ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Λυκείου
Κατεύθυνσης

Β΄ τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Γ΄ Λυκείου Κατεύθυνσης, Β΄ Τεύχος

Το παρόν τεύχος αφιερώνεται στην μνήμη της Επιθεωρήτριας Μαθηματικών Μέσης Εκπαίδευσης Ευτυχίας Καλλεπίτη.

Συγγραφή: Βολακάκη Μαρία, Κοντοβούρκης Μιχάλης, Κυριάκου Κυριάκος, Λοϊζιάς Σωτήρης, Ματθαίου Κυριάκος, Παπαγιάννης Κωνσταντίνος, Σαλονικίδης Ιωάννης, Σεργίδης Μάριος, Τιμοθέου Σάββας

Συντονιστές: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*
Βίδρας Αλέκος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*

Εποπτεία: Φιλίππου Ανδρέας, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Γιασουμής Νικόλας, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*
Χατζηχρίστου Χρυσούλα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*

Γλωσσική επιμέλεια: Παλάτου – Χριστόφια Μαριάννα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Α΄ έκδοση 2018
Β΄ έκδοση 2019

Εκτύπωση:

ISBN:

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε τέσσερα τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Κατεύθυνσης», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Το βιβλίο έχει έναν διττό ρόλο να εκπληρώσει, να μυηθεί ο μαθητής στη συλλογιστική την οποία εκφράζει το αξεπέραστο λογικό-επαγωγικό σύστημα των Μαθηματικών και παράλληλα να ανταποκριθεί στις σύγχρονες εκπαιδευτικές επιταγές.

Όλο το υλικό που περιλαμβάνεται στο παρόν βιβλίο, σύμφωνο με τα Νέα Αναλυτικά Προγράμματα και τους Δείκτες Επιτυχίας και Επάρκειας που τίθενται από την εκπαιδευτική μεταρρύθμιση, αποσκοπεί αφενός στη βοήθεια των μαθητών/τριών να κατανοήσουν τη μαθηματική λογική και σκέψη και αφετέρου στη συνεισφορά της μαθηματικής παιδείας του τόπου.

Το βιβλίο «Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Κατεύθυνσης» περιλαμβάνει την ύλη των Μαθηματικών που προβλέπεται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Γ΄ τάξης Λυκείου, του οποίου η εφαρμογή άρχισε από το σχολικό έτος 2017 – 2018 και είναι εμπλουτισμένο με αυστηρούς ορισμούς και αποδείξεις όπως επίσης με πολλές εφαρμογές και παραδείγματα, που ανταποκρίνονται στις δυνατότητες και στα ενδιαφέροντα των μαθητών/τριών. Επιπρόσθετα, καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια, ώστε να είναι δυνατή η ολοκλήρωση της διδασκαλίας του στον διδακτικό χρόνο, ο οποίος προβλέπεται από το εγκεκριμένο ωρολόγιο πρόγραμμα.

Το κλειδί της επιτυχίας στο μάθημα των Μαθηματικών είναι η ουσιαστική κατανόηση των εννοιών, η ανάπτυξη αναλυτικής και συνθετικής σκέψης, η μεθοδολογική αντιμετώπιση ομαδοποιημένων προβλημάτων και η αποφυγή της αποστήθισης. Η ορθή χρήση του βιβλίου δημιουργεί στον μαθητή, εκτός από το φιλικό περιβάλλον, όλες εκείνες τις προϋποθέσεις, κυριότερες των οποίων είναι ο προβληματισμός και η αυτενέργεια, για ανάπτυξη μιας κριτικής, διερευνητικής και ορθολογιστικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τους Καθηγητές του Πανεπιστημίου Κύπρου Κωνσταντίνο Χρίστου και Αλέκο Βίδρα.

Δρ Κυπριανός Δ. Λούης
Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι η συνάρτηση που δίνει τον ρυθμό μεταβολής της αρχικής, ενώ το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης είναι μια οικογένεια συναρτήσεων που έχουν ως παράγωγο τη δοσμένη συνάρτηση. Το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης, που συνδέεται άμεσα με το αόριστο της ολοκλήρωμα, όπως θα δούμε στη συνέχεια είναι το εργαλείο που χρησιμοποιείται, μεταξύ άλλων, στον ακριβή υπολογισμό μήκους τόξου, εμβαδού επίπεδων σχημάτων και όγκου στερεών.

Οι εφαρμογές των ολοκληρωμάτων βρίσκονται σε όλες τις επιστήμες, όπως στη Φυσική, τη Μηχανική, τα Οικονομικά, την Ιατρική και άλλες. Δίνουν τη δυνατότητα, για παράδειγμα:

- να προβλεφθεί η μελλοντική θέση κινούμενων σωμάτων
- να υπολογιστεί η ένταση ενός ηλεκτρικού πεδίου
- να υπολογιστεί η ταχύτητα διαφυγής ενός αντικειμένου από το πεδίο βαρύτητας της Γης
- να σχεδιαστούν πολύπλοκα ιατρικά μηχανήματα για τη ρύθμιση της αρτηριακής πίεσης

Ιστορικό Σημείωμα

Η εφεύρεση των ολοκληρωμάτων έχει τις ρίζες της στην ανάγκη υπολογισμού του εμβαδού και όγκου διαφόρων σχημάτων. Η πρώτη συστηματική προσπάθεια προς αυτή την κατεύθυνση έγινε τον 4^{ου} αιώνα π.Χ. από τον Εύδοξο, ο οποίος επινόησε την *μέθοδο της εξάντλησης*, με την οποία χώριζε κάποιο γεωμετρικό σχήμα σε άπειρα μικρότερα με γνωστό εμβαδόν ή όγκο. Ένα αιώνα αργότερα, ο Αρχιμήδης ανέπτυξε περαιτέρω την πιο πάνω μέθοδο και την εφάρμοσε για να προσεγγίσει το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και περιοχών που περικλείονται από παραβολές. Παρόμοια μέθοδος ανακαλύφθηκε ανεξάρτητα από Κινέζους μαθηματικούς τον 3^{ο} αιώνα μ.Χ.

Τα επόμενα σημαντικά βήματα έγιναν τον 17^{ο} αιώνα μ.Χ. από τους Καβαλιέρι, Φερμάτ, Μπάροου, Τοριτσέλι και άλλους, μέχρι που στα τέλη 17^{ου} αιώνα ο Ισαάκ Νεύτωνας (Isaac Newton) και ο Γκότφριντ Βίλχελμ Λάϊμπνιτς (Gottfried Wilhelm Leibniz) διατύπωσαν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, το *Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού*, το οποίο συνδέει τα ολοκληρώματα με τις παραγώγους. Το έργο των πιο πάνω, όπως και άλλων της εποχής τους, έθεσε τα θεμέλια της σύγχρονης ανάλυσης, ωστόσο ο πρώτος που έδωσε ένα αυστηρό μαθηματικό ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος με τη χρήση ορίων, ήταν ο Μπέρνχαρντ Ρίμαν (Bernhard Riemann) στις αρχές του 19^{ου} αιώνα.

3.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΑΠΛΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Έστω ρητή αλγεβρική παράσταση της μορφής

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \ \ Q(x) \neq 0,$$

όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα, και

(α) ο βαθμός του αριθμητή $P(x)$ είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή $Q(x)$

(β) ο παρονομαστής εκφράζεται σαν γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Η παράσταση αυτή μπορεί να εκφραστεί σαν άθροισμα απλών κλασμάτων, σύμφωνα με τα πιο κάτω:

1. Για κάθε παράγοντα του $Q(x)$ της μορφής $(x-a)^k$, το άθροισμα των απλών κλασμάτων θα περιλαμβάνει κλάσματα της μορφής:
$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

2. Για κάθε παράγοντα του $Q(x)$ της μορφής $(x^2+\beta x+\gamma)^k$, όπου το πολυώνυμο $x^2+\beta x+\gamma$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, το άθροισμα των απλών κλασμάτων θα περιλαμβάνει κλάσματα της μορφής:
$$\frac{B_1 x + \Gamma_1}{x^2+\beta x+\gamma} + \frac{B_2 x + \Gamma_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2} + \cdots + \frac{B_k x + \Gamma_k}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$$

Σημείωση

Αν ο βαθμός του αριθμητή $P(x)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον βαθμό του παρονομαστή $Q(x)$, τότε πρέπει να διαιρέσουμε το $P(x)$ με το $Q(x)$. Δηλαδή, πρέπει να βρεθεί πολυώνυμο $p(x)$ και πολυώνυμο $r(x)$ με βαθμό του $r(x)$ μικρότερο του βαθμού του $Q(x)$, ώστε:

$$P(x) = p(x)Q(x) + r(x) \Longrightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

Θεώρημα

Έστω τα πολυώνυμα:

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$Q(x) = \beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0$$

Τότε $P \equiv Q$, αν και μόνο αν $\alpha_k = \beta_k, \ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$.

Παράδειγμα 1

Να αναλύσετε το πιο κάτω κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{2}{x^2-4}$$

Λύση

Το κλάσμα γράφεται ως:

$$\frac{2}{x^2-4}=\frac{2}{(x-2)(x+2)}$$

Στον παρονομαστή έχουμε δύο διαφορετικούς παράγοντες πρώτου βαθμού. Έτσι, αναλύουμε το πιο πάνω κλάσμα σε μερικά κλάσματα της μορφής:

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη της εξίσωσης με $(x+2)(x-2)$, έχουμε:

$$2\equiv A(x-2)+B(x+2)\Rightarrow 2\equiv (A+B)x+2(B-A)$$

Επομένως:

$$\left.\begin{array}{r} A+B=0\\ 2(B-A)=2\end{array}\right\}\Rightarrow A=-\frac{1}{2}\,,\ \ B=\frac{1}{2}$$

Έτσι:

$$\frac{2}{x^2-4}=-\frac{1}{2(x+2)}+\frac{1}{2(x-2)}$$

Παράδειγμα 2

Να αναλύσετε το πιο κάτω κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{x^3-10x-10}{x^2-x-12}$$

Λύση

Στο κλάσμα

$$\frac{x^3-10x-10}{x^2-x-12},$$

ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρονομαστή. Έτσι, πρέπει να διαιρέσουμε και έχουμε:

$$\frac{x^3-10x-10}{x^2-x-12}=x+1+\frac{3x+2}{x^2-x-12}$$

Αναλύουμε το τελευταίο κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{3x+2}{x^2-x-12}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-4}\Rightarrow 3x+2\equiv A(x-4)+B(x+3)$$

Εδώ, αντί να συγκρίνουμε συντελεστές, μπορούμε να δώσουμε τιμές στο x. Έχουμε:

$$x = -3 \Rightarrow 3 \cdot (-3) + 2 = A \cdot (-7) + B \cdot 0 \ \Rightarrow A = 1$$
$$x = 4 \Rightarrow 3 \cdot 4 + 2 = A \cdot 0 + B \cdot 7 \Rightarrow B = 2$$

Έτσι:

$$\frac{x^3 - 10x - 10}{x^2 - x - 12} = x + 1 + \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-4}$$

Παράδειγμα 3

Να αναλύσετε το πιο κάτω κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

Λύση

Αναλύουμε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{\Gamma}{x-1} + \frac{\Delta}{(x-1)^2}$$

Έχουμε:

$$-2x + 4 \equiv (Ax + B)(x-1)^2 + \Gamma(x-1)(x^2+1) + \Delta(x^2+1)$$
$$\Rightarrow -2x + 4 \equiv (A+\Gamma)x^3 + (-2A + B - \Gamma + \Delta)x^2 + (A - 2B + \Gamma)x + (B - \Gamma + \Delta)$$

Συγκρίνοντας συντελεστές, παίρνουμε:

$$\begin{cases} A + \Gamma = 0 \\ -2A + B - \Gamma + \Delta = 0 \\ A - 2B + \Gamma = -2 \\ B - \Gamma + \Delta = 4 \end{cases}$$

Η λύση του πιο πάνω συστήματος είναι $A = 2,\ B = 1,\ \Gamma = -2,\ \Delta = 1$. Έτσι:

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Δραστηριότητες

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων τα πιο κάτω κλάσματα:

(α) $\dfrac{x+1}{(x-2)(x-1)}$

(β) $\dfrac{8x^2-19x+2}{(x+2)(x-1)(x-4)}$

(γ) $\dfrac{x+4}{x^2-3x+2}$

(δ) $\dfrac{5x+7}{2x^2+5x+2}$

(ε) $\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

(στ) $\dfrac{3x-1}{x(x-1)^2}$

(ζ) $\dfrac{5x^2+4x-7}{(x-3)(x+2)^2}$

(η) $\dfrac{5x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)}$

(θ) $\dfrac{3x^2+7x+2}{(x+1)(x^2+2x+5)}$

(ι) $\dfrac{3x^2+x+2}{x^3-1}$

(ια) $\dfrac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}$

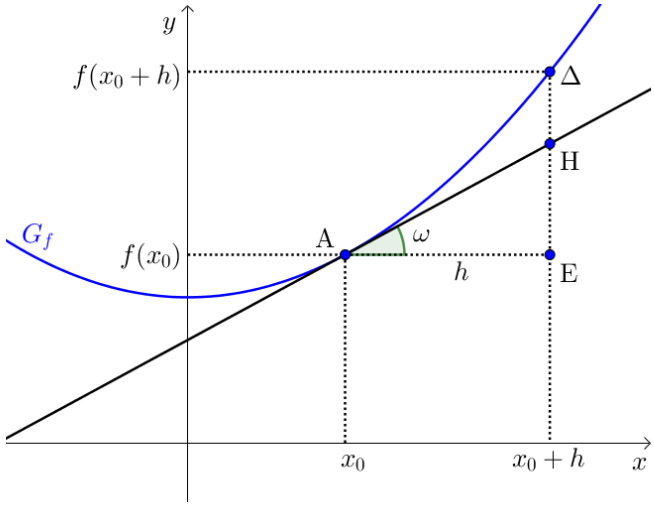
(ιβ) $\dfrac{x^2+5}{(1-x)(1-x^2)}$

(ιγ) $\dfrac{x^3-7x^2-13x-15}{x^2-2x-3}$

(ιδ) $\dfrac{2x^3-9x^2+7x+7}{x^2-5x+6}$

3.3 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω συνάρτηση f και τα σημεία της γραφικής της παράστασης $\mathrm{A}(x_0\,, f(x_0))$ και $\Delta(x_0+h\,, f(x_0+h))$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Είναι γνωστό ότι η διαφορά $h = \Delta x$ μας δείχνει πόσο έχει μεταβληθεί η ανεξάρτητη μεταβλητή x από το σημείο Α στο σημείο Δ. Η αντίστοιχη μεταβολή της τεταγμένης είναι Δy=$f(x_0+h)-f(x_0)$.

Επίσης, ισχύει για την τιμή της παραγώγου της f στο x_0 ότι:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Γεωμετρικά, παρατηρούμε ότι Δy=$f(x_0+h)-f(x_0)$= $\Delta\mathrm{E}$ και καθώς το $h \to 0$, έχουμε ότι:

$$\Delta\mathrm{E} \to \mathrm{EH} = \varepsilon\varphi\omega \cdot h = f'(x_0)\cdot h$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η διαφορά $\Delta y = f(x_0+h)-f(x_0)$ τείνει να προσεγγιστεί με ικανοποιητική ακρίβεια από το $f'(x_0)\cdot h = f'(x_0)\cdot \Delta x$, για $h = \Delta x \to 0$.

Ορισμός

Το **διαφορικό** dy (ή df) μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $y = f(x)$ είναι η γραμμική προσέγγιση της διαφοράς Δy, καθώς το $\Delta x \to 0$ και είναι ίσο με:

$$dy = f'(x)\cdot dx$$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε το διαφορικό των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $y = \sigma\upsilon\nu 3x$ (β) $u = e^{2t} - t$ (γ) $y = \ln x$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$y = \sigma\upsilon\nu 3x \Longrightarrow dy = -3\eta\mu 3x\, dx$$

(β) Έχουμε:

$$u = e^{2t} - t \Longrightarrow du = (2e^{2t} - 1)\, dt$$

(γ) Έχουμε:

$$dy = \frac{1}{x}\, dx$$

Είναι, επίσης, χρήσιμες οι πιο κάτω ιδιότητες του διαφορικού:

Ιδιότητες διαφορικού

- $dx = d(x + a),\ \forall a \in \mathbb{R}$
- $dx = \frac{1}{\lambda} d(\lambda x) = \lambda\, d\left(\frac{x}{\lambda}\right),\ \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

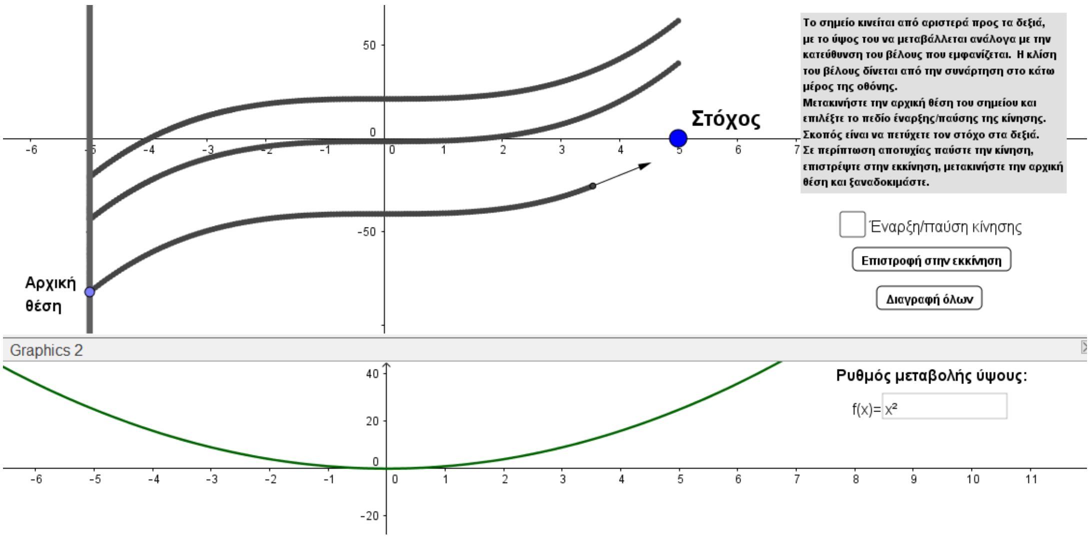
Δραστηριότητες

1. Να βρείτε το διαφορικό των πιο κάτω συναρτήσεων:
   (α) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$
   (β) $g(x) = \ln(x + 2)$
   (γ) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
   (δ) $k(x) = (7 - 2x^3)^4$

3.4 ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Εξερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο *«CLyk_Kat_En03_Aoristo.ggb»*.



Το σημείο κινείται από αριστερά προς τα δεξιά. Το ύψος του σημείου μεταβάλλεται ανάλογα με την κατεύθυνση του βέλους που εμφανίζεται.

- Να μετακινήσετε την αρχική θέση του σημείου και να επιλέξετε το πεδίο *έναρξης/παύσης της κίνησης*. Σκοπός είναι να πετύχετε τον στόχο στα δεξιά. Σε περίπτωση αποτυχίας, σταματήστε την κίνηση, επιστρέψτε στην εκκίνηση, μετακινήστε την αρχική θέση και ξαναδοκιμάστε.
- Ποια είναι η σχέση των γραφικών παραστάσεων που σχηματίζονται με τη γραφική παράσταση του ρυθμού μεταβολής στο κάτω μέρος της οθόνης; Μπορείτε να βρείτε τους τύπους αυτών των συναρτήσεων;
- Να αλλάξετε τον τύπο για τον ρυθμό μεταβολής και να επαναλάβετε τα πιο πάνω βήματα.

Διερεύνηση

Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από μια πλατφόρμα που βρίσκεται σε ύψος 2 μέτρα από το έδαφος και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $v(t) = 2t + 1$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα. Αν η ταχύτητα είναι ο ρυθμός μεταβολής του ύψους, πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε το ύψος που θα βρίσκεται το ελικόπτερο 10 δευτερόλεπτα μετά την απογείωσή του;

Το πρόβλημα που θέλουμε να επιλύσουμε είναι το εξής:

Έστω συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σε ανοικτό διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις F με πεδίο ορισμού το Δ τέτοιες, ώστε $F'(x) = f(x),\ \forall x \in \Delta$.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού προκύπτουν τα πιο κάτω:

Πόρισμα 1

Αν μια συνάρτηση F είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a,\beta]$ και ισχύει $F'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,\beta)$, τότε η συνάρτηση F είναι **σταθερή** στο $[a,\beta]$. Δηλαδή:

$$F(x) = c,\ \ \forall x \in [a,\beta]$$

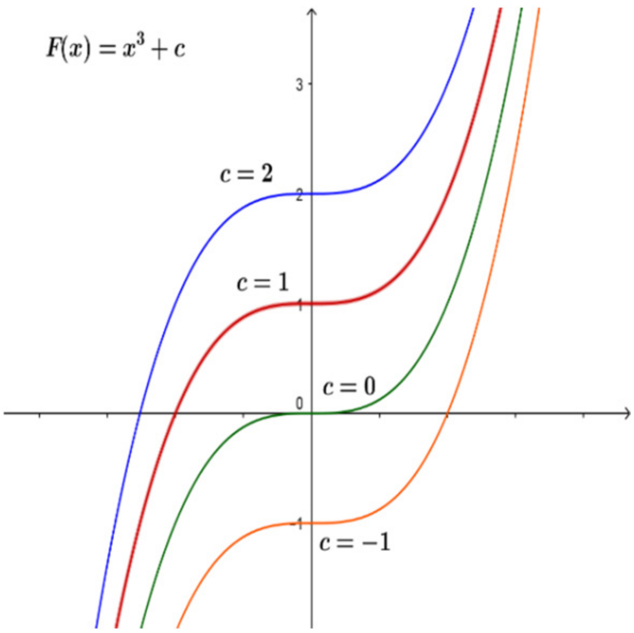
Πόρισμα 2

Έστω F και G συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (a,β). Αν ισχύει $F'(x) = G'(x),\ \forall x \in (a,\beta)$, τότε υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$G(x) = F(x) + c,\ \ \forall x \in [a,\beta]$$

Παρατήρηση

Το Πόρισμα 2 δηλώνει ότι αν δύο συναρτήσεις έχουν ίσες παραγώγους σε κάποιο διάστημα, τότε οι τιμές τους στο διάστημα αυτό έχουν σταθερή διαφορά. Συνεπώς, η γραφική παράσταση της μίας συνάρτησης είναι κατακόρυφη μετατόπιση της άλλης. Για παράδειγμα, ξέρουμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $g(x) = x^3$ είναι η $f(x) = 3x^2$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 2, οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση που έχει παράγωγο τη συνάρτηση $f(x) = 3x^2$ θα έχει τη μορφή $F(x) = x^3 + c$, για κάποια πραγματική σταθερά c.



Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $\varDelta \subseteq \mathbb{R}$. **Αντιπαράγωγος** της f ή **αρχική συνάρτηση** της f ή **παράγουσα συνάρτηση** της f στο $\varDelta$ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο $\varDelta$ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \varDelta$.

Παρατηρήσεις

- Αποδεικνύεται ότι κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ανοικτό διάστημα $\varDelta$ έχει αντιπαράγωγο F στο $\varDelta$.
- Η αντιπαράγωγος μιας συνάρτησης f ορίζεται σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.
- Αν $F'(x) = f(x)$, τότε για οποιαδήποτε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $G'(x) = (F(x) + c)' = f(x)$.
- Είναι φανερό ότι η αρχική συνάρτηση δεν είναι μοναδική.

Τα πιο πάνω συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ανοικτό διάστημα $\varDelta \subseteq \mathbb{R}$. Αν η f έχει αρχική συνάρτηση F στο $\varDelta$, ισχύει ότι:

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι επίσης αρχική συνάρτηση της f στο $\varDelta$.
- Κάθε αρχική συνάρτηση G της f στο $\varDelta$ είναι της μορφής $G(x) = F(x) + c$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η αρχική συνάρτηση, μπορούμε τώρα να ορίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα:

Ορισμός

Το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα $\varDelta \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της f στο $\varDelta$ και συμβολίζεται με:

$$\int f(x)\,dx$$

Δηλαδή, αν η F είναι μία αντιπαράγωγος της f στο $\varDelta$, τότε:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \;\; c \in \mathbb{R}$$

Παρατηρήσεις

- Η διαδικασία εύρεσης του αόριστου ολοκληρώματος ονομάζεται **ολοκλήρωση**.
- Το σύμβολο $\int$ προέρχεται από το γράμμα S, αρχικό της λέξης Summa, που σημαίνει «άθροισμα» στα Λατινικά. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το ολοκλήρωμα συνδέεται με την έννοια του αθροίσματος στον υπολογισμό εμβαδών.
- Το «dx» ονομάζεται **διαφορικό της μεταβλητής $\boldsymbol{x}$** και συμβολίζει την απειροστή μεταβολή της. Γράφεται δίπλα στη συνάρτηση που πρόκειται να ολοκληρωθεί, για να δείξει την ανεξάρτητη μεταβλητή ως προς την οποία γίνεται η παραγώγιση της αρχικής συνάρτησης.
- Σύμφωνα με τον ορισμό, το αόριστο ολοκλήρωμα είναι σύνολο συναρτήσεων. Όμως, όπως έχουμε αναφέρει, αν η F είναι μια αντιπαράγωγος της f, τότε οποιαδήποτε άλλη αντιπαράγωγος της f θα διαφέρει από την F κατά μία σταθερά c.

  Αναφερόμαστε στη συνάρτηση με τύπο $F(x) + c$ ως το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Η σταθερά c μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή και ονομάζεται **σταθερά της ολοκλήρωσης**.
- Αν δύο συνεχείς συναρτήσεις f και g είναι ίσες, τότε τα αόριστα ολοκληρώματα τους είναι ίσα. Δηλαδή:
$$f = g \implies \int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$$
- Αν f συνεχής συνάρτηση, τότε ισχύει ότι:
$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$$
- Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε ισχύει ότι:
$$\int \frac{d}{dx}\big(f(x)\big)\,dx = f(x) + c, \ \ c \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:
$$\int 4x^3\,dx$$

Λύση

Έχουμε ότι $4x^3 = (x^4)'$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, όλες οι αρχικές συναρτήσεις της $f(x) = 4x^3$ είναι της μορφής $F(x) = x^4 + c$. Δηλαδή:
$$\int 4x^3\,dx = x^4 + c$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \text{ημ}3t\, dt$$

Λύση

Έχουμε

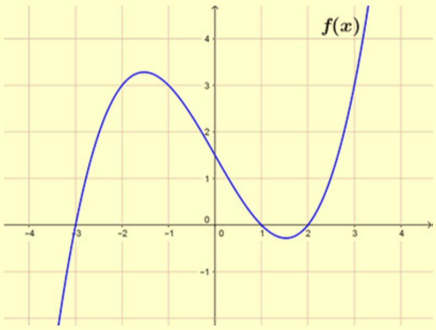
$$\int \text{ημ}3t\, dt = -\frac{\text{συν}3t}{3} + c,$$

αφού:

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{\text{συν}3t}{3}\right) = \text{ημ}3t$$

Δραστηριότητες

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f:



Αν ισχύει ότι

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

να βρείτε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση F παρουσιάζει τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα.

2. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

(α) $\int 6(2x+1)^2\,dx =$

Α. $24(2x+1)+c$ Β. $2(x^2+x)^3+c$ Γ. $(2x+1)^3+c$

(β) $\int x\eta\mu x\,dx =$

Α. $-\dfrac{x^2\sigma\upsilon\nu x}{2}+c$ Β. $\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + c$ Γ. $\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x + c$

3. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int 2x\,dx$ (β) $\int 4x^4\,dx$

(γ) $\int e^x\,dx$ (δ) $\int \sigma\upsilon\nu x\,dx$

(ε) $\int (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2\,dx$

3.5 ΚΑΝΟΝΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Διερεύνηση

Να βρείτε αντιπαραγώγους για τις συναρτήσεις στην πρώτη στήλη του πιο κάτω πίνακα:

Συνάρτηση	**Αντιπαράγωγος**
$f(x) = 2$	
$f(x) = x$	
$f(x) = x^5$	
$f(x) = x^\nu,\ \ \nu \in \mathbb{N}$	
$f(x) = e^x$	
$f(x) = 4e^{-2x}$	
$f(x) = 2\text{ημ}3x$	

Πολλά αόριστα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν με απλή παρατήρηση, αναγνωρίζοντας την αρχική συνάρτηση με την επιθυμητή παράγωγο.

Γενικά, οι τύποι του πιο κάτω πίνακα ισχύουν σε κάθε **διάστημα**, στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα:

Βασικά Αόριστα Ολοκληρώματα

1. $\displaystyle\int a\,dx = ax + c,\ \ \forall a \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int x^\nu\,dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c,\ \ \forall \nu \in \mathbb{R} - \{-1\}$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
4. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c$
5. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c\,,\ \ \forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
6. $\displaystyle\int \text{ημ}x\,dx = -\text{συν}x + c$
7. $\displaystyle\int \text{συν}x\,dx = \text{ημ}x + c$
8. $\displaystyle\int \text{τεμ}^2x\,dx = \text{εφ}x + c$
9. $\displaystyle\int \text{στεμ}^2x\,dx = -\text{σφ}x + c$
10. $\displaystyle\int \text{τεμ}x\text{εφ}x\,dx = \text{τεμ}x + c$
11. $\displaystyle\int \text{στεμ}x\text{σφ}x\,dx = -\text{στεμ}x + c$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{τοξημ}x + c$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{τοξεφ}x + c$

Η επαλήθευση των ισχυρισμών που περιέχονται στον πιο πάνω πίνακα αφήνεται ως άσκηση για τους μαθητές.

Ιδιότητες Αόριστου Ολοκληρώματος

(α) $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,,\ \ a \in \mathbb{R}$

(β) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Απόδειξη

(α) Έχουμε:

$$\frac{d}{dx}\left(a\int f(x)\,dx\right) = a\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = af(x)$$

Επομένως:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,,\ \ a \in \mathbb{R}$$

(β) Έχουμε:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\right) = \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) \pm \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right) = f(x) \pm g(x)$$

Επομένως:

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τα πιο κάτω αόριστα ολοκληρώματα:

(α) $\int x^3\,dx$ (β) $\int 5\,dx$ (γ) $\int 6x^2\,dx$ (δ) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$$

(β) Έχουμε:

$$\int 5\,dx = 5x + c$$

(γ) Έχουμε:

$$\int 6x^2\,dx = 6\int x^2\,dx = 6\cdot\frac{x^3}{3} + c = 2x^3 + c$$

(δ) Έχουμε:

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε τα πιο κάτω αόριστα ολοκληρώματα:

(α) $\int (x^6 + x^3)\, dx$

(β) $\int (\eta\mu x - 3x + \pi)\, dx$

(γ) $\int \left(6t^2 + 3t - \frac{2}{t}\right) dt$

(δ) $\int x(x+5)\, dx$

(ε) $\int x(x-3)^2\, dx$

(στ) $\int \frac{x^2 + 5x + 3}{x}\, dx$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\int (x^6 + x^3)\, dx = \int x^6\, dx + \int x^3\, dx = \frac{x^7}{7} + c_1 + \frac{x^4}{4} + c_2 = \frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{4} + c$$

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int (\eta\mu x - 3x + \pi)\, dx &= \int \eta\mu x\, dx - 3\int x\, dx + \int \pi\, dx \\ &= -\sigma\upsilon\nu x - \frac{3x^2}{2} + \pi x + c\end{aligned}$$

(γ) Έχουμε:

$$\int \left(6t^2 + 3t - \frac{2}{t}\right) dt = 2t^3 + \frac{3t^2}{2} - 2\ln|t| + c$$

(δ) Έχουμε:

$$\int x(x+5)\, dx = \int (x^2 + 5x)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + c$$

(ε) Έχουμε:

$$\int x(x-3)^2\, dx = \int x(x^2 - 6x + 9)\, dx = \int (x^3 - 6x^2 + 9x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2} + c$$

(στ) Έχουμε:

$$\int \frac{x^2 + 5x + 3}{x}\, dx = \int \left(x + 5 + \frac{3}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 5x + 3\ln|x| + c$$

Παρατήρηση

Οι σταθερές που προκύπτουν από τα διάφορα στάδια της ολοκλήρωσης μπορούν να αθροιστούν, ώστε η απάντηση να δοθεί στην απλούστερη μορφή.

Παράδειγμα 3

Να βρείτε τις σταθερές $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\int (ax^2 + \beta x + \gamma)\, dx = x^3 - 3x + c$$

Λύση

Για το αόριστο ολοκλήρωμα, στην ισότητα που δίνεται, έχουμε ότι:

$$\int (ax^2 + \beta x + \gamma)\, dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{\beta}{2}x^2 + \gamma x + c$$

Έτσι, πρέπει να ισχύει:

$$\frac{a}{3}x^3 + \frac{\beta}{2}x^2 + \gamma x + c \equiv x^3 - 3x + c$$

Επομένως:

$$\frac{a}{3} = 1 \Longrightarrow a = 3, \ \ \frac{\beta}{2} = 0 \Rightarrow \beta = 0, \quad \gamma = -3$$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αόριστα ολοκληρώματα:

(α)	$\int x^4\,dx$	(β)	$\int x^{-2}\,dx$	(γ)	$\int x^{\frac{3}{4}}\,dx$
(δ)	$\int \frac{1}{u^4}\,du$	(ε)	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$	(στ)	$\int \frac{2}{\sqrt[3]{u}}\,du$
(ζ)	$\int (u^2-3u+1)\,du$	(η)	$\int \left(x+2\sqrt{x}-\pi\right)dx$	(θ)	$\int \left(e^x+ex+\frac{e}{x}\right)dx$
(ι)	$\int (u-5)^2\,du$	(ια)	$\int 2u(u^2-3)\,du$	(ιβ)	$\int \sqrt{x}(x-2)\,dx$
(ιγ)	$\int \frac{u^4-5u^3+3u}{u^2}\,du$	(ιδ)	$\int \frac{3x-x^2+2x^3}{x^3}\,dx$	(ιε)	$\int (\text{ημ}\theta-\text{συν}\theta)d\theta$
(ιστ)	$\int (3\theta-\text{τεμ}^2\theta)d\theta$	(ιζ)	$\int \left(\frac{1}{1+x^2}-2x\right)dx$	(ιη)	$\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$\int \lambda x^{\kappa-2}\,dx = 3x^5 + c$$

3.6 ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Θα εξεταστούν στη συνέχεια διάφορες μέθοδοι ολοκλήρωσης, που σκοπό έχουν να μετασχηματίσουν δοθέντα αόριστα ολοκληρώματα σε άλλα πιο απλά, που ανάγονται τις περισσότερες φορές σε αόριστα ολοκληρώματα αθροισμάτων βασικών συναρτήσεων. Αντί του όρου «αόριστο ολοκλήρωμα», θα χρησιμοποιείται ο όρος «ολοκλήρωμα».

3.6.1 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Διερεύνηση

(α) Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int (x+1)^2 \, dx,$$

γράφοντας την απάντησή σας στη μορφή $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + c$.

(β) Να εξηγήσετε γιατί το πιο πάνω ολοκλήρωμα είναι ίσο και με

$$\frac{(x+1)^3}{3} + c,$$

αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(γ) Τι μπορείτε να εισηγηθείτε για τον τύπο της συνάρτηση g, αν ισχύει:

$$\int g(x) \, dx = \frac{(2x^6+1)^8}{8} + c$$

Συχνά χρειάζεται να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής (ή που μπορούν να μετατραπούν στη μορφή):

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx$$

Αν για την συνάρτηση f είναι εύκολο να βρεθεί αντιπαράγωγος F, ώστε $F'(x) = f(x)$, τότε:

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx = \int \big[F\big(g(x)\big)\big]'\, dx = F\big(g(x)\big) + c \qquad (1)$$

Στην ουσία εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγώγισης για τη σύνθεση συναρτήσεων αντίστροφα.

Μέθοδος αντικατάστασης

Έστω συνεχής συνάρτηση f με αντιπαράγωγο F σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη συνάρτηση $u = g(x)$. Τότε:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\, dx = \int f\big(g(x)\big)\, d\big(g(x)\big) = \int f(u)\, du = F(u) + c$$

Η απόδειξη του πιο πάνω τύπου στηρίζεται στον γνωστό κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int 2x\, \text{συν}(1 + x^2)\, dx$$

Λύση

Θέτουμε $1 + x^2 = u$. Έτσι, $2xdx = du$ και:

$$\int 2x\text{συν}(1 + x^2)\, dx = \int \text{συν}u\, du = \text{ημ}u + c = \text{ημ}(1 + x^2) + c$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int \sqrt{x+1}\, dx$ (β) $\displaystyle\int (x+1)^{2018}\, dx$ (γ) $\displaystyle\int \text{εφ}x\, dx$

Λύση

(α) Θέτουμε $\sqrt{x+1} = u$. Έτσι, $x + 1 = u^2 \Rightarrow dx = 2udu$ και:

$$\int \sqrt{x+1}\, dx = \int u \cdot 2u\, du = 2\int u^2\, du = \frac{2u^3}{3} + c = \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} + c$$

(β) Θέτουμε $x+1=u$. Έτσι ,$dx=du$ και:

$$\int (x+1)^{2018}\,dx=\int u^{2018}\,du=\frac{u^{2019}}{2019}+c=\frac{(x+1)^{2019}}{2019}+c$$

(γ) Έχουμε:

$$\int \text{εφ}x\,dx=\int \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}dx$$

Θέτουμε $\text{συν}x=u$. Έτσι, $-\text{ημ}x\,dx=du$ και:

$$\int \text{εφ}x\,dx=\int \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}dx=-\int \frac{1}{u}du=-\ln|u|+c=-\ln|\text{συν}x|+c$$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int (4x-3)^{999}\,dx$ (β) $\int e^{3x}\,dx$ (γ) $\int \text{ημ}(1-3x)\,dx$

Λύση

(α) Θέτουμε $4x-3=u$. Έτσι, $4dx=du \Rightarrow dx=\frac{1}{4}du$ και:

$$\int (4x-3)^{999}\,dx=\frac{1}{4}\int u^{999}\,du=\frac{u^{1000}}{4\cdot 1000}+c=\frac{(4x-3)^{1000}}{4000}+c$$

(β) Θέτουμε $3x=u$. Έτσι, $3dx=du$ και:

$$\int e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}\int e^{u}\,du=\frac{1}{3}e^{u}+c=\frac{1}{3}e^{3x}+c$$

(γ) Θέτουμε $1-3x=u$. Έτσι, $-3dx=du$ και:

$$\int \text{ημ}(1-3x)\,dx=-\frac{1}{3}\int \text{ημ}u\,du=\frac{1}{3}\text{συν}u+c=\frac{1}{3}\text{συν}(1-3x)+c$$

Παράδειγμα 4

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

Λύση

Θέτουμε $1+x^2=u$. Έτσι, $2x\,dx=du$ και:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx=\int \sqrt{u}\,du=\int u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+c$$

Συχνά σε κάποιο ολοκλήρωμα υπάρχουν περισσότερες από μία επιλογές για αντικατάσταση, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$$

Λύση

1ος τρόπος

Θέτουμε $u = x^2 + 1$. Έτσι, $du = 2x\, dx$ και:

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}}du = \int u^{-\frac{1}{3}} = \frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}\, u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

2ος τρόπος

Θέτουμε $u = \sqrt[3]{x^2+1}$. Έτσι, $u^3 = x^2 + 1 \Rightarrow 3u^2 du = 2x\, dx$ και:

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx = \int \frac{3u^2}{u}du = \int 3u\, du = \frac{3}{2}\, u^2 + c = \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

Παράδειγμα 6

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\, dx$$

Λύση

1ος τρόπος

Θέτουμε $u = \sqrt{x^2-1}$. Έτσι, $u^2 = x^2 - 1,\;\; udu = xdx$ και:

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\, dx = \int x^2\sqrt{x^2-1}\cdot x\, dx = \int (u^2+1)\cdot u \cdot u\;\, du$$

$$= \int (u^4+u^2)\, du = \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + c = \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^5}{5} + \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{3} + c$$

2ος τρόπος

Θέτουμε $u = x^2 - 1$. Έτσι, $du = 2xdx$ και:

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}\int x^2\sqrt{x^2-1}\cdot 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (u+1)\sqrt{u}\;\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right) du = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^5}{5} + \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{3} + c$$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int \sqrt{6+x}\,dx$ (β) $\int \text{συν}3x\,dx$ (γ) $\int (2x-7)^{80}\,dx$

(δ) $\int x\text{συν}(x^2+1)\,dx$ (ε) $\int \text{ημ}\theta(1+\text{συν}\theta)^3\,d\theta$ (στ) $\int xe^{1-3x^2}\,dx$

(ζ) $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$ (η) $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}dx$ (θ) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$

(ι) $\int \frac{x^3}{(x^2+2)^3}dx$ (ια) $\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ (ιβ) $\int \frac{\text{ημ}(\ln x)}{x}dx$

(ιγ) $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$ (ιδ) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}dx$ (ιε) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$

2. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται σε κάθε περίπτωση, να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx,\quad x=3\text{ημ}\theta,\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$

(β) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}dx,\quad x=3\text{ημ}\theta,\quad \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

3.6.2 Τυποποίηση βασικών μορφών ολοκληρωμάτων

Στην υποενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

Αν για την συνάρτηση f είναι εύκολο να βρεθεί αντιπαράγωγος F, ώστε $F'(x) = f(x)$, τότε:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int [F(g(x))]'\, dx = F(g(x)) + c$$

- *Ολοκληρώματα της μορφής $\int f(ax+\beta)\, dx$*

Αν

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c,$$

τότε

$$\int f(ax+\beta)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+\beta) + c$$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int \text{συν}(2x-1)\, dx$ (β) $\int \text{τεμ}^2(1-4x)\, dx$ (γ) $\int e^{-5x}\, dx$

(δ) $\int \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}} dx$ (ε) $\int \frac{1}{4+9x^2} dx$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\int \text{συν}(2x-1)\, dx = \frac{1}{2}\text{ημ}(2x-1) + c$$

(β) Έχουμε:

$$\int \text{τεμ}^2(1-4x)\, dx = -\frac{1}{4}\text{εφ}(1-4x) + c$$

(γ) Έχουμε:

$$\int e^{-5x}\, dx = -\frac{1}{5}e^{-5x} + c$$

(δ) Έχουμε:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}} dx = \frac{1}{4}\text{τοξημ}(4x) + c$$

(ε) Έχουμε:

$$\int \frac{1}{4+9x^2} dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\frac{9}{4}x^2} dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\text{τοξεφ}\left(\frac{3}{2}x\right) + c = \frac{1}{6}\text{τοξεφ}\left(\frac{3}{2}x\right) + c$$

- *Ολοκληρώματα της μορφής* $\int f^{\nu}(x)f'(x)\,dx,\ \nu\neq -1$

$$\int f^{\nu}(x)f'(x)\,dx=\int f^{\nu}(x)\,d\big(f(x)\big)=\frac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1}+c,\quad \nu\neq -1$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int ημ^4x\ συνx\,dx$ (β) $\int \frac{\ln x}{x}dx$ (γ) $\int εφ^7x\ τεμ^2x\,dx$

(δ) $\int x(3x^2+1)^7\,dx$ (ε) $\int e^x(5e^x-8)^9\,dx$ (στ) $\int \frac{1}{(7-4x)^4}dx$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\int ημ^4x\ συνx\,dx=\int ημ^4x\,d(ημx)=\frac{ημ^5x}{5}+c$$

(β) Έχουμε:

$$\int \frac{\ln x}{x}dx=\int \ln x\,d(\ln x)=\frac{\ln^2 x}{2}+c$$

(γ) Έχουμε:

$$\int εφ^7x\ τεμ^2x\,dx=\int εφ^7x\,d(εφx)=\frac{εφ^8x}{8}+c$$

(δ) Έχουμε:

$$\int x(3x^2+1)^7\,dx=\frac{1}{6}\int 6x(3x^2+1)^7\,dx=\frac{1}{6}\int (3x^2+1)^7\,d(3x^2+1)$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{(3x^2+1)^8}{8}+c=\frac{(3x^2+1)^8}{48}+c$$

(ε) Έχουμε:

$$\int e^x(5e^x-8)^9\,dx=\frac{1}{5}\int 5e^x(5e^x-8)^9\,dx=\frac{1}{5}\int (5e^x-8)^9\,d(5e^x-8)$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{(5e^x-8)^{10}}{10}+c=\frac{(5e^x-8)^{10}}{50}+c$$

(στ) Έχουμε:

$$\int \frac{1}{(7-4x)^4}dx=\int (7-4x)^{-4}\,dx=-\frac{1}{4}\int (-4)(7-4x)^{-4}\,dx$$
$$=-\frac{1}{4}\int (7-4x)^{-4}\,d(7-4x)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{(7-4x)^{-3}}{-3}+c$$
$$=\frac{1}{12(7-4x)^3}+c$$

- *Ολοκληρώματα της μορφής* $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{f(x)}d\big(f(x)\big) = \ln|f(x)| + c$$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int \frac{\eta\mu x}{2 - \sigma\upsilon\nu x}dx$ (β) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx$ (γ) $\displaystyle\int \varepsilon\varphi x\, dx$

(δ) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-5}dx$ (ε) $\displaystyle\int \frac{7}{x\ln x}dx$ (στ) $\displaystyle\int \tau\varepsilon\mu x\, dx$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\int \frac{\eta\mu x}{2-\sigma\upsilon\nu x}dx = \int \frac{1}{2-\sigma\upsilon\nu x}d(2-\sigma\upsilon\nu x) = \ln(2-\sigma\upsilon\nu x) + c$$

Σημειώνουμε ότι $|2-\sigma\upsilon\nu x| = 2-\sigma\upsilon\nu x$, *αφού* $2-\sigma\upsilon\nu x > 0$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έχουμε:

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}d(x^2+1) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

Σημειώνουμε ότι $|x^2+1| = x^2+1$, *αφού* $x^2+1 > 0$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Έχουμε:

$$\int \varepsilon\varphi x\, dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx = -\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}d(\sigma\upsilon\nu x) = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c$$

(δ) Έχουμε:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-5}dx = \int \frac{1}{x^2+x-5}d(x^2+x-5) = \ln|x^2+x-5| + c$$

(ε) Έχουμε:

$$\int \frac{7}{x\ln x}dx = 7\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = 7\int \frac{1}{\ln x}d(\ln x) = 7\ln|\ln x| + c$$

(στ) Έχουμε:

$$\int \tau\varepsilon\mu x\, dx = \int \frac{\tau\varepsilon\mu x(\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x)}{\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x}dx = \int \frac{\tau\varepsilon\mu^2 x + \tau\varepsilon\mu x\, \varepsilon\varphi x}{\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x}dx$$

$$= \int \frac{1}{\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x}d(\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x) = \ln|\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x| + c$$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int \text{συν}7x\,dx$

(β) $\int \text{στεμ}^2(5x-3)\,dx$

(γ) $\int (6x-1)^{21}\,dx$

(δ) $\int e^{4-9x}\,dx$

(ε) $\int \left(e^{4x} - 2\cdot 4^{-3x}\right)dx$

(στ) $\int (\text{ημ}4x - \text{ημ}5x)\,dx$

(ζ) $\int \frac{1}{25x^2+1}\,dx$

(η) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

(θ) $\int \frac{1}{(2x+1)^5}\,dx$

(ι) $\int x(x^2-3)^{17}\,dx$

(ια) $\int \frac{(\text{τοξεφ}x)^3}{1+x^2}\,dx$

(ιβ) $\int \frac{\ln^6 x}{x}\,dx$

(ιγ) $\int \frac{2\text{ημ}x}{\sqrt{1-\text{συν}x}}\,dx$

(ιδ) $\int \frac{e^x}{(e^x-1)^4}\,dx$

(ιε) $\int \frac{\text{τεμ}^2 x}{2+\text{εφ}x}\,dx$

(ιστ) $\int \frac{3x}{x^2+3}\,dx$

(ιζ) $\int \text{σφ}x\,dx$

(ιη) $\int \frac{2+2\text{ημ}x}{x-\text{συν}x}\,dx$

(ιθ) $\int \frac{6x+15}{x^2+5x-1}\,dx$

(κ) $\int \text{στεμ}x\,dx$

3.6.3 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Διερεύνηση

(α) Αν f, g είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, να βρείτε τα ολοκληρώματα A και B, χρησιμοποιώντας απλές ιδιότητες παραγώγων και αντιπαραγώγων.

$$A = \int \big(f(x)g(x)\big)'\, dx$$

$$B = \int \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\, dx$$

(β) Να χρησιμοποιήσετε τα ολοκληρώματα A και B, για να αναφέρετε ένα τρόπο εύρεσης του ολοκληρώματος:

$$\Gamma = \int f(x)g'(x)\, dx$$

(γ) Να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα στο Γ ολοκλήρωμα, για να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\Delta = \int (x+2)\, e^{3x} dx$$

Θεώρημα

Αν συναρτήσεις f και g έχουν συνεχείς παραγώγους f', g' στο διάστημα Δ, τότε:

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x)\, dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx \\ &= f(x)g(x) - \int g(x)\, d\big(f(x)\big) \end{aligned}$$

Ισοδύναμα, αν u και v είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του x με συνεχείς παραγώγους στο διάστημα Δ, τότε:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε από τη Β΄ Λυκείου ότι:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Αφού οι f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε οι συναρτήσεις $f'g$, fg' και $(fg)' = f'g + fg'$ είναι επίσης συνεχείς. Άρα, θα έχουν και αντιπαραγώγους στο Δ. Δηλαδή, υπάρχουν τα ολοκληρώματα:

$$\int \big(f(x)g(x)\big)'\, dx, \quad \int f'(x)g(x)\, dx, \quad \int f(x)g'(x)\, dx$$

Έπεται ότι:

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\, dx + \int f(x)g'(x)\, dx$$

Άρα:

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$$

Ο κανόνας ολοκλήρωσης του πιο πάνω θεωρήματος ονομάζεται **ολοκλήρωση κατά παράγοντες**.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int x\,\eta\mu x\,dx$$

Λύση

Θέτουμε $u = x$ και $dv = \eta\mu x\,dx$. Τότε:

$$du = dx,\ \ v = \int \eta\mu x\,dx = -\sigma\upsilon\nu x$$

Ο κανόνας ολοκλήρωσης κατά παράγοντες δίνει:

$$\int x\,\eta\mu x\,dx = x(-\sigma\upsilon\nu x) - \int (-\,\sigma\upsilon\nu x)\ dx = -x\,\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + c$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \ln x\,dx,\ \ x > 0$$

Λύση

Το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ δεν είναι γνωστό, αλλά γνωρίζουμε την παράγωγο της. Αν θέσουμε $u = \ln x$ και $dv = dx$, τότε:

$$du = \frac{1}{x}\,dx,\ \ v = \int dx = x$$

Έτσι:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + c$$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int xe^{x}\,dx$$

Λύση

Θα ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες, με τη χρήση του διαφορικού.

Έχουμε:

$$\int xe^{x}\,dx = \int x\,d(e^{x}) = xe^{x} - \int e^{x}\,dx = xe^{x} - e^{x} + c$$

Παράδειγμα 4

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int x\ln^2 x\,dx,\quad x>0$$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int x\ln^2 x\,dx &= \int \ln^2 x\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \frac{x^2}{2}\ d(\ln^2 x)\\ &= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \frac{x^2}{2}\cdot 2\ln x\ \cdot\frac{1}{x}dx\\ &= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \ln x\, d\left(\frac{x^2}{2}\right)\\ &= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}d(\ln x)\right)\\ &= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + c\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^x\,\eta\mu x\,dx,\quad x\in\mathbb{R}$$

Λύση

$$\begin{aligned}\int e^x\eta\mu x\,dx &= \int e^x\, d(-\sigma\upsilon\nu x) = -e^x\sigma\upsilon\nu x + \int e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx\\ &= -e^x\sigma\upsilon\nu x + \int e^x\, d(\eta\mu x)\\ &= -e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x\eta\mu x - \int e^x\eta\mu x\,dx\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$I = \int e^x\,\eta\mu x\,dx$$

και καταλήγουμε στην ισότητα:

$$I = -e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x\eta\mu x - I \Rightarrow 2I = -e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x\eta\mu x$$

Λύνοντας ως προς I, παίρνουμε:

$$I = -\frac{1}{2}e^x\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}e^x\eta\mu x + c$$

$$\Rightarrow \int e^x\,\eta\mu x\,dx = -\frac{1}{2}e^x\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}e^x\eta\mu x + c$$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α)	$\int x\etaμ2x\,dx$	(β)	$\int \frac{x}{\sigmaυν^2 x}\,dx$	(γ)	$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx,\ \ x>0$
(δ)	$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx,\ \ x>0$	(ε)	$\int e^{x+\ln x}\,dx,\ \ x>0$	(στ)	$\int x^2 e^{-x}\,dx$
(ζ)	$\int e^{\sqrt{3x+9}}\,dx$	(η)	$\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$	(θ)	$\int x^2\sigmaυν3x\,dx$
(ι)	$\int e^x\sigmaυνx\,dx$	(ια)	$\int e^{-x}\etaμ2x\,dx$	(ιβ)	$\int e^{2x}\sigmaυν3x\,dx$

3.6.4 Ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Αρχικά, υπενθυμίζουμε μερικές τριγωνομετρικές ταυτότητες που έχουν συχνή χρήση:

$$ημ^2x + συν^2x = 1$$

$$τεμ^2x = 1 + εφ^2x \qquad στεμ^2x = 1 + σφ^2x$$

$$ημ2x = 2ημxσυνx$$

$$ημ^2x = \frac{1 - συν2x}{2} \qquad συν^2x = \frac{1 + συν2x}{2}$$

$$2ημxσυνy = ημ(x + y) + ημ(x - y) \qquad 2ημxημy = συν(x - y) - συν(x + y)$$

$$2συνxσυνy = συν(x + y) + συν(x - y)$$

$$\begin{cases} ημ2x = \dfrac{2t}{1 + t^2} \\ συν2x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{cases}, \quad \text{όπου} \quad t = εφx$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε διάφορες κατηγορίες ολοκληρωμάτων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int συν^2x\,dx, \quad x \in \mathbb{R}$$

Λύση

$$\int συν^2x\,dx = \int \frac{1 + συν2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int συν2x\,dx\right) = \frac{x}{2} + \frac{ημ2x}{4} + c$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int ημ^3xσυν^2x\,dx, \quad x \in \mathbb{R}$$

Λύση

$$\int ημ^3xσυν^2x\,dx = \int ημ^2x\,ημx\,συν^2x\,dx = -\int (1 - συν^2x)\,συν^2x\,d(συνx)$$

$$= \int (συν^4x - συν^2x)\,d(συνx) = \frac{συν^5x}{5} - \frac{συν^3x}{3} + c$$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{συν^3x}{1-ημx}dx,\ \ x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Λύση

$$\begin{aligned}\int \frac{συν^3x}{1-ημx}dx &= \int \frac{συν^2x\ συνx}{1-ημx}dx = \int \frac{(1-ημ^2x)συνx}{1-ημx}dx \\ &= \int \frac{(1-ημx)(1+ημx)συνx}{1-ημx}dx = \int (1+ημx)\,d(ημx) \\ &= ημx + \frac{ημ^2x}{2} + c\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int εφ^4x\,dx,\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Λύση

$$\begin{aligned}\int εφ^4x\,dx &= \int εφ^2x \cdot εφ^2x\,dx = \int εφ^2x(τεμ^2x-1)\,dx \\ &= \int εφ^2xτεμ^2x\,dx - \int εφ^2x\,dx \\ &= \int εφ^2xτεμ^2x\,dx - \int (τεμ^2x-1)\,dx \\ &= \int εφ^2x\,d(εφx) - \int τεμ^2x\,dx + \int 1\,dx \\ &= \frac{1}{3}εφ^3x - εφx + x + c\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int ημ3x\ συν5x\,dx,\ \ x \in \mathbb{R}$$

Λύση

$$\begin{aligned}\int ημ3x\ συν5x\,dx &= \frac{1}{2}\int (ημ(-2x)+ημ8x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int (-ημ2x+ημ8x)\,dx = \frac{συν2x}{4} - \frac{συν8x}{16} + c\end{aligned}$$

Παράδειγμα 6

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \sqrt{1+\text{συν}4x}\,dx,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$$

Λύση

$$\int \sqrt{1+\text{συν}4x}\,dx = \int \sqrt{1+(2\text{συν}^2 2x-1)}\,dx = \int \sqrt{2}|\text{συν}2x|\,dx$$
$$=\sqrt{2}\int \text{συν}2x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{ημ}2x + c$$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int \text{ημ}^2 x\,dx$

(β) $\int \text{συν}^3 x\,dx$

(γ) $\int \text{συν}^4 x\,dx$

(δ) $\int \frac{\text{ημ}^3 x}{\text{συν}x}dx$

(ε) $\int \text{ημ}^4 x\,\text{συν}^3 x\,dx$

(στ) $\int (\text{ημ}^2 x+\text{συν}^4 x)\text{ημ}x\,dx$

(ζ) $\int (\text{ημ}^3 x\,\text{συν}x - \text{ημ}x\,\text{συν}^3 x)\,dx$

(η) $\int \text{τεμ}^4 x\,dx$

(θ) $\int \text{τεμ}^3 x\,dx$

(ι) $\int \text{εφ}^3 x\,\text{τεμ}x\,dx$

(ια) $\int \text{ημ}2x\,\text{συν}x\,dx$

(ιβ) $\int \text{ημ}5x\,\text{ημ}7x\,dx$

(ιγ) $\int \sqrt{1+\text{ημ}2x}\,dx,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$

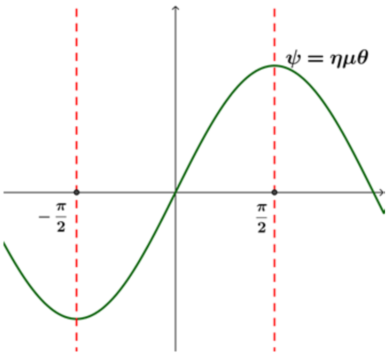
(ιδ) $\int \frac{\ln(\text{τεμ}x)}{\text{συν}^2 x}dx,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$

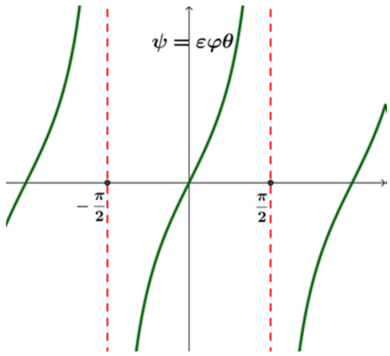
3.6.5 Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

Σε περίπτωση που το αόριστο ολοκλήρωμα περιέχει παραστάσεις της μορφής $a^2 + x^2$ ή $a^2 - x^2$, συχνά μπορούμε να το μετασχηματίσουμε με κάποια τριγωνομετρική αντικατάσταση σε πιο απλό ολοκλήρωμα, θέτοντας:

$$x = a\text{εφ}\theta \Longrightarrow a^2 + x^2 = a^2 + a^2\text{εφ}^2\theta = a^2(1 + \text{εφ}^2\theta) = a^2\text{τεμ}^2\theta$$
$$x = a\text{ημ}\theta \Longrightarrow a^2 - x^2 = a^2 - a^2\text{ημ}^2\theta = a^2(1 - \text{ημ}^2\theta) = a^2\text{συν}^2\theta$$

Αφού υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, χρειάζεται να επιστρέψουμε στην αρχική μεταβλητή. Συνεπώς, πρέπει να θέσουμε περιορισμούς, ώστε η αντικατάσταση να είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση.





Όπως φαίνεται από τις πιο πάνω γραφικές παραστάσεις, για να είναι ένα προς ένα οι συναρτήσεις και να υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση χρειάζεται:

$$x = a\text{ημ}\theta \Leftrightarrow \theta = \text{τοξημ}\left(\frac{x}{a}\right), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$
$$x = a\text{εφ}\theta \Leftrightarrow \theta = \text{τοξεφ}\left(\frac{x}{a}\right), \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Παράδειγμα 1

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = 3\text{ημ}\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} dx$$

Λύση

Έχουμε ότι $dx = 3\text{συν}\theta d\theta$ και $\theta = \text{τοξημ}\left(\frac{x}{3}\right)$. Συνεπώς:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} dx = \int \frac{9\text{ημ}^2\theta \cdot 3\text{συν}\theta}{\sqrt{9 - 9\text{ημ}^2\theta}} d\theta = \int \frac{9\text{ημ}^2\theta \cdot 3\text{συν}\theta}{|3\text{συν}\theta|} d\theta$$
$$= \int 9\text{ημ}^2\theta \, d\theta = \int \frac{9}{2}(1 - \text{συν}2\theta) \, d\theta = \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\text{ημ}2\theta\right) + c$$

Έχουμε:

$$\eta\mu 2\theta = 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = 2\eta\mu\theta\sqrt{1-\eta\mu^2\theta} = 2\frac{x}{3}\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{2x\sqrt{9-x^2}}{9}$$

$$x = 3\eta\mu\theta \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{x}{3} \Rightarrow \theta = \tau o\xi\eta\mu\left(\frac{x}{3}\right)$$

Άρα:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \frac{9}{2}\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + c$$

Παράδειγμα 2

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = 2\eta\mu\theta,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx$$

Λύση

Έχουμε ότι $dx = 2\sigma\upsilon\nu\theta d\theta$ και $\theta = \tau o\xi\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$. Συνεπώς:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-4\eta\mu^2\theta}\,\cdot 2\sigma\upsilon\nu\theta\,d\theta = \int |2\sigma\upsilon\nu\theta|\cdot 2\sigma\upsilon\nu\theta\,d\theta$$
$$= \int 4\sigma\upsilon\nu^2\theta\,d\theta = \int 2(1+\sigma\upsilon\nu 2\theta)\,d\theta = 2\theta + \eta\mu 2\theta + c$$

Έχουμε:

$$\eta\mu 2\theta = 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = 2\eta\mu\theta\sqrt{1-\eta\mu^2\theta} = x\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$$

Άρα:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

Παράδειγμα 3

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = 2\varepsilon\varphi\theta,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx,\quad x \in \mathbb{R}$$

Λύση

Έχουμε ότι $dx = 2\tau\varepsilon\mu^2\theta d\theta$. Συνεπώς:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{2\tau\varepsilon\mu^2\theta}{\sqrt{4\varepsilon\varphi^2\theta+4}}d\theta = \int \frac{2\tau\varepsilon\mu^2\theta}{2|\tau\varepsilon\mu\theta|}d\theta = \int \tau\varepsilon\mu\theta\,d\theta = \ln|\tau\varepsilon\mu\theta + \varepsilon\varphi\theta| + c$$

Έχουμε:

$$\text{εφ}\theta = \frac{x}{2},\ \ \text{τεμ}\theta = \sqrt{1+\text{εφ}^2\theta} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$$

Άρα:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx = \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}+\frac{x}{2}\right| + c = \ln\left|\sqrt{4+x^2}+x\right| + c',\ \ c' = -\ln 2 + c$$

Παράδειγμα 4

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x-1 = \text{εφ}\theta,\ \ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{(x^2-2x+2)^2}dx,\ \ x \in \mathbb{R}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι:

$$x^2-2x+2 = x^2-2x+1+1 = (x-1)^2+1,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε ότι $dx = \text{τεμ}^2\theta d\theta$ και $\theta = \text{τοξεφ}(x-1)$.

Συνεπώς:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2-2x+2)^2}dx &= \int \frac{\text{τεμ}^2\theta}{(\text{εφ}^2\theta+1)^2}d\theta = \int \frac{\text{τεμ}^2\theta}{\text{τεμ}^4\theta}d\theta \\ &= \int \text{συν}^2\theta\, d\theta = \int \frac{1+\text{συν}2\theta}{2}d\theta \\ &= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\text{ημ}2\theta + c = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\cdot\frac{2\text{εφ}\theta}{\text{εφ}^2\theta+1} + c \\ &= \frac{1}{2}\text{τοξεφ}(x-1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{(x-1)^2+1} + c\end{aligned}$$

Δραστηριότητες

1. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται σε κάθε περίπτωση, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

   (α) $\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx, \quad x = 4\text{ημ}\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

   (β) $\int \sqrt{4+x^2}\,dx, \quad x = 2\text{εφ}\theta, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

   (γ) $\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}dx, \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{ημ}\theta, \;\; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

   (δ) $\int \frac{1}{(x^2+4)^3}dx, \quad x = 2\text{εφ}\theta, \;\; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

   (ε) $\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx, \;\; x = \text{εφ}\theta, \;\; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

2. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται σε κάθε περίπτωση, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

   (α) $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx, \quad x+1 = 2\eta\mu\theta, \;\; 0 < \theta < \pi$

   (β) $\int \sqrt{2x^2+12x+8}\,dx, \quad x+3 = \sqrt{5}\text{τεμ}\theta, \;\; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

   (γ) $\int \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx, \quad x-1 = \sqrt{2}\text{ημ}\theta, \;\; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

   (δ) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx, \;\; x = \text{ημ}^2\theta, \;\; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

   (ε) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx, \;\; x = \text{τεμ}\theta, \;\; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

3.6.6 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Στην υποενότητα αυτή θα γνωρίσουμε έναν γενικό τρόπο εύρεσης ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx, \ \ g(x) \neq 0,$$

όπου f και g ακέραιες πολυωνυμικές συναρτήσεις της μεταβλητής x.

Αρχικά, θα υπενθυμίσουμε τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζονται ολοκληρώματα των μορφών:

$$\int \frac{A}{ax+\beta}dx, \ \ \int \frac{A}{(ax+\beta)^2}dx$$

Στη συνέχεια, θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζονται ολοκληρώματα των μορφών

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+a^2}dx, \ \ \int \frac{Ax+B}{ax^2+\beta x+\gamma}dx,$$

όπου ο παρονομαστής έχει ρίζες μη πραγματικές.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-3x+4}dx$

(β) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)^4}dx$

(γ) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4}dx, \ \ x \in \mathbb{R}$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+4}dx = \int \frac{1}{x^2-3x+4}d(x^2-3x+4) = \ln|x^2-3x+4| + c$$

(β) Έχουμε:

$$\int \frac{1}{(x+2)^4}dx = \int (x+2)^{-4}\,dx = -\frac{1}{3}(x+2)^{-3} + c = -\frac{1}{3(x+2)^3} + c$$

(γ) Έχουμε:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4}dx = \int \frac{x}{x^2+4}dx + \int \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\text{τοξεφ}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{2}{(x-2)(x+2)}dx$$

Λύση

Στον παρονομαστή έχουμε δύο διαφορετικούς παράγοντες πρώτου βαθμού. Έτσι:

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη της εξίσωσης με $(x+2)(x-2)$, έχουμε:

$$2 \equiv A(x-2) + B(x+2) \Rightarrow 2 \equiv (A+B)x + 2(B-A)$$

Επομένως:

$$\left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ 2(B-A)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{2},\ \ B = \frac{1}{2}$$

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2-4}dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^3-10x-10}{x^2-x-12}dx$$

Λύση

Στη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3-10x-10}{x^2-x-12},$$

ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρονομαστή. Έτσι, πρέπει να διαιρέσουμε.

Έχουμε ότι:

$$\frac{x^3-10x-10}{x^2-x-12} = x + 1 + \frac{3x+2}{x^2-x-12}$$

Αναλύουμε το τελευταίο κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{3x+2}{x^2-x-12} \equiv \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-4} \Rightarrow 3x+2 \equiv A(x-4) + B(x+3)$$

Εδώ, αντί να συγκρίνουμε συντελεστές, μπορούμε να δώσουμε τιμές στο x. Έχουμε:

$$x = -3 \Longrightarrow 3\cdot(-3) + 2 = A\cdot(-7) + B\cdot 0 \ \Longrightarrow A = 1$$
$$x = 4 \Longrightarrow 3\cdot 4 + 2 = A\cdot 0 + B\cdot 7 \Longrightarrow B = 2$$

Έτσι

$$\frac{x^3-10x-10}{x^2-x-12}=x+1+\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-4}$$

και το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int\frac{x^3-10x-10}{x^2-x-12}dx=\int\left(x+1+\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-4}\right)dx=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x+3|+2\ln|x-4|+c$$

Παράδειγμα 4

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$$

Λύση

Θα αναλύσουμε τη συνάρτηση προς ολοκλήρωση σε άθροισμα κλασμάτων της μορφής:

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\equiv\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{\Gamma}{x-1}+\frac{\Delta}{(x-1)^2}$$

Έχουμε:

$$-2x+4\equiv(Ax+B)(x-1)^2+\Gamma(x-1)(x^2+1)+\Delta(x^2+1)$$
$$\Longrightarrow -2x+4\equiv(A+\Gamma)x^3+(-2A+B-\Gamma+\Delta)x^2+(A-2B+\Gamma)x+(B-\Gamma+\Delta)$$

Συγκρίνοντας συντελεστές, παίρνουμε:

$$\begin{cases} A+\Gamma=0\\ -2A+B-\Gamma+\Delta=0\\ A-2B+\Gamma=-2\\ B-\Gamma+\Delta=4\end{cases}$$

Η λύση του πιο πάνω συστήματος είναι $A=2,\ B=1,\ \Gamma=-2,\ \Delta=1$. Έτσι:

$$\int\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx=\int\frac{2x+1}{x^2+1}dx-\int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx$$
$$=\ln(x^2+1)+\text{τοξεφ}x-2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$$

Προτού προχωρήσουμε στα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+\beta x+\gamma}dx,$$

όπου ο παρονομαστής έχει ρίζες μη πραγματικές, υπενθυμίζουμε ότι τα τριώνυμα αυτά γράφονται σαν άθροισμα τετραγώνων. Για παράδειγμα:

$$x^2-6x+13=x^2-6x+9+4=(x-3)^2+2^2$$
$$4x^2+4x+10=4x^2+4x+1+9=(2x+1)^2+3^2$$

Παράδειγμα 5

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1$$

Θέτουμε $x+1=u$. Έτσι, $dx=du$ και:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \int \frac{1}{u^2+1}du = \text{τοξεφ}\, u + c = \text{τοξεφ}(x+1)+c$$

Παράδειγμα 6

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{6x-13}{x^2-4x+8}dx$$

Λύση

Έχουμε ότι:

$$6x-13 = 6x-12-1 = 6(x-2)-1, \quad x^2-4x+8 = (x-2)^2+4$$

Θέτουμε $x-2=u$. Έτσι, $dx=du$ και:

$$\begin{aligned}
\int \frac{6x-13}{x^2-4x+8}dx &= \int \frac{6(x-2)-1}{(x-2)^2+4}dx = \int \frac{6u-1}{u^2+4}du \\
&= \int \frac{6u}{u^2+4}du - \int \frac{1}{u^2+4}du = 3\int \frac{2u}{u^2+4}du - \int \frac{1}{u^2+4}du \\
&= 3\int \frac{2u}{u^2+4}du - \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1}du \\
&= 3\ln(u^2+4) - \frac{1}{4}\cdot 2\text{τοξεφ}\left(\frac{u}{2}\right)+c \qquad (u^2+4>0) \\
&= 3\ln(x^2-4x+8) - \frac{1}{2}\text{τοξεφ}\left(\frac{x-2}{2}\right)+c
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{3+\sigma\upsilon\nu x}dx,\ \ x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Λύση

Θέτουμε $t = \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$. Επομένως, $x = 2\tau o\xi\varepsilon\varphi t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$.

Έχουμε:

$$\int \frac{1}{3+\sigma\upsilon\nu x}dx = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt = \int \frac{2}{2t^2+4}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c$$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int \frac{6x}{x^2-4}dx$

(β) $\int \frac{2x-7}{x^2-7x+3}dx$

(γ) $\int \frac{1}{x^2+2x}dx$

(δ) $\int \frac{2}{x^2-9}dx$

(ε) $\int \frac{5x+4}{x^2+x-2}dx$

(στ) $\int \frac{6x-4}{x^2-6x+13}$

(ζ) $\int \frac{x^3+2x+6}{x^2+x-2}dx$

(η) $\int \frac{5x}{(x^2+4)(x+1)}dx$

(θ) $\int \frac{2x}{x^2-2x+10}dx$

(ι) $\int \frac{1}{x^2+10x+29}dx$

(ια) $\int \frac{1}{x^3(x+1)}dx$

(ιβ) $\int \frac{1}{x^4-1}dx$

(ιγ) $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx$

(ιδ) $\int \frac{10}{3\eta\mu x+4\sigma\upsilon\nu x}dx,\ \ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

(ιε) $\int \frac{8}{3+5\eta\mu 2x}dx,\ \ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

(ιστ) $\int \frac{1}{5+3\sigma\upsilon\nu x}dx,\ \ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

3.6.7 Ολοκληρώματα αναγωγικού τύπου

Πολλά αόριστα ολοκληρώματα είναι δυνατόν να υπολογιστούν με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Αυτό συμβαίνει συνήθως όταν κάποιος από τους όρους του ολοκληρώματος είναι υψωμένος σε μια δύναμη, ώστε με την ολοκλήρωση κατά παράγοντες να πάρουμε όρους με μικρότερο εκθέτη. Συχνά είναι δυνατόν να βρεθεί κάποιος αναγωγικός τύπος για αυτή τη διαδικασία, τον οποίο εφαρμόζουμε μέχρι να καταλήξουμε σε ολοκλήρωμα που μπορεί να υπολογιστεί απευθείας.

Παράδειγμα 1

Αν

$$I_\nu = \int (\ln x)^\nu \, dx, \;\; \nu \in \mathbb{N}_0$$

να δείξετε ότι:

$$I_0 = x + c \;\text{ και }\; I_\nu = x(\ln x)^\nu - \nu I_{\nu-1}\,, \;\; \nu \geq 1$$

Στη συνέχεια, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int (\ln x)^5 \, dx$$

Λύση

Έχουμε:

$$I_0 = \int (\ln x)^0 dx = \int 1 \, dx = x + c$$

Αν ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες (για $\nu \geq 1$), έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} I_\nu = \int (\ln x)^\nu \, dx &= x(\ln x)^\nu - \int x \, d(\ln x)^\nu \\ &= x(\ln x)^\nu - \int x \cdot \nu (\ln x)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x(\ln x)^\nu - \nu \int (\ln x)^{\nu-1} \, dx \\ &= x(\ln x)^\nu - \nu I_{\nu-1} \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τον πιο πάνω αναγωγικό τύπο:

$$\begin{aligned} \int (\ln x)^5 \, dx = I_5 &= x(\ln x)^5 - 5I_4 \\ &= x(\ln x)^5 - 5[x(\ln x)^4 - 4I_3] \\ &= x(\ln x)^5 - 5x(\ln x)^4 + 20 \cdot [x(\ln x)^3 - 3I_2] \\ &= x(\ln x)^5 - 5x(\ln x)^4 + 20x(\ln x)^3 - 60[x(\ln x)^2 - 2I_1] \\ &= x(\ln x)^5 - 5x(\ln x)^4 + 20x(\ln x)^3 - 60x(\ln x)^2 + 120I_1 \\ &= x(\ln x)^5 - 5x(\ln x)^4 + 20x(\ln x)^3 - 60x(\ln x)^2 + 120(x \ln x - 1 \cdot I_0) \\ &= x(\ln x)^5 - 5x(\ln x)^4 + 20x(\ln x)^3 - 60x(\ln x)^2 + 120x \ln x - 120x + c \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Αν

$$I_\nu = \int \eta\mu^\nu x\, dx, \quad \nu \in \mathbb{N}_0,$$

τότε να βρείτε τα ολοκληρώματα I_0 και I_1 και να δείξετε ότι:

$$I_\nu = -\frac{1}{\nu}\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + \frac{\nu-1}{\nu}I_{\nu-2}, \quad \nu \geq 2$$

Στη συνέχεια, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \eta\mu^6 x\, dx$$

Λύση

Έχουμε

$$I_0 = \int (\eta\mu x)^0 dx = \int 1\, dx = x + c_1$$

και:

$$I_1 = \int (\eta\mu x)^1 dx = \int \eta\mu x\, dx = -\sigma\upsilon\nu x + c_2$$

Για $\nu \geq 2$, ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, έχουμε:

$$\begin{aligned}
I_\nu &= \int \eta\mu^\nu x\, dx = \int \eta\mu^{\nu-1}x\, d(-\sigma\upsilon\nu x) \\
&= -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + \int \sigma\upsilon\nu x \cdot (\nu-1)\eta\mu^{\nu-2}x\sigma\upsilon\nu x\, dx \\
&= -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)\int (1-\eta\mu^2 x)\eta\mu^{\nu-2}x\, dx \\
&= -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)\int \eta\mu^{\nu-2}x\, dx - (\nu-1)\int \eta\mu^\nu x\, dx \\
\Rightarrow I_\nu &= -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)I_{\nu-2} - (\nu-1)I_\nu
\end{aligned}$$

Λύνουμε την τελευταία εξίσωση ως προς το ολοκλήρωμα I_ν:

$$\begin{aligned}
I_\nu + (\nu-1)I_\nu &= -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)I_{\nu-2} \\
\Longrightarrow \nu I_\nu &= -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)I_{\nu-2} \\
\Longrightarrow I_\nu &= -\frac{1}{\nu}\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + \frac{\nu-1}{\nu}I_{\nu-2}
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int \eta\mu^6 x\, dx = I_6 &= -\frac{1}{6}\eta\mu^5 x\sigma\upsilon\nu x + \frac{5}{6}I_4 \\
&= -\frac{1}{6}\eta\mu^5 x\sigma\upsilon\nu x + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{4}I_2\right) \\
&= -\frac{1}{6}\eta\mu^5 x\sigma\upsilon\nu x - \frac{5}{24}\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu x + \frac{5}{8}I_2 \\
&= -\frac{1}{6}\eta\mu^5 x\sigma\upsilon\nu x - \frac{5}{24}\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu x + \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{2}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}I_0\right) \\
&= -\frac{1}{6}\eta\mu^5 x\sigma\upsilon\nu x - \frac{5}{24}\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu x - \frac{5}{16}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \frac{5}{16}x + c
\end{aligned}$$

Δραστηριότητες

1. Να αποδείξετε τους πιο κάτω αναγωγικούς τύπους:

(α) $\int x^\nu e^x\,dx = x^\nu e^x - \nu\int x^{\nu-1}e^x\,dx,\ \ \nu\in\mathbb{N}$

(β) $I_\nu = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^\nu - \frac{\nu}{2}I_{\nu-1}\,, \nu > 1,$ όπου $I_\nu = \int x(\ln x)^\nu\,dx,\ \ \nu\in\mathbb{N}$

(γ) $I_\nu = \frac{\text{εφ}^{\nu-1}x}{\nu-1} - I_{\nu-2}\,, \nu\geq 2,$ όπου $I_\nu = \int \text{εφ}^\nu x\,dx,\ \ \nu\in\mathbb{N}_0$

2. Αν

$$I_\nu = \int x^\nu \text{ημ}2x\,dx,\ \ \nu\in\mathbb{N}_0$$

τότε να βρείτε τα ολοκληρώματα I_0 και I_1 και να δείξετε ότι:

$$I_\nu = -\frac{1}{2}x^\nu\text{συν}2x + \frac{1}{4}\nu x^{\nu-1}\text{ημ}2x - \frac{1}{4}\nu(\nu-1)I_{\nu-2},\ \ \nu\geq 2$$

Στη συνέχεια, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int x^4\text{ημ}2x\,dx$$

3.7 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Όπως αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου, μια από τις πιο σημαντικές εφαρμογές των αόριστων ολοκληρωμάτων είναι ο υπολογισμός μιας συνάρτησης όταν γνωρίζουμε μια σχέση για τις παραγώγους της και κάποιες αρχικές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί. Προβλήματα αυτής της μορφής ονομάζονται **προβλήματα αρχικών τιμών**.

Παράδειγμα 1

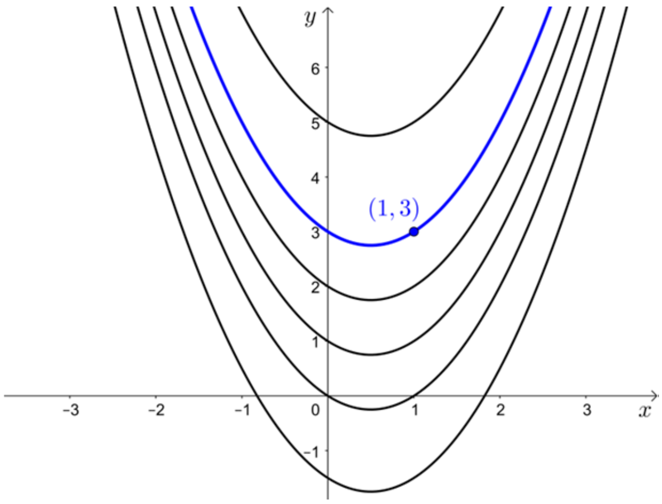
Να βρείτε τη συνάρτηση g, αν $g'(x) = 2x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(1) = 3$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$g(x) = \int (2x - 1)\, dx = x^2 - x + c$$

Μερικές γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων αυτής της μορφής παρουσιάζονται στο ακόλουθο σχήμα.



Θέλουμε να υπολογίσουμε την σταθερά c, ώστε να πάρουμε αυτή που περνά από το σημείο $(1, 3)$. Αντικαθιστώντας την αρχική συνθήκη στην πιο πάνω εξίσωση, έχουμε ότι:

$$g(1) = 3 \Longrightarrow 1^2 - 1 + c = 3 \Longrightarrow c = 3$$

Άρα, $g(x) = x^2 - x + 3$.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε συνάρτηση f για την οποία $f''(x) = 6x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η γραφική της παράσταση να περνά από το σημείο $A(1,2)$ και η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο A να είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.

Λύση

Οι αρχικές συνθήκες είναι $f(1) = 2$ και $f'(1) = 0$. Έχουμε ότι:

$$f'(x) = \int 6x\,dx = 3x^2 + c_1$$

Υπολογίζουμε τη σταθερά με την δεύτερη συνθήκη:

$$f'(1) = 0 \Longrightarrow 3 \cdot 1^2 + c_1 = 0 \Longrightarrow c_1 = -3$$

Άρα, $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ολοκληρώνουμε ξανά για να υπολογίσουμε την f:

$$f(x) = \int (3x^2 - 3)\,dx = x^3 - 3x + c_2$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε την πρώτη συνθήκη για να υπολογίσουμε την νέα σταθερά:

$$f(1) = 2 \quad \Longrightarrow \quad 1^3 - 3 \cdot 1 + c_2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = 4$$

Έτσι, $f(x) = x^3 - 3x + 4$.

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τη συνάρτηση f σε κάθε μία από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

   (α) $f'(x) = 3x - 2,\ f(1) = 1$

   (β) $f'(x) = \sqrt{x-2},\ f(3) = 2$

   (γ) $f''(x) = 2 - 6x,\ f'(0) = 4,\ f(0) = 1$

   (δ) $f''(x) = \frac{2}{x^3},\ f'(1) = 1,\ f(1) = 1$

   (ε) $f''(x) = 2,\ f(1) = f(3) = 0$

   (στ) $f'(x)e^{f(x)} = 2 + \ln x$ και η γραφική παράσταση της f να περνά από το σημείο $(e, 0)$.

2. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, της οποίας η γραφική παράσταση έχει οριζόντια εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων και για την οποία ισχύει ότι:

$$f''(x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2}\ ,\quad x \in \mathbb{R}$$

3. Αν $f''(x) = 4x^3 + 2x,\ \ x \in \mathbb{R}$ και $f'(1) = 4$, να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int 9x^2\sqrt{x^3+5}\,dx$

(β) $\int \left(\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\right)dx$

(γ) $\int \frac{ημ^3 x}{συν^2 x}dx$

(δ) $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

(ε) $\int \sqrt{x}\sqrt{1+x^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(στ) $\int συν\sqrt{x}\,dx$

(ζ) $\int ημx\; συνx\; e^{ημx}\,dx$

(η) $\int 4x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

(θ) $\int ημ^7 x\; συν^3 x\,dx$

(ι) $\int ημ7x\; συν3x\,dx$

(ια) $\int \frac{ημ^4 x}{συν^6 x}dx$

(ιβ) $\int ημ2x\; συν^6 x\,dx$

(ιγ) $\int \sqrt{1-ημ2x}\,dx,\;\; x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

(ιδ) $\int (x^2+1)e^x\,dx$

(ιε) $\int e^{ax}ημ(\beta x)\,dx$

(ιστ) $\int τοξσυνx\,dx$

(ιζ) $\int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}dx$

(ιη) $\int \frac{x-1}{x^2+2x+10}dx$

(ιθ) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-7}dx$

(κ) $\int \frac{1}{1+ημx}dx,\;\; t=εφ\left(\frac{x}{2}\right),\;\; x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

(κα) $\int \frac{1}{3+2συν2x-ημ2x}dx,\;\; t=εφx,\;\; x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

(κβ) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx,\;\; x=εφ\theta,\;\; \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

(κγ) $\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x^2+3x}}dx,\;\; x+3=\frac{1}{t}$

2. Να δείξετε ότι:

$$\int f''(x)g(x)\,dx = f'(x)g(x)-f(x)g'(x)+\int f(x)g''(x)\,dx$$

Ακολούθως, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int x^2e^x\,dx$$

3. (α) Να δείξετε ότι:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

(β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{\text{τοξεφ}\, x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx$$

4. (α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{2\text{συν}x-\text{ημ}x}{\text{συν}x+2\text{ημ}x}dx$$

(β) Να βρείτε τις σταθερές $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε:

$$\text{συν}x\equiv \alpha(\text{συν}x+2\text{ημ}x)+\beta(2\text{συν}x-\text{ημ}x)$$

(γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{\text{συν}x}{\text{συν}x+2\text{ημ}x}dx$$

5. Να βρείτε τα αόριστα ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό:

(α) $\displaystyle\int \frac{7}{2x\sqrt{\ln(x)}}dx,\quad x\in(1,+\infty)$

(β) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x+1)\ln(e^x+1)}dx,\quad x\in\mathbb{R}$

(γ) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-2}}dx,\quad x=\sqrt{2}\text{τεμ}\theta\ ,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

(δ) $\displaystyle\int \sqrt{(\text{εφ}\theta)}\ d\theta,\ \ t=\sqrt{(\text{εφ}\theta)},\ \ \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

6. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\displaystyle\int x(\text{τοξεφ}x)^2\,dx=\frac{1}{2}(x^2+1)(\text{τοξεφ}x)^2-x(\text{τοξεφ}x)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)+c$

(β) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)^3}dx=\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+c$

7. Αν

$$I_\nu = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^\nu}dx,\quad \nu \in \mathbb{N},$$

τότε:

(α) Να αποδείξετε τον αναγωγικό τύπο:

$$I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^\nu} + \frac{2\nu-1}{2\nu a^2}I_\nu$$

(β) Να βρείτε τα ολοκληρώματα I_2 και I_3.

8. Να βρείτε συνάρτηση $f\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$ και να έχει κλίση στο σημείο A ίση με 3.

9. Αν η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σε διάστημα Δ, να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int e^x\big(f(x)+f'(x)\big)\,dx$$

Στη συνέχεια, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)\ dx$$

10. Να βρείτε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

(α) $f\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων και για κάθε $x>0$ ισχύει ότι $f^2(x)f'(x) = x^2+1$.

(β) $xf'(x) = e^x - f(x),\ x\neq 0$ και $f(2)=0$

(γ) $2xf'(x)+x^2f''(x) = 2x+1,\ x\neq 0$ και $f'(1)=f(1)=2$

11. Να βρείτε τη συνάρτηση f, η οποία έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $A(4,\ 4)$ και ισχύει ότι:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}\ ,\quad x\neq 3$$

12. Δίνεται ότι για τη συνάρτηση f ισχύει $f''(x)-3f'(x)+2f(x)=0, x\in\mathbb{R}$, $f'(0)=3$ και $f(0)=2$.

(α) Αν $u(x)=f'(x)-f(x)$, να δείξετε ότι $u'(x)-2u(x)=0$.

(β) Να βρείτε τον τύπο της u.

(γ) Να δείξετε ότι $\big(e^{-x}f(x)\big)' = e^x$ και να βρείτε την f.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να βρείτε μια παράγουσα της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = |3x - 6|,\ x \in \mathbb{R}$.

2. Είναι γνωστό ότι μια συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ έχει πάντα παράγουσα στο Δ.Να δείξετε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, χρησιμοποιώντας ως αντιπαράδειγμα τη συνάρτηση f με τύπο:
$$f(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

3. Να δείξετε ότι οι δύο πιο κάτω συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = -\frac{2}{x^3},\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$:
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 0 \\ \frac{1}{x^2}, & x < 0 \end{cases}, \qquad G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + 5, & x > 0 \\ \frac{1}{x^2} - 5, & x < 0 \end{cases}$$
Γιατί είναι λάθος να γράψουμε
$$\int\left(-\frac{2}{x^3}\right)dx = \frac{1}{x^2} + c,\ \ x \in \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty);$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

ΣΕΙΡΕΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

4.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΕΙΡΑΣ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Ορισμός

Έστω $(\alpha_\nu), \nu \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών.
Τότε ορίζονται επαγωγικά τα πιο κάτω αθροίσματα:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$s_{\nu+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{\nu+1} = s_\nu + a_{\nu+1}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Τα πιο πάνω αθροίσματα είναι μονοσήμαντα ορισμένα και ορίζουν μια νέα ακολουθία, την $(s_\nu), \nu \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο τον $s_\nu = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_\nu$.
Η ακολουθία $(s_\nu), \nu \in \mathbb{N}$, που συμβολίζεται με $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ ή συντομότερα

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} a_\kappa$$

λέγεται **σειρά των πραγματικών αριθμών** $\boldsymbol{a_\nu, \nu} \in \mathbb{N}$.

Κάθε άθροισμα s_ν λέγεται **μερικό $\boldsymbol{\nu}$ −οστό άθροισμα** της ακολουθίας $(a_\nu), \nu \in \mathbb{N}$ ενώ οι όροι της ακολουθίας $a_\nu, \nu \in \mathbb{N}$, δηλαδή $a_1, a_2, a_3, \ldots$λέγονται **όροι** της σειράς.

Για παράδειγμα, από την ακολουθία με γενικό όρο: $a_\nu = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, έχουμε:

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{2}, \qquad s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2, s_3 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Ο γενικός όρος της ακολουθίας $s_1, s_2, s_3, \ldots$ είναι

$$s_\nu = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_\nu = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^\nu = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\nu\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\nu,$$

ως άθροισμα ν όρων γεωμετρικής ακολουθίας.

Δηλαδή, για την ακολουθία $a_\nu = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, έχουμε:

- Το μερικό άθροισμα: $s_\nu = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_\nu = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\nu$
- Τη σειρά των πραγματικών αριθμών $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} a_\kappa = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots = \sum_{\kappa=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^\kappa$$

Η σειρά στο παράδειγμα μας είναι άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου (Σ_∞) με πρώτον όρο το $a_1 = \frac{1}{2}$ και $\lambda = \frac{1}{2} < 1$. Όπως είναι γνωστό, ισχύει ότι:

$$(\Sigma_\infty) = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Για λόγους συντομίας και πιο απλής γραφής, το άθροισμα $s_\nu = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_\nu$ συμβολίζεται με το ελληνικό Σ και γράφεται:

$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa$$

Το πιο πάνω σύμβολο διαβάζεται «το άθροισμα των αριθμών a_κ από το 1 ως το ν».
Ο συμβολισμός $\kappa = 1$ κάτω από το σύμβολο Σ δηλώνει ότι το 1 είναι η πρώτη τιμή που παίρνει το κ και το $\kappa = \nu$ πάνω από το σύμβολο του Σ δηλώνει ότι ο κ θα διατρέξει όλους τους φυσικούς αριθμούς από το $\kappa = 1$ ως το $\kappa = \nu$. Το σύμβολο Σ μας δηλώνει ότι πρέπει να προσθέσουμε όλους τους όρους που πήραμε από τις τιμές, όταν θέσαμε διαδοχικά $\kappa = 1, \kappa = 2, \ldots, \kappa = \nu$.
Για παράδειγμα, έχουμε:

$$\sum_{\kappa=1}^{4} \kappa^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 \quad \text{ή} \quad \sum_{\kappa=1}^{3} \left(\frac{1}{\kappa}\right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

Όταν γράφουμε

$$\sum_{\kappa=\nu_0}^{\nu} a_\kappa \,,$$

εννοούμε το άθροισμα των όρων a_κ, με το κ να είναι ο **δείκτης** του αθροίσματος και να παίρνει τιμές από το ν_0 μέχρι και το ν. Τα ν_0 και ν λέγονται **άκρα** του αθροίσματος.
Για παράδειγμα, το άθροισμα $4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$, μπορούμε να το γράψουμε χρησιμοποιώντας τον Σ συμβολισμό ως:

$$4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = \sum_{\kappa=4}^{8} \kappa^2 \quad \text{ή} \quad \sum_{\kappa=1}^{5} (\kappa + 3)^2 \quad \text{κτλ}$$

Παρατηρήσεις

- Ως δείκτης μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή, χωρίς να αλλοιωθεί το άθροισμα. Για παράδειγμα:

$$\sum_{\kappa=1}^{5} a_\kappa = \sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

- Μπορούμε να αλλάξουμε τον δείκτη και τα άκρα ενός αθροίσματος, χωρίς να αλλάξει το τελικό άθροισμα. Για παράδειγμα:

$$\sum_{\kappa=5}^{9} 2^{\kappa-4} = \sum_{i=1}^{5} 2^i$$

  Αυτό γιατί για $i = \kappa - 4$, όταν η τιμή του κ είναι $\kappa = 5$, το $i = 5 - 4 = 1$, ενώ όταν $\kappa = 9$, η αντίστοιχη τιμή του i είναι $i = 9 - 4 = 5$.

- Όταν έχουμε το άθροισμα $6^3+7^3+8^3+9^3+10^3$, μπορούμε να το γράψουμε ως

$$6^3+7^3+8^3+9^3+10^3=\sum_{\kappa=6}^{10}\kappa^3$$

  ή ακόμη:

$$\sum_{\kappa=1}^{5}(\kappa+5)^3$$

- Το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}a$$

  περιέχει ν ίσους προσθετέους και μπορεί να γραφεί ως:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}a=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{\nu-\text{φορές}}=\nu a$$

- Όταν έχουμε έναν μόνο όρο, προφανώς γράφουμε:

$$\sum_{\kappa=1}^{1}a_\kappa=a_1$$

Παρατήρηση

- Αν δοθεί η ακολουθία $s_\nu, \nu\in\mathbb{N}$, εύκολα προσδιορίζεται η ακολουθία a_ν. Έχουμε $a_1=s_1$ και $a_\nu=s_\nu-s_{\nu-1}, \forall\nu\geq 2$. Για παράδειγμα, αν είναι γνωστό το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας, $S_\nu=\nu^2, \nu\in\mathbb{N}$, τότε ο γενικός όρος της ακολουθίας υπολογίζεται από την σχέση $a_\nu=s_\nu-s_{\nu-1}=\nu^2-(\nu-1)^2=2\nu-1$.

Παράδειγμα 1

(α) Να γράψετε το πιο κάτω άθροισμα, χρησιμοποιώντας τον Σ συμβολισμό:

$$1^3+3^3+5^3+7^3+9^3+11^3$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{\kappa=1}^{4}(\kappa^3+2)$$

Λύση

(α) Η ακολουθία 1,3,5,7, … έχει γενικό όρο $\alpha_\kappa=(2\kappa-1)$. Επομένως, έχουμε:

$$1^3+3^3+5^3+7^3+9^3+11^3=\sum_{\kappa=1}^{6}(2\kappa-1)^3$$

(β) Το άθροισμα έχει 4 όρους. Δηλαδή:

$$\sum_{\kappa=1}^{4}(\kappa^3+2)=(1^3+2)+(2^3+2)+(3^3+2)+(4^3+2)=3+10+29+66=108$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα των πιο κάτω σειρών:

(α) $\sum_{\kappa=1}^{+\infty}(3\kappa - 1)$ (β) $\sum_{\kappa=1}^{+\infty}(3 \cdot 2^{\kappa-1})$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu}(3\kappa - 1) = 2 + 5 + 8 + 11 + \cdots + 3\nu - 1$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $a_1 = 2$ και σταθερή διαφορά $\delta = 3$.

Επομένως:

$$s_\nu = \frac{\nu}{2}(a_1 + a_\nu) \Rightarrow s_\nu = \frac{\nu}{2} \cdot (2 + 3\nu - 1) = \frac{\nu}{2}(3\nu + 1)$$

(β) Έχουμε:

$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu}(3 \cdot 2^{\kappa-1}) = 3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + 3 \cdot 2^{\nu-1}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $a_1 = 3$ και σταθερό λόγο $\lambda = 2$.

Επομένως:

$$s_\nu = \frac{a_1(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1} \Rightarrow s_\nu = \frac{3(2^\nu - 1)}{2 - 1} = 3(2^\nu - 1)$$

Παράδειγμα 3

Δίνεται ότι το μερικό άθροισμα μιας σειράς είναι ίσο με $s_\nu = \nu^2(\nu + 1), \nu \in \mathbb{N}$. Να σχηματίσετε τη σειρά.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $a_\nu = s_\nu - s_{\nu-1}$, μπορούμε να υπολογίσουμε τον γενικό όρο της ακολουθίας που αντιστοιχεί στο μερικό άθροισμα s_ν. Έτσι:

$$a_\nu = s_\nu - s_{\nu-1} = \nu^2(\nu + 1) - (\nu - 1)^2\nu = \nu[\nu(\nu + 1) - (\nu - 1)^2] = \nu(3\nu - 1)$$

Επομένως, η σειρά που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο μερικό άθροισμα είναι:

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\nu(3\nu - 1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \cdots$$

4.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ Σ – ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΥ

Από τις απλές ιδιότητες της πράξης της πρόσθεσης, προκύπτουν άμεσα οι πιο κάτω ιδιότητες:

Ιδιότητα	**Παράδειγμα**
Αν $a_\kappa = c$, c σταθερό, τότε $\sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa = \nu c$.	$\sum_{\kappa=1}^{\nu} 3 = 3\nu$
$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(a_\kappa \pm \beta_\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa \pm \sum_{\kappa=1}^{\nu} \beta_\kappa$	$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\kappa^3 \pm \kappa^2) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^3 \pm \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^2$
$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\lambda a_\kappa + \mu\beta_\kappa) = \lambda\sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa + \mu\sum_{\kappa=1}^{\nu} \beta_\kappa$	$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(4\kappa^3 - 6\kappa^2) = 4\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^3 - 6\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^2$
$\sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa = \sum_{\kappa=1}^{\rho} a_\kappa + \sum_{\kappa=\rho+1}^{\nu} a_\kappa,\ \rho \in \mathbb{N},\ \rho < \nu$	$\sum_{\kappa=1}^{20} \kappa^2 = \sum_{\kappa=1}^{10} \kappa^2 + \sum_{\kappa=11}^{20} \kappa^2$

Παράδειγμα 1

Δίνεται ότι:

$$\sum_{\kappa=1}^{30} a_\kappa = 200, \quad \sum_{\kappa=1}^{30} \beta_\kappa = 100$$

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω αθροίσματα:

(α) $\sum_{\kappa=1}^{30}(3a_\kappa)$

(β) $\sum_{\kappa=1}^{30}(a_\kappa + \beta_\kappa)$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\sum_{\kappa=1}^{30} 3a_\kappa = 3\sum_{\kappa=1}^{30} a_\kappa = 3 \cdot 200 = 600$$

(β) Έχουμε:

$$\sum_{\kappa=1}^{30}(a_\kappa + \beta_\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{30} a_\kappa + \sum_{\kappa=1}^{30} \beta_\kappa = 200 + 100 = 300$$

Δραστηριότητες

1. Να γράψετε τα πιο κάτω αθροίσματα, χρησιμοποιώντας τον Σ συμβολισμό:

(α) $\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{8}+\sqrt{9}+\sqrt{10}+\sqrt{11}$

(β) $2+1+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6}+\frac{2}{7}$

(γ) $2^2+5^2+8^2+11^2+\cdots+26^2+29^2$

(δ) $2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots+2\cdot 3^{15}$

2. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω αθροίσματα:

(α) $\displaystyle\sum_{\nu=3}^{7}\left(\frac{\nu-4}{\nu}\right)$ (β) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{50}(-1)^{\nu-1}$

(γ) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}(i^2+3i-1)$

3. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\sum_{\kappa=1}^{10}(3\kappa+\lambda)=245$$

4. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω μερικά αθροίσματα:

(α) $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\nu}(2\cdot 4^{\kappa-1})$ (β) $\displaystyle\sum_{\kappa=11}^{\nu}(5)$ (γ) $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\nu}(2^{-\kappa})$

5. Δίνεται ότι το μερικό άθροισμα μιας σειράς είναι ίσο με $s_\nu=\nu^2+4\nu, \nu\in\mathbb{N}$. Να σχηματίσετε τη σειρά.

6. Δίνεται ότι:

$$\sum_{\kappa=1}^{30}a_\kappa=300,\quad \sum_{\kappa=1}^{30}\beta_\kappa=-50$$

Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{\kappa=1}^{30}(4a_\kappa-3\beta_\kappa)$$

4.3 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΑΣ

Ορισμός

Η σειρά

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} a_\kappa$$

μιας ακολουθίας (a_ν) **συγκλίνει** προς τον πραγματικό αριθμό s, αν και μόνον αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_\nu = a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνει προς τον πραγματικό αριθμό s.

Δηλαδή:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} a_\kappa = s \Leftrightarrow \lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = \lim_{\nu\to+\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu) = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa\right) = s$$

Παρατηρήσεις

- Ο πραγματικός αριθμός s, στον οποίο συγκλίνει η σειρά, λέγεται **άθροισμα της** σειράς:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} a_\kappa$$

- Η λέξη *άθροισμα* χρησιμοποιείται εδώ με διαφορετική σημασία, γιατί **δεν** έχουμε πεπερασμένου πλήθους προσθετέους $a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu$, αλλά άπειρου πλήθους. Έτσι, το **άθροισμα με άπειρους προσθετέους** $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ υπολογίζεται από το **όριο ακολουθίας**. Δηλαδή

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \lim_{\nu\to+\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu)$$

  και μπορεί να είναι είτε πραγματικός αριθμός είτε να μην υπάρχει είτε να τείνει προς το $\pm\infty$.
- Όταν η σειρά

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} a_\kappa$$

  είναι **συγκλίνουσα**, λέγεται ότι η ακολουθία $a_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι **αθροίσιμη**.
- Όταν το

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} a_\kappa$$

  δεν υπάρχει, τότε η σειρά **αποκλίνει**.
- Όταν

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} a_\kappa = +\infty \text{ ή } \sum_{\kappa=1}^{+\infty} a_\kappa = -\infty,$$

  τότε οι αντίστοιχες σειρές αποκλίνουν. Θεωρούμε ότι είναι ειδικές περιπτώσεις απόκλισης μιας σειράς και όχι ειδικές περιπτώσεις σύγκλισης.

- Σε μια σειρά $((a_\nu),(s_\nu)), \nu \in \mathbb{N}$, αν στην ακολουθία (a_ν) χρησιμοποιείται ως δείκτης και το 0, δηλαδή $(a_\nu), \nu = 0,1,2,3,\ldots$, τότε η σειρά συμβολίζεται με
$$\sum_{\kappa=0}^{+\infty} a_\kappa$$
ή ακόμη με $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$.

Παράδειγμα 1

Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν. Στην περίπτωση που συγκλίνουν, να υπολογίσετε το άθροισμά τους:

(α) $\sum_{\kappa=1}^{+\infty} 4^\kappa$ (β) $\sum_{\kappa=1}^{+\infty} (2\kappa - 1)$

(γ) $\sum_{\kappa=1}^{+\infty} (-1)^\kappa$ (δ) $\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^\kappa$

Λύση

(α) Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με $a_1 = 4$ και λόγο $\lambda = 4$. Επομένως:
$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} 4^\kappa = 4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^\nu = \frac{4(1-4^\nu)}{1-4} = \frac{4}{3}(4^\nu - 1)$$
Έτσι:
$$\lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \frac{4}{3}(4^\nu - 1) = +\infty$$
Άρα, η σειρά δεν συγκλίνει.

(β) Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς:
$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} (2\kappa - 1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2\nu - 1) = \frac{\nu}{2}(1 + 2\nu - 1) = \nu^2$$
Έτσι:
$$\lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \nu^2 = = +\infty$$
Άρα, η σειρά δεν συγκλίνει.

(γ) Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς:
$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} (-1)^\kappa = (-1) + (+1) + (-1) + (+1) + \cdots (-1)^\nu = \begin{cases} -1, & \nu \text{ περιττός} \\ 0, & \nu \text{ άρτιος} \end{cases}$$
Επομένως, καθώς το ν τείνει στο άπειρο, το s_ν δεν υπάρχει, γιατί η τιμή του κυμαίνεται στους δύο αριθμούς -1 και 0. Άρα, η σειρά δεν συγκλίνει.

(δ) Υπολογίζουμε το μερικό άθροισμα της σειράς. Παρατηρούμε ότι έχουμε άθροισμα ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με $a_1 = -\frac{1}{2}$ και λόγο $\lambda = -\frac{1}{2}$. Επομένως,

$$s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\kappa} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + (-1)^\nu \frac{1}{2^\nu}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu}\right),$$

ως γεωμετρική ακολουθία με $a_1 = -\frac{1}{2}$ και $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Έτσι:

$$\lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = -\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu}\right) = -\frac{1}{3}$$

Άρα, η σειρά συγκλίνει και έχει άθροισμα ίσο με $-\frac{1}{3}$, δηλαδή:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\kappa} = -\frac{1}{3}$$

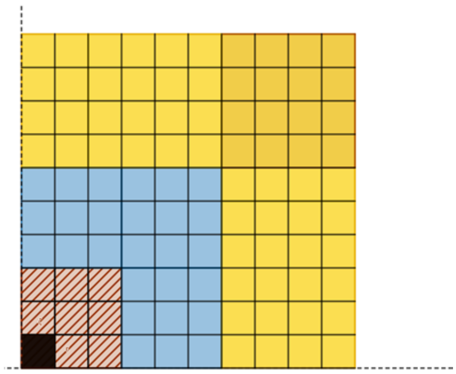
4.4 ΕΙΔΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

Εξερεύνηση

Να βρείτε μια σχέση που να συνδέει τα αθροίσματα Σ_1, Σ_2 για κάθε φυσικό αριθμό ν αιτιολογώντας την απάντησή σας:

$$\Sigma_1 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + \nu^3$$
$$\Sigma_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + \nu$$

Να αιτιολογήσετε γιατί η σχέση που συνδέει τα αθροίσματα Σ_1 και Σ_2 μπορεί να παρατηρηθεί και στο πιο κάτω διάγραμμα.



Αξιοσημείωτα αθροίσματα θεωρούνται και τα αθροίσματα των λ δυνάμεων των ν πρώτων όρων των φυσικών αριθμών, $\lambda \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, αθροίσματα της μορφής:

$$S_\lambda = 1^\lambda + 2^\lambda + 3^\lambda + \cdots + \nu^\lambda$$

- Για $\lambda = 1$, έχουμε $S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + \nu$.

  Το S_1είναι το άθροισμα των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο το 1 και σταθερή διαφορά το 1. Συνεπώς,

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

- Για $\lambda = 2$, έχουμε $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2$.

  Για τον υπολογισμό του $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2$, θεωρούμε την ταυτότητα $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ και θέτουμε διαδοχικά τιμές στο a τις $1, 2, \ldots, \nu$.

  Έτσι, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}
\cancel{2^3} &= 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \\
\cancel{3^3} &= \cancel{2^3} + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1 \\
\cancel{4^3} &= \cancel{3^3} + 3\cdot 3^3 + 3\cdot 3 + 1 \\
&\;\vdots \\
(\nu+1)^3 &= \cancel{\nu^3} + 3\nu^2 + 3\nu + 1
\end{aligned}\right\}(+)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις πιο πάνω ισότητες, παίρνουμε:

$$(\nu+1)^3 = 1^3 + 3(1^2 + 2^2 + \cdots + \nu^3) + 3(1+2+3+\cdots+\nu) + \nu$$

$$\Rightarrow (\nu+1)^3 - 1^3 - \nu = +3S_2 + 3S_1 \Rightarrow \nu^3 + 3\nu^2 + 2\nu = 3S_2 + \frac{3\nu(\nu+1)}{2}$$

$$\Rightarrow 3S_2 = \frac{2\nu^3 + 3\nu^2 + \nu}{2} \Rightarrow S_2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \frac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1)$$

- Για $\lambda = 3$, έχουμε $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \nu^3$. Για τον υπολογισμό του S_3, θεωρούμε την ταυτότητα $(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$ και θέτουμε διαδοχικά τιμές στο a τις $1, 2, \ldots, \nu$. Έτσι, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \cancel{2^4} &= 1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1 \\ \cancel{3^4} &= \cancel{2^4} + 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1 \\ \cancel{4^4} &= \cancel{3^4} + 4\cdot 3^3 + 6\cdot 3^2 + 4\cdot 3 + 1 \\ &\vdots \\ (\nu+1)^4 &= \cancel{\nu^4} + 4\nu^3 + 6\nu^2 + 4\nu + 1 \end{aligned}\right\} (+)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις πιο πάνω ισότητες παίρνουμε,

$$(\nu+1)^4 = 1^4 + 4(1^3 + 2^3 + \cdots + \nu^3) + 6(1^2 + 2^2 + \cdots + \nu^2) + 4(1+2+\cdots+\nu) + \nu$$

$$\Rightarrow (\nu+1)^4 - 1^4 - \nu = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 \Rightarrow \nu^4 + 4\nu^3 + 6\nu^2 + 3\nu = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1$$

$$\Rightarrow 4S_3 = \nu^4 + 4\nu^3 + 6\nu^2 + 3\nu - 6S_2 - 4S_1$$

$$\Rightarrow 4S_3 = \nu^4 + 4\nu^3 + 6\nu^2 + 3\nu - 6\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} - 4\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{S}_3 = \frac{\nu^4 + 2\nu^3 + \nu^2}{4} = \frac{\nu^2(\nu^2 + 2\nu + 1)}{4} = \frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4} = \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\nu^2(\nu+1)^2$$

Παρατήρηση

Από τα πιο πάνω, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^3 = \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa\right)^2$$

Συνοψίζοντας, έχουμε τα αποτελέσματα βασικών αθροισμάτων:

$S_1 = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa = \frac{1}{2}\nu(\nu+1)$
$S_2 = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^2 = \frac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1)$
$S_3 = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^3 = \frac{1}{4}\nu^2(\nu+1)^2 = \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa\right)^2$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(4\kappa^3+2\kappa)$$

Λύση

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του αθροίσματος και τα γνωστά αποτελέσματα

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa\ , \quad \sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^3,$$

έχουμε:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(4\kappa^3+2\kappa)=4\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^3+2\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa=4\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}+2\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\nu^2(\nu+1)^2+\nu(\nu+1)$$
$$=\nu(\nu+1)[\nu(\nu+1)+1]=\nu(\nu+1)(\nu^2+\nu+1)$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το άθροισμα των ν προσθετέων, με $\nu\in\mathbb{N}$:

$$\Sigma=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+\nu(\nu+1)(\nu+2)$$

Λύση

Το άθροισμα $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+\nu(\nu+1)(\nu+2)$ μπορεί να γραφεί με Σ συμβολισμό και ως:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)$$

Κάνοντας τις πράξεις, και χρησιμοποιώντας τις σχετικές ιδιότητες των αθροισμάτων, έχουμε:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa(\kappa^2+3\kappa+2)=\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\kappa^3+3\kappa^2+2\kappa)$$
$$=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^3+\sum_{\kappa=1}^{\nu}3\kappa^2+\sum_{\kappa=1}^{\nu}2\kappa=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^3+3\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2+2\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa$$
$$=\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}+3\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+2\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$
$$=\frac{\nu(\nu+1)}{4}(\nu(\nu+1)+2(2\nu+1)+4)$$
$$=\frac{\nu(\nu+1)}{4}(\nu^2+5\nu+6)=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{4}$$

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{\kappa=11}^{30}(6\kappa^2+2\kappa)$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι ή άθροιση δεν ξεκινά από $\kappa = 1$, αλλά από $\kappa = 11$. Αν θεωρήσουμε ότι η άθροιση αρχίζει από το $\kappa = 1$, τότε σημαίνει ότι έχουμε προσθέσει επιπλέον τους 10 πρώτους όρους. Έτσι, γράφουμε:

$$\sum_{\kappa=11}^{30}(6\kappa^2+2\kappa)=\sum_{\kappa=1}^{30}(6\kappa^2+2\kappa)-\sum_{\kappa=1}^{10}(6\kappa^2+2\kappa)=\Sigma_1-\Sigma_2$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το ζητούμενο αθροισμα χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τύπους:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(6\kappa^2+2\kappa)=6\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+2\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\nu(\nu+1)(2\nu+1+1)=2\nu(\nu+1)^2$$

- Για $\nu = 30$, έχουμε: $\Sigma_1 = 2\cdot 30\cdot 31^2 = 57660$
- Για $\nu = 10$, έχουμε: $\Sigma_2 = 2\cdot 10\cdot 11^2 = 2420$

Επομένως:

$$\sum_{\kappa=11}^{30}(6\kappa^2+2\kappa)=\Sigma_1-\Sigma_2=57660-2420=55240$$

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν. Στην περίπτωση που συγκλίνουν, να υπολογίσετε το άθροισμά τους:

(α) $\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\kappa}$

(β) $\sum_{\kappa=1}^{+\infty} (3)^{\kappa}$

(γ) $\sum_{\kappa=1}^{+\infty} (3)^{-\kappa}$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa(12\kappa+8) = 2\nu(\nu+1)(2\nu+3)$$

3. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω αθροίσματα:

(α) $\sum_{\kappa=1}^{\nu} (\kappa+2)(\kappa+6)$

(β) $\sum_{\kappa=1}^{\nu} (4\kappa^3+6\kappa^2+2\kappa)$

(γ) $\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa(\kappa+1)(\kappa+3)$

4. Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα των ν πρώτων όρων των πιο κάτω σειρών, $(\nu \in \mathbb{N})$:

(α) $2^3+4^3+6^3+8^3+\cdots$

(β) $1\cdot 1^2+2\cdot 4^2+3\cdot 7^2+4\cdot 10^2+\cdots$

(γ) $2\cdot 4+5\cdot 7+8\cdot 10+11\cdot 13+\cdots$

5. Να δείξετε ότι το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} (6\kappa^2+4\kappa-1)$$

μπορεί να πάρει τη μορφή $\nu(\nu+\alpha)(\beta\nu+\gamma)$, με $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Z}$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{\kappa=21}^{40} (6\kappa^2+4\kappa-1)$$

4.5 ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΜΙΑΣ ΣΕΙΡΑΣ

Όπως έχουμε αναφέρει, ο υπολογισμός του μερικού αθροίσματος των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας σε κλειστή μορφή δεν είναι πάντοτε η πιο εύκολη διαδικασία, γιατί υπάρχουν ακολουθίες στις οποίες δεν είναι δυνατόν να εκφράσουμε ένα τέτοιο άθροισμα με μαθηματικό τύπο. Φυσικά, έχουμε δει τις αριθμητικές και γεωμετρικές σειρές, στις οποίες ο υπολογισμός του μερικού αθροίσματος των ν πρώτων όρων τους είναι εφαρμογή συγκεκριμένων τύπων.

Υπάρχει μια σημαντική κατηγορία σειρών, όπου το άθροισμα μπορεί να υπολογιστεί σχετικά εύκολα, όταν ο γενικός όρος a_ν μπορεί να γραφεί στη μορφή $\beta_\nu - \beta_{\nu+1},\ \nu \in \mathbb{N}$. Σε μια τέτοια περίπτωση, έχουμε $a_\nu = \beta_\nu - \beta_{\nu+1},\ \nu \in \mathbb{N}$. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται μέθοδος των **διαφορών** (τηλεσκοπική σειρά). Άρα:

$$\begin{aligned} s_\nu &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_\nu \\ &= (\beta_1 - \cancel{\beta_2}) + (\cancel{\beta_2} - \cancel{\beta_3}) + \cdots + (\cancel{\beta_{\nu-1}} - \cancel{\beta_\nu}) + (\cancel{\beta_\nu} - \beta_{\nu+1}) \\ &= \beta_1 - \beta_{\nu+1} \end{aligned}$$

Επομένως, για τη σειρά ισχύει:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} a_\kappa = \lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = \beta_1 - \lim_{\nu\to+\infty} \beta_{\nu+1}$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω αθροίσματα:

(α) $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{(\kappa+2)(\kappa+3)}$ (β) $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{4\kappa^2-1}$

Λύση

(α) Το κλάσμα

$$\frac{1}{(\kappa+2)(\kappa+3)}$$

αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως

$$\frac{1}{(\kappa+2)(\kappa+3)} = \frac{1}{\kappa+2} - \frac{1}{\kappa+3}$$

Επομένως, το μερικό άθροισμα s_ν των ν πρώτων όρων είναι:

$$\begin{aligned} s_\nu &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{(\kappa+2)(\kappa+3)} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \left(\frac{1}{\kappa+2} - \frac{1}{\kappa+3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{\nu+2}} - \frac{1}{\nu+3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{\nu+3} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = \lim_{\nu\to+\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\nu+3}\right) = \frac{1}{3}$$

Έτσι:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{(\kappa+2)(\kappa+3)} = \frac{1}{3}$$

(β) Το κλάσμα

$$\frac{1}{4\kappa^2 - 1}$$

γράφεται και ως

$$\frac{1}{(2\kappa-1)(2\kappa+1)},$$

το οποίο αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως:

$$\frac{1}{(2\kappa-1)(2\kappa+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\kappa-1} - \frac{1}{2\kappa+1}\right)$$

Επομένως, το μερικό άθροισμα s_ν των ν πρώτων όρων είναι:

$$\begin{aligned} s_\nu &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{4\kappa^2 - 1} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{(2\kappa-1)(2\kappa+1)} \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2\kappa-1)} - \frac{1}{(2\kappa+1)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{2\nu-1}} - \frac{1}{2\nu+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\nu+1}\right) \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\nu+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Έτσι:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{4\kappa^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 2

(α) Να δείξετε ότι:

$$\frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2}=\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{(\nu+1)^2}$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς:

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2}$$

Λύση

(α) Έχουμε $2\nu+1=(\nu+1)^2-\nu^2$. Έτσι:

$$\frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2}=\frac{(\nu+1)^2-\nu^2}{\nu^2(\nu+1)^2}=\frac{(\nu+1)^2}{\nu^2(\nu+1)^2}-\frac{\nu^2}{\nu^2(\nu+1)^2}=\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{(\nu+1)^2}$$

(β) Για τον υπολογισμό του αθροίσματος της σειράς

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2},$$

υπολογίζουμε πρώτα το μερικό άθροισμα s_ν των ν πρώτων όρων της ακολουθίας:

$$\frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2},\quad \nu\in\mathbb{N}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} s_\nu &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{2\kappa+1}{\kappa^2(\kappa+1)^2}=\sum_{\nu=1}^{\nu}\left[\frac{1}{\kappa^2}-\frac{1}{(\kappa+1)^2}\right] \\ &=\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{(\nu+1)^2}\right) \\ &=1-\frac{1}{(\nu+1)^2} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2}=\lim_{\nu\to+\infty}\left(1-\frac{1}{(\nu+1)^2}\right)=1$$

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της πιο κάτω σειράς. Στη συνέχεια, να εξετάσετε κατά πόσο συγκλίνει.

$$\frac{6}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{10}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{14}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{4\nu+2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}+\cdots$$

Λύση

Ο γενικός όρος της ακολουθίας

$$\frac{4\nu+2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}$$

αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως:

$$\frac{4\nu+2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}=\frac{A}{\nu}+\frac{B}{\nu+1}+\frac{\Gamma}{\nu+2},\quad A,B,\Gamma\in\mathbb{R}$$

Ισοδύναμα, έχουμε

$$4\nu+2\equiv A(\nu+1)(\nu+2)+B\nu(\nu+2)+\Gamma\nu(\nu+1)$$

και:

$$A=1,\ \ B=2,\ \ \Gamma=-3$$

Έτσι:

$$\frac{4\nu+2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}=\frac{1}{\nu}+\frac{2}{\nu+1}-\frac{3}{\nu+2}$$

Το άθροισμα s_ν των ν πρώτων όρων της σειράς είναι:

$$\begin{aligned}
s_\nu&=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{4\kappa+2}{\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)}=\sum_{\nu=1}^{\nu}\left(\frac{1}{\kappa}+\frac{2}{\kappa+1}-\frac{3}{\kappa+2}\right)\\
&=\left(\frac{1}{1}+\frac{2}{2}-\frac{3}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{3}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\nu}+\frac{2}{\nu+1}-\frac{3}{\nu+2}\right)\\
&=\left(\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{\nu+1}+\frac{2}{\nu+1}-\frac{3}{\nu+2}\right)=\frac{5}{2}-\left(\frac{1}{\nu+1}+\frac{3}{\nu+2}\right)
\end{aligned}$$

Η σειρά συγκλίνει, γιατί:

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{4\nu+2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}=\lim_{\nu\to+\infty}\left[\frac{5}{2}-\left(\frac{1}{\nu+1}+\frac{3}{\nu+2}\right)\right]=\frac{5}{2}$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε το άθροισμα των ν πρώτων όρων των πιο κάτω σειρών:
   (α) $1\cdot 2^2+3\cdot 4^2+5\cdot 6^2+\cdots$
   (β) $2\cdot 5+6\cdot 8+10\cdot 11+14\cdot 14+\cdots$
   (γ) $1^3+3^3+5^3+7^3+\cdots$
   (δ) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+\nu(\nu+1)(\nu+2)+\cdots$

2. Να υπολογίσετε το άθροισμα:
$$\sum_{\kappa=\nu+1}^{3\nu}\kappa(6\kappa-2)$$

3. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα των πιο κάτω σειρών:
   (α) $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{+\infty}\frac{1}{\kappa(\kappa+2)}$
   (β) $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{+\infty}\frac{1}{9\kappa^2-1}$

4. Δίνεται ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων της σειράς
$$\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\cdots$$
είναι ίσο με:
$$\frac{\nu}{3(2\nu+3)}$$
   (α) Να βρείτε τον γενικό όρο της σειράς.
   (β) Να βρείτε τον $10^{\text{ο}}$ όρο της σειράς.
   (γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 15 πρώτων όρων της σειράς.

5. Να βρείτε τον ν –οστό όρο της ακολουθίας
$$2, 5, 9, 14, 20, 27, \ldots.$$
Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\kappa+3)^2 = \frac{1}{6}\nu(2\nu^2+21\nu+73)$$

Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{\kappa=10}^{30}(\kappa+3)^2$$

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+\nu(\nu+1) = \frac{1}{3}\nu(\nu+1)(\nu+2)$$

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)} = \frac{\nu}{2\nu+1}$$

4. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{6}(2i+j)\right)$$

5. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω σειρές:

(α) $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{+\infty}\frac{1}{\kappa(\kappa+2)}$ (β) $\displaystyle\sum_{\kappa=3}^{+\infty}\frac{1}{(\kappa-2)(\kappa+2)}$

(γ) $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{+\infty}\frac{3^{\kappa+1}}{7^{\kappa}}$ (δ) $\displaystyle\sum_{\kappa=2}^{+\infty}\frac{\kappa^2}{\kappa^2-1}$

6. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+\nu(\nu+1) = \frac{1}{3}\nu(\nu+1)(\nu+2)$$

7. Να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{10}{\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa\right)}$$

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να δείξετε ότι δεν ισχύουν τα πιο κάτω:

(α) $\sum_{\kappa=1}^{\nu}(a_\kappa \beta_\kappa) = \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa\right)\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \beta_\kappa\right)$

(β) $\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{a_\kappa}{\beta_\kappa}\right) = \frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa}{\sum_{\kappa=1}^{\nu} \beta_\kappa}$

(γ) $\sum_{\kappa=1}^{\nu}(a_\kappa^2) = \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa\right)^2$

2. Να δείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{2\nu - 2^\nu}{3^\nu}$$

συγκλίνει στο $-\frac{1}{2}$.

3. Ένα σύστημα με ν σώματα που έχουν μάζες $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ και βρίσκονται πάνω σε οριζόντιο άξονα στις θέσεις $(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots, (x_\nu, 0)$, αντίστοιχα, έχει κέντρο μάζας το οποίο βρίσκεται στη θέση $(\bar{x}, 0)$, όπου $\bar{x} = \frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu}(m_k \cdot x_k)}{\sum_{\kappa=1}^{\nu}(m_k)}$. Να υπολογίσετε τη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος των τεσσάρων σωμάτων που βρίσκονται στις θέσεις $(1, 0), (3, 0), (5, 0), (7, 0)$ με αντίστοιχες μάζες $5, 7, 2$ και 3 κιλά.

4. Δίνεται ότι:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{\kappa^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\kappa - 1)^2}$$

5. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{k=5}^{40}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}(k+2)\left(\frac{1}{k+3}\right)^i\right)$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

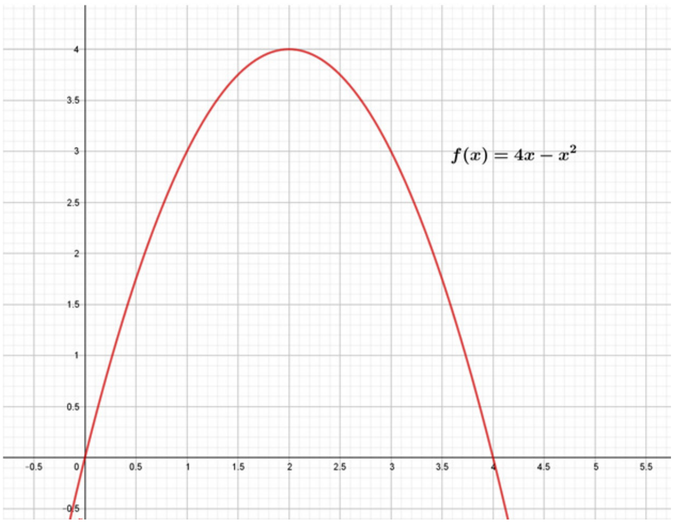
ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

5.1 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ – ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

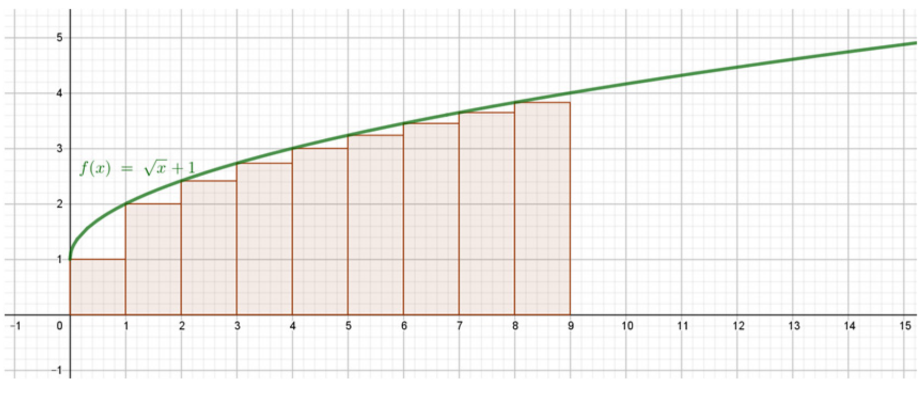
Εξερεύνηση

Να εκτιμήσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = 4x - x^2$ και τον άξονα των τετμημένων, επεξηγώντας τον τρόπο που εργαστήκατε.



Διερεύνηση 1

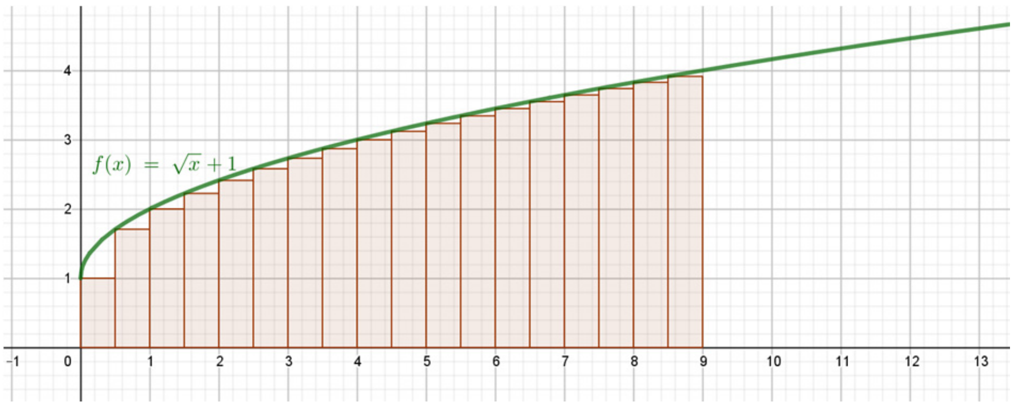
Ένας μαθητής A, στην προσπάθεια του να υπολογίσει το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, $x \geq 0$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 9$, χώρισε το διάστημα $[0, 9]$ σε 9 ίσα διαστήματα και υπολόγισε ότι το άθροισμα των 9 ορθογωνίων παραλληλογράμμων, που φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα, είναι $\Sigma_1 = 25{,}3$ τετραγωνικές μονάδες.



(α) Είναι, κατά τη γνώμη σας, μια πρώτη εκτίμηση του εμβαδού που θέλει να υπολογίσει;

(β) Μπορεί να βελτιωθεί η εκτίμηση του ζητούμενου εμβαδού;

Ένας άλλος μαθητής B έκανε την πιο κάτω διαμέριση του ζητούμενου εμβαδού και βρήκε $\Sigma_2 = 26{,}2$.



(γ) Ποια είναι η διαφορά στον τρόπο υπολογισμού του μαθητή B από τον τρόπο υπολογισμού του μαθητή A;

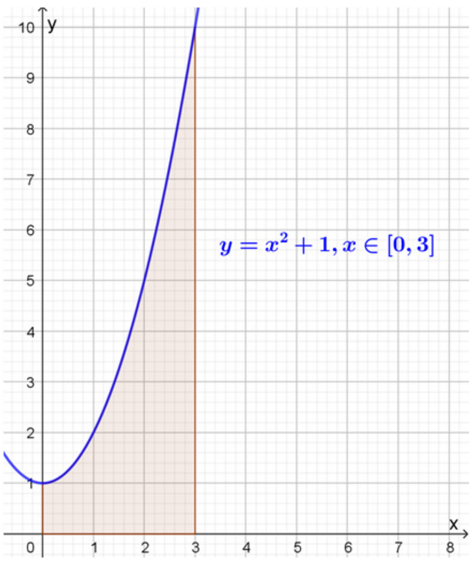
(δ) Ποιος από τους δύο μαθητές έχει κάνει, κατά την γνώμη σας, την καλύτερη εκτίμηση ως προς το ζητούμενο εμβαδόν;

(ε) Υπάρχει διαδικασία με ικανοποιητικό αριθμό διαμερίσεων, η οποία να μας υπολογίσει με ακρίβεια το ζητούμενο εμβαδόν;

(στ) Να εισηγηθείτε ένα τρόπο υπολογισμού του εμβαδού με ακρίβεια.

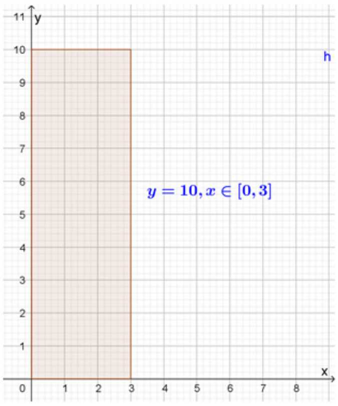
Διερεύνηση 2

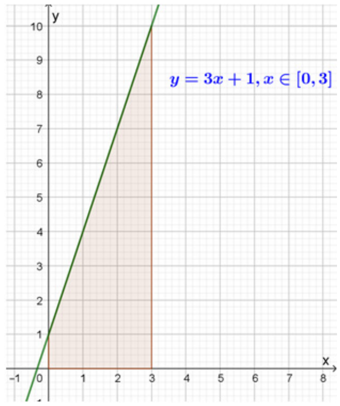
Δίνεται η παραβολή $y = x^2 + 1,\ x \in [0, 3]$.



Αναζητούμε τρόπο υπολογισμού του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή, την ευθεία $x = 3$ και τους άξονες των συντεταγμένων στο διάστημα $[0, 3]$.

(α) Αν αντί της $y = x^2 + 1$ είχαμε την ευθεία $y = 10$ ή την ευθεία $y = 3x + 1$, γιατί ο υπολογισμός του εμβαδού θα ήταν πιο εύκολος;





(β) Να βρείτε ένα προφανές ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο διάστημα που ορίζεται η παραβολή με εμβαδόν s_1 μικρότερο του ζητούμενου εμβαδού E και ένα προφανές ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν S_1 μεγαλύτερο του ζητούμενου εμβαδού E.

Συμπληρώστε την ανίσωση $s_1 < E < S_1$ με τις τιμές των s_1 και S_1 που βρήκατε.

(γ) Πόση είναι η διαφορά $\Delta_1 = S_1 - s_1$;

(δ) Με ποιο τρόπο θα μπορούσατε να μειώσετε την διαφορά Δ_1;

(ε) Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «*CLyk_Kat_En05_Orismeno_1*». Ο δρομέας ν ελέγχει το πλήθος των κάτω και άνω ορθογωνίων κάλυψης του ζητούμενου χωρίου.Να βάλετε τον δρομέα στην τιμή $\nu = 1$ και να ελέγξετε την ορθότητα των προηγούμενων ερωτημάτων. Να εξηγήσετε τι συμβαίνει για $\nu = 2$ και για $\nu = 3$, καθώς και τον τρόπο με τον οποίο το πρόγραμμα υπολογίζει τις τιμές των s_ν και S_ν σε κάθε περίπτωση. Να γράψετε τις αντίστοιχες τιμές των Δ_2 και Δ_3

(στ) Να μεταβάλετε το δρομέα ν και να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

$\boldsymbol{\nu}$	$\boldsymbol{s_\nu}$	$\boldsymbol{S_\nu}$	$\boldsymbol{\Delta_\nu = S_\nu - s_\nu}$
1	3	30	27
2			
3			
10			
100			
300			

(ζ) Τι παρατηρείτε για τις τιμές των s_ν, S_ν και Δ_ν καθώς το ν αυξάνεται;

(η) Υπάρχει κατά τη γνώμη σας τιμή του ν, ώστε το κάτω άθροισμα και το άνω άθροισμα να γίνουν ίσα;

(θ) Υπάρχει κατά τη γνώμη σας τιμή του ν, ώστε η διαφορά Δ_ν να γίνει μηδέν;

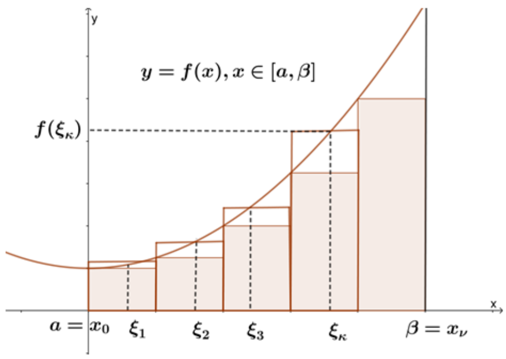
(ι) Πόσο «κοντά» στο μηδέν μπορεί να πλησιάσει η Δ_ν;

(ια) Νομίζετε ότι η πιο πάνω διαδικασία μπορεί να αποτελέσει ένα τρόπο μέτρησης του ζητούμενου εμβαδού;

Διαμέριση του κλειστού διαστήματος $[\alpha,\beta]$ λέγεται κάθε πεπερασμένο και διατεταγμένο σύνολο σημείων $\{\alpha = x_0,\ x_1, \dots, x_\nu = \beta\}$ του $[\alpha,\beta]$.

Τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_\nu = \beta$, χωρίζουν το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$ μήκους $\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, 3, \dots, \nu$.
Αν επιλέξουμε τα υποδιαστήματα να είναι **ισομήκη**, τότε το καθένα θα έχει μήκος $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$ και ισχύει $\lim \frac{\beta-\alpha}{\nu} = 0$.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και E το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Ένας τρόπος για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου E είναι ο ακόλουθος:

- Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$.
- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa],\ \kappa = 1, 2, \dots, \nu$ επιλέγουμε ένα αυθαίρετο σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάση το Δx και ύψος το αντίστοιχο $f(\xi_\kappa)$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων ως εξής:
$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x = [f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_\nu)]\Delta x$$
- Υπολογίζουμε το όριο $\lim S_\nu$, το οποίο και ονομάζουμε **εμβαδόν του επίπεδου χωρίου**. Έτσι, έχουμε:

$$E = \lim S_\nu = \lim_{\nu\to+\infty} \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x \right)$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 16 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και τους θετικούς άξονες των συντεταγμένων.

Λύση

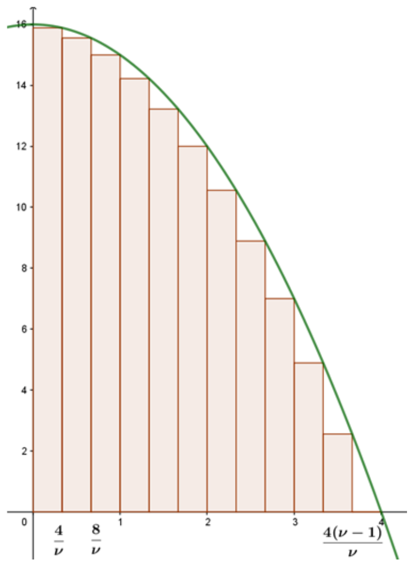
Χωρίζουμε το διάστημα $[0, 4]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα με μήκος:

$$\Delta x = \frac{4-0}{\nu} = \frac{4}{\nu}$$

Τα άκρα των υποδιαστημάτων είναι:

$$x_0 = 0,\ \ x_1 = \frac{4}{\nu},\ \ x_2 = \frac{8}{\nu},\ \ \dots,\ \ x_{\nu-1} = \frac{4(\nu-1)}{\nu},\ \ x_\nu = \frac{4\nu}{\nu} = 4$$

Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με σταθερές βάσεις μήκους $\Delta x = \frac{4}{\nu}$ και ύψη την ελάχιστη τιμή της f σε καθένα από τα υποδιαστήματα αυτά.



Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Έτσι, παίρνουμε σε κάθε υποδιάστημα της μορφής $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, $\kappa = 1, 2, \dots, \nu$ ως ύψος το $f(x_\kappa)$, δηλαδή την αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης στο δεξί άκρο του κάθε υποδιαστήματος, η οποία συμπίπτει και με την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης σε κάθε υποδιάστημα.

Το εμβαδόν του κάθε ορθογωνίου παραλληλογράμμου στο υποδιάστημα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa], \kappa = 1, 2, \dots, \nu$ είναι:

$$\varepsilon_\kappa = \Delta x f(x_\kappa) = \frac{4}{\nu} f\left(\frac{4\kappa}{\nu}\right) = \frac{4}{\nu}\left(16 - \frac{16\kappa^2}{\nu^2}\right),\ \ \kappa = 1, 2, \dots, \nu$$

Έτσι, το άθροισμα των εμβαδών ν ορθογωνίων είναι:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\nu &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{4}{\nu}\left(16 - \frac{16\kappa^2}{\nu^2}\right) = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{64}{\nu} - \frac{64\kappa^2}{\nu^3}\right) = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{64}{\nu}\right) - \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{64\kappa^2}{\nu^3}\right) \\ &= \frac{64}{\nu}\nu - \frac{64}{\nu^3}\cdot\frac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1) = 64 - \frac{32}{3}\cdot\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{\nu^2}\end{aligned}$$

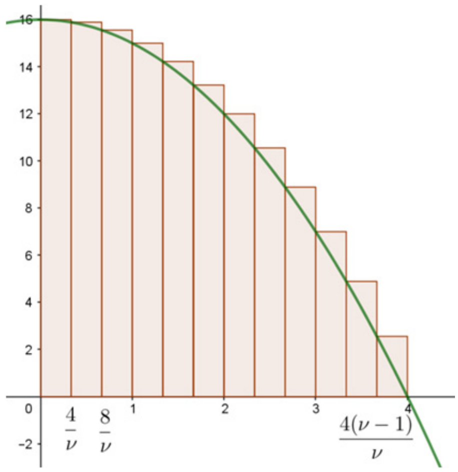
Τελικά, το εμβαδόν του χωρίου είναι:

$$E = \lim_{\nu\to+\infty} \varepsilon_\nu = \lim\left(64 - \frac{32}{3}\cdot\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{\nu^2}\right) = 64 - \lim_{\nu\to+\infty}\left(\frac{32}{3}\cdot\frac{(\nu+1)}{\nu}\cdot\frac{2\nu+1}{\nu}\right)$$

$$= 64 - \frac{32}{3}\lim_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(2+\frac{1}{\nu}\right) = 64 - \frac{32}{3}\cdot 2 = 64 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3}$$

Αν σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, $\kappa = 1, 2, \dots, \nu$ επιλέγαμε το αριστερό άκρο, δηλαδή το σημείο που αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή της συνάρτησης σε κάθε υποδιάστημα, θα είχαμε:

$$E_\kappa = \Delta x\cdot f(x_{\kappa-1}) = \frac{4}{\nu}\cdot f\left(\frac{4(\kappa-1)}{\nu}\right) = \frac{4}{\nu}\cdot\left(16 - \frac{16(\kappa-1)^2}{\nu^2}\right),\ \ \kappa = 1,2,\dots,\nu$$



Έτσι, το άθροισμα των εμβαδών ν ορθογωνίων είναι:

$$E_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{4}{\nu}\left(16 - \frac{16(\kappa^2-2\kappa+1)}{\nu^2}\right) = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{64}{\nu} - \frac{64(\kappa^2-2\kappa+1)}{\nu^3}\right)$$

$$= \frac{64}{\nu}\nu - \frac{64}{\nu^3}\left[\frac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1) - 2\frac{1}{2}\nu(\nu+1) + \nu\right]$$

$$= 64 - \frac{32}{3}\cdot\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{\nu^2} + 64\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}\right) - \frac{64}{\nu^2}$$

Τελικά, το εμβαδόν του χωρίου είναι:

$$E = \lim_{\nu\to+\infty} E_\nu = \lim_{\nu\to+\infty}\left(64 - \frac{32}{3}\cdot\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{\nu^2} + 64\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}\right) - \frac{64}{\nu^2}\right) = 64 - \frac{64}{3} + 0 = \frac{128}{3}$$

Άρα:

$$\varepsilon_\nu < E < E_\nu \Rightarrow \lim_{\nu\to+\infty}\varepsilon_\nu = E = \lim_{\nu\to+\infty} E_\nu$$

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και Δ_ν μια διαμέριση του σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Σε κάθε υποδιάστημα, επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa = 1, 2, 3, \dots, \nu$.

Σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\Sigma_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x,$$

το οποίο συμβολίζεται και ως:

$$\Sigma_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$$

Αν το όριο του αθροίσματος Σ_ν είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή αν το όριο $\lim \Sigma_\nu$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση f είναι **ολοκληρώσιμη** στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και το όριο αυτό λέγεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β. Συμβολίζεται με:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Ορισμός

Το **ορισμένο ολοκλήρωμα** μιας συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β είναι το όριο

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right), \text{ όπου } \Delta x = \frac{\beta-\alpha}{\nu},$$

όταν αυτό υπάρχει στο $\mathbb{R}$, όπου $f(\xi_\kappa)$ είναι μια τιμή της f στο διάστημα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, $\kappa = 1, 2, 3, \dots, \nu$. Το ορισμένο ολοκλήρωμα συμβολίζεται με

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

και η συνάρτηση f λέγεται **ολοκληρώσιμη** στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Δηλαδή:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$$

Παρατήρηση

Οι αριθμοί α και β λέγονται **όρια ή άκρα** της ολοκλήρωσης (δεν σχετίζεται η λέξη όρια με την έννοια του ορίου).

Παράδειγμα 2

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[1,4]$ και να υπολογίσετε το αντίστοιχο ορισμένο ολοκλήρωμά της στο $[1,4]$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,4]$ ως πολυωνυμική.

Χωρίζουμε το διαστημα $[1,4\,]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους

$$\Delta x = \frac{4-1}{\nu} = \frac{3}{\nu}.$$

Παίρνουμε ως «ενδιάμεσα σημεία» $\xi_\kappa,\ \kappa = 1,2,\dots,\nu$ τα δεξιά άκρα των διαστημάτων $[x_{\kappa-1},\ x_\kappa]$, δηλαδή:

$$\xi_\kappa = a + \kappa \cdot \frac{(\beta-\alpha)}{\nu} = 1 + \kappa \cdot \frac{3}{\nu}$$

Έχουμε ως αντίστοιχη τιμή για τη συνάρτηση την τιμή:

$$f(\xi_\kappa) = f\left(1 + \kappa\frac{3}{\nu}\right) = 1 + \frac{3\kappa}{\nu}$$

Για αυτή τη διαμέριση, το άθροισμα της f στο $[1,4]$ είναι:

$$\Sigma_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x = \frac{3}{\nu}\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(1 + \frac{3\kappa}{\nu}\right)$$

Για να είναι η συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο $[1,4]$, πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει το $\lim \Sigma_\nu$.

Είναι:

$$\Sigma_\nu = \frac{3}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(1+\frac{3\kappa}{\nu}\right) = \frac{3}{\nu}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}(1) + \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{3\kappa}{\nu}\right)\right) = \frac{3}{\nu}\left(\nu + \frac{3}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu}(\kappa)\right)$$
$$= \frac{3}{\nu}\left(\nu + \frac{3}{\nu}\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right) = 3 + \frac{9(\nu+1)}{2\nu}$$

Έχουμε:

$$\lim_{\nu\to+\infty}\Sigma_\nu = \lim_{\nu\to+\infty}\left(3 + \frac{9(\nu+1)}{2\nu}\right) = 3 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$$

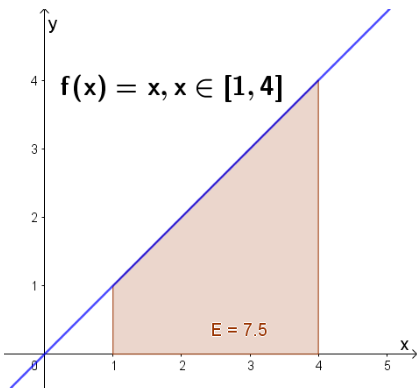
Έτσι, η συνάρτηση $f(x) = x,\ x \in [1,4]$ είναι ολοκληρώσιμη και το αντίστοιχο ορισμένο ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_1^4 x\,dx = \lim_{\nu\to+\infty}\left(3 + \frac{9(\nu+1)}{2\nu}\right) = 3 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ τ.μ.}$$

Παρατήρηση

Είναι γνωστό ότι το συγκεκριμένο εμβαδόν υπολογίζεται απλά ως εμβαδόν τραπεζίου με βάσεις $\beta_1 = f(1) = 1, \beta_2 = f(4) = 4$ και $\upsilon = 4-1 = 3$.

$$E = \frac{(\beta_1+\beta_2)\upsilon}{2} = (1+4)\cdot\frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ τ.μ.}$$



Παράδειγμα 3

Να δείξετε ότι:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$.

Χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{1-0}{\nu} = \frac{1}{\nu}$.

Έχουμε δηλαδή τα υποδιαστήματα: $\left[0, \frac{1}{\nu}\right], \left[\frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}\right], \ldots . [\frac{\nu-1}{\nu}, 1]$.

Επιλέγουμε σε κάθε υποδιάστημα $\left[\frac{\kappa-1}{\nu}, \frac{\kappa}{\nu}\right], \kappa = 1,2, \ldots \nu$ ως ξ_κ το αριστερό άκρο του.

Δηλαδή, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \frac{1}{\nu}$, $\xi_3 = \frac{2}{\nu}, \ldots, \xi_\kappa = \frac{\kappa-1}{\nu}, \xi_\nu = \frac{\nu-1}{\nu}$ $, \kappa = 0,1,2, \ldots, \nu$ και υπολογίζουμε τα αντίστοιχα $f(\xi_1) = 0^2, f(\xi_2) = \left(\frac{1}{\nu}\right)^2, \ldots . . f(\xi_\kappa) = \left(\frac{\kappa-1}{\nu}\right)^2$, $\kappa = 1,2, \ldots, \nu$.

Έχουμε:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \left(\frac{\kappa-1}{\nu}\right)^2 \cdot \Delta x = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \left(\frac{\kappa-1}{\nu}\right)^2 \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu^3} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\nu} (\kappa-1)^2 =$$

$$= \frac{1}{\nu^3}(0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (\nu-1)^2) = \frac{1}{\nu^3} \cdot \frac{1}{6}(\nu-1)\nu(2\nu-1) = \frac{\nu(\nu-1)(2\nu-1)}{6\nu^3}$$

Έτσι:

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\nu \to +\infty} \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right) = \lim_{\nu \to +\infty} \left(\frac{\nu(\nu-1)(2\nu-1)}{6\nu^3}\right) = \lim_{\nu \to +\infty} \left(\frac{2\nu^3}{6\nu^3}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Δραστηριότητες

1. Να δείξετε ότι οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στα διαστήματα που δίνονται και να υπολογίσετε τα αντίστοιχα ορισμένα ολοκληρώματα.
   (α) $f(x) = 3$, $x \in [-1, 2]$
   (β) $f(x) = 2x - 1$, $x \in [1, 3]$
   (γ) $f(x) = x^2 + 1, [0,3]$

5.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος για μια συνεχή συνάρτηση f σε κλειστό διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$, προκύπτουν άμεσα τα πιο κάτω:

(α) $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

(β) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$

(γ) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ (ανεξάρτητο από τη μεταβλητή ολοκλήρωσης)

Θεώρημα

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε, ισχύουν:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

Παρατήρηση

Τα δύο πιο πάνω συμπτύσσονται σε μια γενική πρόταση. Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

Παράδειγμα 1

Δίνεται ότι:

$$\int_{1}^{4} f(x)dx = 5 \text{ και } \int_{1}^{4} g(x)dx = 3,$$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{1}^{4} [3f(x) - 2g(x)]dx$$

Λύση

$$\int_{1}^{4} [3f(x) - 2g(x)]dx = 3\int_{1}^{4} f(x)dx - 2\int_{1}^{4} g(x)dx = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 9$$

Θεώρημα

Έστω f συνεχής συνάρτηση σε διάστημα $Δ$ και $α, β, γ \in Δ \subseteq \mathbb{R}$. Τότε, ισχύει:

$$\int_{α}^{β} f(x)dx = \int_{α}^{γ} f(x)dx + \int_{γ}^{β} f(x)dx$$

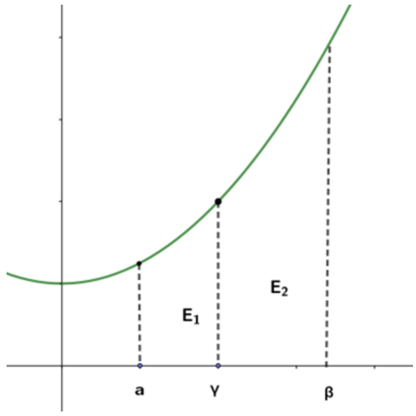
Αν για τη συνεχή συνάρτηση f στο $Δ = [α, β]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ και $γ \in Δ$, τότε το πιο πάνω θεώρημα μπορεί να ερμηνευτεί και γραφικά ως ακολούθως:

Αν

$$E = \int_{α}^{β} f(x)dx, \;\; E_1 = \int_{α}^{γ} f(x)dx \;\text{ και }\; E_2 = \int_{γ}^{β} f(x)dx,$$

τότε ισχύει $E = E_1 + E_2$. Δηλαδή:

$$\int_{α}^{β} f(x)dx = \int_{α}^{γ} f(x)dx + \int_{γ}^{β} f(x)dx$$



Παράδειγμα 2

Αν f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και

$$\int_{2}^{6} f(x)dx = 9, \;\; \int_{2}^{4} f(x)dx = 2,$$

να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{6}^{4} f(x)dx$$

Λύση

Έχουμε:

$$\int_{6}^{4} f(x)dx = \int_{6}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{4} f(x)dx = -\int_{2}^{6} f(x)dx + \int_{2}^{4} f(x)dx = -9 + 2 = -7$$

Παράδειγμα 3

Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{e}^{4} \ln\left(\frac{4}{x}\right) dx = \int_{4}^{e} \ln\left(\frac{x}{4}\right) dx\,, \;\; x > 0$$

Λύση

Για $x > 0$, έχουμε:

$$\int_{e}^{4} \ln\left(\frac{4}{x}\right) dx = -\int_{4}^{e} \ln\left(\frac{4}{x}\right) dx = \int_{4}^{e} \ln\left(\frac{4}{x}\right)^{-1} dx = \int_{4}^{e} \ln\left(\frac{x}{4}\right) dx$$

Θεώρημα

(α) Αν f ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [\alpha,\beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$$

(β) Αν f, g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [\alpha,\beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

Σημείωση

Το πιο πάνω θεώρημα ισχύει και όταν η φορά της ανίσωσης ≥ αντικατασταθεί με >.
Για παράδειγμα, για τις πιο κάτω συναρτήσεις ισχύει:

- $\ln(x) \geq 0,\ \forall x \in [1,3] \Rightarrow \int_{1}^{3} \ln(x)\, dx \geq 0$
- $\text{ημ}x \leq \text{συν}x,\ \ \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \int_{0}^{\pi/4} \text{ημ}x dx \leq \int_{0}^{\pi/4} \text{συν}x dx$
- $(x-2)(x-4) \leq 0,\ \ \forall x \in [2,4] \Rightarrow \int_{2}^{4} (x-2)(x-4)dx \leq 0$

Δραστηριότητες

1. Αν για τις συνεχείς συναρτήσεις f, g στο διάστημα $[-1, 4]$ ισχύει

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = -3 \text{ και } \int_{-1}^{4} g(x)dx = 4,$$

να υπολογίσετε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int_{4}^{-1} f(x)dx$

(β) $\int_{-1}^{4} [10f(x) + 8g(x)]dx$

2. Αν

$$\int_{0}^{3} f(x)dx = 8, \quad \int_{2}^{3} f(x)dx = 10 \text{ και } \int_{0}^{7} f(x)dx = 12,$$

να υπολογίσετε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int_{3}^{2} f(x)dx$ (β) $\int_{0}^{3} \frac{1}{2} f(x)dx$

(γ) $\int_{0}^{2} f(x)dx$ (δ) $\int_{7}^{2} f(x)dx$

3. Αν ισχύει

$$\int_{1}^{e} \ln x \, dx = 1,$$

να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{e}^{1} \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

4. Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{6} \frac{x(x+3)}{x^2 - x + 1} dx - \int_{\alpha}^{6} \frac{(4x-1)}{x^2 - x + 1} dx = 2$$

5.3 ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$

Το πιο κάτω θεώρημα είναι χρήσιμο στην απόδειξη θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού.

Θεώρημα

Έστω f συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ. Τότε, η συνάρτηση

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ.

Δηλαδή, ισχύει:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right) = f(x)$$

Θεώρημα (Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού)

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

Απόδειξη

Έστω $\Delta = [\alpha, \beta]$ και $x \in \Delta$. Τότε, η συνάρτηση

$$G(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$$

είναι μια παράγουσα της f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αφού οι συναρτήσεις F και G είναι δύο παράγουσες της ίδιας συνάρτησης f, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε:

$$F(x) = G(x) + c, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Για $x = \alpha$, έχουμε:

$$F(\alpha) = G(\alpha) + c \Rightarrow F(\alpha) = \int_\alpha^\alpha f(t)dt + c \Rightarrow F(\alpha) = c$$

Επομένως, $F(x) = G(x) + F(\alpha)$.

Για $x = \beta$, έχουμε:

$$F(\beta) = G(\beta) + F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt + F(\alpha) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

Παρατηρήσεις

- Πιο απλά γράφουμε
$$F(\beta)-F(\alpha)=[F(x)]_{\alpha}^{\beta},$$
με F μία παράγουσα της f στο Δ.
- Ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$
ανάγεται αρχικά στην εύρεση πρώτα μιας παράγουσας F της f και στη συνέχεια η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος είναι ο πραγματικός αριθμός $F(\beta)-F(\alpha)$.
- Ο υπολογισμός παράγουσας συνάρτησης έχει αντιμετωπισθεί στο αόριστο ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_2^3 x^2\,dx$ (β) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{συν}2x\,dx$

(γ) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{x^2}\,dx$ (δ) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^4x\,\text{ημ}x\,dx$

(ε) $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x}{x^2+3}\,dx$ (στ) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx$

Λύση

(α) $$\int_2^3 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3=\frac{3^3}{3}-\frac{2^3}{3}=\frac{19}{3}$$

(β) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{συν}2x\,dx=\left[\frac{\text{ημ}2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}-\frac{\text{ημ}0}{2}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

(γ) $$\int_2^3 \frac{2}{x^2}\,dx=\left[\frac{-2}{x}\right]_2^3=-\frac{2}{3}+\frac{2}{2}=\frac{1}{3}$$

(δ) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^4x\,\text{ημ}x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^4x\,d(\sigma\upsilon\nu x)=\left[-\frac{\text{συν}^5x}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{5}$$

(ε) $$\int_1^3 \frac{2x}{x^2+3}\,dx=\int_1^3 \frac{d(x^2+3)}{x^2+3}=[\ln(x^2+3)]_1^3=\ln 12-\ln 4=\ln 3$$

(στ) $$\int_0^1 xe^{x^2}dx=\int_0^1 \frac{1}{2}e^{x^2}d(x^2)=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}e^1-\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}(e-1)$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

(α) $\int_1^2 (x^2 - 3x + 1)\ dx$ (β) $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\right) dx$

(γ) $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\text{ημ}x - \text{συν}2x)dx$ (δ) $\int_1^e x \ln x\, dx$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\int_1^2 (x^2 - 3x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - 3\frac{2^2}{2} + 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 3\frac{1^2}{2} + 1\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 4\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{3} - \frac{7}{2} = -\frac{7}{6}$$

(β) Έχουμε:

$$\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\right) dx = \int_1^4 (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 2)\ dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 2x\right]_1^4$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot 8 - 4 \cdot 2 + 8\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 2\right)$$

$$= \frac{14}{3} + 2 = \frac{20}{3}$$

(γ) Έχουμε:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\text{ημ}x - \text{συν}2x)dx = \left[-\text{συν}x - \frac{1}{2}\text{ημ}2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^0 = (-1 - 0) - (-0 - 0) = -1$$

(δ) Έχουμε:

$$\int_1^e x \ln x\, dx = \int_1^e \ln x\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_1^6 x\sqrt{x+3}\,dx$ (β) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} εφx\,dx$

(γ) $\displaystyle\int_{-1}^4 |x-3|\,dx$

Λύση

(α) Θέτουμε $\sqrt{x+3}=y$. Τότε, $y^2=x+3 \Longrightarrow 2y\,dy=1\,dx$. Για $x=1 \Longrightarrow y=2$. Για $x=6 \Longrightarrow y=3$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_1^6 x\sqrt{x+3}\,dx &= \int_2^3 (y^2-3)y2y\,dy\\ &= \int_2^3 (2y^4-6y^2)\,dy = \left[\frac{2}{5}y^5-2y^3\right]_2^3\\ &= \left(\frac{486}{5}-54\right)-\left(\frac{64}{5}-16\right)=\frac{422}{5}-38=\frac{232}{5}\end{aligned}$$

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} εφx\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{ημx}{συνx}\,dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(συνx)}{συνx}\\ &= [-\ln(συνx)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\ln 1 = \ln\sqrt{2}\end{aligned}$$

(γ) Η συνάρτηση $f(x)=|x-3|$ είναι πολλαπλού τύπου και γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases}x-3, & 3\le x\le 4\\ -x+3, & -1\le x<3\end{cases}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^4 |x-3|\;dx &= \int_{-1}^3 |x-3|\;dx+\int_3^4 |x-3|\;dx\\ &= \int_{-1}^3 (-x+3)\;dx+\int_3^4 (x-3)dx\\ &= \left[-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^3+\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_3^4\\ &= \left(-\frac{9}{2}+9+\frac{1}{2}+3\right)+\left(8-12-\frac{9}{2}+9\right)=8\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ορισμένα ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο μετασχηματισμό που δίνεται:

(α) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\ dx,\ \ x = 3\eta\mu\theta,\ \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(β) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2}\, dx,\ \ x = \varepsilon\varphi\theta,\ \ \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Λύση

(α) Αν $x = 3\eta\mu\theta,\ \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε $dx = 3\sigma\upsilon\nu\theta d\theta$ και:

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\eta\mu^2\theta} = \sqrt{9(1-\eta\mu^2\theta)} = \sqrt{9\sigma\upsilon\nu^2\theta} = 3|\sigma\upsilon\nu\theta| = 3\sigma\upsilon\nu\theta$$

Αν $x = 0 \Longrightarrow 3\eta\mu\theta = 0 \Longrightarrow \theta = 0$. Αν $\theta = 3 \Longrightarrow 3\eta\mu\theta = 3 \Longrightarrow \eta\mu\theta = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sigma\upsilon\nu\theta 3\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sigma\upsilon\nu^2\theta\, d\theta$$

$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}\ d\theta = \frac{9}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\eta\mu 2\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{4}$$

(β) Αν $x = \varepsilon\varphi\theta,\ \ \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, τότε $dx = \tau\varepsilon\mu^2\theta d\theta$.

Αν $x = -1 \Longrightarrow \varepsilon\varphi\theta = -1 \Longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$.

Αν $x = 1 \Longrightarrow \varepsilon\varphi\theta = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2}\ dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi^2\theta}{1+\varepsilon\varphi^2\theta}\ \tau\varepsilon\mu^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi^2\theta}{\tau\varepsilon\mu^2\theta}\ \tau\varepsilon\mu^2\theta\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tau\varepsilon\mu^2\theta - 1) d\theta = [\varepsilon\varphi\theta - \theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Παράδειγμα 5

Δίνεται ότι για μια συνάρτηση f ισχύει ότι:

$$\int_{2}^{6} f(x)\,dx = 5$$

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ορισμένα ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας κατάλληλο μετασχηματισμό.

(α) $\displaystyle\int_{5}^{9} f(x-3)\,dx$ (β) $\displaystyle\int_{-6}^{-2} f(-x)\,dx$

Λύση

(α) *1ος τρόπος*

Για το

$$\int_{5}^{9} f(x-3)\,dx$$

θέτουμε $x-3=t$.

Έχουμε $dx = dt$ και για $x=5 \Longrightarrow t=2$, ενώ για $x=9 \Longrightarrow t=6$.

$$\int_{5}^{9} f(x-3)\,dx = \int_{2}^{6} f(t)\,dt = \int_{2}^{6} f(x)\,dx = 5$$

2ος τρόπος

Αφού η F είναι μια παράγουσα της f στο $[2,6]$, τότε ισχύει:

$$\int_{2}^{6} f(x)\,dx = [F(x)]_2^6 = F(6) - F(2) \Longrightarrow F(6) - F(2) = 5$$

Είναι γνωστό ότι αν η F είναι μια παράγουσα της f, τότε για την $y = f(\alpha x + \beta)$ μια παράγουσα θα είναι η $\frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta)$.

Έτσι,

$$\int_{5}^{9} f(x-3)\,dx = [F(x-3)]_5^9 = F(9-3) - F(5-3) = F(6) - F(2) = 5$$

(β) *1ος τρόπος*

Για το

$$\int_{-6}^{-2} f(-x)\,dx$$

θέτουμε$-x=t$. Έχουμε $dx = (-1)dt$ και για $x=-6 \Longrightarrow t=6$, ενώ για $x=-2 \Longrightarrow t=2$. Έχουμε:

$$\int_{-6}^{-2} f(-x)\,dx = \int_{6}^{2} f(t)\,(-1)dt = \int_{2}^{6} f(t)\,dt = 5$$

2ος τρόπος

Έχουμε:

$$\int_{-6}^{-2} f(-x)\,dx = [-F(-x)]_{-6}^{-2} = -F(2) + F(6) = F(6) - F(2) = 5$$

Παράδειγμα 6

Έστω $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, $\alpha < \beta$.

Να δείξετε ότι:

(α) $$\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)\ dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\ dx$$

(β) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}^2 x\ dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^2 x\ dx = \frac{\pi}{4}$$

(γ) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}^4 x\,\text{συν}^2 x\ dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^4 x\,\text{ημ}^2 x\, dx = \frac{\pi}{32}$$

Λύση

(α) Θέτουμε $a+\beta-x = t \Longrightarrow -dx = dt$. Για $x = a \Longrightarrow t = \beta$ και για $x = \beta \Longrightarrow t = \alpha$.

Το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)\ dx = \int_{\beta}^{\alpha} f(t)\ (-dt) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\ dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\ dx$$

(β) Εφαρμόζουμε το συμπέρασμα του ερωτήματος (α) με $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. Δηλαδή, αν $f(x) = \text{ημ}^2 x$, τότε $f(\alpha+\beta-x) = f\left(0+\frac{\pi}{2}-x\right) = \text{ημ}^2\left(0+\frac{\pi}{2}-x\right) = \text{συν}^2 x$ και έχουμε:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}^2 x\ dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^2 x\ dx$$

Αν θέσουμε

$$A = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}^2 x\ dx \text{ και } B = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^2 x\ dx,$$

τότε παρατηρούμε ότι:

$$A + B = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\text{ημ}^2 x + \text{συν}^2 x\,)\ dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\ dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Συνεπώς, έχουμε $A = B = \frac{\pi}{4}$.

(γ) Εφαρμόζουμε το συμπέρασμα του ερωτήματος (α) για $\alpha = 0,\ \beta = \frac{\pi}{2}$ και έχουμε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}^4 x \text{συν}^2 x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}^4\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\text{συν}^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^4 x\, \text{ημ}^2 x dx$$

Αν θέσουμε

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}^4 x\ \text{συν}^2 x\ dx\ \kappa\alpha\iota\ B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}^4 x\ \text{ημ}^2 x dx,$$

τότε παρατηρούμε ότι:

$$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{ημ}^4 x \text{συν}^2 x + \text{ημ}^4 x \text{συν}^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}^2 x \text{συν}^2 x (\text{ημ}^2 x + \text{συν}^2 x)\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}^2 x \text{συν}^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{συν}4x}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\text{ημ}4x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + 0 + 0\right) = \frac{\pi}{16}$$

Αφού $A = B$ και $A + B = \frac{\pi}{16} \Longrightarrow A = B = \frac{\pi}{32}$.

Παράδειγμα 7

Έστω συνεχής συνάρτηση $f\colon [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$.

(α) Αν η f είναι άρτια στο $[-\alpha, \alpha]$, να δείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)\, dx$$

(β) Αν η f είναι περιττή στο $[-\alpha, \alpha]$, να δείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx = 0$$

Λύση

(α) Αφού η f συνεχής και άρτια στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, έχουμε:

$$f(-t) = f(t),\quad \forall t \in [-\alpha, \alpha]$$

Είναι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\, dx + \int_0^{\alpha} f(x)\, dx$$

Για το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx$$

κάνουμε την αντικατάσταση $t=-x$. Εχουμε $dx=-dt$ και για $x=-\alpha \Longrightarrow t=\alpha$, ενώ για $x=0 \Longrightarrow t=0$.

Έτσι:

$$\begin{aligned}
\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx &= \int_{\alpha}^{0} f(-t)(-dt) \\
&= \int_0^{\alpha} f(-t)\,dt = \int_0^{\alpha} f(t)\,dt \qquad (f \text{ άρτια στο } [-\alpha,\alpha]) \\
&= \int_0^{\alpha} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$$

(β) Αφού η f συνεχής και περιττή στο $[-\alpha,\alpha]$, έχουμε:

$$f(-t)=-f(t), \quad \forall t\in[-\alpha,\alpha]$$

Είναι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$$

Για το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx$$

κάνουμε την αντικατάσταση $t=-x$. Εχουμε $dx=-dt$ και για $x=-\alpha \Longrightarrow t=\alpha$, ενώ για $x=0 \Longrightarrow t=0$.

Έτσι:

$$\begin{aligned}
\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx &= \int_{\alpha}^{0} f(-t)(-d\,t) \\
&= \int_0^{\alpha} f(-t)\,dt = -\int_0^{\alpha} f(t)\,dt \qquad (f \text{ περιττή στο } [-\alpha,\alpha]) \\
&= -\int_0^{\alpha} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = -\int_0^{\alpha} f(x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = 0$$

Παράδειγμα 8

(α) Δίνεται:

$$I_\nu = \int_1^e (\ln x)^\nu \, dx, \quad \nu \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Να δείξετε ότι:

$$I_\nu = e - \nu I_{\nu-1}, \quad \forall \nu \geq 1$$

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^\varepsilon (\ln x)^4 \, dx$$

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, έχουμε για $\nu \geq 1$:

$$I_\nu = \int_1^e (\ln x)^\nu \, dx = \int_1^e (\ln x)^\nu \cdot 1 \, dx = \int_1^e (\ln x)^\nu \, d(x)$$

$$= [x(\ln x)^\nu]_1^e - \int_1^e x \, d((\ln x)^\nu) = (e - 0) - \int_1^e x \cdot \nu (\ln x)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= e - \nu \int_1^e x(\ln x)^{\nu-1} dx = e - \nu I_{\nu-1}$$

(β) Με βάση το ερώτημα (α), έχουμε:

$$\int_1^e (\ln x)^4 \, dx = I_4 = e - 4I_3 = e - 4(e - 3I_2) = -3e + 12I_2 = -3e + 12(e - 2I_1)$$

$$= 9e - 24I_1 = 9e - 24(e - 1I_0) = -15e + 24I_0$$

$$= -15e + 24 \int_1^e (\ln x)^0 dx = -15e + 24[x]_1^e$$

$$= -15e + 24(e - 1) = 9e - 24$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int_{0}^{1} (3x^2 + 4x - 2)\, dx$

(β) $\int_{1}^{4} \left(2\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + 1\right) dx$

(γ) $\int_{1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

(δ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(3\text{συν}x + 2\text{ημ}x - \frac{4}{\text{συν}^2 x}\right) dx$

(ε) $\int_{-1}^{3} (x^3 - 7x + 2)\, dx + \int_{-1}^{3} (3x^3 + 7x - 2)\, dx$

(στ) $\int_{0}^{1} \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} dx + \int_{1}^{0} \frac{2}{x^2 + 1} dx$

(ζ) $\int_{0}^{1} \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1}\, d\, x$

2. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int_{1}^{2} (x^3 + 1)^2\, x^2 dx$

(β) $\int_{0}^{3} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

(γ) $\int_{-2}^{-1} \frac{2x + 7}{x^2 + 7x + 12} dx$

(δ) $\int_{e}^{e^2} \frac{3}{4x\, \sqrt[3]{\ln x}} dx$

(ε) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2(3\text{εφ}x + 1)^2\, \text{τεμ}^2 x\, dx$

3. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^4}dx, \quad t = x+1$

(β) $\int_2^7 x\sqrt{x+2}\,dx, \quad u = \sqrt{x+2}$

4. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{συν}^5 x\, \text{ημ}^2 x dx, \quad t = \text{ημ}x$

(β) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx, \quad x = 4\text{ημ}\theta, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(γ) $\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}\,dx, \quad x = \text{εφ}\theta, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi} \text{ημ}^3 x dx = \frac{4}{3}$$

6. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(\alpha+\beta-x) = f(x), \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta xf(x)\,dx = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

7. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ορισμένα ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της παραγοντικής ολοκλήρωσης:

(α) $\int_0^1 (x-1)e^x\,dx$

(β) $\int_0^{\frac{1}{2}} \text{τοξημ}2x\,dx$

(γ) $\int_1^e \frac{1}{x^4}\ln x\,dx$

(δ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \text{ημ}3x\,dx$

8. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_4^5 \frac{x+1}{x-3}\,dx$ (β) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x+8}{x^2+x-2}\,dx$

(γ) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3}{x-1}\,dx$ (δ) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx$

9. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^4 |x^2-4x+3|\,dx$$

10. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\,dx$, με $f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & -1\le x<0 \\ \ln(x+1), & 0\le x\le 2\end{cases}$

11. Δίνεται ότι:

$$I_\nu=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}^\nu x\,dx,\quad \nu\in\{0,1,2,3,\dots\}$$

(α) Να υπολογίσετε τα I_0 και I_1.

(β) Να δείξετε ότι $I_\nu=\frac{\nu-1}{\nu}I_{\nu-2},\ \ \forall\nu\ge 2$.

(γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}^7 x\,dx$$

12. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \big(f(x)+f(\alpha+\beta-x)\big)\,dx$$

(β) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2^x}{2^x+2^{1-x}}\,dx$ ii. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\ln x}{\ln x+\ln(4-x)}\,dx$

13. Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^{-x}\,dx,\quad \nu \in \mathbb{N}_0$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$I_\nu = -\frac{\nu+1}{e} + \nu(\nu-1)I_{\nu-2},\quad \nu \geq 2$$

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

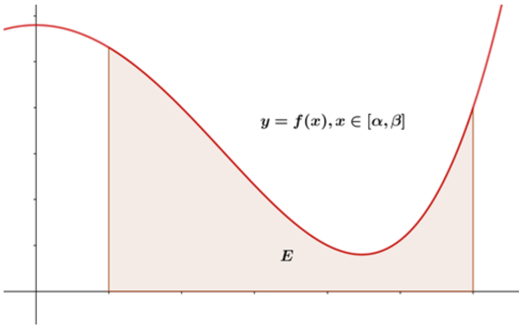
$$\int_0^1 x^4 e^{-x}\,dx$$

5.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

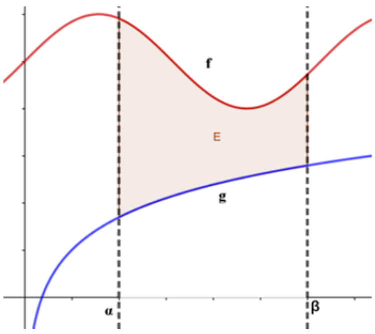
5.4.1 Υπολογισμός εμβαδού

Το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x) \geq 0$, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$, δίνεται από τον τύπο

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$



Έστω ότι έχουμε δύο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$ και E είναι το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Έστω, επίσης, ότι E_1 είναι το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, ενώ E_2 είναι το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Παρατηρούμε ότι $E = E_1 - E_2$. Έτσι, έχουμε:

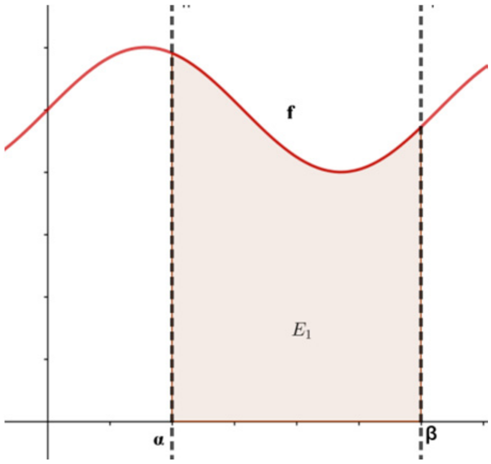
$$E = E_1 - E_2 = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

Επομένως:

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

Παρατηρήσεις

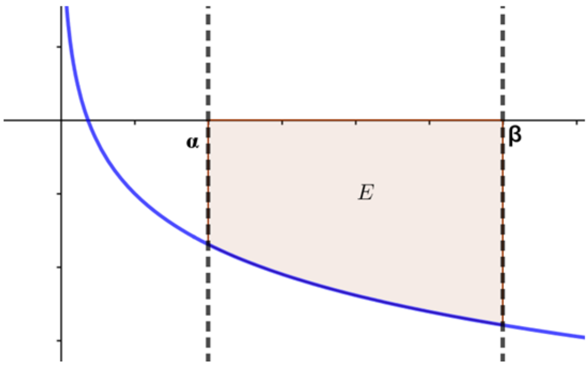
- Το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [\alpha, \beta]$, μπορεί να θεωρηθεί και ως ειδική περίπτωση του πιο πάνω παίρνοντας για $g(x) = 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$.



Δηλαδή:

$$E_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \big(f(x) - g(x)\big)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - 0)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$$

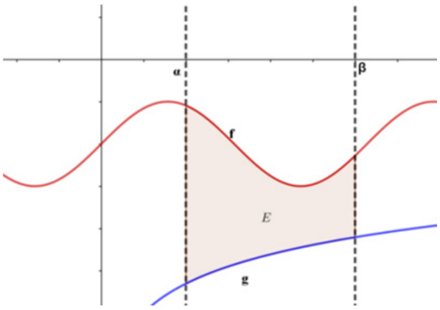
- Το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = g(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $g(x) \leq 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$, μπορεί να θεωρηθεί και ως ειδική περίπτωση του πιο πάνω παίρνοντας για $f(x) = 0,\ \forall x \in [\alpha, \beta]$.



Δηλαδή:

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} \big(0 - g(x)\big)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} (-g(x))\, dx = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx$$

- Ο τύπος για το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f και g ισχύει και όταν οι συναρτήσεις είναι αρνητικές.



Δηλαδή, ισχύει:

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} \big(f(x) - g(x)\big)\, dx$$

Παράδειγμα 1

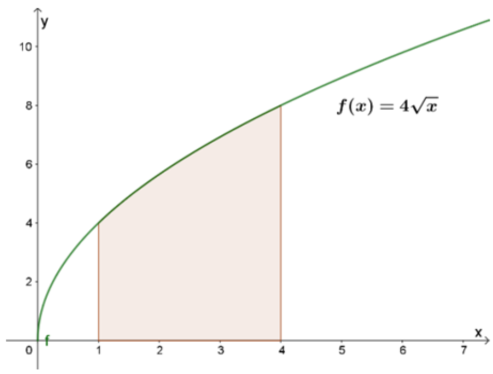
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της καμπύλης $f(x) = 4\sqrt{x}$, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = 1,\ x = 4$.

Λύση

Έχουμε:

$$E = \int_1^4 4\sqrt{x}\, dx = 4\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[4x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3}\right]_1^4$$

$$= \frac{8}{3}(8-1) = \frac{56}{3} \text{ τ.μ.}$$



Παράδειγμα 2

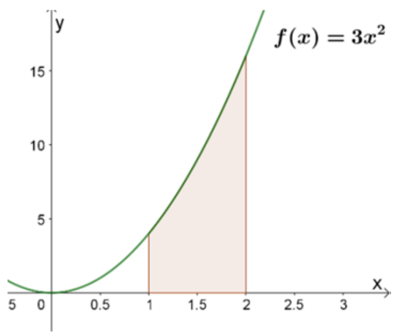
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 3x^2$, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι θετική, για κάθε $x \in [1, 2]$.

Έχουμε:

$$E = \int_1^2 3x^2 dx = [x^3]_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7 \text{ τ.μ.}$$

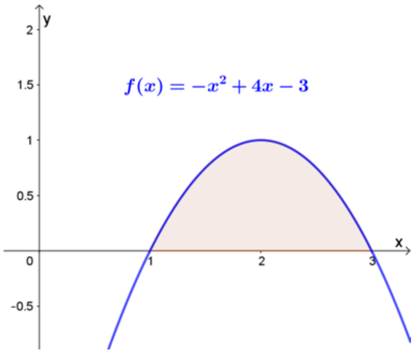


Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ και τον άξονα των τετμημένων.

Λύση

Η συνάρτηση f τέμνει τον άξονα των τετμημένων στις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.



Δηλαδή:

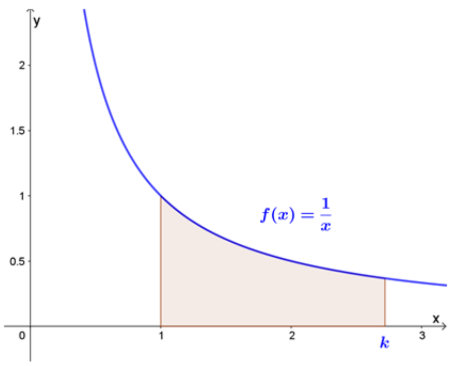
$$\begin{aligned} -x^2 + 4x - 3 = 0 \quad &\Rightarrow -(x^2 - 4x + 3) = 0 \\ &\Rightarrow -(x-1)(x-3) = 0 \\ &\Rightarrow \ x_1 = 1 \text{ ή } x_2 = 3 \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι η περιοχή που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα των τετμημένων βρίσκεται μεταξύ των ριζών της, δηλαδή για $x \in [1, 3]$. Σε αυτό το διάστημα η συνάρτηση είναι θετική. Έτσι:

$$\begin{aligned} E &= \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3 \\ &= \left(-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1\right) = \frac{4}{3} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε το εμβαδόν E που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1, \kappa]$, $\kappa > 1$, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = 1$, $x = \kappa$ να είναι ίσο με 1 τετραγωνική μονάδα.



Λύση

Έχουμε:

$$E = 1 \Leftrightarrow \int_1^\kappa \frac{1}{x} dx = 1 \Leftrightarrow [\ln x]_1^\kappa = 1 \Leftrightarrow \ln \kappa - \ln 1 = 1 \Leftrightarrow \ln \kappa = 1 \Leftrightarrow \kappa = e$$

Παράδειγμα 5

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x, \;\; x \in \mathbb{R}$$

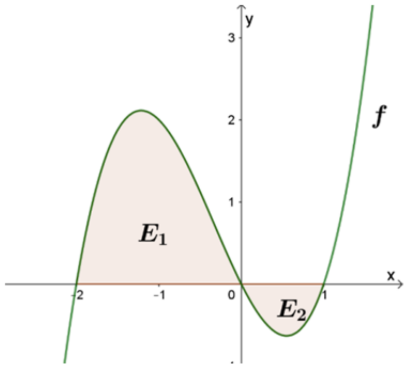
Να βρείτε τα εμβαδά των σκιασμένων περιοχών E_1 και E_2.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι θετική στο διάστημα $[-2, 0]$.
Έτσι, το εμβαδόν E_1 της περιοχής π_1 είναι ίσο με:

$$E_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$= -\left(\frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2\right) = \frac{8}{3} \text{ τ. μ.}$$



Η συνάρτηση f είναι αρνητική στο διάστημα $[0, 1]$.
Έτσι, το εμβαδόν E_2 της περιοχής π_2 είναι ίσο με:

$$E_2 = -\int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 2x)\, dx = -\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{1}$$

$$= -\left(\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} - 1^2\right) + 0 = \frac{5}{12} \text{ τ. μ.}$$

Παράδειγμα 6

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 - 6x - 7$, $x \in \mathbb{R}$ και τον άξονα των τετμημένων.

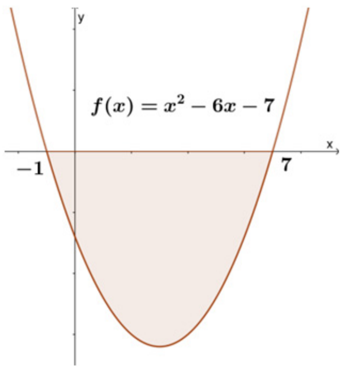
Λύση

Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$:

$$x^2 - 6x - 7 = 0 \Longrightarrow (x + 1)(x - 7) = 0$$

$$\Longrightarrow (x_1 = -1) \text{ ή } (x_2 = 7)$$

Ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός. Άρα, η γραφική παράσταση της f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω). Έτσι, η περιοχή που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και τον άξονα των τετμημένων βρίσκεται για $x \in [-1, 7]$. Σε αυτό το διάστημα η συνάρτηση f είναι αρνητική. Έτσι:



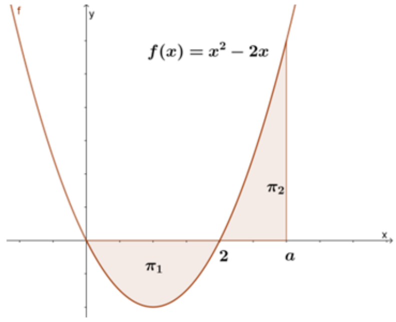
$$E = -\int_{-1}^{7} (x^2 - 6x - 7)\, dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 - 7x\right]_{-1}^{7}$$

$$= -\left(\frac{7^3}{3} - 3 \cdot 7^2 - 3 \cdot 7\right) + \left(\frac{(-1)^3}{3} - 3(-1) - 7(-1)\right)$$

$$= \frac{256}{3} \text{ τ. μ.}$$

Παράδειγμα 7

Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 - 2x,\ x \in \mathbb{R}$ και της ευθείας $x = a,\ a > 2$.
Να βρείτε την τιμή του a, ώστε το εμβαδόν της περιοχής π_1 να είναι ίσο με το εμβαδόν της περιοχής π_2.



Λύση

Η συνάρτηση f είναι αρνητική για $x \in [0,2]$. Έτσι, το εμβαδόν E_1 της περιοχής π_1 είναι:

$$E_1 = -\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = -\left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) + 0 = \frac{4}{3} \text{ τ. μ.}$$

Η συνάρτηση f είναι θετική για $x \in (2, a]$. Έτσι, το εμβαδόν E_2 της περιοχής π_2 είναι:

$$E_2 = \int_2^a (x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^a = \left(\frac{a^3}{3} - a^2\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) = \left(\frac{a^3}{3} - a^2 + \frac{4}{3}\right) \text{ τ. μ.}$$

Ισχύει $E_1 = E_2$. Επομένως:

$$\frac{a^3}{3} - a^2 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \Longrightarrow \frac{a^3}{3} - a^2 = 0 \Longrightarrow a^3 - 3a^2 = 0 \Longrightarrow a^2(a-3) = 0$$

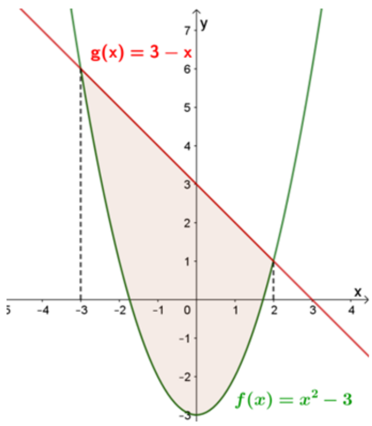
Άρα, $a = 0$ ή $a = 3$. Αφού $a > 2$, έχουμε $a = 3$.

Παράδειγμα 8

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, όπου $f(x) = x^2 - 3,\ x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = 3 - x,\ x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των f και g.
Βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων, λύνοντας το σύστημα:



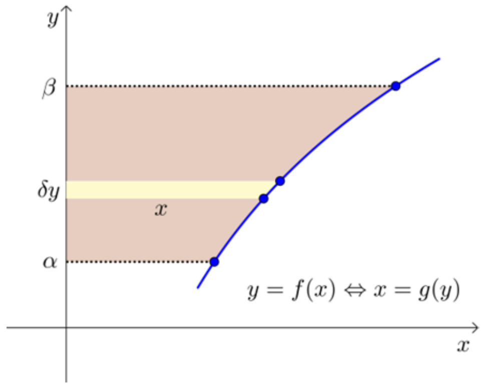
$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 3 = 3 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 = -3 \text{ ή } x_2 = 2$$

Ισχύει $g(x) \geq f(x) \geq 0, \forall x \in [-3, 2]$.
Επομένως:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-3}^{2} \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = \int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)\,dx \\ &= \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{2} = \left(12 - 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(-18 - \frac{9}{2} + 9\right) \\ &= 10 - \frac{8}{3} + 9 + \frac{9}{2} = 19 + \frac{11}{6} = 20\frac{5}{6} \text{ τ. μ.} \end{aligned}$$

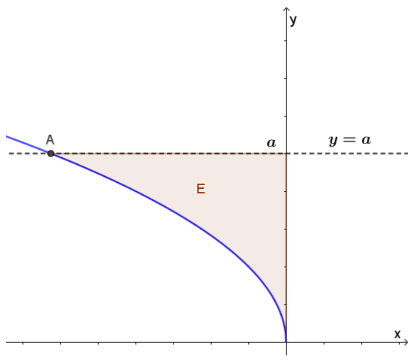
Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, για $x \geq 0$ και $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$, τον άξονα των τεταγμένων και τις ευθείες $y = \alpha$, $y = \beta$, υπολογίζεται με τον τύπο:

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} x\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} g(y)dy$$



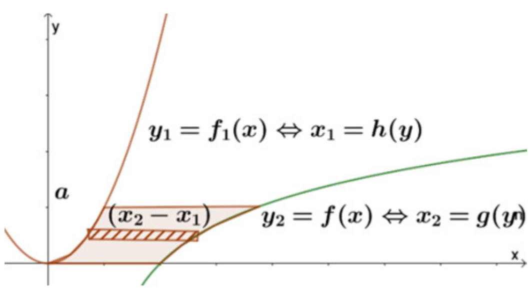
Για $x \leq 0$ και $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$, έχουμε:

$$E = -\int_{0}^{\alpha} x\,dy = -\int_{0}^{\alpha} g\,(y)dy$$



Όταν $y = f_1(x) \Leftrightarrow x_1 = h(y)$ και $y = f_2(x) \Leftrightarrow x_2 = g(y)$ με $x_2 \geq x_1$, τότε:

$$E = \int_{0}^{\alpha} (x_2 - x_1)\ dy = \int_{0}^{\alpha} (g(y) - h(y))\ dy$$



Παράδειγμα 9

Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$, τον άξονα των τεταγμένων και τις ευθείες $y=1$ και $y=8$.

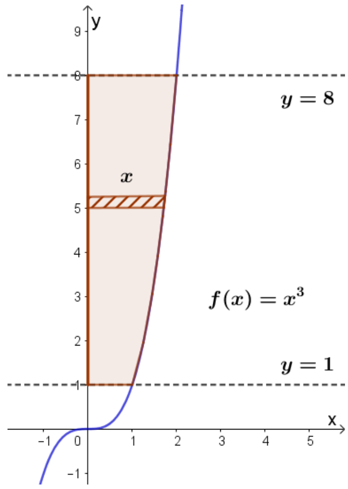
Λύση

Για $y=x^3$, έχουμε ισοδύναμα $x=y^{\frac{1}{3}}$.

Έτσι:

$$E=\int_1^8 x\,dy=\int_1^8 y^{\frac{1}{3}}\,dy=\left[\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}\right]_1^8=\frac{3}{4}\left(8^{\frac{4}{3}}-1^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$=\frac{3}{4}(16-1)=\frac{45}{4}=11\frac{1}{4}\ \text{τ. μ.}$$



Παράδειγμα 10

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία $y=x-2$ και την παραβολή $y^2=x$.

Λύση

1ος τρόπος

Για $y=x-2$, έχουμε ισοδύναμα $x=y+2$.

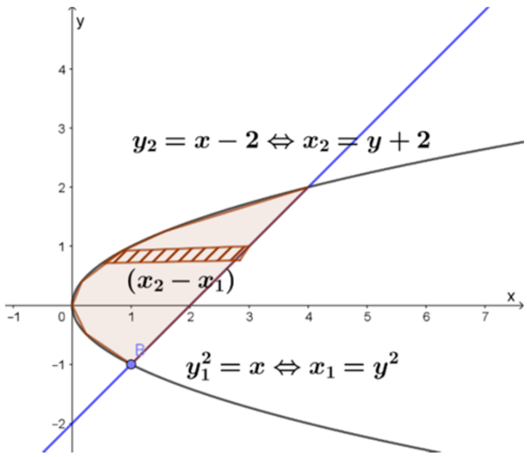
Το χωρίο βρίσκεται μεταξύ των καμπύλων με εξισώσεις $x=y+2$ και $x=y^2$ για $-1\le y\le 2$.

Έτσι:

$$E=\int_{-1}^{2}(x_2-x_1)\,dy=\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)\,dy$$

$$=\left(\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right)_{-1}^{2}$$

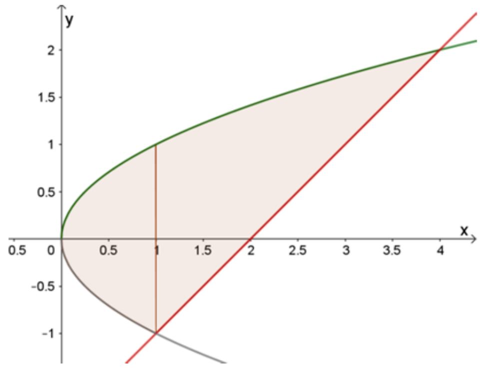
$$=\left(2+4-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}\ \text{τ. μ.}$$



2^{ος} τρόπος

Στο διάστημα $[0,1]$ το χωρίο περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x)=\sqrt{x}$ και $f_2(x)=-\sqrt{x}$.

Στο διάστημα $[1,4]$ το χωρίο περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x)=\sqrt{x}$ και $f_3(x)=x-2$.



Έτσι, το εμβαδόν E του χωρίου είναι:

$$E=\int_0^1\left(\sqrt{x}-\left(-\sqrt{x}\right)\right)dx+\int_1^4\left(\sqrt{x}-(x-2)\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(2\sqrt{x}\right)dx+\int_1^4\left(\sqrt{x}-x+2\right)dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^4$$

$$=\left(\frac{4}{3}\right)+\left(\left(\frac{16}{3}\right)-8+8\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2\right)$$

$$=\frac{18}{3}+\frac{1}{2}-2=\frac{9}{2}\text{ τ. μ.}$$

Παράδειγμα 11

Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της παραβολής $y=x^2$, της εφαπτομένης της στο σημείο της $A(1,1)$ και τον άξονα των τετμημένων.

Λύση

1^{ος} τρόπος

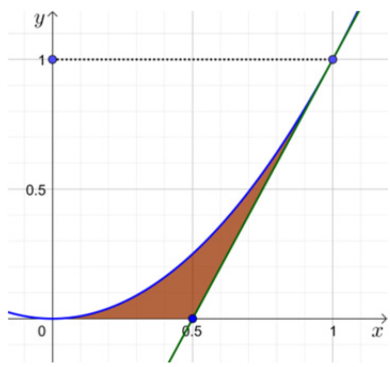
Για την εξίσωση της εφαπτομένης της $y=x^2$ στο $A(1,1)$, υπολογίζουμε την κλίση της:

$$y=x^2\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=2x\Longrightarrow\lambda_{\varepsilon\varphi}=2\cdot1=2$$

Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y-1=2(x-1)\Longrightarrow y=2x-1$$

Για $y=2x-1\Longrightarrow x_2=\frac{y}{2}+\frac{1}{2}$ και για $y=x^2\Longrightarrow x_1=\sqrt{y}$.



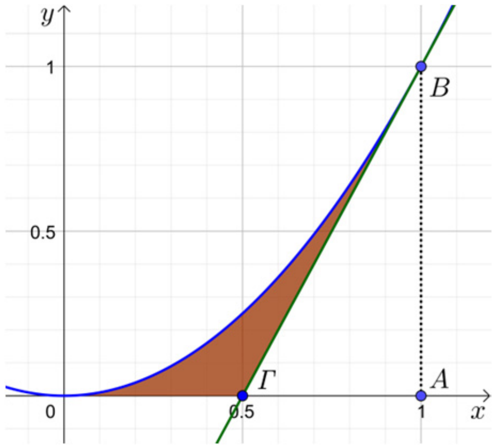
Για τον υπολογισμό του εμβαδού, χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$E=\int_{y_1}^{y_2}(x_2-x_1)\,dy=\int_0^1\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2}-\sqrt{y}\right)dy=\left(\frac{y^2}{4}+\frac{y}{2}-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}\text{ τ.μ.}$$

2ος τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης της $y = x^2$ στο $A(1, 1)$ είναι:

$$y - 1 = 2(x - 1) \Longrightarrow y = 2x - 1$$



Για τον υπολογισμό του εμβαδού, υπολογίζουμε το εμβαδόν που περικλείεται από την παραβολή, τον άξονα των τετμημένων και την ευθεία $x = 1$ και στη συνέχεια αφαιρούμε το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$. Δηλαδή:

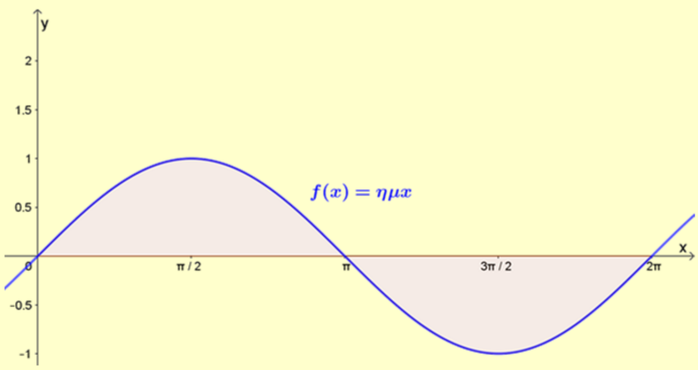
$$E = \int_0^1 x^2\,dx - \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{2} = \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \text{ τ.μ.}$$

Δραστηριότητες

1. Να σκιάσετε σε άξονες συντεταγμένων τα χωρία που εκφράζονται από τα πιο κάτω ορισμένα ολοκληρώματα και στη συνέχεια να τα υπολογίσετε:

(α) $\int_{1}^{3} 6x^2\,dx$ (β) $\int_{-1}^{2} (t^2-1)\,dt$ (γ) $\int_{1}^{4} \frac{2}{x}\,dx$

2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x,\ x \in [0, 2\pi]$.



(α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{0}^{2\pi} \eta\mu x\,dx$$

(β) Να εξηγήσετε γιατί το πιο πάνω ολοκλήρωμα δεν δίνει το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα των τετμημένων.

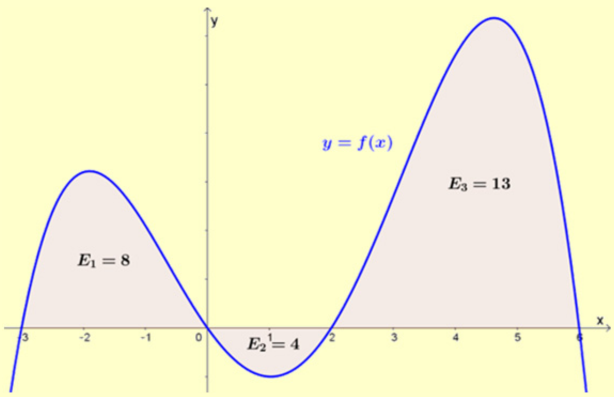
(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

3. Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-3}^{6} f(x)\,dx,$$

αν είναι γνωστό ότι ισχύει για τα εμβαδά ότι:

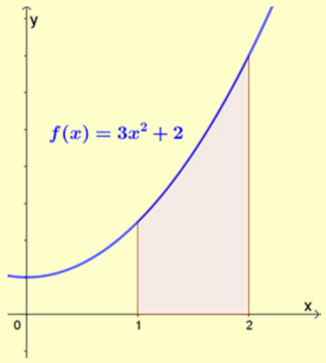
$E_1 = 8,\ E_2 = 4$ και $E_3 = 13$



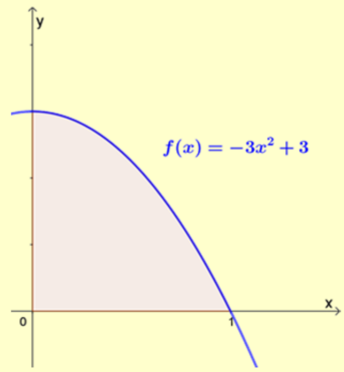
4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = (x-1)^2$ και τον άξονα των τετμημένων.

5. Να βρείτε το εμβαδόν των πιο κάτω σκιασμένων περιοχών:

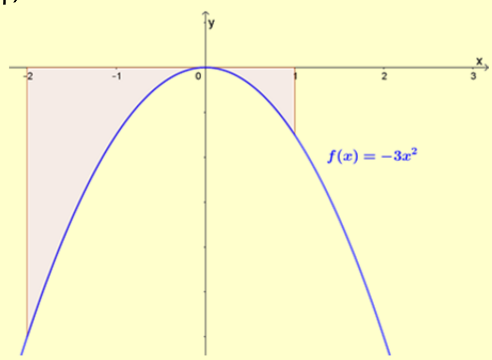
(α)



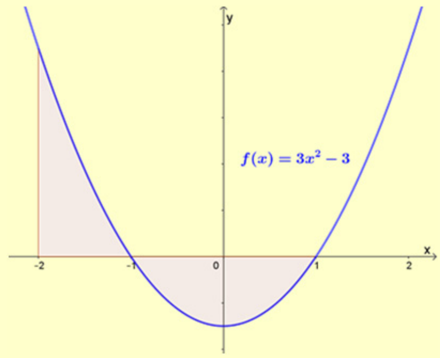
(β)



(γ)



(δ)



6. Να βρείτε την τιμή του α, $\alpha > 0$, ώστε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x^2$, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = -1$ και $x = \alpha$ να είναι ίσο με 9 τετραγωνικές μονάδες.

7. Να βρείτε το εμβαδόν των περιοχών που περικλείονται από τις γραφικές παραστάσεις των ακόλουθων συναρτήσεων και τον άξονα των τετμημένων:
(α) $f(x) = -(x+2)(x-3)$
(β) $f(x) = x^2 - 4$

8. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) $f(x) = x^2 + 1,\ \ g(x) = 5$

(β) $f(x) = 5x - x^2,\ \ g(x) = x$

(γ) $f(x) = \dfrac{6}{x},\ \ x \neq 0,\ \ g(x) = 7 - x$

9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των παραβολών $y = x^2$ και $y^2 = 8x$.

10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $y = \ln x$, $x > 0$, της εφαπτομένης της στο σημείο της $A(e, 1)$ και του άξονα των τετμημένων.

11. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

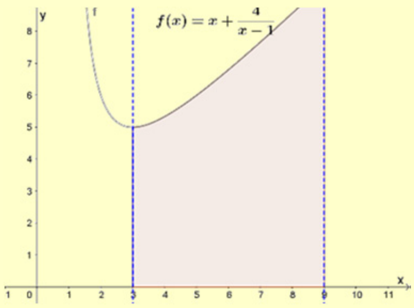
$$f(x) = x^3 - 6x^2$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα των τετμημένων.

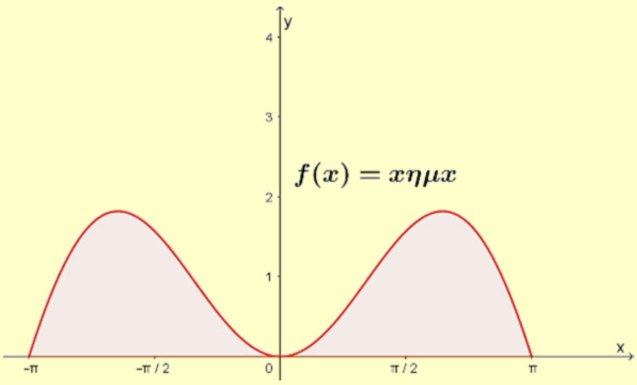
12. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x + \frac{4}{x-1}$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την πλάγια ασύμπτωτή της και τις ευθείες $x = 3,\ x = 9$.



13. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x\eta\mu x,\ x \in [-\pi, \pi]$.



(α) Να δείξετε ότι:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\eta\mu x dx = 2\int_{0}^{\pi} x\eta\mu x dx$$

(β) Να δείξετε ότι:

$$\int_{0}^{\pi} x\eta\mu x dx = \int_{0}^{\pi} (\pi - x)\eta\mu x dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} \eta\mu x dx$$

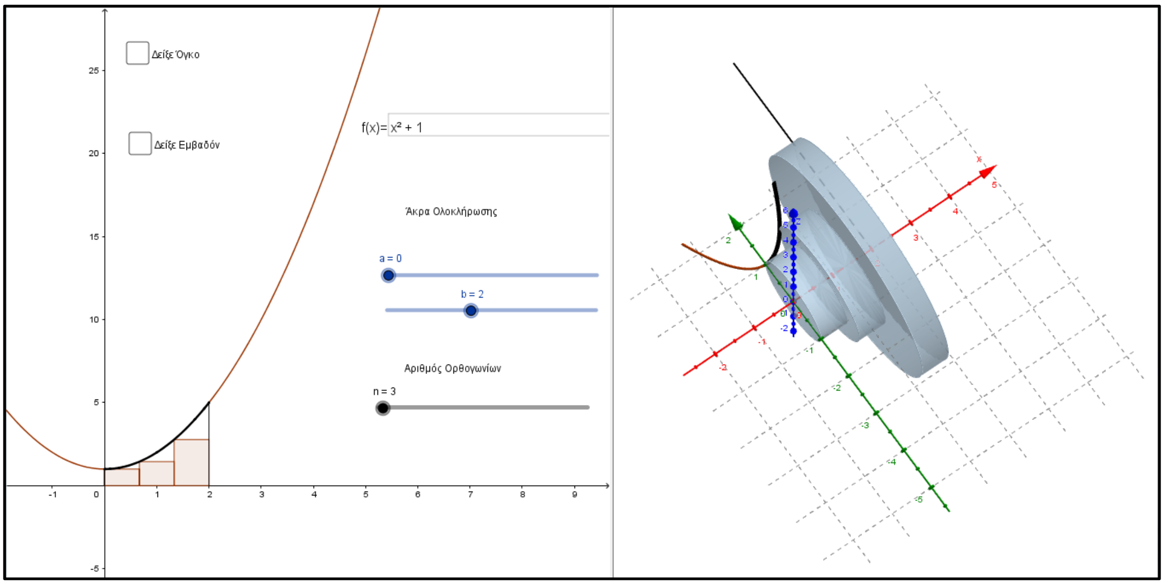
(γ) Να υπολογίσετε το σκιασμένο εμβαδόν στο πιο πάνω σχήμα.

14. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται:
   (α) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$, τους άξονες των συντεταγμένων και την ευθεία $y = \ln 2$.
   (β) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, $x \geq 0$, τον άξονα των τεταγμένων και τις ευθείες $y = 1$ και $y = 4$.

5.4.2 Υπολογισμός όγκου στερεού εκ περιστροφής

Όγκος στερεού από περιστροφή επίπεδου χωρίου γύρω από τον άξονα των τετμημένων

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «*CLyk_Kat_En05_Orismeno_3*».



Στην αριστερή οθόνη απεικονίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$. Το επίπεδο χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = a, x = b$ περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων και παράγει στερεό όγκου V.

Διαμερίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n ισομήκη ευθύγραμμα τμήματα και κατασκευάζουμε τα αντίστοιχα «κάτω» ορθογώνια. Ο δρομέας n μεταβάλλει το πλήθος των «κάτω» ορθογωνίων, ενώ οι δρομείς a, b καθορίζουν τις εξισώσεις των ευθειών $x = a, x = b$.

(α) Να μεταβάλλετε τον δρομέα n και να αναφέρετε το είδος του στερεού που δημιουργείται από την πλήρη περιστροφή του κάθε ορθογωνίου γύρω από τον άξονα των τετμημένων.

(β) Να περιγράψετε έναν τρόπο, με τον οποίο μπορείτε να προσεγγίσετε τον όγκο V του παραγόμενου στερεού.

(γ) Υπάρχει τιμή του n, η οποία να δίνει τον όγκο V με ακρίβεια; Αν όχι, να εισηγηθείτε έναν τρόπο, με τον οποίο μπορείτε να υπολογίσετε με ακρίβεια τον όγκο V του παραγόμενου στερεού.

Ο όγκος του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων ενός επίπεδου χωρίου, το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$, δίνεται από τη σχέση:

$$V = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} V_\kappa\right) = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \pi f^2(\xi_\kappa)\Delta x\right) = \pi\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx = \pi\int_\alpha^\beta y^2\,dx$$

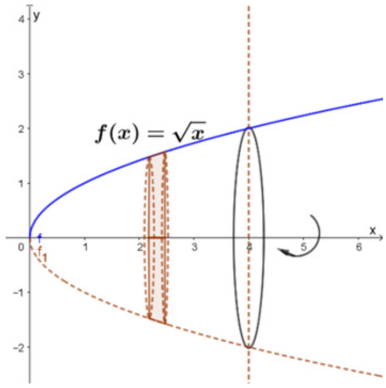
Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt{x},\ x \in [0, 4]$, τον άξονα των τετμημένων και την ευθεία $x = 4$.

Λύση

Ο όγκος είναι ίσος με:

$$V = \pi\int_0^4 f^2(x)\,dx = \pi\int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$
$$= 8\pi \text{ κ. μ.}$$



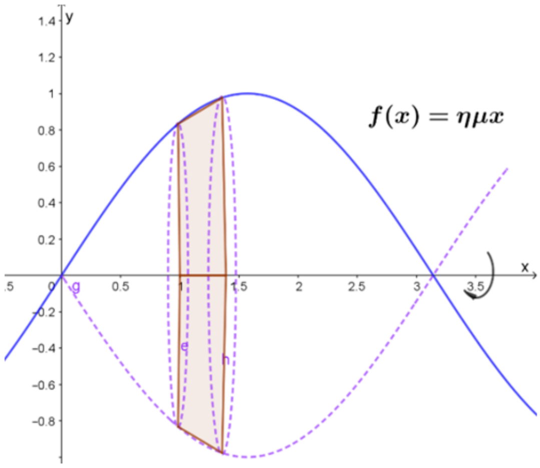
Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \text{ημ}x,\ x \in [0, \pi]$ και τον άξονα των τετμημένων.

Λύση

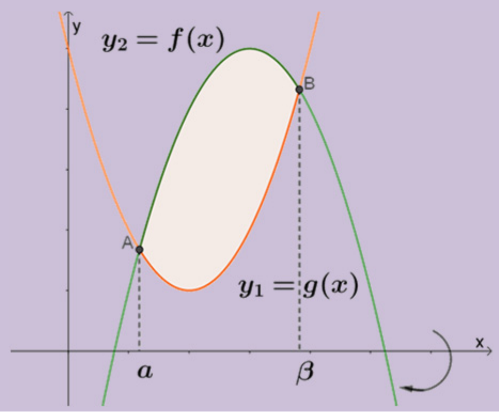
Αν V είναι ο όγκος του στερεού που δημιουργείται κατά την πλήρη στροφή του χωρίου, τότε έχουμε:

$$V = \pi\int_0^\pi f^2(x)\,dx = \pi\int_0^\pi \text{ημ}^2 x\,dx$$
$$= \pi\int_0^\pi \left(\frac{1-\text{συν}2x}{2}\right)dx$$
$$= \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^\pi (1-\text{συν}2x)\,dx$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\text{ημ}2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}\cdot\pi = \frac{\pi^2}{2} \text{ κ. μ.}$$



Ο όγκος του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων ενός επίπεδου χωρίου, το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση δύο συναρτήσεων f και g με $f(x) \geq g(x), \forall x \in [\alpha, \beta]$ δίνεται από τη σχέση:

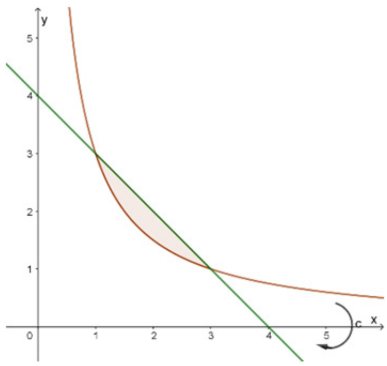
$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (y_2^2 - y_1^2)\, dx = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx$$



Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε τον όγκο που δημιουργείται κατά την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων, του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \frac{3}{x}$ και την ευθεία $y = 4 - x$.

Λύση



Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{x} \\ y = 4 - x \end{cases}$$

βρίσκουμε τα κοινά σημεία των δύο καμπύλων που είναι τα σημεία $(1, 3)$ και $(3, 1)$.

Ό όγκος V του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων, του χωρίου που περικλείεται από τις δύο καμπύλες είναι ίσος με

$$V = V_2 - V_1 = \pi \int_1^3 y_2^2\, dx - \pi \int_1^3 y_1^2\, dx = \pi \int_1^3 (y_2^2 - y_1^2)\, dx,$$

όπου $y_2 = 4 - x$ και $y_1 = \frac{3}{x}$. Έτσι:

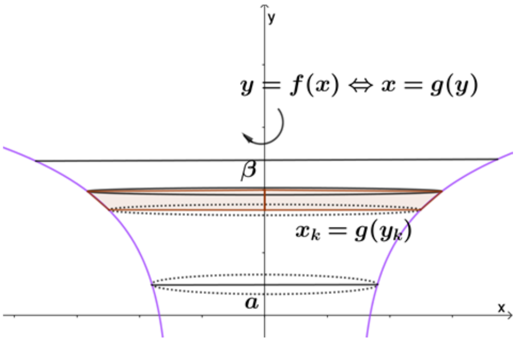
$$V = \pi \int_1^3 \left((4 - x)^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2\right) dx = \pi \int_1^3 \left(16 - 8x + x^2 - \frac{9}{x^2}\right) dx$$

$$= \pi \left[16x - 4x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{9}{x}\right]_1^3 = \pi \left[(48 - 36 + 9 + 3) - \left(16 - 4 + \frac{1}{3} + 9\right)\right] = \frac{8\pi}{3} \text{ κ. μ.}$$

Όγκος στερεού από περιστροφή επίπεδου χωρίου γύρω από τον άξονα των τεταγμένων

Ο όγκος V του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ $x \geq 0$, των ευθειών $y = \alpha$,$y = \beta$ και του άξονα των τεταγμένων, δίνεται από τον τύπο:

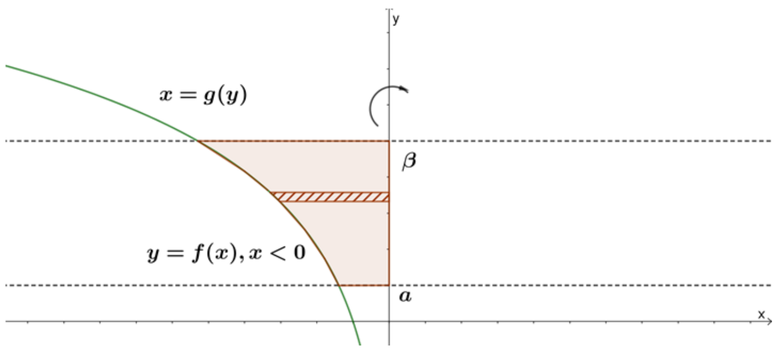
$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \, dy = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (g(y))^2 \, dy$$



Παρατηρήσεις

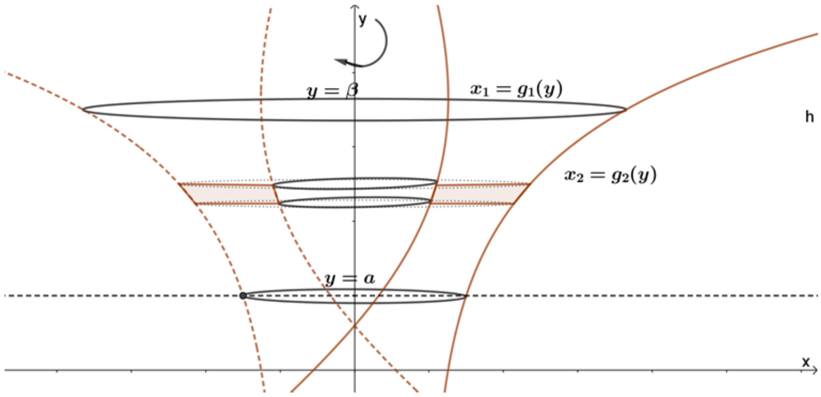
- Αν το χωρίο που περικλείεται από καμπύλη με τύπο $x = g(y)$, $x \leq 0$, τις ευθείες $y = \alpha, y = \beta$ και τον άξονα των τεταγμένων περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα των τεταγμένων, τότε:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (-x)^2 \, dy = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (x)^2 \, dy = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (g(y))^2 \, dy$$



- Αν το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες με τύπο $x_2 = g_2(y)$, $x_1 = g_1(y)$, τις ευθείες $y = \alpha, y = \beta$ και τον άξονα των τεταγμένων περιστραφεί γύρω από τον άξονα των τεταγμένων, τότε:

$$V = V_2 - V_1 = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x_2^2 \, dy - \pi \int_{\alpha}^{\beta} x_1^2 \, dy = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (x_2^2 - x_1^2) \, dy$$



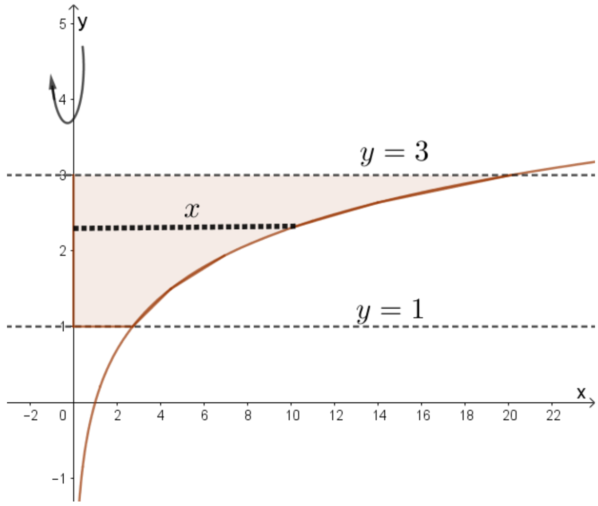
Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \ln x$, τον άξονα των τεταγμένων και τις ευθείες $y = 1,\ y = 3$.

Λύση

Αφού το χωρίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τις ευθειών $y = 1,\ y = 3$ και τον άξονα των τεταγμένων, ό όγκος του παραγόμενου στερεού δίνεται από τον τύπο:

$$V = \pi \int_1^3 x^2\,dy$$



Έχουμε $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$.

Επομένως, ο όγκος V του στερεού είναι:

$$V = \pi \int_1^3 x^2\,dy = \pi \int_1^3 (e^y)^2\,dy = \pi \int_1^3 e^{2y}\,dy = \pi \left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_1^3 = \frac{\pi}{2}(e^6 - e^2) = \frac{\pi e^2}{2}(e^4 - 1) \text{ κ. μ.}$$

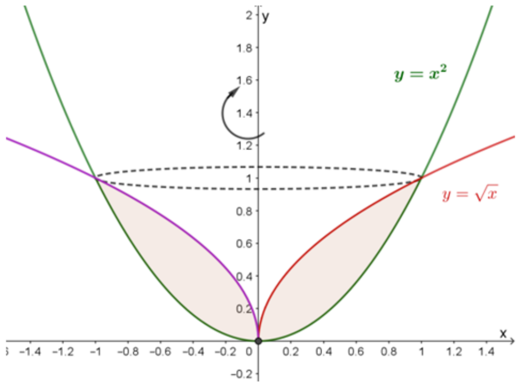
Παράδειγμα 5

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = \sqrt{x},\ x \geq 0$.

Λύση

Τα κοινά σημεία των δύο καμπύλων υπολογίζονται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεών τους:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x},\ \ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 = x$$
$$\Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x = 0) \text{ ή } (x = 1)$$



Το στερεό που παράγεται από την πλήρη στροφή του χωρίου γύρω από τον άξονα των τεταγμένων έχει όγκο:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (x_2^2 - x_1^2)\, dy$$

Έχουμε $y = x^2,\ x \geq 0 \Leftrightarrow x_2^2 = y$ και $y = \sqrt{x},\ x \geq 0 \Leftrightarrow x_1 = y^2 \Leftrightarrow x_1^2 = y^4$. Έτσι:

$$V = \pi \int_0^1 (y - y^4)\, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5}\right] = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10} \text{ κ. μ.}$$

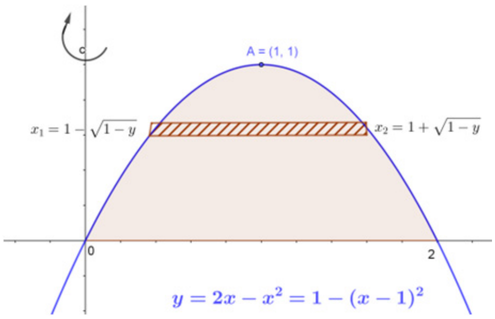
Παράδειγμα 6

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = 2x - x^2$ και τον άξονα των τετμημένων.

Λύση

Για την συνάρτηση με τύπο $y = 2x - x^2$, έχουμε:

$$y = 1 - (x-1)^2 \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-y}$$



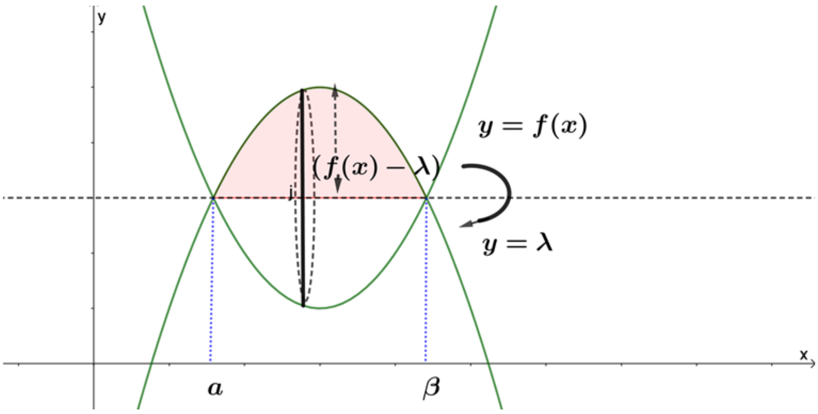
Φέροντας οριζόντιες λωρίδες, τότε ο παραγόμενος όγκος είναι:

$$V_y = \pi \int_0^1 (x_2^2 - x_1^2)\, dy = \pi \int_0^1 \left(\left(1 + \sqrt{1-y}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{1-y}\right)^2\right) dy$$
$$= \pi \int_0^1 4\sqrt{1-y}\, dy = 4\pi \left[-\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{8\pi}{3}(0-1) = \frac{8\pi}{3} \text{ κ. μ.}$$

Όγκος στερεού από περιστροφή επίπεδου χωρίου γύρω από ευθεία της μορφής $y = \lambda$

Έστω $y = f(x)$ συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$. Αν το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = f(x)$ και την ευθεία $y = \lambda$ περιστραφεί γύρω από την ευθεία $y = \lambda$, τότε ο όγκος V του στερεού που παράγεται κατά την περιστροφή είναι ίσος με:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - \lambda)^2 \, dx$$

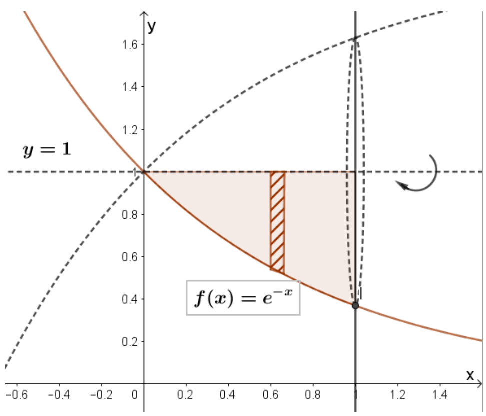


Παράδειγμα 7

Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = e^{-x}$ και τις ευθείες $y = 1$, $x = 1$ περιστρέφεται πλήρως γύρω από την ευθεία $y = 1$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού παράγεται από την περιστροφή του χωρίου.

Λύση

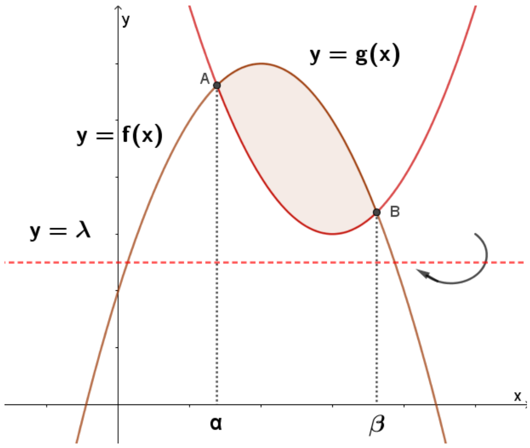
Το χωρίο περικλείεται από την καμπύλη $y = e^{-x}$ και τις ευθείες $y = 1$, $x = 1$ και περιστρέφεται γύρω από την ευθεία $y = 1$.



Ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι ίσος με:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (1 - e^{-x})^2 \, dx = \pi \int_0^1 (1 - 2e^{-x} + e^{-2x}) \, dx \\ &= \pi \left[x + 2e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 \\ &= \pi \left[1 + 2e^{-1} - \frac{1}{2} e^{-2} - 0 - 2 + \frac{1}{2} \right] \\ &= \pi \left(2e^{-1} - \frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} (4e^{-1} - e^{-2} - 1) \text{ κ. μ.} \end{aligned}$$

Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ $(g > f)$, οι οποίες τέμνονται στα σημεία A και B με τετμημένες $x_1 = \alpha$ και $x_2 = \beta$.



Αν το χωρίο που περικλείεται από τις δύο καμπύλες περιστραφεί πλήρως γύρω από την ευθεία $y = \lambda$, τότε ο όγκος V του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή θα είναι ίσος με τη διαφορά των δύο όγκων που παράγει η κάθε μία καμπύλη γύρω από την ευθεία $y = \lambda$.
Δηλαδή:

$$\begin{aligned} V = V_2 - V_1 &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} (g(x) - \lambda)^2 \, dx - \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - \lambda)^2 \, dx \\ &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} [(g(x) - \lambda)^2 - ((f(x) - \lambda)^2)] \, dx \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Αν $\lambda = 0$, τότε η ευθεία είναι η $y = 0$, δηλαδή είναι ο άξονας των τετμημένων και αποτελεί ειδική περίπτωση, η οποία έχει μελετηθεί προηγουμένως.
Ο όγκος είναι ίσος με:

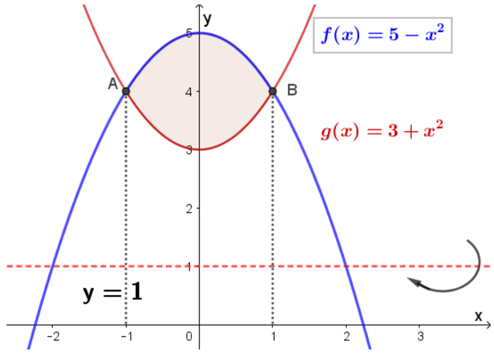
$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \left(\left(g(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2 \right) \, dx$$

Παράδειγμα 8

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $y = 1$ του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = 5 - x^2$ και $y = 3 + x^2$.

Λύση

Οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία A και B με τετμημένες -1 και 1, αντίστοιχα.



Ο όγκος V του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $y = 1$ του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = 5 - x^2$ και $y = 3 + x^2$ είναι:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left[\left((5 - x^2) - 1\right)^2 - \left(\left((3 + x^2) - 1\right)^2\right) \right] dx$$

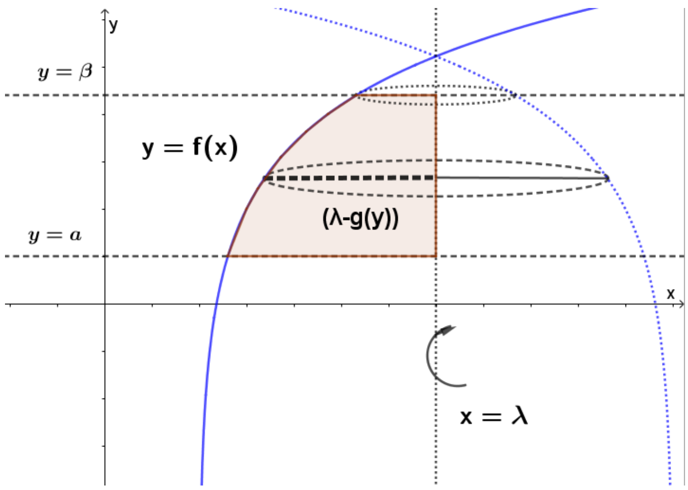
$$= \pi \int_{-1}^{1} \left((4 - x^2)^2 - (2 + x^2)^2 \right) dx \ = \pi \int_{-1}^{1} [(16 - 8x^2 + x^4) - (4 + 4x^2 + x^4)] dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (12 - 12x^2) dx = \pi [12x - 4x^2]_{-1}^{1} = \pi[(12 - 4) - (-12 + 4)] = 16\pi \text{ κ. μ.}$$

Όγκος στερεού από περιστροφή επίπεδου χωρίου γύρω από ευθεία της μορφής $\boldsymbol{x = \lambda}$

Έστω $y = f(x),\ x \geq 0$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$, την ευθεία $x = \lambda$ και τις ευθείες $y = a$, $y = \beta$ περιστραφεί γύρω από την ευθεία $x = \lambda$, τότε ο όγκος V του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη περιστροφή είναι ίσος με:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (\lambda - g(y))^2 \, dy$$



Παράδειγμα 9

Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = \frac{2}{x}$, $x > 0$ και τις ευθείες $y = x + 1$ και $x = 2$ περιστρέφεται κατά 2π γύρω από την ευθεία $x = 2$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την περιστροφή.

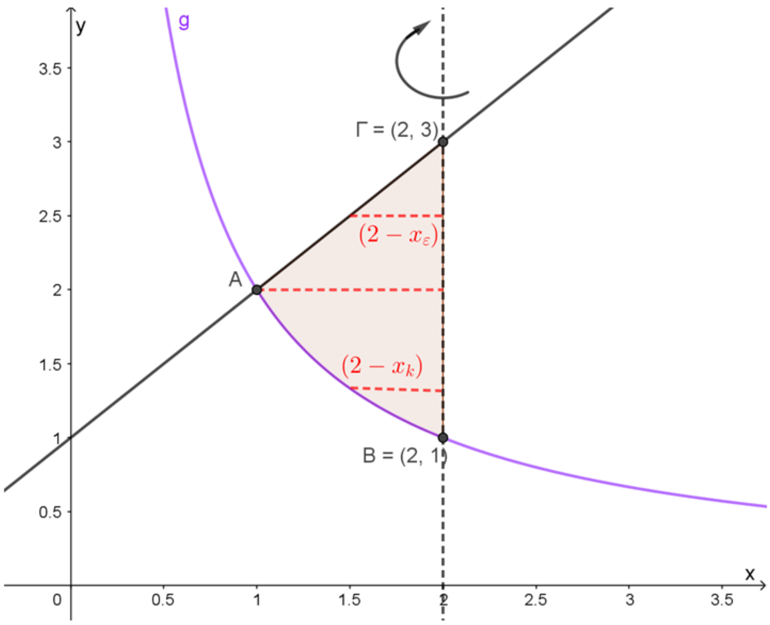
Λύση

Το σημείο τομής A των $y = \frac{2}{x}$, $x > 0$ και $y = x + 1$ υπολογίζεται με τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + 1 = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Longrightarrow x = 1,\ \ y = 2 \Longrightarrow A(1, 2)$$

Εύκολα υπολογίζουμε τα σημεία τομής των $y = \frac{2}{x}$, $x > 0$ και $y = x + 1$ με την ευθεία $x = 2$ που είναι τα $B(2, 1)$ και $\Gamma(2, 3)$, αντίστοιχα.



Ο όγκος V του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του χωρίου είναι ίσος με το άθροισμα των όγκων V_1, V_2 όπου

$$V_1 = \pi \int_2^3 (2 - x_\varepsilon)^2\, dy,\ \ y = x_\varepsilon + 1 \Leftrightarrow x_\varepsilon = y - 1$$

$$V_1 = \pi \int_2^3 \big(2 - (y - 1)\big)^2\, dy = \pi \int_2^3 (3 - y)^2\, dy$$

$$= \pi \int_2^3 (y - 3)^2\, dy = \pi \left(\frac{(y - 3)^3}{3} \right)_2^3 = \frac{\pi}{3} \text{ κ. μ.}$$

και:

$$V_2 = \pi \int_1^2 (2 - x_\kappa)^2 \, dy, \quad y = \frac{2}{x_\kappa} \Leftrightarrow x_\kappa = \frac{2}{y}$$

$$V_2 = \pi \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{y}\right)^2 dy = 4\pi \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{y}\right)^2 dy$$

$$= 4\pi \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2}\right) dy = 4\pi \left(y - 2\ln y - \frac{1}{y}\right)_1^2$$

$$= 4\pi \left(\left(2 - 2\ln 2 - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - 2\ln 1 - \frac{1}{1}\right)\right) = 4\pi \left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right) \text{κ. μ.}$$

Τελικά:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3} + 4\pi \left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right) = \left(\frac{19}{3} - 8\ln 2\right)\pi \text{ κ. μ.}$$

Παρατήρηση

Ο πιο πάνω όγκος V_1 υπολογίζεται και ως όγκος κώνου με ακτίνα $R = 2 - 1 = 1$ και ύψος $h = 3 - 2 = 1$.

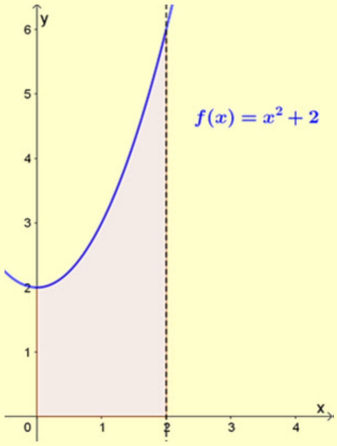
Επομένως ο όγκος V_1 του κώνου είναι:

$$V_1 = \frac{\pi}{3} R^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{\pi}{3}$$

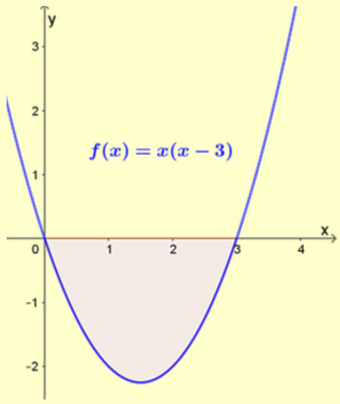
Δραστηριότητες

1. Τα πιο κάτω σκιασμένα χωρία εκτελούν πλήρη στροφή γύρω από το άξονα τετμημένων. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται:

(α)



(β)



2. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα των τετμημένων στο διάστημα, το οποίο δίνεται στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) $f(x) = e^x, \;\; 1 \le x \le 2$

(β) $f(x) = \text{ημ}x, \;\; 0 \le x \le \pi$

(γ) $f(x) = 3x - x^2, \;\; 0 \le x \le 3$

3. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού όταν το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα των τετμημένων περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) $f(x) = 4x - x^2$

(β) $f(x) = 9x - x^3$

4. Να σκιάσετε το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g στις πιο κάτω περιπτώσεις. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή του σκιασμένου χωρίου γύρω από τον άξονα των τετμημένων:

(α) $f(x) = 6 - x^2, \quad g(x) = 2$

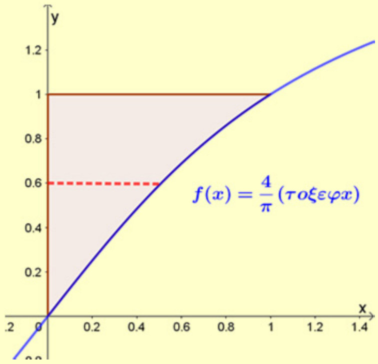
(β) $f(x) = 2\sqrt{x}, \quad g(x) = \dfrac{x}{2}$

5. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα των τεταγμένων στο διάστημα, το οποίο δίνεται στις πιο κάτω περιπτώσεις:

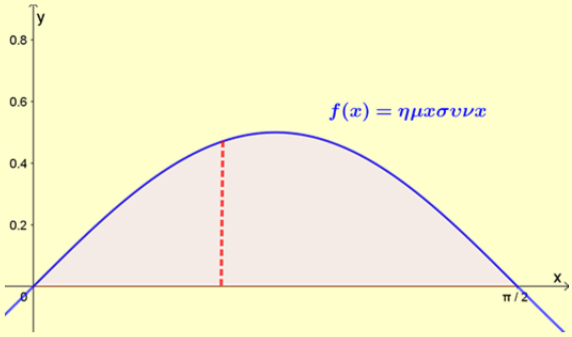
(α) $f(x) = \ln x,\ \ 0 \le y \le 1$ (β) $f(x) = x^3,\ \ 1 \le y \le 8$

6. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή του σκιασμένου χωρίου γύρω από τον άξονα που δίνεται σε κάθε περίπτωση:

(α) Γύρω από τον άξονα των τεταγμένων



(β) Γύρω από τον άξονα των τετμημένων



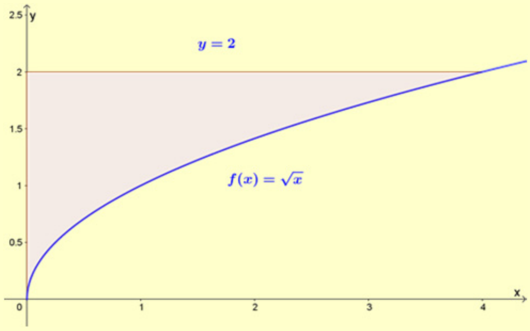
7. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2$ και την ευθεία $y = 1$:

(α) γύρω από την ευθεία $y = 1$

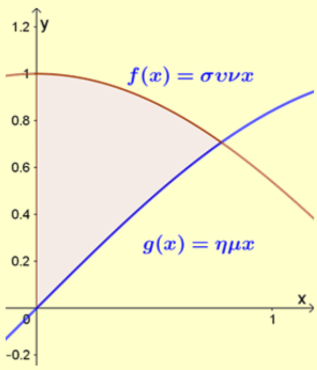
(β) γύρω από την ευθεία $y = 2$

8. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του σκιασμένου χωρίου στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α)



(β)



Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 (3x+2)\,dx$$

2. Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, ότι:

$$\int_\alpha^\beta x^2\,dx = \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)$$

3. Για τη συνεχή συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δίνεται ότι:

$$\int_1^4 f(x)\,dx = 10 \text{ και } \int_4^6 f(x)\,dx = -6$$

Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα:

(α) $\int_6^4 f(x)\,dx$ (β) $\int_2^2 f(x)\,dx$

(γ) $\int_1^6 f\,(x)dx$ (δ) $\int_0^3 f\,(x+1)dx$

4. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{2\alpha}^{3\alpha} \frac{1}{1+3^x}\,dx - \int_{3\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{1+3^{-x}}\,dx = \alpha,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

5. Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \int_2^7 f(x)\,dx$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_4^7 f(x)\,dx$$

6. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

$$\int_{-\kappa}^{2\kappa} (2x+1)\,dx = 4$$

7. Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο μετασχηματισμό, για να υπολογίσετε τα πιο κάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2}dx$ (β) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2(x^2+1)}dx$

(γ) $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$ (δ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{ημ}^3 x}{\text{συν}^4 x}dx$

(ε) $\int_0^4 \sqrt{8x-x^2}\,dx$ (στ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3-3\text{ημ}x+\text{συν}x}dx$

8. Να υπολογίσετε την τιμή του $f(3)$, αν ισχύει ότι:

$$\int_0^3 xf'(x)\,dx + \int_0^3 f(x)\,dx = 12$$

9. Η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(2,5)$ και $B(4,7)$. Οι εφαπτόμενες της συνάρτησης f στα A και B σχηματίζουν γωνίες $\frac{\pi}{3}$ και $\frac{\pi}{6}$, αντίστοιχα, με τον άξονα των τετμημένων. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_2^4 f'(x)\,f''(x)dx$$

10. Δίνονται τα ορισμένα ολοκληρώματα:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ημ}x}{1+2\text{συν}x}dx, \qquad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ημ}2x}{1+2\text{συν}x}dx,$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα A, $A+B$ και B.

11. Αν ισχύει $f(2a-x)=f(x)$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$$

12. Αν ισχύει $f(2a-x)=-f(x)$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0$$

13. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$. Να δείξετε ότι:

$$\int_0^{\alpha} x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2} x f(x) dx$$

14. Αν f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

(α) $\displaystyle\int_0^{2\alpha} \frac{f(x)}{f(x)+f(2a-x)} dx$ (β) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} dx$

15. Δίνεται η συνάρτηση f, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ και:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) + f''(x))\, \sigma\upsilon\nu x\, dx = 2$$

Να υπολογίσετε την τιμή $f'(0)$.

16. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f και g στο διάστημα $[0, \pi]$.
Αν για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύουν οι σχέσεις $f(x) = f(\pi - x)$ και $g(x) + g(\pi - x) = \pi$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \pi - y$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο:
(α) να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi} f(x)g(x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(x)\, dx$$

(β) να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

17. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $\alpha^2 y = x^2(x+\alpha)$ και του άξονα των τετμημένων είναι ίσο με $\frac{\alpha^2}{12}$.

18. Το χωρίο που περικλείεται από το ημικύκλιο $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$, περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων. Να υπολογίσετε τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

19. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όταν αυτή περιστραφεί κατά π γύρω από τον άξονα:
(α) των τετμημένων
(β) των τεταγμένων

20. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $y = 2$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x - x^2$ και της ευθείας $y = 2$.

21. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $x = 5$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \sqrt{x-1}$, τον άξονα των τετμημένων και της ευθείας $x = 5$.

22. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $x = e$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \ln x$, $x > 0$, τον άξονα των τετμημένων και της ευθείας $x = e$.

23. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = x$:
    (α) γύρω από την ευθεία $y = 1$
    (β) γύρω από την ευθεία $x = 2$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - x^2$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα των τετμημένων γύρω από:
    (α) τον άξονα των τεταγμένων.
    (β) από την ευθεία $x = -2$

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και m, M είναι η ελάχιστη και η μέγιστη της τιμή, αντίστοιχα, στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$m(\beta-\alpha)\leq\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\leq M(\beta-\alpha)$$

2. Να μελετήσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατά τους:

(α) $F(x)=\displaystyle\int_{-2}^{x}(t^3-4t)\,dt$ (β) $F(x)=\displaystyle\int_{2}^{x^2}\frac{\ln t}{t}dt$

3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\text{ημ}t-t)dt}{\text{ημ}x-x\text{συν}x}$$

4. Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, να αποδείξετε και να ερμηνεύσετε γραφικά ότι:

(α) $\displaystyle\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} x\,f'(x)dx$

(β) $\displaystyle\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)\,dx+\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

$\in$	ανήκει
$\notin$	δεν ανήκει
$\forall$	για κάθε
$\exists$	υπάρχει
$\cup$	ένωση συνόλων
$\cap$	τομή συνόλων
$\subset$	γνήσιο υποσύνολο
$\subseteq$	υποσύνολο
$\emptyset$ ή $\{\ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
$\neq$	άνισο
$\equiv$	ταυτοτικά ίσο
$\cong$	κατά προσέγγιση ίσο
$\mathbb{N}$	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}$	ακέραιοι αριθμοί $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}^+$	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4,\ldots\}$
$\mathbb{Z}^-$	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1,-2,-3,-4,\ldots\}$
$\mathbb{Q}$	ρητοί αριθμοί $\{α/β:\ α,β\in Z$ και $β\neq0\}$
$\mathbb{Q}^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{Q}_0^+$	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
$\mathbb{Q}^-$	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
$\mathbb{R}$	πραγματικοί αριθμοί
$\Rightarrow$	απλή συνεπαγωγή
$\Leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
$\perp$	κάθετες
$\parallel$	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή

=		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
.		Υποδιαστολή
EXP		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
Ans		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
$x^{\square}$	ή x^y ή ^	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
SHIFT	ή 2^{nd} F	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
AC		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
DEL		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
Abs		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
(-)		Εισαγωγή Προσήμου –
a b/c	ή $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$	Κλάσμα
S⇔D	ή a b/c	Μετατροπή Κλάσματος ⇔ Δεκαδικό
CLR		Σβήσιμο μνήμης
M+		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
M-		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
M		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3+4$	3 + 4 =	3+4 7
2,34 – 1,1	2 · 3 4 − 1 · 1 =	2.34 – 1.1 1.24
$3 \cdot 2$	3 x 2 =	$3X2$ 6
2^5	2 x^y 5 =	2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$	5 EXP 3 =	$5E3$ ή $5X103$ 5000
$\frac{3}{4}$	a b/c 3 ↓ 4 → = ή 3 a b/c 4 =	$\frac{3}{4}$ 3⌟4
$2\frac{3}{4}$	SHIFT $\frac{\square}{\square}$ 2 → 3 ↓ 4 = ή 2 a b/c 3 a b/c 4 =	$2\frac{3}{4}$ 2 ⌟3 ⌟4
$\sqrt{4}$	√ 4 =	$\sqrt{4}$ 2
5^2	5 X² =	5^2 25
$2 \cdot (7-3)$	2 x (7 − 3) =	$2X(7-3)$ 8
$2 \cdot (7-3)$	7 − 3 = 2 x Ans =	$2XAns$ 8
$2-(-3)$	2 − ((-) 3) =	$2-(-3)$ 5
$\lvert -3 \rvert$	Abs (-) 3 =	$\lvert -3 \rvert$ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	S⇔D ή SHIFT a b/c	$\frac{1}{4}$
$9-6:2$	Υπολογισμός και αποθήκευση 9 − 6 ÷ 2 = M+	$9-6:\ 2M+$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9-6:2) - 6:(9-6:2)$	3 X M − 6 ÷ M =	$3\,X\,M - 6:\ M$ 17

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ 1°- 89°

Γωνία	ημω	συνω	εφω
1°	0,017	0,999	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,395	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,348
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
28°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
38°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Γωνία	ημω	συνω	εφω
46°	0,720	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,470	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,748
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,333
78°	0,978	0,203	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	0,999	0,018	57,290