e^{2x}-1}$

(β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{τοξημ}x}{\text{τοξεφ}(2x)}$

(γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}2x}{\text{τοξεφ}(2x)}$

(δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{τοξεφ}x - x + \dfrac{x^3}{3}}{x^3}$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \text{τοξημ}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

(β) $f(x) = \text{τοξσυν}\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$

(γ) $f(x) = \text{τοξεφ}(\text{εφ}^2 x)$

(δ) $f(x) = \text{τοξεφ}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

(ε) $f(x) = \text{τοξσυν}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x) = 3x - \text{τοξημ}x$.

4. Να βρείτε τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x - 2\text{τοξεφ}x$

(β) $f(x) = \text{τοξσυν}(x^2)$

(γ) $f(x) = \text{τοξημ}(e^x)$

5. Να δείξετε ότι:

$$x \le \text{τοξημ}x, \quad \forall x \in [0,1]$$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \text{ημ}\left(\text{τοξημ}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$$

2. Να δείξετε ότι:

$$\text{τοξσυν}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{τοξσυν}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

3. Να δείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{τοξσυν}(1-x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}$$

4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \frac{x}{2}\text{τοξημ}x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$

(β) $f(x) = 2x\text{τοξεφ}x - \ln(1+x^2)$

(γ) $f(x) = \text{τοξημ}(\sqrt{1-x})$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{τεμ}x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} και να σχεδιάσετε πρόχειρα τη γραφική παράστασή της.

6. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = 4\text{τοξεφ}x - 2x,\ \ x \in \mathbb{R}$$

7. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \text{τοξεφ}x - x + \frac{x^3}{3}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$x - \frac{x^3}{3} < \text{τοξεφ}x,\ \ \forall x \in (0, +\infty)$$

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να δείξετε ότι:

$$\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right)+\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}=2\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{3}\right)+\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{7}\right)$$

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\text{τοξημ}x,\ \ x\in[-1,1]$ είναι περιττή.

3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\text{τοξσυν}x,\ \ x\in[-1,1]$ δεν είναι ούτε περιττή, ούτε άρτια.

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\text{τοξεφ}x,\ \ x\in(0,+\infty)$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{1+x^2}<\text{τοξεφ}x<x,\ \ \forall x\in(0,+\infty)$$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{τοξεφ}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\text{τοξεφ}x+\frac{\pi}{4},\ \ \forall x\in(-\infty,1)$$

Να βρείτε ανάλογη σχέση για την τοξεφ $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, όταν $x>1$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$\in$	ανήκει
$\notin$	δεν ανήκει
$\forall$	για κάθε
$\exists$	υπάρχει
$\cup$	ένωση συνόλων
$\cap$	τομή συνόλων
$\subset$	γνήσιο υποσύνολο
$\subseteq$	υποσύνολο
$\emptyset$ ή $\{\ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
$\neq$	άνισο
$\equiv$	ταυτοτικά ίσο
$\cong$	κατά προσέγγιση ίσο
$\mathbb{N}$	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{N}_0$	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{Z}$	ακέραιοι αριθμοί $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\dots\}$
$\mathbb{Z}^+$	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{Z}^-$	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1,-2,-3,-4,\dots\}$
$\mathbb{Q}$	ρητοί αριθμοί $\{α/β\text{: } α,β\in Z \text{ και } β\neq0\}$
$\mathbb{Q}^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{Q}_0^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
$\mathbb{Q}^-$	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{R}$	πραγματικοί αριθμοί
$\Rightarrow$	απλή συνεπαγωγή
$\Leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
$\perp$	κάθετες
$\parallel$	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή

=		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
.		Υποδιαστολή
EXP		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
Ans		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
$x^{\square}$	ή x^y ή ^	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
SHIFT	ή 2^{nd} F	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
AC		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
DEL		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
Abs		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
(-)		Εισαγωγή Προσήμου –
a b/c	ή $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$	Κλάσμα
S⇔D	ή a b/c	Μετατροπή Κλάσματος ⇔ Δεκαδικό
CLR		Σβήσιμο μνήμης
M+		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
M-		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
M		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3 + 4$	3 + 4 =	3+4 7
2,34 – 1,1	2 · 3 4 – 1 · 1 =	2.34 – 1.1 1.24
$3 \cdot 2$	3 x 2 =	$3X2$ 6
2^5	2 x^y 5 =	2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$	5 EXP 3 =	$5E3$ ή $5X103$ 5000
$\frac{3}{4}$	a b/c 3 ↓ 4 → = ή 3 a b/c 4 =	$\frac{3}{4}$ 3⌟4
$2\frac{3}{4}$	SHIFT ▯ 2 → 3 ↓ 4 = ή 2 a b/c 3 a b/c 4 =	$2\frac{3}{4}$ 2 ⌟3 ⌟4
$\sqrt{4}$	√ 4 =	$\sqrt{4}$ 2
5^2	5 X^2 =	5^2 25
$2 \cdot (7-3)$	2 x (7 – 3) =	$2X(7-3)$ 8
$2 \cdot (7-3)$	7 – 3 = 2 x Ans =	$2XAns$ 8
$2-(-3)$	2 – ((-) 3) =	$2-(-3)$ 5
$\lvert -3 \rvert$	Abs (-) 3 =	$\lvert -3 \rvert$ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	S⇔D ή SHIFT a b/c	$\frac{1}{4}$
$9-6:2$	Υπολογισμός και αποθήκευση 9 – 6 ÷ 2 = M+	$9 - 6 : 2M+$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9-6:2) - 6:(9-6:2)$	3 X M – 6 ÷ M =	$3XM - 6 : M$ 17

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ 1°- 89°

Γωνία	ημω	συνω	εφω
1°	0,017	0,999	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,395	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,348
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
28°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
38°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000
46°	0,720	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,470	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,748
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,333
78°	0,978	0,203	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	0,999	0,018	57,290