

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Λυκείου Κατεύθυνσης

Δ' τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά

Γ΄ Λυκείου Κατεύθυνσης, Δ΄ Τεύχος

Το παρόν τεύχος αφιερώνεται στην μνήμη της Επιθεωρήτριας Μαθηματικών Μέσης Εκπαίδευσης Ευτυχίας Καλλεπίτη.

Συγγραφή:	Βολακάκη Μαρία Κοντοβούρκης Μιχάλης Κυριάκου Κυριάκος Λοϊζιάς Σωτήρης Ματθαίου Κυριάκος	Παπαγιάννης Κωνσταντίνος Σαλονικίδης Ιωάννης Σεργίδης Μάριος Τιμοθέου Σάββας
Συντονιστές:	Χρίστου Κωνσταντίνος, <i>Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου</i> Βίδρας Αλέκος, <i>Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου</i>	
Εποπτεία:	Φιλίππου Ανδρέας, <i>Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης</i> Γιασουμής Νικόλας, <i>Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης</i> Παπαγιάννη Όλγα, <i>Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης</i> Χατζηχρίστου Χρυσούλα, <i>Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης</i>	
Γλωσσική επιμέλεια:	Παλάτου – Χριστόφια Μαριάννα, <i>Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων</i>	
Σχεδιασμός εξωφύλλου:	Σιαμμάς Χρύσης, <i>Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων</i>	
Συντονισμός έκδοσης:	Παρπούνας Χρίστος, <i>Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων</i>	

Α΄ έκδοση 2018

Β΄ έκδοση 2019

Εκτύπωση:

© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ISBN:



Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Προλογίζω με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση την έκδοση σε τέσσερα τεύχη του βιβλίου «Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Κατεύθυνσης», που αποτελεί αξιόλογο βήμα στην προσπάθεια για αναβάθμιση του περιεχομένου των διδακτικών βιβλίων και τον εκσυγχρονισμό της παρεχόμενης Μαθηματικής παιδείας.

Το βιβλίο έχει έναν διττό ρόλο να εκπληρώσει, να μνηθεί ο μαθητής στη συλλογιστική την οποία εκφράζει το αξεπέραστο λογικό-επαγωγικό σύστημα των Μαθηματικών και παράλληλα να ανταποκριθεί στις σύγχρονες εκπαιδευτικές επιταγές.

Όλο το υλικό που περιλαμβάνεται στο παρόν βιβλίο, σύμφωνα με τα Νέα Αναλυτικά Προγράμματα και τους Δείκτες Επιτυχίας και Επάρκειας που τίθενται από την εκπαιδευτική μεταρρύθμιση, αποσκοπεί αφενός στη βοήθεια των μαθητών/τριών να κατανοήσουν τη μαθηματική λογική και σκέψη και αφετέρου στη συνεισφορά της μαθηματικής παιδείας του τόπου.

Το βιβλίο «Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Κατεύθυνσης» περιλαμβάνει την ύλη των Μαθηματικών που προβλέπεται από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Γ΄ τάξης Λυκείου, του οποίου η εφαρμογή άρχισε από το σχολικό έτος 2017 – 2018 και είναι εμπλουτισμένο με αυστηρούς ορισμούς και αποδείξεις όπως επίσης με πολλές εφαρμογές και παραδείγματα, που ανταποκρίνονται στις δυνατότητες και στα ενδιαφέροντα των μαθητών/τριών. Επιπρόσθετα, καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια, ώστε να είναι δυνατή η ολοκλήρωση της διδασκαλίας του στον διδακτικό χρόνο, ο οποίος προβλέπεται από το εγκεκριμένο ωρολόγιο πρόγραμμα.

Το κλειδί της επιτυχίας στο μάθημα των Μαθηματικών είναι η ουσιαστική κατανόηση των εννοιών, η ανάπτυξη αναλυτικής και συνθετικής σκέψης, η μεθοδολογική αντιμετώπιση ομαδοποιημένων προβλημάτων και η αποφυγή της αποστήθισης. Η ορθή χρήση του βιβλίου δημιουργεί στον μαθητή, εκτός από το φιλικό περιβάλλον, όλες εκείνες τις προϋποθέσεις, κυριότερες των οποίων είναι ο προβληματισμός και η αυτενέργεια, για ανάπτυξη μιας κριτικής, διερευνητικής και ορθολογιστικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.

Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης, εκπαιδευτικούς και επιθεωρητές και ιδιαίτερα τους Καθηγητές του Πανεπιστημίου Κύπρου Κωνσταντίνο Χρίστου και Αλέκο Βίδαρα.

Δρ Κυπριανός Δ. Λούης
Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	Σελίδα
9. Σύνολα	7
▪ Επανάληψη στα σύνολα	8
▪ Ιδιότητες πράξεων συνόλων	10
▪ Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού	12
10. Συνδυαστική	19
▪ Εισαγωγή στη Συνδυαστική	20
▪ Μεταθέσεις	31
▪ Διατάξεις	42
▪ Συνδυασμοί	51
11. Πιθανότητες	61
▪ Η έννοια της Πιθανότητας	62
▪ Πιθανότητες συνδυασμένων ενδεχομένων	82
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	97

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

ΣΥΝΟΛΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 9.1 Επανάληψη στα σύνολα
- 9.2 Ιδιότητες πράξεων συνόλων
- 9.3 Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού

9.1 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

Έχουμε μάθει...

- **Σύνολο** είναι μια **καλώς ορισμένη συλλογή διαφορετικών μεταξύ τους αντικειμένων**.

Τα αντικείμενα που αποτελούν ένα σύνολο λέγονται **στοιχεία** του συνόλου.

Όταν ένα στοιχείο a **ανήκει σε ένα σύνολο** A , γράφουμε $a \in A$, ενώ όταν το στοιχείο a **δεν ανήκει σε ένα σύνολο** A , γράφουμε $a \notin A$.

Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου A λέγεται **πληθικός αριθμός** του συνόλου A και συμβολίζεται ως $n(A)$ ή $|A|$.

Ένα σύνολο με πληθικό αριθμό 0 λέγεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με $\{\}$ ή \emptyset .

Για παράδειγμα, το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4 = 0\}$ είναι το κενό σύνολο, γιατί δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός που να επαληθεύει την εξίσωση $x^2 + 4 = 0$.

Ένα σύνολο με πληθικό αριθμό 1 λέγεται **μονομελές σύνολο**.

Για παράδειγμα, τα σύνολα $A = \{6\}$ και $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 5 = 0\}$ είναι μονομελή σύνολα.

Τα στοιχεία ενός συνόλου δεν είναι αναγκαστικά ομοειδή. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να έχουμε ως σύνολο το $\{\text{Βασίλης}, 1, \{1\}, 2, \emptyset, a\}$.

Ένα στοιχείο είτε ανήκει είτε δεν ανήκει σε ένα σύνολο.

- Ένα σύνολο δύναται να οριστεί:
 - με **απαρίθμηση των στοιχείων** του. Για παράδειγμα, $\{a, \beta, \gamma\}$.
 - με **περιγραφή της χαρακτηριστικής ιδιότητας** των στοιχείων του. Για παράδειγμα, $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ άρτιος}\}$.
 - ως **αποτέλεσμα πράξεων με σύνολα**.

Ο πληθικός αριθμός του κενού συνόλου είναι $n(\emptyset) = 0$. Αν $n(A) = k$, $k \in \mathbb{N}$, τότε το σύνολο A χαρακτηρίζεται ως **πεπερασμένο**, ενώ, αντίθετα, αν $n(A) = \infty$, τότε το σύνολο A χαρακτηρίζεται ως **άπειρο σύνολο**.

- Ένα σύνολο A είναι **υποσύνολο** του B , τότε και μόνο τότε, αν η συνθήκη $x \in A$ συνεπάγεται $x \in B$ και συμβολίζουμε $A \subseteq B$.

Συμβολικά, γράφουμε

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

και διαβάζουμε ότι το A **περιέχεται (ή εγκλείεται)** στο B .

- Δύο σύνολα A και B λέγονται **ίσα** ($A = B$), όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Γενικά, ισχύει:

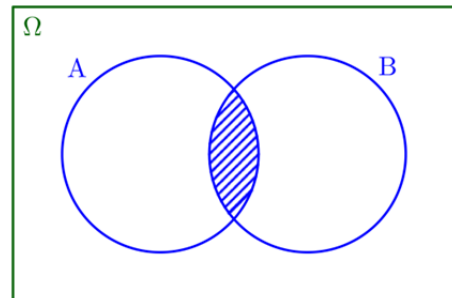
$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A$$

Πράξεις με σύνολα

- Ένα σύνολο που περιέχει όλα τα σύνολα που μελετάμε λέγεται **σύνολο αναφοράς** και συμβολίζεται με Ω .

- Αν Ω είναι ένα σύνολο αναφοράς και A, B δύο υποσύνολα του Ω , τότε ορίζεται **τομή** δύο συνόλων A και B ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα **κοινά** στοιχεία των A και B (η σκιασμένη περιοχή στο διπλανό σχήμα). Συμβολίζεται με $A \cap B$ και έχουμε ότι:

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$$

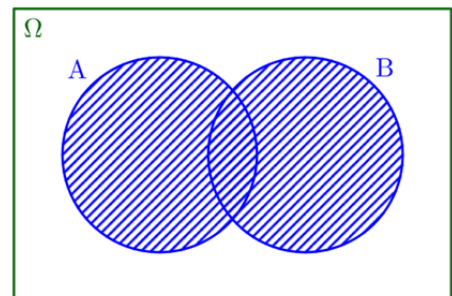


Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε τα σύνολα A και B λέγονται **ξένα μεταξύ τους**.

- Αν Ω είναι ένα σύνολο αναφοράς και A, B δύο υποσύνολα του Ω , τότε ορίζεται **ένωση** δύο συνόλων A και B ένα νέο σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία, τα οποία ανήκουν **σε ένα τουλάχιστον** από τα A και B (η σκιασμένη περιοχή στο διπλανό σχήμα). Συμβολίζεται με $A \cup B$ και έχουμε ότι:

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

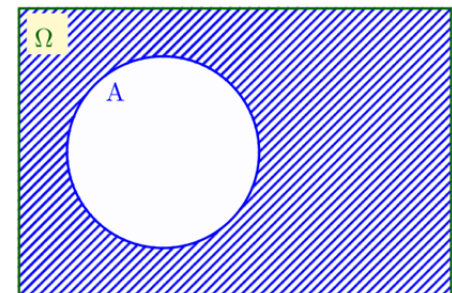
Είναι προφανές ότι $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$. Επίσης, ισχύει $A \cup A = A$ και $A \cup \emptyset = A$.



- Αν Ω είναι ένα σύνολο αναφοράς και A ένα υποσύνολο του Ω , τότε ορίζεται **συμπλήρωμα** του A ως προς Ω ένα νέο σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία, τα οποία ανήκουν στο Ω και δεν ανήκουν στο A (η σκιασμένη περιοχή στο διπλανό σχήμα).

Συμβολίζεται με A' ή A^c και έχουμε ότι:

$$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$



- Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$x \in A' \Leftrightarrow x \notin A \text{ και } x \in A \Leftrightarrow x \notin A'$$

- Ένα στοιχείο του συνόλου αναφοράς Ω είτε θα ανήκει στο A είτε δεν θα ανήκει στο A . Επομένως, ισχύει ότι $A \cup A' = \Omega$.
- Δεν υπάρχει στοιχείο του συνόλου αναφοράς Ω , τέτοιο ώστε να ανήκει στο A και συγχρόνως να μην ανήκει στο A . Επομένως, ισχύει ότι $A \cap A' = \emptyset$.
- Αν ένα στοιχείο του συνόλου αναφοράς Ω δεν ανήκει στο συμπλήρωμα του συνόλου A , τότε ανήκει στο A και αντίστροφα. Επομένως, ισχύει ότι $(A')' = A$.

9.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ιδιότητες της σχέσης εγκλεισμού (\subseteq)

- | | |
|--|------------------|
| (α) $A \subseteq A$ για κάθε σύνολο A | (Ανακλαστική) |
| (β) $A \subseteq B$ και $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ | (Αντισυμμετρική) |
| (γ) $(A \subseteq B \text{ και } B \subseteq \Gamma) \Rightarrow A \subseteq \Gamma$ | (Μεταβατική) |

Παρατηρήσεις

- Η σχέση \subset του **γνήσιου εγκλεισμού** ικανοποιεί μόνο τη μεταβατική ιδιότητα. Ισχύει δηλαδή ότι $(A \subset B \text{ και } B \subset \Gamma) \Rightarrow A \subset \Gamma$.
- Για τα βασικά αριθμοσύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ και \mathbb{R} ισχύει $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Για ένα σύνολο A , το σύνολο **που περιέχει όλα τα υποσύνολα του A** λέγεται **δυναμοσύνολο** και συμβολίζεται με $P(A)$. Ισχύει ότι $P(A) = \{X: X \subseteq A\}$, δηλαδή το δυναμοσύνολο ενός συνόλου A είναι ένα σύνολο, το οποίο **έχει ως στοιχεία σύνολα** που είναι υποσύνολα του A .
- Αν το σύνολο A έχει n στοιχεία, τότε το δυναμοσύνολο του A έχει 2^n στοιχεία. Για παράδειγμα, αν $A = \{2, 5\}$, τότε το δυναμοσύνολο του A είναι το σύνολο $P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, A\}$ και ισχύει $n(A) = 2$, $n(P(A)) = 2^2 = 4$.

Ιδιότητες ισότητας συνόλων

- | | |
|--|---------------|
| (α) $A = A$ για κάθε σύνολο A | (Ανακλαστική) |
| (β) $A = B \Rightarrow B = A$ | (Συμμετρική) |
| (γ) $(A = B \text{ και } B = \Gamma) \Rightarrow A = \Gamma$ | (Μεταβατική) |

Ιδιότητες τομής συνόλων

- | | |
|---|-------------------|
| (α) $A \cap B = B \cap A$ | (Αντιμεταθετική) |
| (β) $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$ | (Προσεταιριστική) |
| (γ) $A \cap \Omega = A$ | |
| (δ) $A \cap \emptyset = \emptyset$ | |
| (ε) $A \cap A = A$ | |
| (στ) $(A \cap B) \subseteq A$ και $(A \cap B) \subseteq B$ | |
| (ζ) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap \Gamma) \subseteq (B \cap \Gamma)$ | |
| (η) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ | |

Ιδιότητες ένωσης συνόλων

- | | |
|---|-------------------|
| (α) $A \cup B = B \cup A$ | (Αντιμεταθετική) |
| (β) $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$ | (Προσεταιριστική) |
| (γ) $A \cup \Omega = \Omega$ | |
| (δ) $A \cup \emptyset = A$ | |
| (ε) $A \cup A = A$ | |
| (στ) $A \subseteq (A \cup B)$ και $B \subseteq (A \cup B)$ | |
| (ζ) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup \Gamma) \subseteq (B \cup \Gamma)$ | |
| (η) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ | |

Ιδιότητες που συνδέουν την ένωση και την τομή συνόλων

$$(\alpha) \quad A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$$

Η πράξη της ένωσης είναι επιμεριστική ως προς την πράξη της τομής.

$$(\beta) \quad A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

Η πράξη της τομής είναι επιμεριστική ως προς την πράξη της ένωσης.

Βασικές σχέσεις σε δύο σύνολα που συνδέουν τις πράξεις της ένωσης, της τομής και του συμπληρώματος είναι γνωστές ως τύποι του De Morgan.

Πρόταση (Τύποι De Morgan)

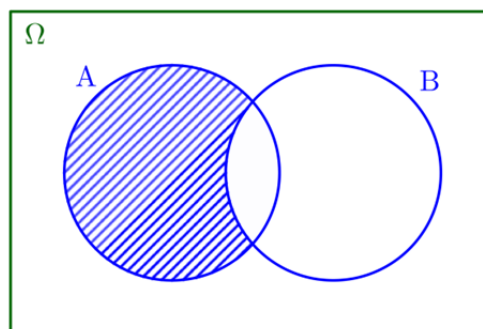
$$(\alpha) \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(\beta) \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$$

- Αν Ω είναι ένα σύνολο αναφοράς και A, B δύο υποσύνολα του Ω , τότε ορίζουμε **διαφορά του B από το A** ένα νέο σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του A , τα οποία δεν ανήκουν στο B (η σκιασμένη περιοχή στο πιο κάτω σχήμα).

Συμβολίζουμε με $A - B$ και έχουμε ότι:

$$A - B = A \cap B' = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \notin B\}$$



Παράδειγμα 1

Δίνονται τα σύνολα $A = \mathbb{Z}$ και $B = \mathbb{N}$. Να ορίσετε τα σύνολα $A - B$ και $B - A$.

Λύση

Το σύνολο $A - B$ περιέχει όλους τους ακέραιους αριθμούς που δεν είναι φυσικοί. Συνεπώς, $A - B = \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}$.

Το σύνολο $B - A$ είναι το κενό σύνολο, γιατί δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί που να μην είναι ακέραιοι. Δηλαδή, $B - A = \emptyset$.

9.3 ΑΡΧΗ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ – ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ

Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού για δύο σύνολα

Διερεύνηση 1

(α) Αν A, B είναι δύο πεπερασμένα σύνολα, να εξηγήσετε πότε ισχύει η ισότητα:

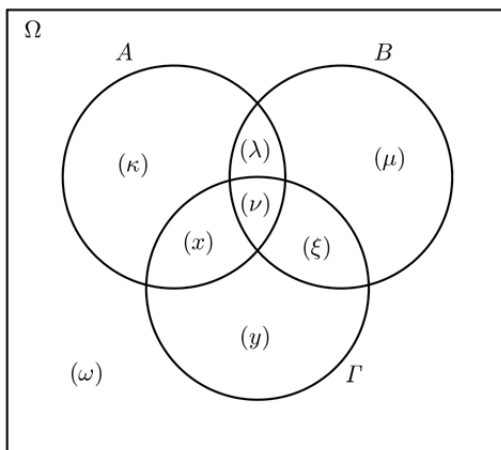
$$v(A \cup B) = v(A) + v(B)$$

(β) Γιατί δεν ισχύει πάντοτε αυτή η ισότητα;

(γ) Ποιος πληθικός αριθμός βελτιώνει την ισότητα για όλα τα πεπερασμένα σύνολα A, B ;

Διερεύνηση 2

Τα σύνολα A, B και Γ είναι τρία πεπερασμένα σύνολα στο σύνολο αναφοράς Ω με $v(\Omega) = N, N \in \mathbb{N}$, όπως φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα. Οι περιοχές $(\kappa), (\lambda), (\mu), (\nu), (\xi), (x), (y)$ και (ω) δείχνουν το πλήθος των στοιχείων στη συγκεκριμένη περιοχή.



(α) Να αναφέρετε πόσες φορές μετρίεται η κάθε περιοχή στο άθροισμα $v(A) + v(B) + v(\Gamma)$.

(β) Να αναφέρετε πόσες φορές μετρίεται η κάθε περιοχή στο άθροισμα $v(A) + v(B) + v(\Gamma) - v(A \cap B) - v(B \cap \Gamma) - v(\Gamma \cap A)$.

(γ) Πόσες φορές πρέπει να μετρηθεί η κάθε μία περιοχή εντός των κύκλων, ώστε να υπολογίσουμε τον πληθικό αριθμό της ένωσης των τριών συνόλων A, B, Γ ;

(δ) Να χρησιμοποιήσετε το ερώτημα (β), για να βρείτε έναν τύπο για τον πληθικό αριθμό $v(A \cup B \cup \Gamma)$.

(ε) Να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο θα υπολογίσετε τον αριθμό $v(A' \cap B' \cap \Gamma')$.

Η αρχή του εγκλεισμού – αποκλεισμού αναφέρεται στο πλήθος των στοιχείων δύο πεπερασμένων συνόλων A και B σε σχέση με το πλήθος των στοιχείων της ένωσης και της τομής των δύο συνόλων.

Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού

Για δύο πεπερασμένα σύνολα A και B ισχύει:

$$v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$$

Παρατήρηση

Όταν τα πεπερασμένα σύνολα A, B είναι ξένα, τότε είναι προφανές ότι τα δύο σύνολα δεν έχουν κοινά στοιχεία.

Έτσι, ισχύει $A \cap B = \emptyset \Rightarrow v(A \cap B) = 0$ και ότι $v(A \cup B) = v(A) + v(B)$.

Πρόταση

Αν $A, B \subseteq \Omega$ είναι δύο πεπερασμένα σύνολα με $A \cap B \neq \emptyset$, τότε ισχύουν:

(α) $v(A') = v(\Omega) - v(A)$

(β) $v(A \cap B') = v(A) - v(A \cap B)$

(γ) $v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$

(δ) $v(A' \cap B') = v(\Omega) - v(A) - v(B) + v(A \cap B)$

Απόδειξη

(α) Τα σύνολα A και A' είναι ξένα μεταξύ τους. Ισχύει $A \cup A' = \Omega$.

Επομένως:

$$v(A \cup A') = v(\Omega) \Leftrightarrow v(A) + v(A') = v(\Omega) \Leftrightarrow v(A') = v(\Omega) - v(A)$$

(β) Τα σύνολα $A \cap B$ και $A \cap B'$ είναι ξένα μεταξύ τους. Ισχύει $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

Επομένως:

$$\begin{aligned} v((A \cap B) \cup (A \cap B')) &= v(A) \Leftrightarrow v(A \cap B) + v(A \cap B') = v(A) \\ &\Leftrightarrow v(A \cap B') = v(A) - v(A \cap B) \end{aligned}$$

(γ) Τα σύνολα $A \cap B'$ και B είναι ξένα μεταξύ τους. Ισχύει $A \cup B = (A \cap B') \cup B$.

Επομένως:

$$v(A \cup B) = v((A \cap B') \cup B) = v(A \cap B') + v(B) = v(A) - v(A \cap B) + v(B)$$

(δ) $v(A' \cap B') = v((A \cup B)') = v(\Omega) - v(A \cup B) = v(\Omega) - (v(A) + v(B) - v(A \cap B))$
 $= v(\Omega) - v(A) - v(B) + v(A \cap B)$

Παράδειγμα 1

Σε μια βιβλιοθήκη υπάρχουν 10 βιβλία με περιεχόμενο στις πιθανότητες, 8 βιβλία με περιεχόμενο στην στατιστική και 6 βιβλία με περιεχόμενο και στις πιθανότητες και στην στατιστική. Πόσα βιβλία υπάρχουν με περιεχόμενο τουλάχιστον ένα από τα δύο θέματα;

Λύση

Έστω A το σύνολο των βιβλίων με περιεχόμενο στις πιθανότητες. Τότε, $v(A) = 10$.

Έστω B το σύνολο των βιβλίων με περιεχόμενο στην στατιστική. Τότε, $v(B) = 8$.

Έστω $A \cap B$ το σύνολο των βιβλίων με περιεχόμενο και στις πιθανότητες και στην στατιστική. Τότε, $v(A \cap B) = 6$.

Το πλήθος των βιβλίων με περιεχόμενο τουλάχιστον σε ένα από τα δύο θέματα είναι ο πληθικός αριθμός $v(A \cup B)$.

Με χρήση της σχέσης του εγκλεισμού αποκλεισμού, έχουμε:

$$v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B) = 10 + 8 - 6 = 12$$

Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού για τρία σύνολα

Η αρχή του εγκλεισμού – αποκλεισμού μπορεί να επεκταθεί και για περισσότερα από δύο σύνολα.

Πρόταση

Αν A, B και Γ είναι τρία πεπερασμένα σύνολα σε ένα σύνολο αναφοράς Ω , τότε ισχύουν:

$$\begin{aligned}(\alpha) \quad & \nu(A \cup B \cup \Gamma) = \nu(A) + \nu(B) + \nu(\Gamma) - \nu(A \cap B) - \nu(B \cap \Gamma) - \nu(\Gamma \cap A) + \nu(A \cap B \cap \Gamma) \\(\beta) \quad & \nu(A' \cap B' \cap \Gamma') = \nu(\Omega) - \nu(A) - \nu(B) - \nu(\Gamma) + \nu(A \cap B) + \nu(B \cap \Gamma) + \nu(\Gamma \cap A) - \\ & - \nu(A \cap B \cap \Gamma)\end{aligned}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}(\alpha) \quad & \nu(A \cup B \cup \Gamma) = \nu((A \cup B) \cup \Gamma) = \nu(A \cup B) + \nu(\Gamma) - \nu((A \cup B) \cap \Gamma) \\ & = \nu(A \cup B) + \nu(\Gamma) - \nu((A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)) \\ & = \nu(A \cup B) + \nu(\Gamma) - (\nu(A \cap \Gamma) + \nu(B \cap \Gamma) - \nu(A \cap \Gamma \cap B \cap \Gamma)) \\ & = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B) + \nu(\Gamma) - \nu(A \cap \Gamma) - \nu(B \cap \Gamma) + \nu(A \cap B \cap \Gamma) \\ & = \nu(A) + \nu(B) + \nu(\Gamma) - \nu(A \cap B) - \nu(B \cap \Gamma) - \nu(\Gamma \cap A) + \nu(A \cap B \cap \Gamma) \\(\beta) \quad & \nu(A' \cap B' \cap \Gamma') = \nu(A \cup B \cup \Gamma)' = \nu(\Omega) - \nu(A \cup B \cup \Gamma) \\ & = \nu(\Omega) - (\nu(A) + \nu(B) + \nu(\Gamma) - \nu(A \cap B) - \nu(B \cap \Gamma) - \nu(\Gamma \cap A) + \nu(A \cap B \cap \Gamma)) \\ & = \nu(\Omega) - \nu(A) - \nu(B) - \nu(\Gamma) + \nu(A \cap B) + \nu(B \cap \Gamma) + \nu(\Gamma \cap A) - \nu(A \cap B \cap \Gamma)\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Σε ένα Λύκειο με 200 μαθητές, οι 130 επέλεξαν Πληροφορική, οι 60 Φυσική και 24 επέλεξαν και τα δύο μαθήματα.

- (α) Πόσοι μαθητές επέλεξαν Πληροφορική ή Φυσική;
(β) Πόσοι μαθητές δεν επέλεξαν ούτε Πληροφορική, ούτε Φυσική;

Από τους 200 αυτούς μαθητές, οι 50 πήγαν επίσκεψη στο Πανεπιστήμιο Κύπρου. Από αυτούς που πήγαν επίσκεψη στο Πανεπιστήμιο Κύπρου, οι 25 είχαν επιλέξει Φυσική, οι 40 Πληροφορική και οι 16 και τα δύο αυτά μαθήματα.

- (γ) Πόσοι από τους μαθητές πήγαν επίσκεψη στο Πανεπιστήμιο ή επέλεξαν Πληροφορική ή επέλεξαν Φυσική;
(δ) Πόσοι από τους μαθητές που δεν πήγαν επίσκεψη στο Πανεπιστήμιο δεν επέλεξαν ούτε Πληροφορική, ούτε Φυσική;

Λύση

(α) Έστω Π : «Οι μαθητές που επέλεξαν Πληροφορική». Τότε, $\nu(\Pi) = 130$.

Έστω Φ : «Οι μαθητές που επέλεξαν Φυσική». Τότε, $\nu(\Phi) = 60$.

Το πλήθος των μαθητών που επέλεξαν και τα δύο μαθήματα είναι $\nu(\Pi \cap \Phi) = 24$.

Το πλήθος των μαθητών που επέλεξαν Πληροφορική ή Φυσική είναι $\nu(\Pi \cup \Phi)$.

Από την αρχή του Εγκλεισμού – Αποκλεισμού έχουμε:

$$\nu(\Pi \cup \Phi) = \nu(\Pi) + \nu(\Phi) - \nu(\Pi \cap \Phi) = 130 + 60 - 24 = 166$$

(β) Όλοι οι μαθητές είναι $v(\Omega) = 200$. Οι μαθητές που δεν επέλεξαν ούτε Πληροφορική, ούτε Φυσική είναι $v(\Pi' \cap \Phi')$.

Έχουμε:

$$v(\Pi' \cap \Phi') = v(\Omega) - v(\Pi \cup \Phi) = 200 - 166 = 34$$

(γ) Έστω E : «Οι μαθητές που πήγαν επίσκεψη στο Πανεπιστήμιο». Τότε, $v(E) = 50$.

Οι μαθητές που πήγαν επίσκεψη στο Πανεπιστήμιο ή επέλεξαν Πληροφορική ή Φυσική είναι $v(\Pi \cup \Phi \cup E)$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} v(\Pi \cup \Phi \cup E) &= v(\Pi) + v(\Phi) + v(E) - v(\Pi \cap \Phi) - v(\Phi \cap E) - v(E \cap \Pi) - \\ &\quad - v(\Pi \cap \Phi \cap E) \\ &= 130 + 60 + 50 - 24 - 25 - 40 + 16 = 167 \end{aligned}$$

(δ) Οι μαθητές που δεν πήγαν επίσκεψη στο Πανεπιστήμιο και δεν επέλεξαν ούτε Πληροφορική, ούτε Φυσική υπολογίζονται από τον πληθικό αριθμό $v(\Pi' \cap \Phi' \cap E')$. Έχουμε:

$$v(\Pi' \cap \Phi' \cap E') = v(\Pi \cup \Phi \cup E)' = v(\Omega) - v(\Pi \cup \Phi \cup E) = 200 - 167 = 33$$

Παράδειγμα 3

Πόσοι ακέραιοι στο σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, 119, 120\}$ διαιρούνται με το 2, 3 ή 5;

Λύση

Αρχικά, ορίζουμε με $A_i, i \in \{2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ το σύνολο των ακεραίων του συνόλου Ω , οι οποίοι διαιρούνται με το i .

Το πλήθος των ακεραίων αριθμών που διαιρούνται με το 2 είναι $v(A_2) = \frac{120}{2} = 60$.

Το πλήθος των ακεραίων αριθμών που διαιρούνται με το 3 είναι $v(A_3) = \frac{120}{3} = 40$.

Το πλήθος των ακεραίων αριθμών που διαιρούνται με το 5 είναι $v(A_5) = \frac{120}{5} = 24$.

Το πλήθος των ακεραίων αριθμών που διαιρούνται και με το 2 και το 5 είναι όλα τα πολλαπλάσια του $2 \cdot 5 = 10$. Επομένως, $v(A_{10}) = \frac{120}{10} = 12$.

Το πλήθος των ακεραίων αριθμών που διαιρούνται και με το 2 και το 3 είναι όλα τα πολλαπλάσια του $2 \cdot 3 = 6$. Επομένως, $v(A_6) = \frac{120}{6} = 20$.

Το πλήθος των ακεραίων αριθμών που διαιρούνται και με το 3 και το 5 είναι όλα τα πολλαπλάσια του $3 \cdot 5 = 15$. Επομένως, $v(A_{15}) = \frac{120}{15} = 8$.

Το πλήθος των ακεραίων αριθμών που διαιρούνται και με το 2 το 3 και το 5 είναι όλα τα πολλαπλάσια του $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Επομένως, $v(A_{30}) = \frac{120}{30} = 4$.

Το ζητούμενο πλήθος των ακεραίων αριθμών που διαιρούνται με το 2, 3 ή 5 υπολογίζεται από τον πληθικό αριθμό $v(A_2 \cup A_3 \cup A_5)$. Επομένως, από την αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού έχουμε:

$$\begin{aligned} v(A_2 \cup A_3 \cup A_5) &= v(A_2) + v(A_3) + v(A_5) - v(A_{10}) - v(A_6) - v(A_{15}) + v(A_{30}) \\ &= 60 + 40 + 24 - 12 - 20 - 8 + 4 = 88 \end{aligned}$$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- | | |
|---|---------------|
| (α) Αν $A \subseteq B$, τότε ισχύει $v(A) \leq v(B)$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) Αν $x \in (A - B)$, τότε ισχύει ότι $x \notin B$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) Ισχύει πάντα ότι $v(A \cup B) = v(A) + v(B)$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) Ισχύει πάντα ότι $x \in \{x\}$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ε) Το κενό σύνολο περιέχει το 0. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (στ) Ισχύει πάντα ότι $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ζ) Τα σύνολα $\Omega - A$ και A' είναι ίσα. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

2. Δίνεται το σύνολο αναφοράς $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και τα υποσύνολά του $A = \{x \in \Omega \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \in \Omega \mid x \text{ άρτιος}\}$.

Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τα πιο κάτω σύνολα:

- | | | |
|-------------|----------------|-------------------------------------|
| (α) A' | (β) $A \cap B$ | (γ) $A \cup B$ |
| (δ) $A - B$ | (ε) $B - A$ | (στ) $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$ |

3. Σε ένα σύνολο 20 μαθητών, 10 μαθητές έχουν διαγώνισμα μόνο τη Δευτέρα, 5 μαθητές έχουν διαγώνισμα μόνο την Τρίτη και 3 μαθητές έχουν διαγώνισμα και τις δύο μέρες. Να βρείτε πόσοι από τους 20 μαθητές:

- (α) έχουν διαγώνισμα τη Δευτέρα
- (β) έχουν διαγώνισμα την Τρίτη
- (γ) έχουν ένα μόνο διαγώνισμα αυτές τις δύο μέρες
- (δ) έχουν διαγώνισμα τουλάχιστον σε μια από τις δύο μέρες
- (ε) δεν έχουν διαγώνισμα ούτε τη Δευτέρα ούτε την Τρίτη

4. Σε μια τάξη των 20 παιδιών, οι 12 προτιμούν ως αγαπημένο τους φρούτο το μήλο, ενώ οι 10 προτιμούν το αχλάδι. Αν υπάρχουν 5 παιδιά που δεν προτίμησαν ούτε μήλο, ούτε αχλάδι, πόσα από τα παιδιά προτιμούν και μήλο και αχλάδι;

5. Πόσοι φυσικοί αριθμοί από το 1 μέχρι και το 100 διαιρούνται είτε με το 3 είτε με το 5;

6. Μεταξύ 130 μαθητών είχαμε τις εξής επιλογές:

92 Μαθηματικά, 86 Φυσική, 48 Χημεία

Οι μαθητές που επέλεξαν και τα τρία μαθήματα ήταν 10, αυτοί που επέλεξαν Μαθηματικά και Φυσική ήταν 70, Μαθηματικά και Χημεία 30 ενώ Φυσική και Χημεία 25 μαθητές. Να υπολογίσετε πόσοι μαθητές επέλεξαν τουλάχιστον ένα από τα τρία μαθήματα και πόσοι μαθητές δεν επέλεξαν κανένα από τα τρία μαθήματα.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Δίνεται ένα σύνολο αναφοράς $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ και τα υποσύνολά του:

$$A = \{1, 4, 5, 7, 11\}$$

$$B = \{1, 5, 6, 8, 9\}$$

$$\Gamma = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 12\}$$

(α) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο Βέννιο διάγραμμα.

(β) Να βρείτε, με αναγραφή των στοιχείων τους, τα πιο κάτω σύνολα:

i. A'

ii. $A \cap B$

iii. $A \cup \Gamma$

iv. $A - B$

v. $(A \cap \Gamma)'$

vi. $(B \cup \Gamma)'$

vii. $A \cap B \cap \Gamma$

viii. $A \cup B \cup \Gamma$

ix. $A \cap B' \cap \Gamma'$

x. $(A \cup B \cup \Gamma)'$

xi. $A \cap B \cap \Gamma'$

2. Από τους 190 μαθητές της Γ' τάξης ενός Λυκείου, οι 105 επέλεξαν τα Μαθηματικά, οι 80 επέλεξαν τη Φυσική και 55 μαθητές επέλεξαν και τα δύο μαθήματα. Πόσοι μαθητές επέλεξαν:

(α) τα Μαθηματικά αλλά όχι τη Φυσική

(β) τη Φυσική αλλά όχι τα Μαθηματικά

(γ) τουλάχιστον ένα από τα δύο μαθήματα

(δ) κανένα από τα δύο αυτά μαθήματα.

3. Αν $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$, να υπολογίσετε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Ω , τα οποία:

(α) διαιρούνται με το 5 ή το 11 ή το 13

(β) δεν διαιρούνται με κανέναν από αυτούς τους αριθμούς.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Είναι γνωστό ότι η αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού για δύο και για τρία μη κενά σύνολα αντίστοιχα είναι:

$$v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$$

$$v(A \cup B \cup \Gamma) = v(A) + v(B) + v(\Gamma) - v(A \cap B) - v(A \cap \Gamma) - v(B \cap \Gamma) + v(A \cap B \cap \Gamma)$$

Να εισηγηθείτε ένα τύπο για τον πληθικό αριθμό της ένωσης 4 συνόλων, δηλαδή για τον $v(A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta)$ και να τον αποδείξετε.

2. Η συνάρτηση φ του Euler υπολογίζει το πλήθος των θετικών ακέραιων που είναι μικρότεροι ή ίσοι του φυσικού αριθμού n και είναι σχετικά πρώτοι με τον n .

Αν ο φυσικός αριθμός n αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_\nu^{k_\nu}$, να αποδείξετε ότι:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_\nu}\right)$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 10

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

10.1 Εισαγωγή στη Συνδυαστική

10.1.1 Αρχή Αθροίσματος

10.1.2 Πολλαπλασιαστική Αρχή

10.2 Μεταθέσεις

10.2.1 Το n παραγοντικό, $n \in \mathbb{N}$

10.2.2 Μεταθέσεις

10.2.3 Κυκλικές μεταθέσεις

10.2.4 Επαναληπτικές μεταθέσεις

10.3 Διατάξεις

10.3.1 Απλές διατάξεις

10.3.2 Επαναληπτικές διατάξεις

10.4 Συνδυασμοί

10.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

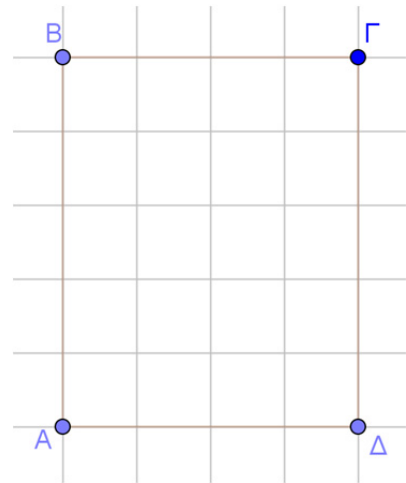
Διερεύνηση 1

Σε ένα πρωτάθλημα σκακιού μιας χώρας συμμετέχουν 100 παίκτες. Αγωνίζονται κατά ζεύγη σε αγώνες, όπου κάθε φορά ο ηττημένος αποσύρεται και αγωνίζεται μόνον ο νικητής σε επόμενο αγώνα, αντιμετωπίζοντας άλλον παίκτη. Αν κάθε μέρα διεξάγονται 9 αγώνες, να βρείτε πόσες μέρες θα διαρκέσει το πρωτάθλημα μέχρι να αναδειχθεί ο πρωταθλητής.

Διερεύνηση 2

Στο διπλανό ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ διαστάσεων 4×5 :

- Να υπολογίσετε το πλήθος όλων των τετραγώνων που σχηματίζονται από οριζόντιες και κατακόρυφες ευθείες.
- Να υπολογίσετε το πλήθος όλων των ορθογωνίων παραλληλογράμμων που σχηματίζονται από οριζόντιες και κατακόρυφες ευθείες.
- Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να μεταβούμε από το A στο Γ , όταν η κίνηση γίνεται πάνω στο πλέγμα και η κατεύθυνση είναι μόνο προς τα πάνω και δεξιά ή προς τα δεξιά και πάνω.



Εισαγωγή

Ο βασικός σκοπός της Συνδυαστικής Απαρίθμησης (ή απλά Συνδυαστικής) είναι η συστηματική ανάπτυξη μεθόδων και τεχνικών, για τον υπολογισμό του πλήθους στοιχείων πεπερασμένων συνόλων.

Οι συστηματικές αυτές τεχνικές ή μέθοδοι αναφέρονται στην Συνδυαστική ως αρχές ή μέθοδοι απαρίθμησης και είναι ιδιαίτερα χρήσιμες, όταν ο πληθικός αριθμός των συνόλων μας είναι μεγάλος. Για παράδειγμα, όταν μας ζητηθεί ο υπολογισμός των διαγωνίων σε ένα πεντάγωνο, αυτό δεν είναι πρόβλημα Συνδυαστικής, γιατί ο αριθμός είναι σχετικά μικρός και μπορεί να υπολογισθεί εύκολα και γρήγορα με άμεση καταμέτρηση. Όμως το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου με πλήθος πλευρών 100 είναι πρόβλημα Συνδυαστικής, γιατί απαιτείται ανάπτυξη συστηματικής μεθόδου καταμέτρησης του πλήθους των διαγωνίων και όχι απλή καταμέτρησή τους. Στη Συνδυαστική μας ενδιαφέρει το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου.

Η Συνδυαστική Απαρίθμηση έχει εφαρμογές σε πολλούς τομείς των Μαθηματικών, γιατί σε πολλά προβλήματα απαιτείται η γνώση του πλήθους των αντικειμένων σε ένα σύνολο και όχι ποια είναι τα στοιχεία του συγκεκριμένου συνόλου.

Μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου με συστηματική απαρίθμηση και καταγραφή τους, όταν αυτό είναι μικρό.

- Για παράδειγμα, τρία παιδιά A, B, Γ μπορούν να σταθούν σε σειρά με 6 διαφορετικούς τρόπους, σύμφωνα με την πιο κάτω συστηματική καταγραφή όλων των τριάδων:

$AB\Gamma$	$A\Gamma B$	$B\Gamma A$	$BA\Gamma$	ΓAB	ΓBA
------------	-------------	-------------	------------	-------------	-------------

- Το πλήθος των τριγώνων που μπορούν να σχηματιστούν από 4 διαφορετικά σημεία Γ, Δ, E, Z , που βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο, είναι 4. Τα τρίγωνα είναι:

$\Gamma\Delta E$	$\Gamma\Delta Z$	$\Gamma E Z$	$\Delta E Z$
------------------	------------------	--------------	--------------

10.1.1 Αρχή Αθροίσματος

Διερεύνηση

Από Αθήνα προς Θεσσαλονίκη εκτελούνται καθημερινά 2 αεροπορικά, 5 οδικά και 3 ακτοπλοϊκά δρομολόγια.

Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί κάποιος να μεταβεί από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη μια συγκεκριμένη μέρα.

Αρχή Αθροίσματος

Αν από ένα πεπερασμένο σύνολο $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ το στοιχείο a_1 μπορεί να επιλεγεί με n_1 διαφορετικούς τρόπους, το στοιχείο a_2 μπορεί να επιλεγεί με n_2 διαφορετικούς τρόπους, ..., και το a_k στοιχείο μπορεί να επιλεγεί με n_k διαφορετικούς τρόπους, καθώς επίσης και η επιλογή κάποιου στοιχείου a_i αποκλείει την επιλογή του στοιχείου a_j , $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, τότε η επιλογή του a_1 ή a_2 ή ... ή a_k μπορεί να γίνει με $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ διαφορετικούς τρόπους.

Παρατηρήσεις

- Για να εφαρμοστεί η αρχή του αθροίσματος, θα πρέπει να έχει εξασφαλιστεί ότι η επιλογή ενός στοιχείου a_i αποκλείει την επιλογή ενός άλλου διαφορετικού στοιχείου a_j , $i \neq j$.
- Μια ισοδύναμη διατύπωση της αρχής του αθροίσματος με χρήση συνόλων είναι:

Για δύο σύνολα A και B ξένα μεταξύ τους, ισχύει:

$$v(A \cup B) = v(A) + v(B)$$

Γενικά, για n το πλήθος σύνολα A_1, A_2, \dots, A_n , τα οποία είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους, ισχύει:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_n)$$

Δηλαδή, η βασική προϋπόθεση ότι κατά την επιλογή του στοιχείου a_i αποκλείεται στη συνέχεια η επιλογή του a_j , $j \neq i$, έχει αντικατασταθεί με την έκφραση ότι τα σύνολα A_1, A_2, \dots, A_n είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους.

Παράδειγμα 1

Δίνονται τα σύνολα:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\} \text{ και } \Pi = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots\}$$

Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε από τα σύνολα A ή Π ένα φυσικό αριθμό που να είναι:

- (α) μικρότερος από το 14
- (β) πρώτος αριθμός μικρότερος από το 14
- (γ) άρτιος πρώτος αριθμός μικρότερος από το 14.

Λύση

- (α) Έχουμε 6 επιλογές από το σύνολο A και 7 επιλογές από το σύνολο Π . Συνολικά, από την αρχή του αθροίσματος, έχουμε $6 + 7 = 13$ αριθμούς μικρότερους από το 14.
- (β) Έχουμε μια επιλογή από το σύνολο A και 5 επιλογές από το σύνολο Π . Συνολικά, από την αρχή του αθροίσματος, έχουμε $1 + 5 = 6$ αριθμούς.
- (γ) Έχουμε μια επιλογή από το σύνολο A και καμιά επιλογή από το σύνολο Π . Συνολικά, από την αρχή του αθροίσματος, έχουμε $1 + 0 = 1$ αριθμό.

Παράδειγμα 2

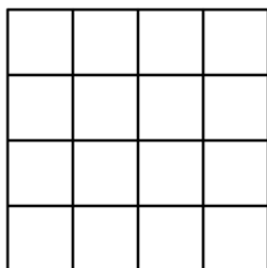
Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε έναν μαθητή/τρια από το κεντρικό συμβούλιο ενός Λυκείου για να εκπροσωπήσει το σχολείο, αν η επιλογή μπορεί να γίνει ανάμεσα σε 2 μαθητές/τριες της Α' Λυκείου, 2 μαθητές/τριες της Β' Λυκείου και 3 μαθητές/τριες της Γ' Λυκείου;

Λύση

Παρατηρούμε ότι η επιλογή ενός μαθητή/τριας από οποιαδήποτε τάξη αποκλείει συγχρόνως την επιλογή κάποιου μαθητή/τριας από οποιαδήποτε άλλη τάξη. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή του αθροίσματος. Αφού από την Α' τάξη έχουμε 2 επιλογές, από την Β' 2 και από την Γ' 3, τότε έχουμε συνολικά $2 + 2 + 3 = 7$ διαφορετικούς τρόπους επιλογής του μαθητή/τριας.

Παράδειγμα 3

Πόσα διαφορετικά τετράγωνα σχηματίζονται από οριζόντιες και κατακόρυφες πλευρές σε ένα τετράγωνο διαστάσεων 4×4 , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα;



Λύση

Πλήθος τετραγώνων διαστάσεων 1×1 : $4 \times 4 = 16$

Πλήθος τετραγώνων διαστάσεων 2×2 : $3 \times 3 = 9$

Πλήθος τετραγώνων διαστάσεων 3×3 : $2 \times 2 = 4$

Πλήθος τετραγώνων διαστάσεων 4×4 : 1

Επομένως, σύμφωνα με την αρχή του αθροίσματος, θα έχουμε συνολικά $16 + 9 + 4 + 1 = 30$ τετράγωνα.

10.1.2 Πολλαπλασιαστική Αρχή

Διερεύνηση

Σε μια χώρα υπάρχουν 3 οδικά και 2 αεροπορικά δρομολόγια για να ταξιδέψει κάποιος από την πόλη A στην πόλη B , ενώ για να ταξιδέψει από την πόλη B στην πόλη Γ υπάρχουν 2 ατμοπλοϊκά δρομολόγια. Να βρείτε:

- (α) με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί κάποιος να ταξιδέψει από την πόλη A στην πόλη B και
- (β) με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί κάποιος να ταξιδέψει από την πόλη A στην πόλη Γ , μέσω της πόλης B .

Σε τι διαφέρουν τα δύο πιο πάνω αποτελέσματα στο (α) και (β);

Αν υποθέσουμε ότι κατά την απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου ισχύουν δύο βασικές προϋποθέσεις, όπως:

- η διαδικασία της απαρίθμησης μπορεί να χωριστεί σε n διαφορετικές φάσεις, όπου η καθεμία εκτελείται διαδοχικά, δηλαδή η μία μετά την άλλη και
- οι επιλογές σε κάθε φάση είναι μονοσήμαντα ορισμένες, όταν είναι γνωστά τα αποτελέσματα κάθε προηγούμενης φάσης,

τότε μπορεί να εφαρμοστεί μια άλλη αρχή απαρίθμησης που λέγεται **Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης ή Πολλαπλασιαστική Αρχή ή Αρχή Γινομένου**.

Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης

Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε n διαδοχικές φάσεις $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Αν η φάση φ_1 μπορεί να πραγματοποιηθεί με k_1 τρόπους και για καθέναν από αυτούς η φάση φ_2 μπορεί να πραγματοποιηθεί με k_2 τρόπους, ..., και για καθέναν από όλους αυτούς τους τρόπους η φάση φ_n μπορεί να πραγματοποιηθεί με k_n τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ τρόπους.

Παράδειγμα 4

Σε ένα εστιατόριο εργάζονται 3 μάγειρες, 10 σερβιτόροι και 2 καθαρίστριες.

- (α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί μια τριμελής αντιπροσωπεία, η οποία να αποτελείται από ένα μάγειρα, ένα σερβιτόρο και μια καθαρίστρια, για να συναντήσει τον ιδιοκτήτη του εστιατορίου;
- (β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί ο ιδιοκτήτης του εστιατορίου να επιλέξει ένα εργαζόμενο για να του δώσει αύξηση;

Λύση

- (α) Η επιλογή της αντιπροσωπείας μπορεί να γίνει σε τρεις φάσεις. Η πρώτη φάση είναι η επιλογή ενός μάγειρα που μπορεί να πραγματοποιηθεί με 3 τρόπους. Για καθέναν από αυτούς, η δεύτερη φάση είναι η επιλογή ενός σερβιτόρου, που μπορεί να πραγματοποιηθεί με 10 τρόπους. Για καθέναν από αυτούς, η τρίτη φάση είναι η επιλογή μιας καθαρίστριας, που μπορεί να πραγματοποιηθεί με 2 τρόπους.

Μάγειρας	Σερβιτόρος	Καθαρίστρια
3	10	2

Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, η επιλογή της αντιπροσωπείας μπορεί να γίνει με $3 \cdot 10 \cdot 2 = 60$ διαφορετικούς τρόπους.

- (β) Η επιλογή του εργαζομένου μπορεί να γίνει με $3 + 10 + 2 = 15$ διαφορετικούς τρόπους, με βάση την αρχή του αθροίσματος.

Παράδειγμα 5

Σε μια βιβλιοθήκη υπάρχουν 4 Ελληνικά, 3 Γαλλικά και 7 Ιταλικά βιβλία. Όλα τα βιβλία είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Επιλέγουμε τυχαία δύο βιβλία γραμμένα σε διαφορετική γλώσσα.

- (α) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα Ελληνικό και ένα Γαλλικό βιβλίο.
- (β) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 2 βιβλία με διαφορετική γλώσσα.

Λύση

- (α) Η επιλογή Ελληνικού και Γαλλικού βιβλίου μπορεί να γίνει σε δύο φάσεις. Η πρώτη φάση είναι η επιλογή του Ελληνικού βιβλίου, που μπορεί να πραγματοποιηθεί με 4 τρόπους. Για καθέναν από αυτούς, η δεύτερη φάση είναι η επιλογή του Γαλλικού βιβλίου, που μπορεί να πραγματοποιηθεί με 3 τρόπους.

Ελληνικό	Γαλλικό
4	3

Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, η επιλογή μπορεί να πραγματοποιηθεί με $4 \cdot 3 = 12$ τρόπους.

- (β) Θα υπολογίσουμε τους διαφορετικούς τρόπους που μπορούμε να επιλέξουμε 2 βιβλία με διαφορετική γλώσσα.

Αφού επιλέγουμε βιβλία σε διαφορετική γλώσσα, μπορούμε να επιλέξουμε είτε Ελληνικό και Γαλλικό, είτε Ελληνικό και Ιταλικό, είτε Γαλλικό και Ιταλικό. Από το (α) ερώτημα, έχουμε ότι η επιλογή Ελληνικού και Γαλλικού βιβλίου μπορεί να πραγματοποιηθεί με $4 \cdot 3 = 12$ τρόπους.

Ομοίως, η επιλογή του Ελληνικού και του Ιταλικού μπορεί να πραγματοποιηθεί με $4 \cdot 7 = 28$ τρόπους και η επιλογή του Γαλλικού και του Ιταλικού μπορεί να πραγματοποιηθεί με $3 \cdot 7 = 21$ τρόπους.

Ελληνικό	Ιταλικό
4	7

Γαλλικό	Ιταλικό
3	7

Συνεπώς, από την αρχή του αθροίσματος, το σύνολο όλων των διαφορετικών τρόπων επιλογής δύο βιβλίων με διαφορετική γλώσσα είναι $12 + 28 + 21 = 61$.

Παράδειγμα 6

Πόσους διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με ψηφία από το σύνολο $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, αν:

- (α) επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου
- (β) δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου

Λύση

(α) Για τον σχηματισμό των τριψήφιων αριθμών έχουμε 5 επιλογές στη θέση των μονάδων. Για την θέση των δεκάδων έχουμε πάλι 5 επιλογές, γιατί οποιοδήποτε ψηφίο έχει χρησιμοποιηθεί για την προηγούμενη θέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ξανά. Ομοίως, έχουμε πάλι 5 επιλογές για τη θέση των εκατοντάδων.

Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
5	5	5

Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή, το σύνολο των διαφορετικών τριψήφιων είναι $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

(β) Όταν επιλέξουμε ένα ψηφίο (με 5 διαφορετικούς τρόπους) στη θέση των μονάδων, τότε δεν μπορεί το ίδιο ψηφίο να ξαναχρησιμοποιηθεί για τη θέση των δεκάδων, οπότε μόνο 4 επιλογές υπάρχουν. Αφού επιλέξουμε και το ψηφίο των δεκάδων, μόνο 3 επιλογές μας απομένουν για το ψηφίο των εκατοντάδων.

Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
5	4	3

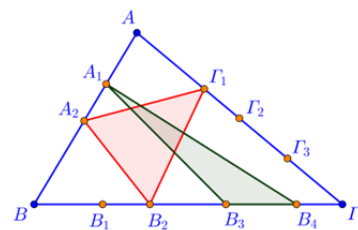
Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των διαφορετικών τριψήφιων είναι $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Παράδειγμα 7

Στο διπλανό σχήμα έχουμε 9 σταθερά σημεία, τα $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, B_4, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, τοποθετημένα πάνω στις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$.

Πόσα διαφορετικά τρίγωνα μπορούμε να κατασκευάσουμε, χρησιμοποιώντας τα σημεία αυτά;

(Για παράδειγμα, δύο τέτοια τρίγωνα είναι τα $A_2B_2\Gamma_1$ και $A_1B_3B_4$.)



Λύση

1^{ος} τρόπος

Εργαζόμαστε κοιτώντας όλες τις διαφορετικές περιπτώσεις, με τις οποίες μπορούμε να σχηματίσουμε τρίγωνο με αυτά τα 9 σημεία.

1^η περίπτωση (Ένα σημείο από κάθε πλευρά)

Η πρώτη φάση είναι η επιλογή ενός σημείου από την πλευρά AB , η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 2 τρόπους. Για καθέναν από αυτούς, η δεύτερη φάση είναι η επιλογή ενός σημείου από την πλευρά $BΓ$, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 4 τρόπους. Για καθέναν από αυτούς, η τρίτη φάση είναι η επιλογή ενός σημείου από την πλευρά $ΑΓ$, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 3 τρόπους.

Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, μπορούμε να κατασκευάσουμε $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ διαφορετικά τρίγωνα.

2^η περίπτωση (Δύο σημεία από την AB και ένα σημείο από την $BΓ$ ή την $ΑΓ$)

Η πρώτη φάση είναι η επιλογή δύο σημείων από την πλευρά AB , η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 1 τρόπο. Η δεύτερη φάση είναι η επιλογή ενός σημείου από την πλευρά $BΓ$ ή την πλευρά $ΑΓ$, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 7 τρόπους.

Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, μπορούμε να κατασκευάσουμε $1 \cdot 7 = 7$ διαφορετικά τρίγωνα.

3^η περίπτωση (Δύο σημεία από την $BΓ$ και ένα σημείο από την AB ή την $ΑΓ$)

Η πρώτη φάση είναι η επιλογή δύο σημείων από την πλευρά $BΓ$, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 6 τρόπους ($B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_3, B_2B_4, B_3B_4$). Για καθέναν από αυτούς, η δεύτερη φάση είναι η επιλογή ενός σημείου από την πλευρά AB ή την πλευρά $ΑΓ$, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 5 τρόπους.

Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, μπορούμε να κατασκευάσουμε $6 \cdot 5 = 30$ διαφορετικά τρίγωνα.

4^η περίπτωση (Δύο σημεία από την $ΑΓ$ και ένα σημείο από την AB ή την $BΓ$)

Η πρώτη φάση είναι η επιλογή δύο σημείων από την πλευρά $ΑΓ$, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 3 τρόπους ($Γ_1Γ_2, Γ_1Γ_3, Γ_2Γ_3$). Για καθέναν από αυτούς, η δεύτερη φάση είναι η επιλογή ενός σημείου από την πλευρά AB ή την πλευρά $BΓ$, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 6 τρόπους.

Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, μπορούμε να κατασκευάσουμε $3 \cdot 6 = 18$ διαφορετικά τρίγωνα.

Τέλος, από την αρχή του αθροίσματος, έχουμε $24 + 7 + 30 + 18 = 79$ διαφορετικά τρίγωνα που ικανοποιούν τα δεδομένα του προβλήματος.

2^{ος} τρόπος

Έχουμε 9 διαφορετικά σημεία και κάθε φορά επιλέγουμε 3 από αυτά. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

Η πρώτη φάση είναι η επιλογή ενός σημείου, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 9 τρόπους. Για καθέναν από αυτούς, η δεύτερη φάση είναι η επιλογή ενός σημείου από τα υπόλοιπα 8, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 8 τρόπους. Για καθέναν από αυτούς, η τρίτη φάση είναι η επιλογή ενός σημείου από τα υπόλοιπα 7, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 7 τρόπους.

Παρατήρηση

Είναι λάθος να πούμε ότι από την πολλαπλασιαστική αρχή, μπορούμε να κατασκευάσουμε $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ «διαφορετικά τρίγωνα».

Για παράδειγμα, τα

$$A_1A_2B_1, A_1B_1A_2, A_2A_1B_1, A_2B_1A_1, B_1A_2A_1, B_1A_1A_2$$

δεν είναι διαφορετικά μεταξύ τους, γεγονός που ισχύει και για οποιαδήποτε άλλη τριάδα τέτοιων σημείων.

Επιπλέον, αν τα 3 σημεία που έχουμε επιλέξει είναι συνευθειακά, τότε δεν θα έχουμε τρίγωνο. Έχουμε 5 τέτοιες τριάδες σημείων, τις:

$$B_1B_2B_3, B_1B_2B_4, B_1B_3B_4, B_2B_3B_4, \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$$

Επομένως, έχουμε τελικά $\frac{504}{6} - 5 = 84 - 5 = 79$ διαφορετικά τρίγωνα.

Δραστηριότητες

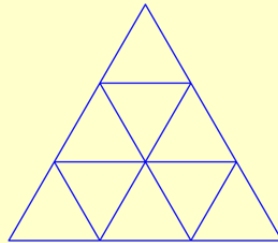
1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α) Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε 2 διαδοχικές φάσεις. Αν η πρώτη φάση μπορεί να πραγματοποιηθεί με x τρόπους και για καθέναν από αυτούς η δεύτερη φάση μπορεί να πραγματοποιηθεί με y τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί συνολικά με $x \cdot y$ τρόπους. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

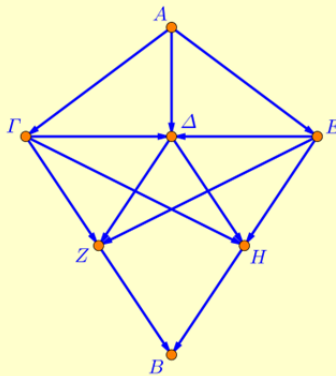
(β) Επιλέγουμε ένα παιδί από 2 αγόρια και 3 κορίτσια. Η επιλογή μπορεί να πραγματοποιηθεί με 6 τρόπους. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(γ) Επιλέγουμε ένα αγόρι και ένα κορίτσι από 2 αγόρια και 3 κορίτσια. Η επιλογή μπορεί να πραγματοποιηθεί με 6 τρόπους. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Πόσα διαφορετικά τρίγωνα υπάρχουν στο πιο κάτω σχήμα;



3. Πόσες διαφορετικές διαδρομές υπάρχουν από το σημείο A προς το σημείο B , αν επιτρέπεται μόνο η κίνηση προς την κατεύθυνση που δείχνουν τα βέλη;



4. Με πόσους τρόπους 10 άτομα μπορούν να ορίσουν μια επιτροπή που θα αποτελείται από πρόεδρο, γραμματέα και ταμία, αν και τα 10 άτομα έχουν δικαίωμα να εκλεγούν;

5. Να υπολογίσετε το πλήθος των αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία του συνόλου $\Omega = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, αν αυτοί είναι:
- (α) διψήφιοι χωρίς επανάληψη ψηφίου
 - (β) διψήφιοι με επανάληψη ψηφίου
 - (γ) τριψήφιοι χωρίς επανάληψη ψηφίου
 - (δ) τριψήφιοι με επανάληψη ψηφίου
 - (ε) περιττοί τριψήφιοι χωρίς επανάληψη ψηφίου.
6. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία του συνόλου $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, αν:
- (α) δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου
 - (β) επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου.
7. Αν σε 5 εργάσιμες μέρες μια τάξη έχει 3 διαφορετικά διαγωνίσματα, πόσα διαφορετικά προγράμματα μπορούν να καταρτιστούν, αν:
- (α) κάθε διαγώνισμα θα είναι σε διαφορετική μέρα
 - (β) επιτρέπεται μέχρι 2 το πολύ διαγωνίσματα σε μια μέρα;
8. Να υπολογίσετε το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών (x, y) , με $x, y \in \mathbb{Z}$, τέτοια ώστε $x^2 + y^2 \leq 5$.
9. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να βάψουμε τις όψεις μιας πόρτας, έχοντας στην διάθεσή μας 3 διαφορετικά χρώματα για την εξωτερική όψη (άσπρο – μπλε – κόκκινο) και 4 διαφορετικά χρώματα για την εσωτερική όψη (άσπρο – μπλε – κίτρινο – πράσινο), αν:
- (α) θέλουμε να βάψουμε τις δύο όψεις της πόρτας με διαφορετικό χρώμα
 - (β) θέλουμε να βάψουμε τις δύο όψεις της πόρτας με το ίδιο χρώμα;

10.2 ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

Διερεύνηση

Ο Δούκας της Τοσκάνης ενδιαφερόταν για τα τυχερά παιχνίδια και ρώτησε τον Γαλιλαίο, γιατί όταν ρίχνει 3 ζάρια πολλές φορές, το άθροισμα 10 εμφανίζεται περισσότερες φορές από το άθροισμα 9. Ο Δούκας υποστήριζε ότι είναι παράδοξο, γιατί υπάρχουν 6 δυνατά αποτελέσματα για το άθροισμα 10 και 6 δυνατά αποτελέσματα για το άθροισμα 9.

$6 + 1 + 3 = 10$	$6 + 2 + 2 = 10$	$5 + 4 + 1 = 10$	$5 + 3 + 2 = 10$
$4 + 4 + 2 = 10$	$4 + 3 + 3 = 10$	$6 + 2 + 1 = 9$	$5 + 3 + 1 = 9$
$5 + 2 + 2 = 9$	$4 + 4 + 1 = 9$	$4 + 3 + 2 = 9$	$3 + 3 + 3 = 9$

Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι παράδοξο το πιο πάνω φαινόμενο.

10.2.1 Το n παραγοντικό, $n \in \mathbb{N}$

Το γινόμενο n διαδοχικών φυσικών αριθμών εμφανίζεται συχνά σε προβλήματα συνδυαστικής απαρίθμησης.

Ορισμός

Το n παραγοντικό, με $n \in \mathbb{N}$ και $n > 1$, ισούται με το γινόμενο των n πρώτων φυσικών αριθμών και συμβολίζεται με $n!$. Είναι δηλαδή:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1$$

Για τις περιπτώσεις που το n ισούται με 1 ή 0, έχουμε εξ ορισμού:

$$1! = 1 \text{ και } 0! = 1$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = 6!, \quad B = \frac{7!}{5!}, \quad \Gamma = \frac{8!}{5! \cdot 3!}$$

Λύση

- $A = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$
- Παρατηρούμε ότι $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5! \cdot 6 \cdot 7$. Συνεπώς:

$$B = \frac{7!}{5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5!} = 42$$

- $\Gamma = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$

10.2.2 Μεταθέσεις

Διερεύνηση

Δίνονται τα σύνολα:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ και } B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- (α) Πόσοι τετραψήφιοι μπορούν να σχηματιστούν, χρησιμοποιώντας όλα τα στοιχεία του συνόλου A ;
- (β) Πόσοι πενταψήφιοι μπορούν να σχηματιστούν, χρησιμοποιώντας όλα τα στοιχεία του συνόλου B ;
- (γ) Τι παρατηρείτε;

Ορισμός

Μετάθεση n διαφορετικών αντικειμένων λέγεται κάθε τοποθέτηση των n αντικειμένων, το ένα μετά το άλλο, σε σειρά.

Παρατηρήσεις

- Σε κάθε μετάθεση μας ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης των στοιχείων. Για παράδειγμα, οι μεταθέσεις $ΑΒΓΔ$ και $ΒΑΓΔ$ είναι διαφορετικές.
- Ένα σύνολο διαφέρει από τη μετάθεση των στοιχείων του. Αν $A = \{1, 2, 3\}$, τότε οι 6 τριψήφιοι αριθμοί 123, 132, 213, 231, 312, 321 είναι οι 6 δυνατές μεταθέσεις των στοιχείων του A .

Πρόταση

Το **πλήθος των μεταθέσεων n διαφορετικών** αντικειμένων συμβολίζεται με M_n και δίνεται από τον τύπο:

$$M_n = n!$$

Απόδειξη

Ο υπολογισμός του πλήθους των μεταθέσεων n διαφορετικών στοιχείων ενός συνόλου $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ μπορεί να πραγματοποιηθεί σε n φάσεις. Στην πρώτη φάση επιλέγουμε ένα στοιχείο από το σύνολο A και το τοποθετούμε στην πρώτη θέση. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με n διαφορετικούς τρόπους, γιατί υπάρχουν n διαθέσιμα αντικείμενα. Στη δεύτερη φάση η τοποθέτηση αντικειμένου στη δεύτερη θέση μπορεί να πραγματοποιηθεί με $(n - 1)$ τρόπους, γιατί υπάρχουν $(n - 1)$ διαθέσιμα αντικείμενα (ένα αντικείμενο έχει ήδη τοποθετηθεί στην πρώτη θέση). Ομοίως, στην n -φάση η τοποθέτηση αντικειμένου στη n -θέση μπορεί να πραγματοποιηθεί με ένα τρόπο, γιατί υπάρχει ένα διαθέσιμο αντικείμενο (τα άλλα $n - 1$ αντικείμενα έχουν ήδη τοποθετηθεί).

Φάσεις	1 ^η θέση	2 ^η θέση	...	$n^{\text{η}}$ θέση
Τρόποι	n	$n - 1$...	1

Συνεπώς, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, η τοποθέτηση των αντικειμένων μπορεί να πραγματοποιηθεί με $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να παραταχθούν 3 στρατιώτες σε ευθεία γραμμή.

Λύση

Κάθε τοποθέτηση των 3 στρατιωτών σε ευθεία γραμμή αντιστοιχεί σε μία μετάθεση 3 διαφορετικών αντικειμένων. Συνεπώς, η τοποθέτηση των στρατιωτών μπορεί να γίνει με $M_3 = 3! = 6$ διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 3

- (α) Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης **ΤΡΑΠΕΖΙ** υπάρχουν;
- (β) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με **Τ**;
- (γ) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με **Τ** και τελειώνουν σε **Ι**;
- (δ) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με φωνήεν;
- (ε) Πόσοι από αυτούς έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις;
- (στ) Να εξηγήσετε γιατί το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΤΡΑΠΕΖΙΑ** δεν είναι ίσο με μεταθέσεις των 8 (M_8).

Λύση

- (α) Όλα τα γράμματα της λέξης **ΤΡΑΠΕΖΙ** είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Έτσι, το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης είναι ίσο με:

$$M_7 = 7! = 5040$$

- (β) Ο υπολογισμός γίνεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση είναι η τοποθέτηση του **Τ** στην πρώτη θέση, η οποία και γίνεται μόνο με έναν τρόπο και η δεύτερη φάση είναι οι μεταθέσεις των υπόλοιπων 6 διαφορετικών γραμμάτων στις επόμενες 6 θέσεις, που είναι ίσο με:

$$M_6 = 6! = 720$$

- (γ) Ο υπολογισμός γίνεται σε τρεις φάσεις. Στην πρώτη φάση είναι η τοποθέτηση του **Τ** στην πρώτη θέση, η οποία και γίνεται μόνο με έναν τρόπο. Στην δεύτερη φάση είναι η τοποθέτηση του **Ι** στην τελευταία θέση, η οποία και γίνεται πάλι μόνο με έναν τρόπο. Στην τρίτη φάση, όπου πρέπει να τοποθετήσουμε τα υπόλοιπα 5 γράμματα στις θέσεις που απομένουν, έχουμε $M_5 = 5! = 120$ τρόπους.

Συνολικά, έχουμε $1 \cdot 1 \cdot 120 = 120$ τρόπους.

- (δ) Στην πρώτη φάση πρέπει να τοποθετήσουμε ένα φωνήεν. Αυτό γίνεται με 3 διαφορετικούς τρόπους, γιατί έχουμε μόνο 3 φωνήεντα. Στη δεύτερη φάση πρέπει να τοποθετήσουμε τα 6 υπόλοιπα γράμματα στις υπόλοιπες 6 θέσεις. Αυτό μπορεί να γίνει με $M_6 = 6! = 720$ τρόπους.
Συνολικά, έχουμε $3 \cdot 6! = 3 \cdot 720 = 2160$ τρόπους.
- (ε) Αν θεωρήσουμε τα τρία φωνήεντα **ΑΕΙ** ως ένα αντικείμενο, τότε μαζί με τα υπόλοιπα 4 σύμφωνα έχουμε 5 διαφορετικά αντικείμενα, για να τα τοποθετήσουμε σε σειρά. Άρα, σε πρώτη φάση έχουμε $M_5 = 5! = 120$ διαφορετικές μεταθέσεις. Στη δεύτερη φάση έχουμε όλες τις μεταθέσεις των τριών φωνηέντων, δηλαδή $M_3 = 3! = 6$.
Συνολικά, έχουμε $5! \cdot 3! = 120 \cdot 6 = 720$ τρόπους.
- (στ) Το πλήθος όλων των αναγραμματισμών της λέξης **ΤΡΑΠΕΖΙΑ** δεν μπορεί να αποτελέσει μεταθέσεις των 8, γιατί τα 8 γράμματα της λέξης δεν είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους.

Παράδειγμα 4

Έξι Αμερικάνοι, πέντε Ρώσοι και τέσσερις Κινέζοι θα τοποθετηθούν σε σειρά, για να παρακολουθήσουν ένα συνέδριο.

- (α) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση αυτή, χωρίς κανένα περιορισμό.
- (β) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση αυτή, έτσι ώστε τα άτομα της κάθε εθνικότητας να καθίσουν σε συνεχόμενα καθίσματα.

Λύση

- (α) Κάθε τοποθέτηση των 15 συνέδρων σε σειρά, χωρίς κανένα περιορισμό, ισοδυναμεί με μια μετάθεση 15 αντικειμένων. Συνεπώς, η τοποθέτηση των συνέδρων μπορεί να γίνει με $M_{15} = 15! = 1307674368000$ τρόπους.
- (β) Στη πρώτη φάση θεωρούμε τα άτομα της κάθε εθνικότητας ως ένα αντικείμενο. Επομένως, κάθε τοποθέτηση των ατόμων των τριών εθνικοτήτων ισοδυναμεί με μιαν απλή μετάθεση 3 αντικειμένων. Στην πρώτη φάση το πλήθος των τοποθετήσεων είναι 3!. Στη δεύτερη φάση, για καθεμιά από τις τοποθετήσεις της πρώτης φάσης, οι έξι Αμερικάνοι μπορούν να καθίσουν με 6! τρόπους, οι πέντε Ρώσοι με 5! τρόπους και οι τέσσερις Κινέζοι με 4! τρόπους. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, η τοποθέτηση των ατόμων των εθνικοτήτων σε συνεχόμενα καθίσματα μπορεί να πραγματοποιηθεί με $3! \cdot 6! \cdot 5! \cdot 4! = 12441600$ τρόπους.

10.2.3 Κυκλικές Μεταθέσεις

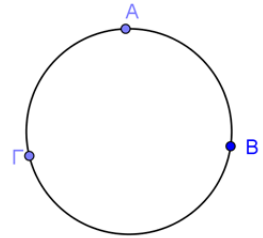
Διερεύνηση

Να εξετάσετε κατά πόσο το πλήθος των φωτογραφήσεων 4 ατόμων, που στέκονται σε σειρά, είναι το ίδιο με το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που τα ίδια 4 άτομα μπορούν να χορέψουν σε κύκλο, κρατώντας ο ένας το χέρι του άλλου.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Όταν έχουμε να τοποθετήσουμε σε σειρά τρία άτομα A, B, Γ , είναι γνωστό ότι υπάρχουν $3! = 6$ διαφορετικές μεταθέσεις, οι οποίες είναι:

$$AB\Gamma, A\Gamma B, B\Gamma A, B\Lambda\Gamma, \Gamma AB, \Gamma BA$$



Αν τοποθετήσουμε τα τρία άτομα A, B, Γ σε κύκλο, θεωρούμε ότι έχουμε μια κυκλική μετάθεση των 3 ατόμων με μία συγκεκριμένη φορά (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα).

Σε μια κυκλική μετάθεση, όπως φαίνεται και στο σχήμα, χρησιμοποιώντας την ίδια φορά και αρχίζοντας από διαφορετικό σημείο έναρξης σε κάθε περίπτωση, παρατηρούμε ότι «παράγονται» τρεις διαφορετικές απλές μεταθέσεις. Δηλαδή, με δεξιόστροφη φορά, αν το σημείο έναρξης στον κύκλο είναι το:

- A , τότε έχουμε την απλή μετάθεση $AB\Gamma$
- B , τότε έχουμε την απλή μετάθεση $B\Gamma A$
- Γ , τότε έχουμε την απλή μετάθεση ΓAB .

Επομένως, σε μία κυκλική μετάθεση αντιστοιχούν 3 απλές μεταθέσεις. Συνεπώς, όλες οι διαφορετικές κυκλικές μεταθέσεις των 3 ατόμων είναι:

$$\frac{M_3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

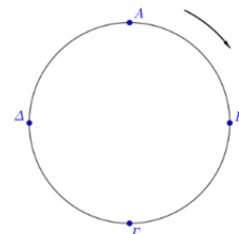
Τα πιο πάνω μπορούν να επεκταθούν και για περισσότερα στοιχεία και να γενικευθούν.

Ορισμός

Κυκλική μετάθεση n διαφορετικών αντικειμένων είναι κάθε τοποθέτηση των n αντικειμένων σε κύκλο, κατά μία ορισμένη φορά.

Για παράδειγμα, αν καθίσουν σε κύκλο 4 παιδιά A, B, Γ, Δ , τότε έχουμε μια κυκλική μετάθεση των 4.

Σε κάθε διαφορετική μετακίνηση ενός παιδιού στη θέση ενός άλλου προκύπτει και διαφορετική κυκλική μετάθεση, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.



Στα πιο κάτω σχήματα, αν αρχίσουμε από το σημείο A και με συγκεκριμένη στροφή (έστω δεξιόστροφα) κινούμενοι, έχουμε την κυκλική μετάθεση $ABΓΔ$ στον πρώτο κύκλο, ενώ στον δεύτερο κύκλο, αρχίζοντας και πάλι από το A , έχουμε την κυκλική μετάθεση $ΑΓΔΒ$ που είναι διαφορετική από την προηγούμενη.



Δεν προκύπτει διαφορετική κυκλική μετάθεση στις περιπτώσεις όπου τα παιδιά μετακινηθούν ως αποτέλεσμα στροφής, όπως φαίνεται και στο πιο κάτω σχήμα. Αν και πάλι αρχίσουμε από το A κινούμενοι δεξιόστροφα τόσο στον πρώτο όσο και στον δεύτερο κύκλο θα έχουμε την ίδια κυκλική μετάθεση $ABΓΔ$.



Πρόταση

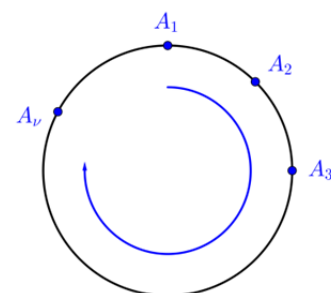
Το **πλήθος όλων των κυκλικών μεταθέσεων** n διαφορετικών αντικειμένων είναι ίσο με $(n - 1)!$ και συμβολίζεται με K_n .

Δηλαδή:

$$K_n = (n - 1)!$$

Απόδειξη

Έστω μια κυκλική μετάθεση n διαφορετικών αντικειμένων με δεξιόστροφη φορά, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι αν το σημείο έναρξης είναι το A_1 , έχουμε την απλή μετάθεση $A_1A_2 \dots A_n$. Αν το σημείο έναρξης είναι το A_2 , τότε για την ίδια κυκλική μετάθεση έχουμε την απλή μετάθεση $A_2A_3 \dots A_nA_1$. Με τον ίδιο τρόπο, και αρχίζοντας κάθε φορά από ένα διαφορετικό σημείο, καταλήγουμε ότι **σε κάθε μία κυκλική μετάθεση αντιστοιχούν n απλές μεταθέσεις**.



Επομένως:

$$M_n = n \cdot K_n \Leftrightarrow K_n = \frac{M_n}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n - 1)!}{n} = (n - 1)!$$

Παράδειγμα 5

Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν 5 άτομα να καθίσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι με ορισμένη φορά.

Λύση

Κάθε τοποθέτηση των 5 ατόμων ισοδυναμεί με μια κυκλική μετάθεση 5 αντικειμένων. Συνεπώς, η τοποθέτηση των ατόμων μπορεί να γίνει με $K_5 = (5 - 1)! = 4! = 24$ τρόπους.

Παράδειγμα 6

Δέκα μαθητές θα χορέψουν σε κύκλο.

- (α) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση χωρίς κανένα περιορισμό.
- (β) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση, έτσι ώστε δύο συγκεκριμένοι μαθητές να χορέψουν ο ένας πλάι στον άλλο.

Λύση

- (α) Κάθε τοποθέτηση των 10 μαθητών σε κύκλο χωρίς κανένα περιορισμό ισοδυναμεί με μια κυκλική μετάθεση 10 αντικειμένων. Συνεπώς, η τοποθέτηση των μαθητών μπορεί να γίνει με $K_{10} = (10 - 1)! = 9! = 362880$ τρόπους.
- (β) Στη πρώτη φάση θεωρούμε τους δύο συγκεκριμένους μαθητές, οι οποίοι θα είναι ο ένας πλάι στον άλλο, ως ένα αντικείμενο. Επομένως, υπολογίζουμε το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων 9 αντικειμένων με $K_9 = 8!$. Στη δεύτερη φάση, για καθεμιά από τις τοποθετήσεις της πρώτης φάσης, οι δύο αυτοί μαθητές μπορούν να τοποθετηθούν με $2!$ τρόπους, ο ένας πλάι στον άλλο. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, οι δύο αυτοί μαθητές μπορούν να χορέψουν ο ένας πλάι στον άλλο με $8! \cdot 2! = 80640$ τρόπους.

10.2.4 Επαναληπτικές Μεταθέσεις

Διερεύνηση

Δίνεται η λέξη **ΜΕΤΑΘΕΣΗ**.

- (α) Ποια γράμματα της πιο πάνω λέξης, αν εναλλάξετε τη θέση τους, θα μείνει ο ίδιος αναγραμματισμός της λέξης **ΜΕΤΑΘΕΣΗ**;
- (β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η πιο πάνω εναλλαγή, ώστε να μην αλλάξει ο αναγραμματισμός της λέξης;
- (γ) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των 8 γραμμάτων της πιο πάνω λέξης, ώστε να προκύψουν όλοι οι διαφορετικοί αναγραμματισμοί της;
- (δ) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των 9 γραμμάτων της λέξης **ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**, ώστε να προκύπτουν διαφορετικοί αναγραμματισμοί;

Ορισμός

Επαναληπτική μετάθεση ν αντικειμένων, τα οποία δεν είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους, είναι κάθε τοποθέτησή των ν –αντικειμένων σε σειρά.

Πρόταση

Το **πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων** ν αντικειμένων, από τα οποία τα κ_1 είναι μεταξύ τους τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα άλλα, τα κ_2 είναι επίσης τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα άλλα, ..., τα κ_λ είναι επίσης τα ίδια και διαφορετικά από τα άλλα είναι ίσο με $\frac{\nu!}{\kappa_1! \cdot \kappa_2! \cdot \dots \cdot \kappa_\lambda!}$ και συμβολίζεται με M_ν^ε .

Δηλαδή:

$$M_\nu^\varepsilon = \frac{\nu!}{\kappa_1! \cdot \kappa_2! \cdot \dots \cdot \kappa_\lambda!}$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι κάθε επαναληπτική μετάθεση ν αντικειμένων, από τα οποία τα κ_1 είναι τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα άλλα, τα κ_2 είναι τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα άλλα, ..., τα κ_λ είναι τα ίδια και διαφορετικά από τα άλλα, αντιστοιχεί σε $\kappa_1! \cdot \kappa_2! \cdot \dots \cdot \kappa_\lambda!$ μεταθέσεις ν αντικειμένων.

Συνεπώς, ισχύει ότι:

$$M_\nu = \kappa_1! \cdot \kappa_2! \cdot \dots \cdot \kappa_\lambda! \cdot M_\nu^\varepsilon \Rightarrow M_\nu^\varepsilon = \frac{\nu!}{\kappa_1! \cdot \kappa_2! \cdot \dots \cdot \kappa_\lambda!}$$

Παράδειγμα 7

Να βρείτε πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1, 1, 1, 2, 3.

Λύση

Κάθε τοποθέτηση των 5 ψηφίων ισοδυναμεί με μια επαναληπτική μετάθεση 5 αντικειμένων. Θα υπολογίσουμε το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων 5 αντικειμένων, από τα οποία τα 3 είναι τα ίδια.

Συνεπώς, αν συμβολίσουμε με M_5^{ε} το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων, ισχύει ότι:

$$M_5^{\varepsilon} = \frac{5!}{3!} = 20$$

Μπορούμε να σχηματίσουμε 20 πενταψήφιους αριθμούς με τα ψηφία 1, 1, 1, 2, 3.

Παράδειγμα 8

Δίνεται η λέξη **ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ**.

- (α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.
(β) Πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς:
- αρχίζουν με την λέξη **ΠΑΡΑ**
 - έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις;

Λύση

(α) Κάθε αναγραμματισμός της λέξης **ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ** ισοδυναμεί με μια επαναληπτική μετάθεση 9 αντικειμένων, από τα οποία τα 3 (**ΑΑΑ**) είναι τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα υπόλοιπα και τα 2 (**ΣΣ**) είναι τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα άλλα. Συνεπώς, το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης είναι:

$$M_9^{\varepsilon} = \frac{9!}{3! \cdot 2!} = 30240$$

(β) i. Στην πρώτη φάση τοποθετούμε τη λέξη **ΠΑΡΑ** στις πρώτες θέσεις. Αυτό γίνεται με έναν μόνο τρόπο. Στη συνέχεια, σε δεύτερη φάση με τα υπόλοιπα γράμματα **ΣΤΑΣΗ** σχηματίζουμε αναγραμματισμούς. Το πλήθος των αναγραμματισμών είναι ίσο με το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων 5 αντικειμένων, από τα οποία τα 2 (**ΣΣ**) είναι τα ίδια και διαφορετικά από όλα τα άλλα.

Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ** που αρχίζουν με την λέξη **ΠΑΡΑ** είναι:

$$M_5^{\varepsilon} = \frac{5!}{2!} = 60$$

- ii. Στην πρώτη φάση θεωρούμε τα φωνήεντα **ΑΑΗΗ** ως ένα αντικείμενο. Επομένως, υπολογίζουμε το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων των 6 αντικειμένων **(ΑΑΑΗ), Π, Ρ, Σ, Τ, Σ** που είναι:

$$M_6^\varepsilon = \frac{6!}{2!} = 360$$

Στη δεύτερη φάση, για καθέναν από τους αναγραμματισμούς της πρώτης φάσης, τα συνεχόμενα γράμματα **ΑΑΗΗ** που μετακινούνται ως ένα αντικείμενο, μπορούν να τοποθετηθούν με:

$$M_4^\varepsilon = \frac{4!}{3!} = 4 \text{ τρόπους}$$

Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ** που έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις:

$$360 \cdot 4 = 1440$$

Παράδειγμα 9

Δίνονται 9 κάρτες. Στις τρεις από αυτές αναγράφεται το γράμμα *A*, σε άλλες τρεις το γράμμα *B* και στις υπόλοιπες τρεις το *Γ*. Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τις 9 κάρτες σε σειρά:

- (α) αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός
(β) ώστε τα 3 *A* να είναι σε συνεχόμενες θέσεις

Λύση

- (α) Πρόκειται για επαναληπτικές μεταθέσεις 9 αντικειμένων με 3 όμοια είδη αντικειμένων (*AAA, BBB, ΓΓΓ*).

Έχουμε:

$$M_9^\varepsilon = \frac{(3 + 3 + 3)!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{9!}{(3!)^3} = 1680$$

- (β) Έχουμε τα 3*A* να είναι σε συνεχόμενες θέσεις. Έτσι, τα θεωρούμε ως ένα αντικείμενο και δύο άλλα είδη (3 *B* και 3 *Γ*)

Έχουμε:

$$M_7^\varepsilon = \frac{(1 + 3 + 3)!}{3! \cdot 3!} = \frac{7!}{(3!)^2} = 140$$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων A, B και Γ , όπου:
$$A = 7! - 2 \cdot 5!, \quad B = \frac{10!}{4! \cdot 6!}, \quad \Gamma = \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!}$$
2. Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους μπορούν 7 διαφορετικά μαθήματα να τοποθετηθούν στο πρόγραμμα μιας ημέρας με 7 περιόδους.
3. Πέντε κορίτσια και τρία αγόρια θα καθίσουν σε οκτώ συνεχόμενα καθίσματα στο θέατρο. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν, αν:
(α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός
(β) τα κορίτσια θα είναι σε συνεχόμενα καθίσματα;
4. Δίνεται η λέξη **ΛΥΚΕΙΟ**.
(α) Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης;
(β) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με **Λ**;
(γ) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με **Λ** και τελειώνουν σε **Ο**;
(δ) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με φωνήεν;
(ε) Πόσοι από αυτούς έχουν τα φωνήεντα συνεχόμενα;
5. Με πόσους τρόπους μπορούν να σταθούν 9 παιδιά, το ένα δίπλα στο άλλο, αν:
(α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός
(β) ένα συγκεκριμένο παιδί θα βρίσκεται στο αριστερό άκρο
(γ) δύο συγκεκριμένα παιδιά θα βρίσκονται στα δύο άκρα;
6. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν 6 παιδιά γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι; Σε πόσους από αυτούς τους τρόπους δύο συγκεκριμένα παιδιά δεν βρίσκονται το ένα πλάι στο άλλο;
7. Δίνονται τα ψηφία 4, 4, 7, 7, 9.
(α) Να υπολογίσετε το πλήθος των πενταψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν με τα ψηφία αυτά.
(β) Πόσοι από αυτούς τους αριθμούς αρχίζουν και τελειώνουν με το ίδιο ψηφίο;
8. (α) Να βρείτε πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης **ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ** υπάρχουν.
(β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς:
i. έχουν τελευταίο γράμμα το **Σ**
ii. δεν περιέχουν την λέξη **ΑΓΩΓΟΣ**
iii. έχουν τα σύμφωνα σε συνεχόμενες θέσεις.

10.3 ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

Διερεύνηση

Σε αγώνες στίβου στον ημιτελικό δρόμο των 100 m λαμβάνουν μέρος 8 αθλητές.

- (α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τερματίσουν στις τρεις πρώτες θέσεις;
- (β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να προκριθούν οι πέντε καλύτερες θέσεις;
- (γ) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους τερματίζουν οι 8 αθλητές;

10.3.1 Απλές Διατάξεις

Ορισμός

Διάταξη n διαφορετικών αντικειμένων ανά k είναι κάθε τοποθέτηση των k από τα n αντικείμενα σε σειρά.

Πρόταση

Το **πλήθος των διατάξεων** n διαφορετικών αντικειμένων ανά k συμβολίζεται με Δ_k^n και ισχύει:

$$\Delta_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Απόδειξη

Η τοποθέτηση σε σειρά των k από τα n διαφορετικά αντικείμενα σε k θέσεις μπορεί να πραγματοποιηθεί σε k φάσεις. Η πρώτη φάση είναι η τοποθέτηση αντικειμένου στην πρώτη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με n τρόπους, γιατί υπάρχουν n διαθέσιμα αντικείμενα. Για καθέναν από αυτούς, η δεύτερη φάση είναι η τοποθέτηση αντικειμένου στη δεύτερη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με $n-1$ τρόπους, γιατί υπάρχουν $n-1$ διαθέσιμα αντικείμενα (ένα αντικείμενο έχει τοποθετηθεί στην πρώτη θέση),..., και για καθέναν από αυτούς, η k -φάση είναι η τοποθέτηση αντικειμένου στη k -θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με $n-(k-1)$ τρόπους, γιατί υπάρχουν $n-(k-1)$ διαθέσιμα αντικείμενα (τα άλλα $k-1$ αντικείμενα έχουν τοποθετηθεί).

Φάσεις	1 ^η θέση	2 ^η θέση	...	$k^{\text{η}}$ θέση
Τρόποι	n	$n-1$...	$n-k+1$

Συνεπώς, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, η τοποθέτηση των αντικειμένων μπορεί να πραγματοποιηθεί με:

$$\Delta_k^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \text{ διαφορετικούς τρόπους}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{(n-k)! (n-k+1) \cdot \dots \cdot (n-1)n}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Συνεπώς:

$$\Delta_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Παράδειγμα 1

Ο κύριος Μηνάς θα επιλέξει 5 από 9 διαφορετικά πουκάμισα, για να φορέσει ένα, διαφορετικό κάθε μέρα, από τη Δευτέρα μέχρι και την Παρασκευή. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να πραγματοποιηθεί η επιλογή του.

Λύση

1^{ος} τρόπος

Ζητούμε όλες τις δυνατές **διατεταγμένες** πεντάδες από ένα σύνολο 9 στοιχείων.

Επομένως, όλοι οι διαφορετικοί τρόποι επιλογής 5 πουκαμίσων είναι το πλήθος των διατάξεων των 9 ανά 5.

Δηλαδή, έχουμε $\Delta_5^9 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ διαφορετικούς τρόπους.

2^{ος} τρόπος

Κάθε επιλογή των 5 από τα 9 πουκάμισα ισοδυναμεί με μια διάταξη 9 διαφορετικών αντικειμένων ανά 5. Θα υπολογίσουμε το πλήθος των διατάξεων με την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης.

Η επιλογή των πουκαμίσων πραγματοποιείται σε 5 φάσεις.

Η πρώτη φάση είναι η επιλογή του πουκαμίσου που θα φορεθεί τη Δευτέρα, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 9 τρόπους, γιατί υπάρχουν 9 διαθέσιμα πουκάμισα. Η δεύτερη φάση είναι η επιλογή του πουκαμίσου που θα φορεθεί την Τρίτη, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 8 τρόπους, γιατί υπάρχουν 8 διαθέσιμα πουκάμισα (ένα πουκάμισο έχει φορεθεί την Δευτέρα). Ομοίως, η πέμπτη φάση είναι η επιλογή του πουκαμίσου που θα φορεθεί την Παρασκευή, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 5 τρόπους, γιατί υπάρχουν 5 διαθέσιμα πουκάμισα (4 πουκάμισα έχουν φορεθεί από Δευτέρα μέχρι Πέμπτη).

Φάσεις	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή
Τρόποι	9	8	7	6	5

Συνεπώς, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, η επιλογή των 5 από τα 9 πουκάμισα μπορεί να πραγματοποιηθεί με $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 2

Σε μια κούρσα αλόγων τρέχουν 9 άλογα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τερματίσουν στις 2 πρώτες θέσεις, αν έχει σημασία η σειρά τερματισμού;

Λύση

1^{ος} τρόπος

Ζητούμε όλα τα δυνατά **διατεταγμένα** ζεύγη από ένα σύνολο 9 στοιχείων.

Επομένως, όλοι οι διαφορετικοί τρόποι τερματισμού των δύο αλόγων είναι το πλήθος των διατάξεων των 9 ανά 2.

Δηλαδή, έχουμε $\Delta_2^9 = 9 \cdot 8 = 72$ διαφορετικούς τρόπους τερματισμού.

2^{ος} τρόπος

Με τη θεμελιώδη αρχή της απαρίθμησης έχουμε μόνο 2 θέσεις οι οποίες μπορούν να συμπληρωθούν:

Φάσεις	1 ^η θέση	2 ^η θέση
Τρόποι	9	8

Επομένως, έχουμε συνολικά $9 \cdot 8 = 72$ διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 3

Η κυρία Ματίνα ξέχασε τον τετραψήφιο κωδικό του συναγερμού στο σπίτι της. Θυμάται όμως ότι αποτελείται από κάποια από τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 και ότι όλα τα ψηφία του κωδικού είναι διαφορετικά.

- (α) Να βρείτε πόσοι είναι όλοι οι δυνατοί κωδικοί που μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω δεδομένα.
- (β) Να βρείτε πόσοι είναι όλοι οι δυνατοί κωδικοί που μπορούν να σχηματιστούν, αν η κυρία Ματίνα θυμάται ότι το τελευταίο ψηφίο του κωδικού είναι το 1.

Λύση

- (α) Κάθε τοποθέτηση σε σειρά των 4 από τα 5 διαφορετικών ψηφίων ισοδυναμεί με μια διάταξη 5 αντικειμένων ανά 4. Συνεπώς, το πλήθος των κωδικών είναι το πλήθος των διατάξεων 5 αντικειμένων ανά 4:

$$\Delta_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

- (β) Αφού η τελευταία θέση είναι ήδη συμπληρωμένη, μας απομένει να συμπληρώσουμε τις υπόλοιπες τρεις θέσεις με τα 4 ψηφία που έχουν απομείνει. Έχουμε, δηλαδή, διατάξεις των 4 ανά 3:

$$\Delta_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

Παράδειγμα 4

Να λύσετε την εξίσωση $\Delta_3^v = 12v, v \geq 3$.

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\Delta_3^v = 12v &\Leftrightarrow \frac{v!}{(v-3)!} = 12v \Leftrightarrow \frac{v(v-1)(v-2)(v-3)!}{(v-3)!} = 12v \\ &\Leftrightarrow v(v-1)(v-2) = 12v \Leftrightarrow (v-1)(v-2) = 12 \\ &\Leftrightarrow v^2 - 3v + 2 = 12 \Leftrightarrow v^2 - 3v - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow (v-5)(v+2) = 0 \Leftrightarrow v_1 = 5, v_2 = -2\end{aligned}$$

Δεκτή λύση το $v_1 = 5$, ενώ απορρίπτεται η λύση $v_2 = -2$, γιατί πρέπει να ισχύει $v \geq 3$.

10.3.2 Επαναληπτικές διατάξεις

Διερεύνηση

- (α) Να καταγράψετε όλα τα δυνατά αποτελέσματα που μπορούν να προκύψουν ρίχνοντας ένα νόμισμα 5 φορές, αν είναι γνωστό ότι σε κάθε ρίψη ενδέχεται να εμφανιστεί «κορώνα» (K) ή «γράμματα» (Γ).
- (β) Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα προκύπτουν;
- (γ) Να αναφέρετε κατά πόσο αποτελεί διάταξη το κάθε ένα από τα αποτελέσματα που καταγράψατε. Αν όχι, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας, εντοπίζοντας που διαφοροποιείται από τη διάταξη που έχετε μάθει.

Ορισμός

Για κάθε σύνολο A με n διακεκριμένα στοιχεία, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, ορίζεται ως επαναληπτική διάταξη n στοιχείων ανά k , η κατάταξη σε ευθεία γραμμή των k στοιχείων που πήραμε από τα n , αν κάθε στοιχείο μπορεί να επαναλαμβάνεται μέχρι k φορές.

Παρατήρηση

- Στις απλές διατάξεις των n ανά k ισχύει ότι $k \leq n$. Στις επαναληπτικές διατάξεις των n ανά k , μπορεί το k να είναι και μεγαλύτερο του n ($k > n$). Για παράδειγμα, με στοιχεία από το σύνολο $X = \{1, 2\}$ μπορούμε να σχηματίσουμε τετραψήφιους αριθμούς, όπως 1221, 1222, 2121, οι οποίοι αποτελούν διατάξεις των 2 ανά 4.

Πρόταση

Το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων n διαφορετικών αντικειμένων ανά k είναι ίσο με n^k και συμβολίζεται με δ_k^n . Δηλαδή:

$$\delta_k^n = n^k$$

Απόδειξη

Η τοποθέτηση των n αντικειμένων μπορεί να πραγματοποιηθεί σε k φάσεις. Η πρώτη φάση είναι η τοποθέτηση αντικειμένου στην πρώτη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με n τρόπους, γιατί υπάρχουν n διαθέσιμα αντικείμενα. Η δεύτερη φάση είναι η τοποθέτηση αντικειμένου στην δεύτερη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με n τρόπους, γιατί υπάρχουν n διαθέσιμα αντικείμενα. Ομοίως, η k - φάση είναι η τοποθέτηση αντικειμένου στην k -θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με n τρόπους, γιατί υπάρχουν n διαθέσιμα αντικείμενα.

Φάσεις	1 ^η θέση	2 ^η θέση	...	$k^{\text{η}}$ θέση
Τρόποι	n	n	...	n

Συνεπώς, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, η τοποθέτηση των n αντικειμένων μπορεί να γίνει με $\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k\text{-παράγοντες}} = n^k$ διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 5

- (α) Να βρείτε πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 7, 8 και 9.
- (β) Να υπολογίσετε πόσους τριψήφιους μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5.

Λύση

(α) 1^{ος} τρόπος

Κάθε τοποθέτηση των 3 ψηφίων στις 5 θέσεις ενός πενταψήφιου αριθμού αντιστοιχεί με μια επαναληπτική διάταξη των 3 αντικειμένων ανά 5. Επομένως, οι πενταψήφιοι αριθμοί που μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 7, 8 και 9 είναι $3^5 = 243$.

2^{ος} τρόπος

Η τοποθέτηση των ψηφίων μπορεί να πραγματοποιηθεί σε 5 φάσεις. Η πρώτη φάση είναι η τοποθέτηση ψηφίου στην πρώτη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 3 τρόπους, γιατί υπάρχουν 3 διαθέσιμα ψηφία (7, 8, 9). Η δεύτερη φάση είναι η τοποθέτηση ψηφίου στη δεύτερη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 3 τρόπους, γιατί υπάρχουν 3 διαθέσιμα ψηφία (7, 8, 9). Ομοίως, η πέμπτη φάση είναι η τοποθέτηση ψηφίου στην πέμπτη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 3 τρόπους, γιατί υπάρχουν 3 διαθέσιμα ψηφία (7, 8, 9).

Φάσεις	1 ^η θέση	2 ^η θέση	...	5 ^η θέση
Τρόποι	3	3	...	3

Συνεπώς, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, η τοποθέτηση των 3 ψηφίων σε 5 θέσεις μπορεί να πραγματοποιηθεί με $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$ διαφορετικούς τρόπους.

(β) 1^{ος} τρόπος

Κάθε τοποθέτηση των 5 ψηφίων στις 3 θέσεις ενός τριψήφιου αριθμού αντιστοιχεί με μια επαναληπτική διάταξη των 5 αντικειμένων ανά 3. Επομένως, οι πενταψήφιοι αριθμοί που μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1, 2, 3, 4 και 5 είναι $\delta_3^5 = 5^3 = 125$.

2^{ος} τρόπος

Η τοποθέτηση των ψηφίων μπορεί να πραγματοποιηθεί σε 3 φάσεις.

Η πρώτη φάση είναι η τοποθέτηση ψηφίου στην πρώτη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 5 τρόπους, γιατί υπάρχουν 5 διαθέσιμα ψηφία (1, 2, 3, 4, 5). Η δεύτερη φάση είναι η τοποθέτηση ψηφίου στη δεύτερη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 5 τρόπους, γιατί υπάρχουν 5 διαθέσιμα ψηφία (1, 2, 3, 4, 5). Ομοίως, η τρίτη φάση είναι η τοποθέτηση ψηφίου στην τρίτη θέση, η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με 5 τρόπους, γιατί υπάρχουν 5 διαθέσιμα ψηφία (1, 2, 3, 4, 5).

Φάσεις	1 ^η θέση	2 ^η θέση	3 ^η θέση
Τρόποι	5	5	5

Συνεπώς, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, το πλήθος όλων των τριψήφιων αριθμών θα είναι $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$.

Παράδειγμα 6

- (α) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν τέσσερις τουρίστες να διαμείνουν στα έξι ξενοδοχεία μιας πόλης.
- (β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν οι τέσσερις τουρίστες να διαμείνουν:
- σε διαφορετικά ξενοδοχεία
 - στο ίδιο ξενοδοχείο

Λύση

- (α) Κάθε τοποθέτηση των 4 τουριστών στα 6 ξενοδοχεία ισοδυναμεί με μια επαναληπτική διάταξη 6 αντικειμένων ανά 4. Συνεπώς, η διαμονή των τουριστών μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\delta_4^6 = 6^4 = 1296$ διαφορετικούς τρόπους.

(β) Για το i:

Κάθε τοποθέτηση των 4 τουριστών σε 6 διαφορετικά ξενοδοχεία ισοδυναμεί με μια διάταξη 6 διαφορετικών αντικειμένων ανά 4. Συνεπώς, η διαμόνη των τουριστών μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\Delta_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$ τρόπους.

Για το ii:

Οι τουρίστες μπορούν να μείνουν στο ίδιο ξενοδοχείο με 6 τρόπους, γιατί υπάρχουν 6 ξενοδοχεία.

Παράδειγμα 7

Σχηματίζουμε εξαψήφιους αριθμούς χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Αν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου, να υπολογίσετε πόσοι διαφορετικοί εξαψήφιοι υπάρχουν:

(α) χωρίς κανέναν άλλο περιορισμό

(β) οι οποίοι να περιέχουν και τα τρία ψηφία 1, 2, 3 ακριβώς μια φορά.

Λύση

(α) Αφού επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου, σημαίνει ότι έχουμε επαναληπτικές διατάξεις των 8 ανά 6. Δηλαδή:

$$\delta_6^8 = 8^6 = 262144$$

(β) Οι εξαψήφιοι, οι οποίοι περιέχουν τα ψηφία 1, 2, 3 ακριβώς μια φορά, μπορούν να σχηματιστούν σε δύο φάσεις:

φ_1 : Επιλογή των τριών θέσεων για τα 1, 2, 3 και μέτρηση όλων των δυνατών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τους αριθμούς 1, 2, 3.

Δηλαδή:

$$\Delta_3^6 = \frac{6!}{3!} = 120$$

φ_2 : Μέτρηση όλων των δυνατών τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τους υπόλοιπους αριθμούς 4, 5, 6, 7, 8 στις υπόλοιπες τρεις θέσεις. Δηλαδή:

$$\delta_3^5 = 125$$

Επομένως, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, το συνολικό πλήθος των εξαψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν είναι:

$$\Delta_3^6 \cdot \delta_3^5 = 120 \cdot 125 = 15000$$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
 - (α) Μια διάταξη n διαφορετικών αντικειμένων ανά n είναι μια μετάθεση n διαφορετικών αντικειμένων. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
 - (β) Το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων n διαφορετικών αντικειμένων ανά k είναι ίσο με k^n . ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
 - (γ) Το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης n διαφορετικών αντικειμένων σε σειρά είναι ίσο με το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης $n - 1$ από τα n διαφορετικά αντικείμενα σε σειρά. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
2. Ο προπονητής μιας ποδοσφαιρικής ομάδας θα χρησιμοποιήσει ένα σύστημα δύο επιθετικών, με τον ένα να παίζει δεξιά και τον άλλο αριστερά. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλέξει δύο επιθετικούς, αν έχει διαθέσιμους 5 επιθετικούς που μπορούν να παίξουν και στις δύο θέσεις.
3. Σε ένα σχολείο ενδιαφέρονται 10 κορίτσια και 5 αγόρια για την θεατρική παράσταση. Στο σενάριο της παράστασης υπάρχουν 4 ρόλοι για κορίτσια και 2 ρόλοι για αγόρια. Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να διανεμηθούν οι ρόλοι στα παιδιά, αν:
 - (α) κάθε παιδί θα επιλεγεί για έναν ακριβώς ρόλο
 - (β) ένα συγκεκριμένο κορίτσι θα επιλεγεί για το ρόλο της πρωταγωνίστριας
 - (γ) ένα συγκεκριμένο κορίτσι και ένα συγκεκριμένο αγόρι δεν θα επιλεγούν.
4. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, αν:
 - (α) δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου
 - (β) επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου
 - (γ) είναι μεγαλύτεροι από το 5000 και δεν επαναλαμβάνεται ψηφίο
 - (δ) είναι άρτιοι μεγαλύτεροι από το 5000 και δεν επαναλαμβάνεται ψηφίο;
5. Με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε δεκαψήφιους αριθμούς χρησιμοποιώντας και τα 10 ψηφία από μία φορά μόνο το καθένα, έτσι ώστε το πρώτο ψηφίο να είναι μεγαλύτερο από το 1 και το τελευταίο να είναι μικρότερο από το 8;

6. Ένας κωδικός ασφαλείας σχηματίζεται από 1 ή 2 αριθμητικά ψηφία που ακολουθούνται από 4 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου. Πόσους διαφορετικούς κωδικούς μπορούμε να σχηματίσουμε, αν:
- (α) δεν επιτρέπεται η επανάληψη ούτε των αριθμητικών ψηφίων, ούτε των γραμμάτων
 - (β) επιτρέπεται η επανάληψη των αριθμητικών ψηφίων, αλλά όχι των γραμμάτων
 - (γ) επιτρέπεται η επανάληψη των γραμμάτων, αλλά όχι των αριθμητικών ψηφίων
 - (δ) επιτρέπεται η επανάληψη και των γραμμάτων και των αριθμητικών ψηφίων;
7. Δέκα τουρίστες πρόκειται να μπουν τυχαία σε 3 λεωφορεία. Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν οι 10 τουρίστες στα 3 λεωφορεία, αν επιτρέπεται να μπουν όλοι στο ίδιο λεωφορείο.
8. Μια εξέταση πολλαπλής επιλογής περιέχει 10 ερωτήσεις, με 5 πιθανές απαντήσεις η κάθε μια. Ένας μαθητής απαντάει στην τύχη σε όλες τις ερωτήσεις. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι απαντήσεων υπάρχουν;
9. Να υπολογίσετε το πλήθος των θετικών ακέραιων αριθμών μικρότερων του 1000, έτσι ώστε το άθροισμα του πρώτου και του τρίτου ψηφίου να είναι 13.
10. Να υπολογίσετε το πλήθος των τριψήφιων αριθμών, ώστε το πρώτο τους ψηφίο να είναι μεγαλύτερο από το δεύτερο και το δεύτερο τους ψηφίο να είναι μεγαλύτερο από το τρίτο.

10.4 ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Διερεύνηση

- (α) Δίνεται το σύνολο $X = \{A, B, \Gamma, \Delta, E\}$. Να σχηματίσετε όλα τα υποσύνολα με ακριβώς 3 στοιχεία του συνόλου X .
- (β) Ο καθηγητής μιας τάξης ζήτησε τρία από τα πέντε παιδιά A, B, Γ, Δ, E της τάξης του να τον βοηθήσουν. Ποιες είναι όλες οι ομάδες με τα τρία παιδιά που μπορούν να σχηματιστούν;
- (γ) Ποια είναι η σχέση των δύο πιο πάνω ερωτημάτων;
- (δ) Να εξηγήσετε κατά πόσο ο σχηματισμός όλων των τριάδων στα ερωτήματα (α) και (β) αποτελεί ή όχι διάταξη των 5 ανά 3, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- (ε) Πώς συνδέεται η διάταξη των 5 ανά 3 με το πλήθος των τριάδων στα ερωτήματα (α) και (β);

Συνδυασμοί των n ανά k , $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$

Ορισμός

Συνδυασμός n διαφορετικών αντικειμένων ανά k λέγεται κάθε ομάδα των k από τα n αντικείμενα, χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξή τους σε σειρά.

Πρόταση

Το **πλήθος των συνδυασμών n** διαφορετικών αντικειμένων ανά k ($k \leq n$) συμβολίζεται με $\binom{n}{k}$ και δίνεται από τον τύπο:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Απόδειξη

Όπως γνωρίζουμε, το πλήθος των διατάξεων n αντικειμένων ανά k δίνεται από τον τύπο:

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Θα βρούμε τώρα το A_k^n , χρησιμοποιώντας την έννοια των συνδυασμών.

Κάθε διάταξη n αντικειμένων ανά k μπορεί να γίνει σε δύο φάσεις.

Στην πρώτη φάση, παίρνουμε k από τα n αντικείμενα, το οποίο μπορεί να γίνει με $\binom{n}{k}$ τρόπους, όσοι δηλαδή και οι συνδυασμοί των n αντικειμένων ανά k .

Στη δεύτερη φάση, τοποθετούμε τα k αντικείμενα που επιλέξαμε σε σειρά, το οποίο μπορεί να γίνει με $k!$ τρόπους.

Έτσι, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, έχουμε ότι:

$$\Delta_{\kappa}^{\nu} = \binom{\nu}{\kappa} \cdot \kappa! \Rightarrow \binom{\nu}{\kappa} = \frac{\Delta_{\kappa}^{\nu}}{\kappa!} = \frac{\nu!}{(\nu - \kappa)! \cdot \kappa!}$$

Παρατηρήσεις

- Το $\binom{\nu}{1}$ εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε ένα στοιχείο από ένα σύνολο με ν στοιχεία. Είναι προφανές ότι έχουμε ν διαφορετικές επιλογές.

Εφαρμόζοντας τον τύπο, παίρνουμε:

$$\binom{\nu}{1} = \frac{\nu!}{1! \cdot (\nu - 1)!} = \frac{\nu \cdot (\nu - 1)!}{(\nu - 1)!} = \nu$$

- Το $\binom{\nu}{\nu}$ εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε ν στοιχεία από το σύνολο που περιέχει ν στοιχεία. Είναι προφανές ότι έχουμε 1 μόνο τρόπο να κάνουμε αυτή την επιλογή (επιλέγοντας τα όλα).

Εφαρμόζοντας τον τύπο, παίρνουμε:

$$\binom{\nu}{\nu} = \frac{\nu!}{\nu! \cdot (\nu - \nu)!} = \frac{\nu!}{\nu! \cdot 0!} = 1$$

- Το $\binom{\nu}{0}$ εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε κανένα στοιχείο από το σύνολο που περιέχει ν στοιχεία. Είναι προφανές ότι έχουμε έναν μόνο τρόπο.

Εφαρμόζοντας τον τύπο, παίρνουμε:

$$\binom{\nu}{0} = \frac{\nu!}{0! \cdot (\nu - 0)!} = \frac{\nu!}{0! \cdot \nu!} = 1$$

- Μια βασική ιδιότητα στους συνδυασμούς είναι η σχέση:

$$\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu - \kappa}, \nu \geq \kappa$$

Το $\binom{\nu}{\kappa}$ εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε κ στοιχεία από ένα σύνολο που περιέχει ν στοιχεία, $\nu \geq \kappa$. Σε κάθε επιλογή μιας ομάδας με κ στοιχεία αντιστοιχεί και μια ομάδα από $(\nu - \kappa)$ στοιχεία, τα οποία δεν επιλέγονται. Επομένως, το πλήθος των $\binom{\nu}{\nu - \kappa}$ θα είναι το ίδιο με το $\binom{\nu}{\kappa}$.

Με τύπο έχουμε:

$$\binom{\nu}{\nu - \kappa} = \frac{\nu!}{(\nu - \kappa)! [\nu - (\nu - \kappa)]!} = \frac{\nu!}{(\nu - \kappa)! \kappa!} = \binom{\nu}{\kappa}$$

Παράδειγμα 1

Σε μια επιτροπή συμμετέχουν 10 άτομα.

(α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει επιλογή 3 ατόμων από αυτά;

(β) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει επιλογή 7 ατόμων από αυτά;

Λύση

(α) Οι τρόποι που ζητούνται είναι οι συνδυασμοί 10 ατόμων ανά 3, δηλαδή:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{\cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3! \cdot \cancel{7!}} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

Άρα, η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει με 120 τρόπους.

(β) Οι τρόποι που ζητούνται είναι οι συνδυασμοί 10 ατόμων ανά 7, δηλαδή:

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{\cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{\cancel{7!} \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

Άρα, η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει με 120 τρόπους.

Παρατήρηση

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε επίσης ότι ισχύει $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$. Αυτό αιτιολογείται από τον γενικό τύπο $\binom{v}{k} = \binom{v}{v-k}$ με $v = 10, k = 3$. Ακόμη, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι σε κάθε συνδυασμό 3 ατόμων που επιλέγονται από τα 10 άτομα, μένουν τα υπόλοιπα 7, τα οποία δεν επιλέγονται. Αφού λοιπόν σε κάθε 3 άτομα που επιλέγονται έχουμε αντίστοιχα και 7 που δεν επιλέγονται, τότε ισχύει $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$.

Παράδειγμα 2

Πόσα υποσύνολα με 4 στοιχεία μπορούμε να δημιουργήσουμε με στοιχεία από το σύνολο $A = \{a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta\}$;

Λύση

Αφού στον σχηματισμό ενός συνόλου δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία επιλέγουμε το κάθε στοιχείο, τότε το πλήθος όλων των υποσυνόλων με 4 στοιχεία από τα 6 που έχει το σύνολο A είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών των 6 ανά 4. Επομένως, έχουμε

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$$

υποσύνολα του A με 4 στοιχεία το καθένα.

Παράδειγμα 3

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\binom{v}{2} + \binom{v}{1} = 15$$

Λύση

$$\begin{aligned}\binom{v}{2} + \binom{v}{1} = 15 &\Rightarrow \frac{v!}{(v-2)! \cdot 2!} + \frac{v!}{(v-1)! \cdot 1!} = 15 \\ &\Rightarrow \frac{v(v-1)(v-2)!}{(v-2)! \cdot 2!} + \frac{v(v-1)!}{(v-1)! \cdot 1!} = 15 \\ &\Rightarrow \frac{v(v-1)}{1 \cdot 2} + v = 15 \Rightarrow v(v-1) + 2v = 30 \\ &\Rightarrow v^2 - v + 2v = 30 \Rightarrow v^2 + v - 30 = 0 \\ &\Rightarrow (v-5)(v+6) = 0 \Rightarrow v = 5 \text{ ή } v = -6\end{aligned}$$

Η λύση $v = 5$ είναι δεκτή ενώ η λύση $v = -6$ απορρίπτεται, αφού το v είναι φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1.

Παράδειγμα 4

Μια εταιρεία θα προσλάβει 4 υπαλλήλους. Έκαναν αίτηση 5 γυναίκες και 7 άντρες. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή, αν:

- (α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός
- (β) πρέπει να προσληφθούν 2 άντρες και 2 γυναίκες
- (γ) πρέπει να προσληφθούν τουλάχιστον 3 γυναίκες.

Λύση

- (α) Αφού δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στην επιλογή, σημαίνει ότι από ένα σύνολο 12 ατόμων (5 γυναίκες και 7 άντρες) επιλέγουμε 4 άτομα. Οι τρόποι που μπορεί να γίνει αυτό είναι:

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = 495$$

- (β) Η επιλογή των 4 ατόμων θα γίνει σε 2 φάσεις.

Στη μία φάση επιλέγονται 2 από τους 7 άντρες, το οποίο μπορεί να γίνει με

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$$

διαφορετικούς τρόπους.

Στην άλλη φάση γίνεται επιλογή των 2 γυναικών από τις 5, το οποίο γίνεται με

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

διαφορετικούς τρόπους.

Επομένως, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν συνολικά

$$\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} = 21 \cdot 10 = 210$$

διαφορετικοί τρόποι.

- (γ) Οι ομάδες 4 ατόμων με τουλάχιστον 3 γυναίκες περιλαμβάνουν είτε 3 γυναίκες και έναν άντρα είτε 4 γυναίκες.

Στην πρώτη περίπτωση, το πλήθος τους είναι:

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{7}{1} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{7!}{6! \cdot 1!} = 70$$

Στη δεύτερη περίπτωση, το πλήθος τους είναι:

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5$$

Έτσι, σύμφωνα με την αρχή του αθροίσματος έχουμε συνολικά $70 + 5 = 75$ διαφορετικούς τρόπους.

Δραστηριότητες

- Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
 - Το πλήθος των συνδυασμών 9 διαφορετικών αντικειμένων ανά 2 είναι το ίδιο με το πλήθος των συνδυασμών 9 διαφορετικών αντικειμένων ανά 7. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
 - Το πλήθος των διατάξεων n διαφορετικών αντικειμένων ανά k είναι ίσο με $k!$ φορές το πλήθος των συνδυασμών n διαφορετικών αντικειμένων ανά k . ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
- Να λύσετε τις εξισώσεις:
 - $\binom{n}{n-2} = 15$
 - $\binom{n+5}{n+2} + \binom{n+4}{3} = 6(n+4)$
- Πόσες χειραψίες μπορούν να ανταλλάξουν μεταξύ τους 9 άτομα, αν όλοι κάνουν μεταξύ τους χειραψία από μία φορά;
- Σε μια υπηρεσία πρόκειται να προσληφθούν 5 από 10 υποψήφιους. Αν οι υποψήφιοι είναι 7 άνδρες και 3 γυναίκες, με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η πρόσληψη, αν θα προσληφθούν:
 - 3 άνδρες και 2 γυναίκες
 - τουλάχιστον 3 άνδρες
 - το πολύ 2 γυναίκες;
- Πενταμελής επιτροπή θα σχηματιστεί από μια ομάδα ατόμων, η οποία αποτελείται από 9 άντρες και 7 γυναίκες. Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η συγκεκριμένη επιτροπή, αν:
 - δεν υπάρχει περιορισμός
 - μια συγκεκριμένη γυναίκα θα συμπεριλαμβάνεται στην επιτροπή
 - θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 άντρες και 2 γυναίκες
 - θα υπάρχουν το πολύ 2 άντρες;
- Ρίχνουμε ένα νόμισμα 10 φορές. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να εμφανιστούν 7 φορές «κορώνα» και 3 φορές «γράμματα»;
- Πόσα υποσύνολα με πληθικό αριθμό 3 υπάρχουν σε ένα σύνολο με 11 στοιχεία;
- Δίνεται το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
 - Πόσα υποσύνολα υπάρχουν με πληθικό αριθμό 4;
 - Σε πόσα από αυτά τα υποσύνολα περιέχεται το 1;
 - Σε πόσα από αυτά δεν περιέχεται το 1;

9. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Πάνω στην ε_1 υπάρχουν τα σημεία A, B, Γ, Δ, E και πάνω στην ευθεία ε_2 υπάρχουν τα σημεία Z, H, Θ, I . Να υπολογίσετε το πλήθος των διαφορετικών:
- (α) τριγώνων που μπορούν να σχηματιστούν με κορυφές σημεία που δίνονται από τις πιο πάνω ευθείες
 - (β) τετραπλεύρων που μπορούν να σχηματιστούν με κορυφές σημεία που δίνονται από τις πιο πάνω ευθείες.
10. Δίνεται το σύνολο $A = \{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$ (οι φυσικοί αριθμοί από το 1 μέχρι και το 30). Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν τρεις διαφορετικοί αριθμοί από το σύνολο A , έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι διαιρετό με το 3;
11. Αν $\nu, \kappa \in \mathbb{N}$, να δείξετε ότι:
- (α) $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu-1}{\kappa-1} + \binom{\nu-1}{\kappa}, \quad \nu > \kappa$
 - (β) $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu}{\kappa} \binom{\nu-1}{\kappa-1}, \quad \nu \geq \kappa$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Πόσους τετραψήφιους περιττούς ακέραιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να σχηματίσουμε;
2. Πόσους πενταψήφιους αριθμούς μεγαλύτερους του 21300 μπορούμε να σχηματίσουμε με διαφορετικά ψηφία από το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;
3. Ένας ελαιοχρωματιστής θα βάψει τους τέσσερις τοίχους σε ένα δωμάτιο. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να βάψει το δωμάτιο, αν οι δύο τοίχοι πρέπει να είναι μπλε και οι άλλοι δύο πράσινοι.
4. Ένας βιβλιοθηκάριος θα κωδικοποιήσει τα 60000 βιβλία μιας βιβλιοθήκης με τετραψήφιους κωδικούς. Τα πρώτα 2 ψηφία θα είναι γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και τα άλλα 2 ψηφία θα είναι αριθμοί. Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχουν αρκετοί κωδικοί για την κωδικοποίηση των βιβλίων.
5. Πέντε ανδρόγυνα θα καθίσουν τυχαία γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν οι σύζυγοι να καθίσουν ο ένας πλάι στον άλλο;
6. Να λύσετε την εξίσωση:
$$3 \binom{2n}{3} = 22A_2^y$$
7. Μια εταιρεία εργοδοτεί 8 άντρες και 12 γυναίκες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια επιτροπή 5 ατόμων από τους υπαλλήλους της εταιρείας, αν σε αυτήν πρέπει να συμμετέχει τουλάχιστον ένας άντρας και τουλάχιστον μία γυναίκα;
8. Δίνονται τα γράμματα $A, A, A, B, \Gamma, \Gamma, \Delta, E, Z$.
 - (α) Πόσοι συνδυασμοί τριών γραμμάτων μπορούν να γίνουν με αυτά;
 - (β) Πόσες λέξεις τριών γραμμάτων μπορούν να γίνουν με αυτά;
9. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 12 διαφορετικά δώρα εξίσου:
 - (α) σε 3 παιδιά;
 - (β) σε 4 παιδιά;

10. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλεγεί μια ομάδα ποδοσφαίρου με 11 άτομα και μια ομάδα καλαθόσφαιρας με 5 άτομα από μια τάξη 25 μαθητών, αν:
- (α) κανένας μαθητής δεν μπορεί να βρίσκεται και στις δύο ομάδες
 - (β) οποιοσδήποτε μαθητής μπορεί να βρίσκεται και στις δύο ομάδες
 - (γ) το πολύ ένας μαθητής μπορεί να βρίσκεται και στις δύο ομάδες.
11. Ένας ειδικευόμενος γιατρός πρόκειται να εργαστεί σε ένα νοσοκομείο για πέντε ημέρες κατά τον μήνα Μάρτιο. Η διεύθυνση του νοσοκομείου δεν επιτρέπει στον ειδικευόμενο γιατρό να εργάζεται δύο συνεχόμενες μέρες στο νοσοκομείο. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί ο γιατρός να επιλέξει τις πέντε μέρες που θα εργαστεί στο νοσοκομείο;
12. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 9 όμοιες μπάλες σε 3 διαφορετικά κουτιά A, B και Γ , αν:
- (α) κάποιο ή κάποια κουτιά μπορεί να μείνει άδειο
 - (β) το κάθε κουτί να περιέχει τουλάχιστον μία μπάλα;

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. (α) Να αποδείξετε ότι κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα.
(β) Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α), ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

2. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 4 θετικούς ακέραιους a, β, γ και δ από το σύνολο $A = \{1, 2, 3, \dots, 499, 500\}$, έτσι ώστε οι ακέραιοι a, β, γ, δ να αποτελούν όρους αύξουσας γεωμετρικής προόδου με λόγο θετικό ακέραιο αριθμό;
3. Δίνεται το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και το σύνολο $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Να βρείτε:
- (α) το πλήθος των συναρτήσεων $f: A \rightarrow B$ που μπορούμε να σχηματίσουμε
 - (β) το πλήθος των συναρτήσεων $f: B \rightarrow A$ που μπορούμε να σχηματίσουμε
 - (γ) το πλήθος των $1-1$ συναρτήσεων $f: A \rightarrow B$ που μπορούμε να σχηματίσουμε
 - (δ) το πλήθος των συναρτήσεων $f: A \rightarrow B$ που μπορούμε να σχηματίσουμε, τέτοιες ώστε $f(1) = 7$
 - (ε) το πλήθος των συναρτήσεων $f: A \rightarrow B$ που μπορούμε να σχηματίσουμε, τέτοιες ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα
 - (στ) το πλήθος των επί συναρτήσεων $f: B \rightarrow A$ που μπορούμε να σχηματίσουμε.

ΕΝΟΤΗΤΑ 11

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

11.1 Η έννοια της πιθανότητας

11.1.1 Εισαγωγή στις πιθανότητες

11.1.2 Πείραμα τύχης – Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

11.1.3 Πράξεις με ενδεχόμενα

11.1.4 Κλασσικός ορισμός πιθανότητας

11.1.5 Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας

11.2 Πιθανότητες συνδυασμένων ενδεχομένων

11.2.1 Ενδεχόμενα υπό συνθήκη – Δεσμευμένη πιθανότητα

11.2.2 Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

11.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Ιστορικό σημείωμα

Η μελέτη των Πιθανοτήτων ξεκίνησε με την προσπάθεια να λυθούν προβλήματα σχετικά με τα τυχερά παιχνίδια. Παρόλο που τα τυχερά παιχνίδια έχουν τις ρίζες τους στα βάθη των αιώνων, η μελέτη τους ξεκίνησε το 16^ο αιώνα μ.Χ.

Ο πρώτος που υπολόγισε πιθανότητες ήταν ο Gerolamo Cardano (1501-1576) στο βιβλίο του "Liber de Ludo Aleae". Το 1620 ο Γαλιλαίος έγραψε την διατριβή περί μιας ανακάλυψης σχετικής με τα ζάρια, η οποία χρησιμοποιούσε ένα πρώιμο πιθανολογικό μοντέλο για να απαντήσει σε συγκεκριμένα ερωτήματα.

Η πρώτη τεκμηριωμένη απόδειξη θεμελιωδών αρχών της θεωρίας των πιθανοτήτων έγινε στην αλληλογραφία των Blaise Pascal (1623-1662) και Pierre de Fermat (1601-1665). Η αλληλογραφία άρχισε από τον Pascal, ο οποίος ήθελε την βοήθεια του Fermat σχετικά με προβλήματα που του δόθηκαν από τον Chevalier de Méré, έναν ευγενή της αυλής του Λουδοβίκου του 14^{ου}, παίκτη τυχερών παιχνιδιών.

Η θεωρία πιθανοτήτων αναπτύχθηκε ραγδαία τον 18^ο αιώνα μ.Χ με κύριους συντελεστές τον Jacob Bernoulli (1654- 1705) και τον Abraham de Moivre (1667-1754). Το 1812 ο Pierre-Simon marquis de Laplace (1749-1827) δημοσιεύει ένα θεμελιώδες σύγγραμμα στην θεωρία πιθανοτήτων, το "Theorie analytique des Probabilites".

Η αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων θα γίνει από τον Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) το 1933. Η αξιωματική προσέγγιση του Kolmogorov αποτελεί τη βάση για τη σύγχρονη θεωρία πιθανοτήτων.

Διερεύνηση

Ο πατέρας του Γιώργου και του Παναγιώτη ρίχνει ένα αμερόληπτο νόμισμα δύο φορές. Τους λέει ότι «αν η δεύτερη ένδειξη είναι κορώνα, κερδίζει ο Γιώργος» ενώ «αν και οι δύο ενδείξεις είναι γράμματα, κερδίζει ο Παναγιώτης».

Να εξετάσετε κατά πόσο το πιο πάνω τυχερό παιχνίδι είναι δίκαιο για τα δύο παιδιά.

11.1.1 Εισαγωγή στις πιθανότητες

Ο όρος Πιθανότητα συνδέεται άμεσα με διαδικασίες και φαινόμενα, στα οποία υπάρχει μια αβεβαιότητα ή τυχαιότητα. Η θεωρία των Πιθανοτήτων έχει ως κύριο σκοπό και αντικείμενο μελέτης φαινόμενα, στα οποία μπορούν να εμφανιστούν πολλά και διαφορετικά αποτελέσματα (που είναι ίσως γνωστά εκ των προτέρων), αλλά χωρίς να υπάρχει τρόπος να καθοριστεί ποιο αποτέλεσμα θα εμφανίζεται κάθε φορά.

Τα τυχερά παιχνίδια φαίνεται να ήταν η απαρχή της ανάπτυξης της θεωρίας των Πιθανοτήτων, γιατί είναι διαδικασίες όπου το αποτέλεσμά τους δεν μπορεί να προβλεφθεί με σιγουριά. Μάλιστα, ένα από τα διασημότερα προβλήματα των πιθανοτήτων είχε τεθεί κατά τον 16^ο αιώνα από τον Γάλλο κόμη De Méré προς τον σπουδαίο Μαθηματικό και φιλόσοφο της εποχής Pascal:

A gambler's dispute in 1654 led to the creation of a mathematical theory of probability by two famous French mathematicians, Blaise Pascal and Pierre de Fermat. Antoine Gombaud, Chevalier de Méré, a French nobleman with an interest in gaming and gambling questions, called Pascal's attention to an apparent contradiction concerning a popular dice game. The game consisted in throwing a pair of dice 24 times; the problem was to decide whether or not to bet even money on the occurrence of at least one "double six" during the 24 throws. A seemingly well-established gambling rule led de Méré to believe that betting on a double six in 24 throws would be profitable, but his own calculations indicated just the opposite.

A Short History of Probability

From *Calculus, Volume II* by Tom M. Apostol (2nd edition, John Wiley & Sons, 1969)

11.1.2 Πείραμα τύχης – Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

Ορισμός

Πείραμα τύχης λέγεται το πείραμα, το οποίο όσες φορές και αν επαναληφθεί (φαινομενικά τουλάχιστον κάτω από τις ίδιες συνθήκες) δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα του.

Σε ένα πείραμα τύχης δεν είναι με βεβαιότητα γνωστό το αποτέλεσμα του, αλλά είναι γνωστά εκ των προτέρων τα αναμενόμενα αποτελέσματά του. Για παράδειγμα, στο πείραμα τύχης

«Η ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού»

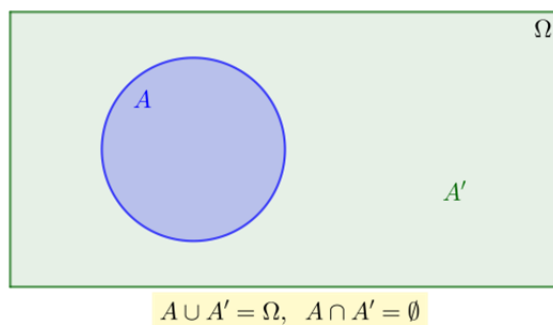
είναι εκ των προτέρων γνωστά όλα τα αποτελέσματά του, που είναι οι αριθμοί που εμφανίζονται στις έδρες του $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, χωρίς να γνωρίζουμε κάθε φορά τι αποτέλεσμα θα προκύψει.

Ορισμός

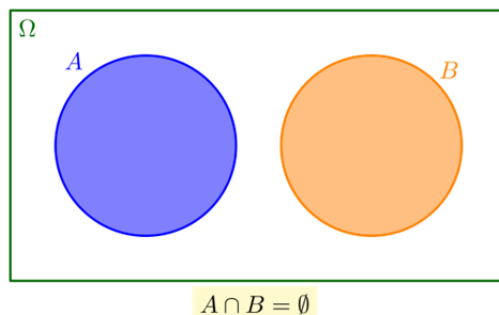
Δειγματικός χώρος λέγεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων σε ένα πείραμα τύχης και συμβολίζεται με Ω .

Ορισμοί

- **Ενδεχόμενο** ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω .
Στο προηγούμενο πείραμα τύχης της ρίψης ενός ζαριού, ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Τα υποσύνολα A και B του δειγματικού χώρου Ω , με $A = \{6\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$, είναι δύο ενδεχόμενά του.
- **Απλό ενδεχόμενο** ονομάζεται κάθε μονομελές υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω .
Στο προηγούμενο πείραμα τύχης της ρίψης ενός ζαριού, το υποσύνολο A του δειγματικού χώρου Ω , με $A = \{6\}$, είναι ένα απλό ενδεχόμενό του.
- Το **συμπλήρωμα** ενός ενδεχομένου A σε έναν δειγματικό χώρο Ω πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A και συμβολίζεται με A' . Δηλαδή, το συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου A αποτελείται από όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω που δεν είναι στοιχεία του συνόλου A .



- **Αντίθετα ενδεχόμενα** λέγονται τα ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου που το ένα είναι συμπλήρωμα του άλλου.
- **Ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους** λέγονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω , όταν η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου ($A \cap B = \emptyset$).



- Το κενό σύνολο \emptyset και το σύνολο Ω είναι υποσύνολα του Ω . Για τον λόγο αυτό, μπορούν να θεωρηθούν και ως ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω . Το \emptyset λέγεται **αδύνατο ενδεχόμενο**, γιατί δεν πραγματοποιείται αφού δεν έχει στοιχεία και το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**, γιατί πραγματοποιείται πάντοτε.

Παρατηρήσεις

- Δύο αντίθετα ενδεχόμενα δεν έχουν κοινά στοιχεία ($A \cap A' = \emptyset$), ενώ αν ενώσουμε τα στοιχεία των δύο συνόλων παίρνουμε ολόκληρο τον δειγματικό χώρο Ω ($A \cup A' = \Omega$).
- Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα **δεν έχουν κοινά στοιχεία** ($A \cap B = \emptyset$).
- Δύο αντίθετα ενδεχόμενα είναι πάντα ασυμβίβαστα, χωρίς να συμβαίνει όμως το αντίστροφο (στο παράδειγμά μας $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B \neq \Omega$).

Παράδειγμα 1

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι μια φορά.

- Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πιο πάνω πειράματος τύχης.
- Να βρείτε όλα τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου του πιο πάνω πειράματος τύχης.
- Να βρείτε το ενδεχόμενο

A : «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός».

Λύση

- Όλα τα δυνατά αποτελέσματα της ρίψης ενός ζαριού είναι:



Συνεπώς, ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου είναι τα μονομελή υποσύνολα του δειγματικού χώρου. Συνεπώς, όλα τα απλά ενδεχόμενα του πειράματος τύχης είναι:

$$E_1 = \{1\}, \quad E_2 = \{2\}, \quad E_3 = \{3\}, \quad E_4 = \{4\}, \quad E_5 = \{5\}, \quad E_6 = \{6\}$$

- Το ενδεχόμενο A αποτελείται από όλα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου του πειράματος τύχης που είναι άρτιοι αριθμοί. Συνεπώς, $A = \{2, 4, 6\}$.

Παράδειγμα 2

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{a, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta\}$.

- (α) Να βρείτε ένα βέβαιο ενδεχόμενο του πιο πάνω δειγματικού χώρου.
- (β) Να βρείτε ένα αδύνατο ενδεχόμενο του πιο πάνω δειγματικού χώρου.
- (γ) Να βρείτε το συμπλήρωμα του ενδεχομένου $A = \{a, \beta, \varepsilon\}$.
- (δ) Να βρείτε ένα ενδεχόμενο ασυμβίβαστο με το A και να εξηγήσετε γιατί μπορεί και να μην είναι αντίθετο με το A .

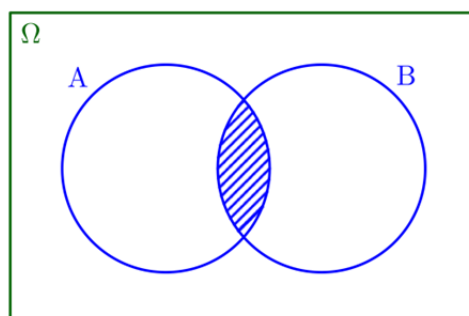
Λύση

- (α) Ένα βέβαιο ενδεχόμενο είναι ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{a, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta\}$.
- (β) Ένα αδύνατο ενδεχόμενο είναι το κενό σύνολο \emptyset .
- (γ) Το συμπλήρωμα του ενδεχομένου A περιλαμβάνει τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω που δεν είναι στοιχεία του συνόλου A . Συνεπώς, $A' = \{\gamma, \delta, \zeta, \eta\}$.
- (δ) Ένα ασυμβίβαστο ενδεχόμενο με το A είναι το $B = \{\zeta, \eta\}$, γιατί δεν έχουν κοινά στοιχεία. Δεν είναι αντίθετο με το A , γιατί η ένωσή τους δεν μας δίνει ολόκληρο τον δειγματικό χώρο Ω .

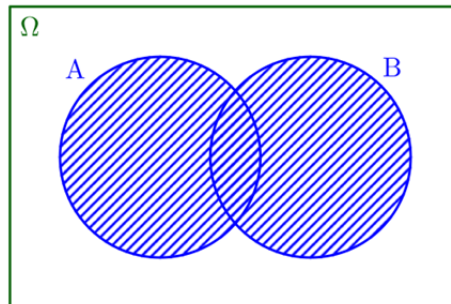
11.1.3 Πράξεις με ενδεχόμενα

Κατά την διεξαγωγή ενός πειράματος τύχης, από δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω μπορούν να δημιουργηθούν και άλλα ενδεχόμενα, ως αποτέλεσμα πράξης μεταξύ των δύο ενδεχομένων.

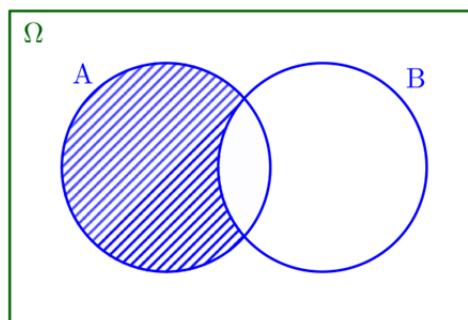
- Η **τομή δύο ενδεχομένων** A και B του δειγματικού χώρου Ω πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιηθούν συγχρόνως και τα δύο ενδεχόμενα και συμβολίζεται με $A \cap B$. Δηλαδή, η τομή $A \cap B$ είναι το ενδεχόμενο του πειράματος τύχης που περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω , τα οποία ανήκουν και στο ενδεχόμενο A και στο ενδεχόμενο B (η σκιασμένη περιοχή στο πιο κάτω σχήμα).



- Η **ένωση δύο ενδεχομένων** A και B του δειγματικού χώρου Ω πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα δύο ενδεχόμενα και συμβολίζεται με $A \cup B$. Δηλαδή, η ένωση $A \cup B$ είναι το ενδεχόμενο του πειράματος τύχης που περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω , τα οποία ανήκουν είτε στο ενδεχόμενο A είτε στο ενδεχόμενο B (η σκιασμένη περιοχή στο πιο κάτω σχήμα).



- Η **διαφορά του ενδεχομένου B από το ενδεχόμενο A** του ίδιου δειγματικού χώρου Ω πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A και δεν πραγματοποιείται το B και συμβολίζεται με $A - B$. Δηλαδή, είναι το ενδεχόμενο του πειράματος τύχης που περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω , τα οποία ανήκουν στο ενδεχόμενο A αλλά δεν ανήκουν στο ενδεχόμενο B (η σκιασμένη περιοχή στο πιο κάτω σχήμα).
Ισχύει $A - B = A \cap B'$.



Παράδειγμα 3

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα δύο φορές. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

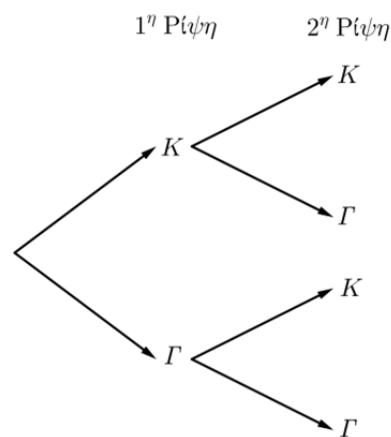
A : «Η πρώτη ένδειξη είναι γράμματα»

B : «Οι δύο ενδείξεις είναι κορώνα»

- Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω και τα ενδεχόμενα A και B .
- Να βρείτε τα ενδεχόμενα $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.
- Να εξετάσετε κατά πόσο τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.
- Να εξετάσετε κατά πόσο τα ενδεχόμενα A και B είναι αντίθετα.

Λύση

- (α) Συμβολίζουμε με K την ένδειξη «Κορώνα» και με Γ την ένδειξη «Γράμματα». Συνεπώς, ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$, όπως φαίνεται και στο διπλανό δενδροδιάγραμμα. Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται, όταν η πρώτη ένδειξη είναι γράμματα. Επομένως, επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του Ω που έχουν ως πρώτη ένδειξη γράμματα. Δηλαδή, $A = \{\Gamma K, \Gamma\Gamma\}$.



Το ενδεχόμενο B πραγματοποιείται, όταν και οι δύο ενδείξεις είναι κορώνα. Επομένως, επιλέγουμε εκείνο τα στοιχεία του Ω που έχει και τις δύο ενδείξεις του κορώνα. Δηλαδή, $B = \{KK\}$.

- (β) Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα δύο ενδεχόμενα. Επομένως, επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του Ω που είναι είτε στοιχεία του A , είτε στοιχεία του B .

Δηλαδή, $A \cup B = \{KK, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$.

Το ενδεχόμενο $A \cap B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιηθούν συγχρόνως και τα δύο ενδεχόμενα. Επομένως, επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του Ω που είναι κοινά στοιχεία του A και του B . Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία. Δηλαδή, $A \cap B = \emptyset$.

Το ενδεχόμενο $A - B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιηθεί το A και δεν πραγματοποιηθεί το B . Επομένως, επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του Ω που είναι στοιχεία του A και δεν είναι στοιχεία του B . Δηλαδή, $A - B = \{\Gamma K, \Gamma\Gamma\}$.

- (γ) Τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα, γιατί δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο ($A \cap B = \emptyset$).
- (δ) Παρατηρούμε ότι $A' = \{KK, K\Gamma\}$. Επομένως, τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι αντίθετα, αφού το ένα δεν είναι το συμπλήρωμα του άλλου ($A' \neq B$).

11.1.4 Κλασικός ορισμός πιθανότητας

Κλασικός ορισμός πιθανότητας κατά Laplace

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ ο πεπερασμένος δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, του οποίου όλα τα απλά ενδεχόμενα έχουν την ίδια πιθανότητα να πραγματοποιηθούν (δηλαδή είναι ισοπίθανα). Τότε, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A είναι το πηλίκο:

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος στοιχείων του } A}{\text{πλήθος στοιχείων του } \Omega} = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}$$

Τα στοιχεία του ενδεχομένου A ονομάζονται συνήθως και «**ευνοϊκές περιπτώσεις**» ή «**ευνοϊκά αποτελέσματα**», ενώ τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω «**δυνατές περιπτώσεις**» ή «**δυνατά αποτελέσματα**».

Παρατήρηση

Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου A εξαρτάται μόνο από το πλήθος $\nu(A)$ των στοιχείων του A και όχι από το ποια ακριβώς στοιχεία αποτελείται.

Παράδειγμα 4

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι μία φορά. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A : «Η ένδειξη να είναι αριθμός μεγαλύτερος του 4»

B : «Η ένδειξη να είναι πρώτος αριθμός»

Γ : «Η ένδειξη να είναι πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του 4»

Λύση

Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, με $\nu(\Omega) = 6$.

Το ενδεχόμενο A είναι $A = \{5, 6\}$, με $\nu(A) = 2$. Οπότε, $P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Το ενδεχόμενο B είναι $B = \{2, 3, 5\}$, με $\nu(B) = 3$. Οπότε, $P(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Τέλος, $\Gamma = A \cap B = \{5\}$. Οπότε, $P(\Gamma) = \frac{\nu(\Gamma)}{\nu(\Omega)} = \frac{1}{6}$.

Παράδειγμα 5

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι δύο φορές. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των πιο κάτω ενδεχομένων:

A : «Ίσες ενδείξεις και τις δύο φορές»

B : «Το άθροισμα των ενδείξεων να είναι 6»

Γ : «Το γινόμενο των ενδείξεων να είναι 12»

Δ : «Η πρώτη ένδειξη περιττή μικρότερη του 4 και η δεύτερη ένδειξη άρτια»

Λύση

Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (a, β) , όπου τα a, β οι φυσικοί αριθμοί από το 1 μέχρι και το 6, με το a να δείχνει την ένδειξη του ζαριού την πρώτη φορά και το β την ένδειξη του ζαριού τη δεύτερη φορά.

Σχηματικά, μπορούμε να τοποθετήσουμε τα διατεταγμένα ζεύγη (a, β) σε ένα πίνακα διαστάσεων 6×6 , όπως φαίνεται πιο κάτω:

Έχουμε ότι $\nu(\Omega) = 6^2 = 36$.

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Έχουμε:

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}, \quad \nu(A) = 6, \quad P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}, \quad \nu(B) = 5, \quad P(B) = \frac{5}{36}$$

$$\Gamma = \{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\}, \quad \nu(\Gamma) = 4, \quad P(\Gamma) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\Delta = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6)\}, \quad \nu(\Delta) = 6, \quad P(\Delta) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Παράδειγμα 6

Ένα δοχείο περιέχει 7 διακεκριμένες άσπρες μπάλες και 3 διακεκριμένες μαύρες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία δύο μπάλες. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: «Και οι δύο μπάλες να είναι άσπρες»

B: «Τουλάχιστον μία μπάλα να είναι μαύρη»

Γ: «Το πολύ μια μπάλα να είναι μαύρη»

Λύση

Ο δειγματικός χώρος Ω είναι ένα σύνολο που αποτελείται από όλες τις μη διατεταγμένες δυάδες, οι οποίες μπορούν να σχηματιστούν από 10 διαφορετικές μεταξύ τους μπάλες. Δηλαδή, το σύνολο Ω αποτελείται από όλους τους συνδυασμούς των 10 μπαλών ανά 2. Για παράδειγμα, η δυάδα A_1M_3 είναι η ίδια με την M_3A_1 . Αφού στον υπολογισμό της πιθανότητας μας ενδιαφέρει το πλήθος και όχι το ποια στοιχεία έχει ο δειγματικός χώρος Ω , έχουμε $\nu(\Omega) = \binom{10}{2} = 45$.

Το ενδεχόμενο A είναι το σύνολο των συνδυασμών των 7 άσπρων μπαλών ανά 2.

Έτσι, $\nu(A) = \binom{7}{2} = 21$ και:

$$P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

Το ενδεχόμενο B πραγματοποιείται, όταν η μία μπάλα είναι μαύρη και η άλλη άσπρη ή όταν και οι δύο μπάλες είναι μαύρες.

Έτσι, $v(B) = \binom{3}{1} \cdot \binom{7}{1} + \binom{3}{2} = 21 + 3 = 24$ και:

$$P(B) = \frac{v(B)}{v(\Omega)} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

Το ενδεχόμενο Γ πραγματοποιείται, όταν η μία μπάλα είναι μαύρη και η άλλη άσπρη ή όταν και οι δύο μπάλες είναι άσπρες.

Έτσι, $v(\Gamma) = \binom{3}{1} \cdot \binom{7}{1} + \binom{7}{2} = 21 + 21 = 42$ και:

$$P(\Gamma) = \frac{v(\Gamma)}{v(\Omega)} = \frac{42}{45} = \frac{14}{15}$$

Παράδειγμα 7

Σε ένα δοχείο υπάρχουν μαύρες, κόκκινες και 8 άσπρες μπάλες. Αν επιλέξουμε τυχαία μια μπάλα από το δοχείο, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι 0,4 και η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι 0,5. Να υπολογίσετε:

- (α) πόσες είναι όλες οι μπάλες
- (β) πόσες είναι οι μαύρες και πόσες είναι οι κόκκινες μπάλες
- (γ) την πιθανότητα του ενδεχομένου να επιλέξουμε κόκκινη μπάλα.

Λύση

- (α) Το πλήθος των μπαλών στο δοχείο είναι ίσο με το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω .

Ορίζουμε το ενδεχόμενο

A : «Η μπάλα που επιλέγουμε είναι άσπρη»,

με $v(A) = 8$ και $P(A) = 0,4$.

Εφαρμόζουμε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας και έχουμε:

$$P(A) = \frac{v(A)}{v(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{4}{10} = \frac{8}{v(\Omega)} \Leftrightarrow v(\Omega) = 20$$

- (β) Ορίζουμε το ενδεχόμενο

M : «Η μπάλα που επιλέγουμε είναι μαύρη»,

με $P(M) = 0,5$.

Εφαρμόζουμε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας και έχουμε:

$$P(M) = \frac{v(M)}{v(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{v(M)}{20} \Leftrightarrow v(M) = 10$$

Συνεπώς, οι μαύρες μπάλες στο δοχείο είναι 10. Αφού όλες οι μπάλες είναι 20, οι άσπρες 8 και οι μαύρες 10, τότε οι κόκκινες μπάλες είναι $20 - 8 - 10 = 2$.

- (γ) Ορίζουμε το ενδεχόμενο

K : «Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη»

Εφαρμόζουμε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας και έχουμε:

$$P(K) = \frac{v(K)}{v(\Omega)} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

Δραστηριότητες

- Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
 - Ο δειγματικός χώρος είναι ένα αδύνατο ενδεχόμενο. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - Όταν δύο ενδεχόμενα πραγματοποιηθούν συγχρόνως, τότε πραγματοποιείται η τομή των δύο ενδεχομένων. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - Το ενδεχόμενο $A - B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιηθούν συγχρόνως το A και το συμπλήρωμα του B . ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - Αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα και πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A , τότε πραγματοποιείται το συμπλήρωμα του B . ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα είναι πάντα αντίθετα. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - Ισχύει ότι $A' \cup A = \emptyset$. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - Τα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- Ρίχνουμε δύο νομίσματα μία φορά. Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος τύχης.
- Μια οικογένεια έχει τρία παιδιά. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
 A : «Το μεγαλύτερο παιδί είναι αγόρι»
 B : «Το τελευταίο παιδί είναι κορίτσι»
 Γ : «Το πρώτο παιδί είναι αγόρι και το τελευταίο παιδί κορίτσι»
Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα A, B και Γ .
- Να βρείτε τον πληθικό αριθμό του δειγματικού χώρου Ω για καθένα από τα πιο κάτω πειράματα τύχης:
 - Ρίψη τριών ζαριών.
 - Επιλογή 3 παιδιών από μία τάξη των 18 μαθητών.
 - Επιλογή 2 μπαλών από ένα δοχείο που περιέχει 4 άσπρες και 5 μαύρες μπάλες.
- Ένα κουτί περιέχει δύο άσπρες, τρεις κόκκινες και μία πράσινη μπάλα. Παίρνουμε τυχαία δύο μπάλες. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
 A : «Και οι δύο μπάλες είναι άσπρες»
 B : «Οι δύο μπάλες έχουν διαφορετικό χρώμα»

6. Σε μια ομάδα εργασίας για το περιβάλλον συμμετέχουν 8 Ευρωπαίοι και 3 Αμερικανοί επιστήμονες. Από αυτούς, θα επιλεγεί τυχαία μια τετραμελής επιτροπή. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: «Η επιτροπή να αποτελείται από δύο Ευρωπαίους και δυο Αμερικανούς»

B: «Η επιτροπή να αποτελείται από τρεις τουλάχιστον Ευρωπαίους»

Γ: «Η επιτροπή να αποτελείται από επιστήμονες της ίδιας ηπείρου»

Δ: «Στην επιτροπή να αντιπροσωπεύονται και οι δύο ήπειροι»

7. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 . Στην ε_1 ορίζουμε 10 σημεία και στην ε_2 15 σημεία.

(α) Πόσα τρίγωνα ορίζουν τα σημεία αυτά;

(β) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα τέτοιο τρίγωνο, ποια είναι η πιθανότητα να έχει μία πλευρά του στην ε_2 ;

8. Έστω A και B είναι δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Να αντιστοιχίσετε κάθε πρόταση της 1^{ης} στήλης με το αντίστοιχο ενδεχόμενο της 2^{ης} στήλης (πιθανόν να αντιστοιχούν και περισσότερα από ένα ενδεχόμενα).

1 ^η στήλη	2 ^η στήλη
(α) Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα και το A και το B.	1. $A \cup B$
(β) Δεν πραγματοποιείται το B.	2. A
(γ) Πραγματοποιείται το A.	3. $A - B$
(δ) Πραγματοποιείται μόνο το B.	4. B'
(ε) Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B.	5. $A' \cap B'$
(στ) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A, B.	6. $A' \cup B'$
(ζ) Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B.	7. $A \cap B'$
	8. $(A - B) \cup (B - A)$
	9. $(A \cup B)'$
	10. $A' \cap B$

9. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι μια φορά. Ορίζονται τα ενδεχόμενα:

A: «Η ένδειξη είναι άρτιος αριθμός»

B: «Η ένδειξη είναι πρώτος αριθμός»

Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

(α) A

(β) B

(γ) A'

(δ) $A - B$

(ε) $A \cap B$

(στ) $A \cup B$

(ζ) $A' \cup B$

(η) $A' \cap B'$

(θ) $(A \cup B)'$

10. Σε ένα συνεργείο αυτοκινήτων γίνεται έλεγχος κατά πόσο ένα αυτοκίνητο έχει είτε μηχανική είτε ηλεκτρική βλάβη. Επιλέγουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A : «Το αυτοκίνητο να έχει μηχανική βλάβη»

B : «Το αυτοκίνητο να έχει ηλεκτρική βλάβη»

(α) Τι εκφράζει το ενδεχόμενο A' ;

(β) Τι εκφράζει το ενδεχόμενο $A \cap B'$;

(γ) Τι εκφράζει το ενδεχόμενο $A \cup B$;

(δ) Πώς συμβολίζεται το ενδεχόμενο «Το αυτοκίνητο δεν έχει βλάβη»;

(ε) Πώς συμβολίζεται το ενδεχόμενο «Το αυτοκίνητο έχει μόνο ηλεκτρική βλάβη»;

(στ) Πώς συμβολίζεται το ενδεχόμενο «Το αυτοκίνητο έχει ακριβώς μία από τις δύο βλάβες»;

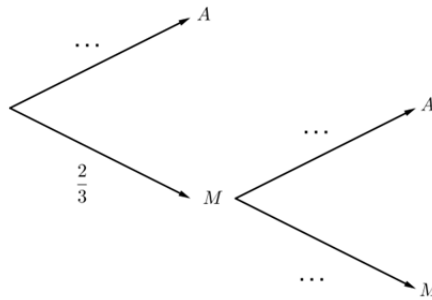
11. Σε ένα δοχείο υπάρχουν μαύρες και άσπρες μπάλες. Αν επιλέξουμε τυχαία μια μπάλα από το δοχείο, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι 0,4. Αν στο δοχείο τοποθετούσαμε ακόμα δύο άσπρες και επιλέγαμε τυχαία μια μπάλα, η πιθανότητα να πάρουμε άσπρη μπάλα θα ήταν 0,5. Να βρείτε πόσες είναι οι μαύρες και πόσες είναι άσπρες μπάλες στο δοχείο.

11.1.5 Αξιωματικός ορισμός Πιθανότητας

Διερεύνηση

Ένα κουτί περιέχει 2 άσπρες και 4 μαύρες μπάλες. Κάποιος επιλέγει τυχαία μία μπάλα από το κουτί. Αν η μπάλα είναι άσπρη, τότε κερδίζει. Αν είναι μαύρη, την αφήνει έξω από το κουτί και επιλέγει τυχαία ακόμα μία μπάλα. Αν η μπάλα είναι άσπρη, τότε κερδίζει.

(α) Να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος τύχης και να συμπληρώσετε τις αντίστοιχες πιθανότητες στο πιο κάτω δενδροδιάγραμμα.



(β) Να εξηγήσετε γιατί τα τρία απλά ενδεχόμενα του πειράματος δεν είναι ισοπίθανα, δηλαδή ότι οι $P(A)$, $P(MA)$ και $P(MM)$ δεν είναι μεταξύ τους ίσες.

(γ) Να αιτιολογήσετε γιατί $P(\text{να κερδίσει}) \neq \frac{2}{3}$.

Τα μειονεκτήματα του κλασσικού ορισμού της πιθανότητας είναι ότι εφαρμόζεται σε δειγματικούς χώρους με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και απλά ενδεχόμενα με την ίδια πιθανότητα να εμφανιστούν. Το 1933 ο Kolmogorov παρουσίασε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας, ο οποίος δεν έχει τα πιο πάνω μειονεκτήματα.

Αξιωματικός ορισμός Kolmogorov

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Κάθε συνάρτηση P , με πεδίο ορισμού ένα κατάλληλα ορισμένο σύνολο ενδεχομένων του πειράματος τύχης και με σύνολο τιμών το διάστημα $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, είναι συνάρτηση πιθανότητας, όταν:

(α) $P(A) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο A

(β) $P(\Omega) = 1$

(γ) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$, για όλα τα ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3, \dots που είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους.

Άμεσες συνέπειες των πιο πάνω αξιωμάτων είναι ότι $P(\emptyset) = 0$ και $0 \leq P(A) \leq 1$, για κάθε ενδεχόμενο A .

Πρόταση

Έστω A και B ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω . Τότε, ισχύουν οι σχέσεις:

(α) $P(A') = 1 - P(A)$

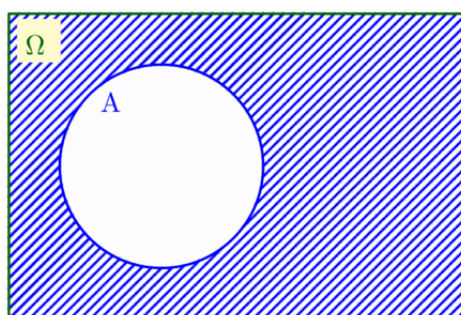
(β) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(γ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Απόδειξη

(α) Τα ενδεχόμενα A και A' είναι ασυμβίβαστα και ισχύει ότι $A \cup A' = \Omega$. Έτσι, εφαρμόζουμε το τρίτο αξίωμα του Kolmogorov και έχουμε:

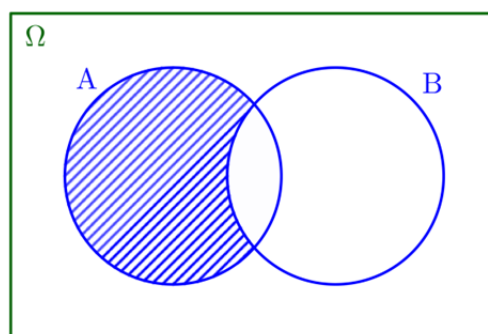
$$\begin{aligned} P(A \cup A') &= P(\Omega) \Rightarrow P(A) + P(A') = 1 \\ &\Rightarrow P(A') = 1 - P(A) \end{aligned}$$



Έχουμε εφαρμόσει και το δεύτερο αξίωμα του Kolmogorov ($P(\Omega) = 1$).

(β) Τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα, γιατί δεν υπάρχουν στοιχεία του Ω που να είναι ταυτόχρονα στοιχεία του $A - B$ και του $A \cap B$. Ισχύει ότι $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, γιατί ένα στοιχείο του A είτε θα είναι στοιχείο του A και του B είτε θα είναι στοιχείο του A και του συμπληρώματος του B . Αφού ισχύουν τα πιο πάνω, εφαρμόζουμε το τρίτο αξίωμα του Kolmogorov:

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(A - B) \cup (A \cap B)] \Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \\ &\Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \end{aligned}$$



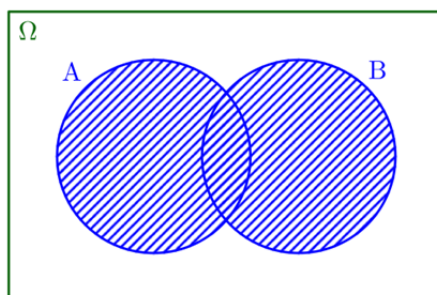
(γ) Τα ενδεχόμενα $A - B$ και B είναι ασυμβίβαστα, γιατί δεν υπάρχουν στοιχεία του Ω που να είναι ταυτόχρονα στοιχεία του $A - B$ και του B . Ισχύει ότι $A \cup B = (A - B) \cup B$, γιατί ένα στοιχείο της ένωσης $A \cup B$ είτε θα είναι στοιχείο μόνο του A είτε θα είναι στοιχείο του B .

Αφού ισχύουν τα πιο πάνω, εφαρμόζουμε το τρίτο αξίωμα του Kolmogorov:

$$P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B] \Rightarrow P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$$

Θα εφαρμόσουμε την σχέση $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ από το (β). Έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Παράδειγμα 8

Σε ένα τμήμα με 24 μαθητές, οι 10 επέλεξαν Βιολογία, οι 8 Χημεία και 6 επέλεξαν και τα δύο μαθήματα.

(α) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: «Ο μαθητής έχει επιλέξει και τα δύο μαθήματα»

B: «Ο μαθητής δεν έχει επιλέξει Χημεία»

Γ: «Ο μαθητής έχει επιλέξει μόνο Βιολογία»

Δ: «Ο μαθητής έχει επιλέξει τουλάχιστον ένα από τα δύο μαθήματα»

E: «Ο μαθητής δεν έχει επιλέξει κανένα από τα δύο μαθήματα»

Z: «Ο μαθητής έχει επιλέξει ακριβώς ένα από τα δύο μαθήματα»

(β) Να δείξετε ότι $P(A) + P(E) + P(Z) = 1$ και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα.

Λύση

(α) Ορίζουμε τα απλά ενδεχόμενα

H: «Ο μαθητής επιλέγει Βιολογία»

θ: «Ο μαθητής επιλέγει Χημεία»

Παρατηρούμε ότι:

$$P(H) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}, \quad P(\theta) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}, \quad P(H \cap \theta) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = P(H \cap \theta) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = P(\theta') = 1 - P(\theta) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(\Gamma) = P(H - \theta) = P(H) - P(H \cap \theta) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$P(\Delta) = P(H \cup \theta) = P(H) + P(\theta) - P(H \cap \theta) = \frac{5}{12} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(E) = P(\Delta') = 1 - P(\Delta) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(Z) = P(\Delta) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

(β) Από το (α) ερώτημα, έχουμε ότι:

$$P(A) + P(E) + P(Z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, γιατί ο μαθητής είτε θα επιλέξει ακριβώς ένα, είτε θα επιλέξει δύο, είτε κανένα από τα δύο μαθήματα.

Δηλαδή, το ενδεχόμενο $A \cup E \cup Z$ είναι ένα βέβαιο ενδεχόμενο με πιθανότητα πραγματοποίησης 1.

Παράδειγμα 9

Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου με:

$$P(A - B) = 3P(A \cap B), \quad P(B - A) = 2P(A \cap B), \quad P(A) + P(B) = 1$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

(α) $P(A)$

(β) $P(A \cup B')$

Λύση

(α) $P(A - B) = 3P(A \cap B) \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) = 3P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = 4P(A \cap B)$

$$P(B - A) = 2P(A \cap B) \Rightarrow P(B) - P(A \cap B) = 2P(A \cap B) \Rightarrow P(B) = 3P(A \cap B)$$

Εφαρμόσαμε τη σχέση $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Από τα πιο πάνω και αφού $P(A) + P(B) = 1$, έχουμε ότι:

$$P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow 4P(A \cap B) + 3P(A \cap B) = 1 \Rightarrow 7P(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{7}$$

Συνεπώς:

$$P(A) = 4P(A \cap B) = 4 \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$$

(β) Γνωρίζουμε ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Επομένως:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$$

Αφού $P(B') = 1 - P(B)$ και $P(B) = 3P(A \cap B) = \frac{3}{7}$, έχουμε ότι $P(B') = \frac{4}{7}$.

Ισχύει ότι $P(A \cap B') = P(A - B) = 3P(A \cap B) = \frac{3}{7}$.

Από τα πιο πάνω έχουμε ότι:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$$

Παράδειγμα 10

Η πιθανότητα να περιληφθεί ένας μαθητής στην ομάδα ποδοσφαίρου του σχολείου του είναι 0,2, στην ομάδα καλαθόσφαιρας 0,25 και τουλάχιστον σε μία από τις δύο ομάδες 0,35.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A : «Να μην περιληφθεί σε κάποια από τις δύο ομάδες του σχολείου»

B : «Να περιληφθεί και στις δύο ομάδες του σχολείου»

Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Π : «Να περιληφθεί στην ομάδα ποδοσφαίρου»

K : «Να περιληφθεί στην ομάδα καλαθόσφαιρας»

Παρατηρούμε ότι $P(\Pi) = 0,2$, $P(K) = 0,25$ και $P(\Pi \cup K) = 0,35$.

Έχουμε:

$$P(A) = P(\Pi \cup K)' = 1 - P(\Pi \cup K) = 1 - 0,35 = 0,65$$

$$P(B) = P(\Pi \cap K) = P(\Pi) + P(K) - P(\Pi \cup K) = 0,2 + 0,25 - 0,35 = 0,1$$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Τα ενδεχόμενα A και B είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω .

(α) Αν δύο ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα, τότε ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(β) Ισχύει ότι $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(γ) Αν ισχύει ότι $P(B) = 1 - P(A)$, τότε τα ενδεχόμενα A ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
και B είναι αντίθετα.

(δ) Αν $P(A) = P(B)$, τότε ισχύει σίγουρα $A = B$. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου με:

$$P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}, \quad 3P(B) = P(B')$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

- (α) $P(A')$ (β) $P(A - B)$ (γ) $P(B)$
(δ) $P(A \cap B')$ (ε) $P(A \cup B)$ (στ) $P(A' \cup B)$

3. Σε ένα ταξιδιωτικό γραφείο με 72 πελάτες για το μήνα Απρίλιο, 34 ταξίδεψαν στην Ευρώπη, 16 ταξίδεψαν στην Ασία και 6 πελάτες ταξίδεψαν και στις δύο ηπείρους. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα πελάτη, να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A : «Να έχει ταξιδέψει και στις δύο ηπείρους»

B : «Να μην έχει ταξιδέψει στην Ευρώπη»

Γ : «Να έχει ταξιδέψει μόνο στην Ασία»

Δ : «Να έχει ταξιδέψει σε τουλάχιστον μία από τις δύο ηπείρους»

E : «Να μην έχει ταξιδέψει σε καμία από τις δύο ηπείρους»

Z : «Να έχει ταξιδέψει ακριβώς μία από τις δύο ηπείρους»

H : «Να έχει ταξιδέψει σε το πολύ μία από τις δύο ηπείρους»

4. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ και τα απλά ενδεχόμενα $E_k = \{\omega_k\}$ με $k \in \{1, 2, 3\}$. Αν $P(E_1) = 2P(E_2)$ και $P(E_3) = 3P(E_1)$, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{\omega_1, \omega_2\}$.

5. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και τα απλά ενδεχόμενα $E_k = \{k\}$, $k \in \Omega$. Δηλαδή, $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{2\}$, $E_3 = \{3\}$, $E_4 = \{4\}$, $E_5 = \{5\}$.

Ορίζεται η πιθανότητα του κάθε απλού ενδεχομένου ως:

$$P(E_k) = \frac{k}{\lambda}, \quad k \in \Omega, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Να βρείτε την τιμή του λ , όπου λ σταθερό, και να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο πάνω απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

6. Σε μία τάξη των 24 παιδιών, 4 από τα 9 αγόρια και 6 από τα κορίτσια φοράνε γυαλιά. Επιλέγεται τυχαία ένα παιδί από τη συγκεκριμένη τάξη. Ποια είναι η πιθανότητα το παιδί που επιλέγηκε να είναι αγόρι ή να φοράει γυαλιά;
7. Σε μια έκθεση μεταχειρισμένων αυτοκινήτων, το 20% δεν έχει μηχανή, το 40% δεν έχει λάστιχα και το 15% δεν έχει ούτε μηχανή, ούτε λάστιχα. Έστω τα ενδεχόμενα:

A: «Το αυτοκίνητο δεν έχει μηχανή»

B: «Το αυτοκίνητο δεν έχει λάστιχα»

Να υπολογίσετε την πιθανότητα ένα τυχαίως επιλεγέν αυτοκίνητο της έκθεσης να έχει λάστιχα και μηχανή.

11.2 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΩΝ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

11.2.1 Ενδεχόμενα υπό συνθήκη – Δεσμευμένη πιθανότητα

Διερεύνηση

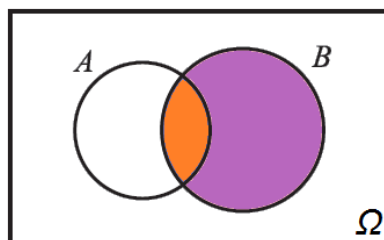
Κατά τη διάρκεια του 2016 δοκιμάστηκε μια νέα μέθοδος θεραπείας για την αντιμετώπιση μιας παιδικής ασθένειας παράλληλα με την παραδοσιακή μέθοδο, με σκοπό να γίνουν συγκρίσεις για την απόδοση των δύο μεθόδων θεραπείας. Τα αποτελέσματα καταγράφηκαν στον πιο κάτω πίνακα.

	Παραδοσιακή μέθοδος	Νέα μέθοδος	Συνολικός αριθμός ατόμων
Επιτυχία	960	1120	2080
Αποτυχία	640	280	920
Συνολικός αριθμός ατόμων	1600	1400	3000

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ένα παιδί με τη συγκεκριμένη ασθένεια να θεραπεύτηκε με βάση τα πιο πάνω στοιχεία;
- (β) Αν γνωρίζουμε ότι σε κάποιο παιδί εφαρμόστηκε η νέα μέθοδος θεραπείας, ποια είναι η πιθανότητα να έχει θεραπευτεί;
- (γ) Αν γνωρίζουμε ότι ένα παιδί έχει θεραπευτεί, ποια είναι η πιθανότητα να του είχε παρασχεθεί η νέα μέθοδος θεραπείας;

Πολλές φορές ο υπολογισμός της πιθανότητας πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου επηρεάζεται σημαντικά από την πληροφορία ότι ένα άλλο ενδεχόμενο έχει ήδη πραγματοποιηθεί.

Θεωρούμε λοιπόν ότι έχουμε δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(B) > 0$, και ζητούμε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου A , με δεδομένο ότι έχει ήδη πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B . Η πραγματοποίηση του ενδεχομένου B μας περιορίζει στα στοιχεία του B για να βρούμε «ευνοϊκά στοιχεία» για το A . Άρα, θεωρούμε ως νέο σύνολο αναφοράς το B και το ενδεχόμενο A περιορίζεται στο $A \cap B$.



Δηλαδή, η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A , δεδομένου ότι έχει ήδη πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B , συμβολίζεται με $P(A|B)$ και υπολογίζεται ως εξής:

$$P(A|B) = \frac{\nu(A \cap B)}{\nu(B)} = \frac{\frac{\nu(A \cap B)}{\nu(\Omega)}}{\frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Δεσμευμένη ή υπό συνθήκη πιθανότητα

Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(B) > 0$, τότε η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A , δεδομένου ότι πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο B , λέγεται **δεσμευμένη ή υπό συνθήκη πιθανότητα** του A με δεδομένο το B . Συμβολίζεται με $P(A|B)$ και ισχύει η σχέση:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ως άμεση συνέπεια της πιο πάνω σχέσης έχουμε ότι

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \text{ ή αντίστοιχα } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Παράδειγμα 1

Σε ένα τραπέζι κάθονται τρεις γυναίκες και πέντε άντρες. Δύο άντρες και μια γυναίκα είναι αριστερόχειρες. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο από τα οκτώ και ορίζουμε το ενδεχόμενο A : «Το άτομο να είναι αριστερόχειρας».

- (α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A)$.
- (β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου A , όταν γνωρίζουμε ότι το άτομο το οποίο έχει επιλεγεί είναι γυναίκα.

Λύση

(α) Έχουμε:

$$P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

(β) Ορίζουμε το ενδεχόμενο Γ : «Το άτομο να είναι γυναίκα» με $\nu(\Gamma) = 3$. Έχουμε:

$$P(A|\Gamma) = \frac{P(A \cap \Gamma)}{P(\Gamma)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$$

Παράδειγμα 2

Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A|B) = 0,6$, $P(B|A) = 0,4$ και $P(A - B) = 0,5$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.

Λύση

Έχουμε:

$$P(A|B) = 0,6 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,6 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,6P(B) \quad (1)$$

$$P(B|A) = 0,4 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0,4 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,4P(A) \quad (2)$$

$$P(A - B) = 0,5 \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0,5 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3), έχουμε:

$$P(A) - 0,4P(A) = 0,5 \Leftrightarrow 0,6P(A) = 0,5 \Leftrightarrow P(A) = \frac{5}{6}$$

Από τη σχέση (2), έχουμε:

$$P(A \cap B) = 0,4P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$$

Από τη σχέση (1), έχουμε:

$$P(A \cap B) = 0,6P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{0,6} = \frac{5}{9}$$

Παράδειγμα 3

Σε μια έρευνα, 1000 άτομα ρωτήθηκαν κατά πόσο είναι ικανοποιημένοι από το οδικό δίκτυο της χώρας τους. Οι απαντήσεις τους δίνονται στον πιο κάτω πίνακα.

	Ναι	Όχι	Σύνολο
Άντρες	400	150	550
Γυναίκες	350	100	450
Σύνολο	750	250	1000

Επιλέγουμε ένα ερωτηματολόγιο στην τύχη.

- Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η απάντηση στην πιο πάνω ερώτηση να είναι «Ναι».
- Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η απάντηση στην ερώτηση να είναι «Ναι», αν γνωρίζουμε ότι έχει απαντηθεί από άντρα.
- Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η απάντηση στην ερώτηση να είναι «Όχι», αν γνωρίζουμε ότι έχει απαντηθεί από γυναίκα.
- Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η ερώτηση να απαντήθηκε από άντρα, αν γνωρίζουμε ότι η απάντηση ήταν «Ναι».

Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A : «Το άτομο είναι άντρας»

Γ : «Το άτομο είναι γυναίκα»

N : «Το άτομο απάντησε «Ναι»»

O : «Το άτομο απάντησε «Όχι»»

(α) Έχουμε:

$$P(N) = \frac{n(N)}{n(\Omega)} = \frac{750}{1000} = \frac{3}{4}$$

(β) Έχουμε:

$$P(N|A) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{400}{1000}}{\frac{550}{1000}} = \frac{8}{11}$$

(γ) Έχουμε:

$$P(O|\Gamma) = \frac{P(O \cap \Gamma)}{P(\Gamma)} = \frac{\frac{100}{1000}}{\frac{450}{1000}} = \frac{2}{9}$$

(δ) Έχουμε:

$$P(A|N) = \frac{P(N \cap A)}{P(N)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{15}$$

Παράδειγμα 4

Στην κληρωτίδα για δύο μεγάλα δώρα υπάρχουν τα ονόματα 7 μαθητών της Α' τάξης και 5 μαθητών της Β' τάξης που διακρίθηκαν για την προσφορά τους στο σχολείο.

Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

E_1 : «Το 1^ο δώρο να το κερδίσει μαθητής της Α' και το 2^ο μαθητής της Β' τάξης»

E_2 : «Ένα μόνο από τα δύο δώρα να το κερδίσει μαθητής της Β' τάξης»

E_3 : «Το 2^ο δώρο να το κερδίσει μαθητής της Α' τάξης»

E_4 : «Το 1^ο δώρο να το κερδίσει μαθητής της Β' τάξης, δεδομένου ότι το 2^ο το κέρδισε μαθητής της Α' τάξης»

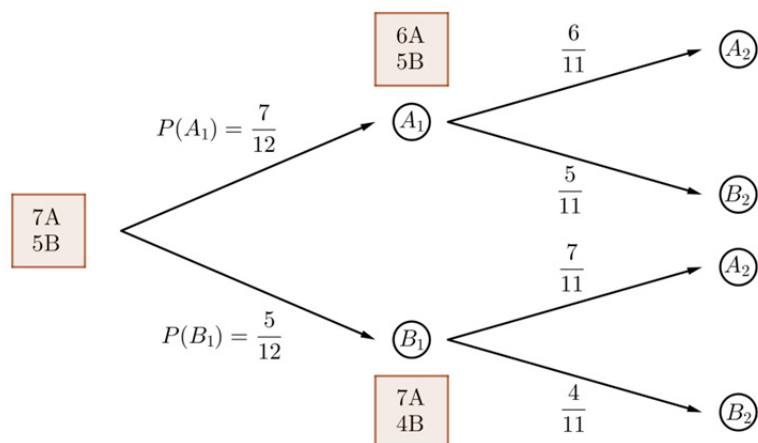
Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A_i : «Το i -δώρο να το κερδίσει μαθητής της Α' τάξης», $i = 1, 2$

B_i : «Το i -δώρο να το κερδίσει μαθητής της Β' τάξης», $i = 1, 2$

Κατασκευάζουμε το δενδροδιάγραμμα.



Έχουμε:

$$P(E_1) = P(A_1 \cap B_2) = P(A_1) \cdot P(B_2|A_1) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$$

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1) \cdot P(B_2|A_1) + P(B_1) \cdot P(A_2|B_1) \\ &= \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{35}{132} + \frac{35}{132} \\ &= \frac{70}{132} = \frac{35}{66} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(E_3) &= P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) + P(B_1) \cdot P(A_2|B_1) \\ &= \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{42}{132} + \frac{35}{132} = \frac{77}{132} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

$$P(E_4) = P(B_1|A_2) = \frac{P(B_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(B_1) \cdot P(A_2|B_1)}{P(E_3)} = \frac{\frac{35}{132}}{\frac{7}{12}} = \frac{5}{11}$$

Δραστηριότητες

1. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A|B) = 0,7$, $P(B|A) = 0,5$ και $P(A) + P(B) = 1,2$.
Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.
2. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με
$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(A|B) = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad P(B|A) = \frac{2}{3}.$$
Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A \cap B)$, $P(B)$ και $P(A \cup B)$.
3. Η πιθανότητα να είναι βροχερός ο καιρός αύριο είναι $\frac{2}{3}$. Αν είναι ο καιρός βροχερός, τότε η πιθανότητα να πάει ο κύριος Κώστας για περπάτημα είναι $\frac{1}{5}$. Αν όμως ο καιρός δεν είναι βροχερός, τότε η πιθανότητα να πάει για περπάτημα είναι $\frac{6}{7}$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πάει για περπάτημα ο κύριος Κώστας αύριο.
4. Σε ένα παραλιακό θέρετρο φτάνουν καθημερινά πλοία, που αναχωρούν από τον Λίβανο και το Ισραήλ σε ποσοστά 30% και 70%, αντίστοιχα. Το 15% των πλοίων από τον Λίβανο και το 5% των πλοίων από το Ισραήλ φθάνουν με καθυστέρηση. Αν μια μέρα επιλέξουμε τυχαία ένα πλοίο που φτάνει στο θέρετρο, να υπολογίσετε την πιθανότητα:
 - (α) το πλοίο να έχει φτάσει με καθυστέρηση
 - (β) το πλοίο να έχει αναχωρήσει από τον Λίβανο, αν γνωρίζετε ότι έφτασε με καθυστέρηση.
5. Στις εξετάσεις του Ιουνίου το 15% των μαθητών έγραψε στα Μαθηματικά κάτω από τη βάση, το 10% των μαθητών έγραψε στα Νέα Ελληνικά κάτω από τη βάση και το 5% των μαθητών έγραψε και στα δύο μαθήματα κάτω από τη βάση. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.
 - (α) Αν γνωρίζουμε ότι ο μαθητής που επιλέξαμε έχει αποτύχει στα Νέα Ελληνικά, ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στα Μαθηματικά;
 - (β) Αν γνωρίζουμε ότι ο μαθητής που επιλέξαμε έχει αποτύχει στα Μαθηματικά, ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στα Νέα Ελληνικά;

6. Η Μαρία έχει δύο κουτιά. Το κουτί A περιέχει 6 μαύρες και 4 λευκές σφαίρες ενώ το κουτί B περιέχει 3 μαύρες και 7 λευκές σφαίρες. Η Μαρία ρίχνει ένα αμερόληπτο ζάρι και αν η ένδειξή του είναι 1, 2, 3 ή 4 παίρνει μια σφαίρα από το κουτί A , διαφορετικά παίρνει μια σφαίρα από το κουτί B . Την επόμενη μέρα πληροφόρησε την φίλη της Γεωργία ότι τράβηξε λευκή σφαίρα. Ποια είναι η πιθανότητα να την έχει πάρει από το κουτί A ;
7. Για την πλήρωση μίας θέσης εργασίας κάποιος υποψήφιος πρέπει να περάσει σε ένα συγκεκριμένο τεστ. Ένας υποψήφιος A έχει 0,75 πιθανότητα να περάσει και να πάρει τη θέση. Αν δεν περάσει το τεστ, τότε του δίνεται μία δεύτερη ευκαιρία να πετύχει σε ένα δεύτερο τεστ, στο οποίο έχει πιθανότητα επιτυχίας 0,9. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο υποψήφιος A να πάρει τη θέση εργασίας.

11.2.2 Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Διερεύνηση 1

Μια οικογένεια περιμένει την άφιξη των δύο φοιτητών της από δύο διαφορετικές χώρες της Ευρώπης. Και οι δύο καταφθάνουν με την ίδια αεροπορική εταιρεία, ο ένας την Δευτέρα και ο άλλος την Πέμπτη. Σύμφωνα με τα στατιστικά στοιχεία για τις αεροπορικές εταιρείες, οι πτήσεις της συγκεκριμένης εταιρείας καταφθάνουν κατά 90% στην ώρα τους, χωρίς καθυστερήσεις.

- (α) Αν γνωρίζουμε ότι ο πρώτος έφτασε στην ώρα του, επηρεάζεται η πιθανότητα να φτάσει και ο δεύτερος στην ώρα του;
- (β) Ποια η πιθανότητα να καταφθάσουν και οι δύο χωρίς καθυστέρηση;



Διερεύνηση 2

Σε ένα κουτί υπάρχουν 8 μαύρες και 5 άσπρες μπάλες. Θέλουμε να επιλέξουμε τυχαία δύο μπάλες.



Σενάριο Α

Επιλέγουμε μια μπάλα και ακολούθως μια δεύτερη, χωρίς να τοποθετήσουμε την πρώτη πίσω στο κουτί.

Σενάριο Β

Επιλέγουμε μια μπάλα και ακολούθως μια δεύτερη, τοποθετώντας την πρώτη ξανά στο κουτί.

- (α) Αν γνωρίζουμε ότι η πρώτη μπάλα ήταν μαύρη, ποια η πιθανότητα η δεύτερη να ήταν άσπρη για κάθε ένα από τα πιο πάνω σενάρια;
- (β) Ποια η πιθανότητα η δεύτερη μπάλα να ήταν άσπρη για κάθε ένα από τα πιο πάνω σενάρια;
- (γ) Σε ποιο σενάριο η πιθανότητα επιλογής της δεύτερης μπάλας επηρεάζεται από την επιλογή της πρώτης μπάλας και γιατί;

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου λέγονται **ανεξάρτητα**, αν η πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του άλλου. Ισχύει:

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Δύο ενδεχόμενα που δεν είναι ανεξάρτητα λέγονται **εξαρτημένα**.

Παράδειγμα 5

Σε ένα δοχείο υπάρχουν 3 κόκκινες και 4 μπλε μπάλες. Παίρνουμε μια μπάλα και στη συνέχεια την επανατοποθετούμε στο δοχείο. Ακολούθως, παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

(α) A : «Οι δύο μπάλες να είναι κόκκινες»

(β) B : «Οι δύο μπάλες να έχουν διαφορετικό χρώμα»

Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

K_i : «Να πάρω κόκκινη μπάλα στην i -επιλογή», $i = 1, 2$

M_i : «Να πάρω μπλε μπάλα στην i -επιλογή», $i = 1, 2$

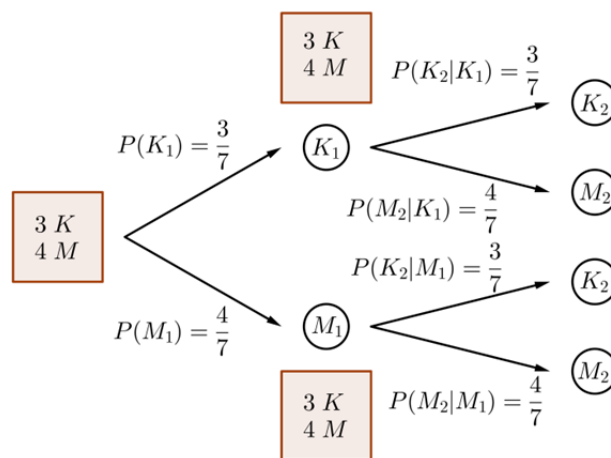
Έχουμε:

$$P(A) = P(K_1 \cap K_2) = P(K_1) \cdot P(K_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49} \quad (K_1, K_2 \text{ Ανεξάρτητα ενδεχόμενα})$$

$$P(B) = P(K_1 \cap M_2) + P(M_1 \cap K_2) = P(K_1) \cdot P(M_2) + P(M_1) \cdot P(K_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{24}{49}$$

Σημείωση

Η χρήση του πιο κάτω δενδροδιαγράμματος μπορεί να είναι βοηθητική.



Δραστηριότητες

1. Μια εταιρεία πωλεί υψηλής απόδοσης οικονομικούς λαμπτήρες. Μόνο το 0,4% των λαμπτήρων είναι ελαττωματικό. Αν κάποιος αγόρασε 2 λαμπτήρες, να υπολογίσετε την πιθανότητα:
 - (α) να είναι και οι δύο ελαττωματικοί
 - (β) να είναι μόνο ο ένας ελαττωματικός
 - (γ) να μην είναι κανένας ελαττωματικός.
2. Η πιθανότητα να παρουσιάσει πρόβλημα μέσα στον χρόνο εγγύησής της μια μηχανή συγκεκριμένου τύπου είναι 5%. Ένα εργοστάσιο έχει δύο τέτοιες μηχανές, οι οποίες αγοράστηκαν συγχρόνως και λειτουργούν ανεξάρτητα η μια από την άλλη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα η μία μόνο να πάθει βλάβη μέσα στον χρόνο εγγύησής της.
3. Ένα σακουλάκι περιέχει σπόρους λουλουδιών. Στο σακουλάκι αναγράφεται ότι η πιθανότητα να φυτρώσει ο κάθε σπόρος, αν ακολουθήσουμε τις οδηγίες, είναι 65%. Αν φυτέψαμε 3 σπόρους σε ξεχωριστές γλάστρες, σύμφωνα με τις οδηγίες, να υπολογίσετε την πιθανότητα:
 - (α) να φύτρωσαν και οι τρεις σπόροι
 - (β) να φύτρωσαν μόνο οι δύο σπόροι
 - (γ) να φυτρώσει τουλάχιστον ένας σπόρος.
4. Ο Κώστας και ο Γιάννης ρίχνουν ένα νόμισμα, ο ένας μετά τον άλλο. Κερδίζει ο πρώτος που θα φέρει ένδειξη «Κεφαλή». Ο Κώστας παίζει πρώτος. Ποιος έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει;
5. Αν για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A) = 0,7$ και $P(A \cup B) = 0,8$, να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(B)$, όταν:
 - (α) τα A, B είναι ασυμβίβαστα
 - (β) τα A, B είναι ανεξάρτητα
 - (γ) ισχύει $P(A|B) = 0,6$.
6. Η πιθανότητα να αργήσει ένα συγκεκριμένο άτομο να πάει στην εργασία του είναι 0,15. Να υπολογίσετε την πιθανότητα σε δύο διαδοχικές μέρες:
 - (α) να αργήσει και τις δύο μέρες
 - (β) να αργήσει μόνο την μία απ τις δύο μέρες
 - (γ) να μην αργήσει σε καμιά μέρα.

7. Σε ένα τεστ πολλαπλής επιλογής υπάρχουν 10 ερωτήσεις με 4 επιλογές στην κάθε ερώτηση. Κάποιος απαντάει στην τύχη σε όλες τις ερωτήσεις. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:
- (α) να απαντήσει ορθά σε 4 ακριβώς ερωτήσεις
 - (β) να μην απαντήσει ορθά σε καμία ερώτηση
 - (γ) να απαντήσει ορθά σε τουλάχιστον 2 ερωτήσεις.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Τρία αγόρια και τρία κορίτσια θα τοποθετηθούν τυχαία σε κυκλικό τραπέζι.
(α) Με πόσους τρόπους μπορεί να πραγματοποιηθεί η τοποθέτηση;
(β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα τα αγόρια να καθίσουν σε συνεχόμενες θέσεις.
2. Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω . Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A και B είναι $\frac{1}{3}$ και η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν και τα δύο ενδεχόμενα συγχρόνως είναι $\frac{1}{4}$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα δύο ενδεχόμενα A και B .
3. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$ και $\Gamma = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ με:
$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{3}{4} \text{ και } P(\Gamma) = \frac{5}{6}$$

Να υπολογίσετε την πιθανότητα των απλών ενδεχομένων του δειγματικού χώρου Ω και των ενδεχομένων $A \cap B$, $A \cup B$, $\Gamma - B$, $A \cap B \cap \Gamma$, $A \cap B \cap \Gamma'$ και $A \cup B \cup \Gamma'$.
4. Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω , για τα οποία ισχύει $P(A) = P(A \cap B')$ και $P(B) = P(A' \cup B)$.
Να αποδείξετε ότι $P(A) + P(B) = P(\Omega)$.
5. Ένας βοηθός διευθυντής πρόκειται να καλέσει στο γραφείο του δύο μαθήτριες και τρεις μαθητές με την σειρά, τον ένα μετά τον άλλο. Αν η επιλογή της σειράς πραγματοποιηθεί τυχαία, να υπολογίσετε την πιθανότητα η μια μαθήτρια να πάει πρώτη και η άλλη τελευταία.
6. Ένα εξεταστικό δοκίμιο περιέχει 10 ερωτήσεις. Σε κάθε ερώτηση δίνονται 3 απαντήσεις και ανάλογα με την απάντηση ο μαθητής παίρνει 1, 2 ή 3 μονάδες. Αν ο μαθητής απαντήσει τυχαία όλες τις ερωτήσεις, να υπολογίσετε την πιθανότητα να πάρει συνολικά 27 μονάδες.
7. Μια αίθουσα έχει 13 διαθέσιμα θρανία. Αν 25 μαθητές τοποθετηθούν τυχαία στα θρανία τις αίθουσας, να υπολογίσετε την πιθανότητα 2 συγκεκριμένοι μαθητές να καθίσουν στο ίδιο θρανίο.

8. Ένα δοχείο περιέχει 5 μαύρες και 3 λευκές μπάλες. Παίρνω τυχαία μια μπάλα από το δοχείο. Αν η μπάλα είναι μαύρη, την επανατοποθετώ στο δοχείο και επίσης τοποθετώ ακόμη 2 λευκές μπάλες στο δοχείο. Αν η μπάλα είναι λευκή, την επανατοποθετώ στο δοχείο και επίσης τοποθετώ ακόμη μια μαύρη και μια λευκή μπάλα στο δοχείο. Στη συνέχεια παίρνω τυχαία μια δεύτερη μπάλα από το δοχείο.
- (α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα η δεύτερη μπάλα που πήρα να είναι λευκή.
- (β) Αν η δεύτερη μπάλα που πήρα είναι λευκή, ποια η πιθανότητα η πρώτη μπάλα που πήρα να είναι μαύρη;
- (γ) Αν τη δεύτερη φορά, αντί να πάρω μια μπάλα παίρνω τυχαία δύο μπάλες ταυτόχρονα, ποια η πιθανότητα οι δύο μπάλες που πήρα τη δεύτερη φορά να έχουν το ίδιο χρώμα;
9. Ένα κτήριο έχει ισόγειο και άλλους 3 ορόφους. Μπαίνουν στον ανελκυστήρα που βρίσκεται στο ισόγειο 6 άτομα. Τα άτομα κατεβαίνουν τυχαία από τον ανελκυστήρα σε οποιοδήποτε όροφο. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:
- (α) να κατέβουν όλοι σε ένα όροφο
- (β) να κατέβουν όλοι στον δεύτερο ή όλοι στον τρίτο όροφο
- (γ) να κατέβουν δύο άτομα σε κάθε όροφο.
10. Δεκαέξι μαθητές θα χωριστούν ισάριθμα σε 4 διαφορετικές ομάδες. Να υπολογίσετε την πιθανότητα 4 συγκεκριμένοι μαθητές να ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες.
11. (α) Να αποδείξετε ότι αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με $A \subseteq B$, τότε ισχύει $P(A) \leq P(B)$.
- (β) Να αποδείξετε ότι για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$, ισχύει ότι $P(A) \leq 1$.
- (γ) Να αποδείξετε ότι αν A και B ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου, τότε ισχύει $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$.
12. Δίνονται δύο κύβοι K_1 και K_2 . Οι έδρες του K_1 είναι αριθμημένες με 1, 1, 2, 3, 4, 4 και του K_2 με 1, 1, 1, 2, 2, 3. Ρίχνουμε τους δύο κύβους από μια φορά τον καθένα και παρατηρούμε την ένδειξη της πάνω έδρας του καθενός. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
- A : «Ο K_1 φέρνει ένδειξη περιττή», B : «Ο K_2 φέρνει ένδειξη περιττή»
 Γ : «Τουλάχιστον ο ένας κύβος φέρνει ένδειξη περιττή»
 Δ : «Μόνο ο K_1 φέρνει ένδειξη περιττή»
 E : «Μόνο ο ένας από τους δύο κύβους φέρνει ένδειξη περιττή»
- (α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A, B, Γ, Δ και E .
- (β) Δοθέντος ότι παρουσιάστηκε μόνο μια περιττή ένδειξη, ποια είναι η πιθανότητα να είναι η ένδειξη του πρώτου κύβου;

13. Ένας παίκτης στον διπλανό τροχό της τύχης πρέπει να περιστρέψει το βέλος 4 φορές. Αν το βέλος δείξει αριθμό, τότε κερδίζει το ποσό αυτό σε ευρώ. Αν το βέλος δείξει «χρεοκοπία», τότε το παιχνίδι τελειώνει και δεν κερδίζει τίποτα (οι κυκλικοί τομείς είναι ίσοι).



- (α) Να βρείτε το μέγιστο ποσό που μπορεί να κερδίσει και να υπολογίσετε την πιθανότητα να κερδίσει το ποσό αυτό.
- (β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να μην κερδίσει τίποτα.
- (γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να κερδίσει 150 ευρώ.
- (δ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να κερδίσει κάποιο ποσό.
- (ε) Ορίζουμε P_n την πιθανότητα να κερδίσει αν στρίψει το βέλος n φορές. Να δείξετε ότι $\lim P_n = 0$.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Κατά τη διάρκεια ενός τηλεπαιχνιδιού ένας διαγωνιζόμενος καλείται να επιλέξει μία από τρεις κουρτίνες (αριθμημένες με τους αριθμούς 1,2,3) με στόχο να βρει εκείνην που κρύβει πίσω της το μεγάλο δώρο. Αρχικά, ο διαγωνιζόμενος επιλέγει την κουρτίνα 1. Ο παρουσιαστής του τηλεπαιχνιδιού ανοίγει την κουρτίνα 3 και πληροφορεί τον διαγωνιζόμενο ότι αυτή είναι άδεια. Στη συνέχεια, δίνει το δικαίωμα στον διαγωνιζόμενο να αλλάξει την κουρτίνα 1 με την κουρτίνα 2.

Τι είναι προτιμότερο για τον διαγωνιζόμενο; Να παραμείνει με την αρχική του επιλογή, να ανταλλάξει την κουρτίνα 1 με την κουρτίνα 2 ή ότι και αν κάνει η πιθανότητα να κερδίσει το μεγάλο δώρο είναι η ίδια; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.










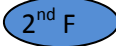












2. Για την εκτέλεση ενός έργου υπέβαλαν προσφορές οι εταιρείες A και B . Η απόφαση για ανάθεση του έργου σε μια από τις δύο εταιρείες θα ληφθεί κατά πλειοψηφία από μια τριμελή επιτροπή. Δύο από τα μέλη της επιτροπής αποφασίζουν ανεξάρτητα υπέρ της A με πιθανότητα $\frac{2}{3}$, ενώ το τρίτο μέλος αποφασίζει τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα να ανατεθεί το έργο στην A ;

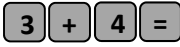


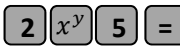


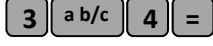



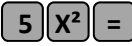

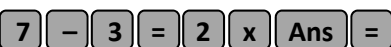
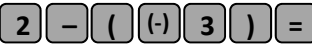





ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

\in	ανήκει
\notin	δεν ανήκει
\forall	για κάθε
\exists	υπάρχει
\cup	ένωση συνόλων
\cap	τομή συνόλων
\subset	γνήσιο υποσύνολο
\subseteq	υποσύνολο
\emptyset ή $\{ \}$	κενό σύνολο
$=$	ίσον
\neq	άνισο
\equiv	ταυτοτικά ίσο
\cong	κατά προσέγγιση ίσο
\mathbb{N}	φυσικοί αριθμοί $\{1,2,3,4, \dots\}$
\mathbb{N}_0	φυσικοί αριθμοί και το μηδέν $\{0,1,2,3,4, \dots\}$
\mathbb{Z}	ακέραιοι αριθμοί $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
\mathbb{Z}^+	θετικοί ακέραιοι αριθμοί $\{1,2,3,4, \dots\}$
\mathbb{Z}^-	αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$
\mathbb{Q}	ρητοί αριθμοί $\{\alpha/\beta: \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \text{ και } \beta \neq 0\}$
\mathbb{Q}^+	θετικοί ρητοί αριθμοί
\mathbb{Q}_0^+	θετικοί ρητοί αριθμοί και το μηδέν
\mathbb{Q}^-	αρνητικοί ρητοί αριθμοί
\mathbb{R}	πραγματικοί αριθμοί
\Rightarrow	απλή συνεπαγωγή
\Leftrightarrow	διπλή συνεπαγωγή / ισοδυναμία
\perp	κάθετες
\parallel	παράλληλες

Υπολογιστική Αριθμομηχανή



		Ίσον (Βρίσκει την τιμή της παράστασης)
		Υποδιαστολή
		Εκθέτης δύναμης με βάση το 10
		Επαναφορά τελευταίου αποτελέσματος
	ή  ή 	Δύναμη
		Ποντίκι (Mouse)
	ή 	Ενεργοποίηση της εντολής που βρίσκεται πάνω από κάθε κουμπί
		Επανεκκίνηση υπολογιστικής
		Σβήσε το τελευταίο ψηφίο ή εντολή
		Απόλυτη τιμή (μόνο σε μερικές υπολογιστικές)
		Εισαγωγή Προσήμου –
	ή 	Κλάσμα
	ή 	Μετατροπή Κλάσματος ⇔ Δεκαδικό
		Σβήσιμο μνήμης
		Πρόσθεσε τον αριθμό στη μνήμη
		Αφαίρεσε τον αριθμό από τη μνήμη
		Ανακάλεσε τον αριθμό της μνήμης

Πράξη	Εντολές υπολογιστικής	Στην οθόνη
$3 + 4$		3+4 7
$2,34 - 1,1$		2.34 - 1.1 1.24
$3 \cdot 2$		3X2 6
2^5		2^5 ή 2^5 32
$5 \cdot 10^3$		5E3 ή 5X103 5000
$\frac{3}{4}$	 ή 	$\frac{3}{4}$ 3J4
$2\frac{3}{4}$	 ή 	$2\frac{3}{4}$ 2 J 3 J 4
$\sqrt{4}$		$\sqrt{4}$ 2
5^2		5^2 25
$2 \cdot (7 - 3)$		2X(7 - 3) 8
$2 \cdot (7 - 3)$		2XAns 8
$2 - (-3)$		$2 - (-3)$ 5
$ -3 $		$ -3 $ 3
Αν 0,25 αποτέλεσμα μιας πράξης	 ή 	$\frac{1}{4}$
$9 - 6 : 2$	Υπολογισμός και αποθήκευση 	$9 - 6 : 2 M +$ 6
Ανάκληση μνήμης $3 \cdot (9 - 6 : 2) - 6 : (9 - 6 : 2)$		$3 X M - 6 : M$ 17

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΩΝ 1°- 89°

Γωνία	ημω	συνω	εφω
1°	0,017	0,999	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,995	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,384
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
28°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
38°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Γωνία	ημω	συνω	εφω
46°	0,720	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,470	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,748
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,333
78°	0,978	0,203	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	0,999	0,018	57,290