

Απαντήσεις Τεύχους Γ'

Ενότητα 6: Κύκλος

Εξίσωση κύκλου

Δραστηριότητες σελίδας 19

- (α) $x^2 + y^2 = 9$ (β) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$
(γ) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ (δ) $(x - 9)^2 + y^2 = 25$
- (α) Κύκλος με κέντρο $K(0,0)$ και ακτίνα $R = 2$ μονάδες.
(β) Κύκλος με κέντρο $K(2,-1)$ και ακτίνα $R = 2$ μονάδες.
(γ) Κύκλος με κέντρο $K(1,-4)$ και ακτίνα $R = 5$ μονάδες.
(δ) Κύκλος με κέντρο $K\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $R = 2$ μονάδες.
- $\lambda < 10$
- $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$
- $y = x + 2$
- Μήκος χορδής: 8 μονάδες.
- $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$
- (α) Η γωνία BAG είναι ορθή, αφού $\lambda_{BA} \cdot \lambda_{AG} = -1$.
(β) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$
- $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$

Θέση ευθείας και κύκλου

Δραστηριότητες σελίδας 27

- Η ευθεία (ε_1) εφάπτεται του κύκλου, η ευθεία (ε_2) τέμνει τον κύκλο και η ευθεία (ε_3) δεν τέμνει τον κύκλο.
- Απαιτούμε ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ και η εξίσωση $y = 0$ να έχουν μοναδική λύση ($\Delta = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow g^2 - c = 0$).
- (α) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$
(β) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$
(γ) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 8$
- $\lambda = \pm 2$
- Η ευθεία (ε) εφάπτεται του κύκλου με κέντρο $K(\alpha, \beta)$, αφού $d(K, (\varepsilon)) = R$.
- (α) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ και $(x + 10)^2 + (y - 10)^2 = 100$
(β) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 20$ και $\left(x + \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{22}{5}\right)^2 = 20$
(γ) $x^2 + y^2 = 25$ και $\left(x + \frac{75}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{4225}{16}$
(δ) $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 20$ και $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$
- Αφού η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C), τότε $d < R \Rightarrow \frac{r^2}{A^2 + B^2} < R^2$.

Εξίσωση εφαπτομένης σε σημείο του κύκλου

Δραστηριότητες σελίδας 33

1. (α) ΛΑΘΟΣ (β) ΣΩΣΤΟ
2. $-x + 2y = 5$
3. Εξίσωση εφαπτομένης: $y = -x + 5$, Εξίσωση κάθετης: $y = x + 5$
4. $y = -2x + 1$
5. $x + 2y = 0$ και $x + 2y + 10 = 0$
6. $y = -5x - 2$ και $y = -5x + 50$

Εφαπτομένες κύκλου από σημείο εκτός αυτού

Δραστηριότητες σελίδας 39

1. $y = 3x + 10$ και $x + 3y + 10 = 0$
2. $y = 2x + 11$ και $x + 2y = 8$
3. $53,1^\circ$
4. (α) $y = 2x + 5$ και $y = -2x + 5$
(β) $A(2, 1)$ και $B(-2, 1)$
(γ) $y = 1$
(δ) $y = \pm\sqrt{5}$
(ε) $x = \pm\sqrt{5}$

Θέση δύο κύκλων

Δραστηριότητες σελίδας 49

1. (α) Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
(β) Οι κύκλοι τέμνονται.
(γ) Οι δύο κύκλοι είναι ξένοι εσωτερικά (ομόκεντροι).
2. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$ και $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 8$
3. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$
4. $(x + 1)^2 + (y - 8)^2 = 10$
5. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$
6. Οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, γιατί ισχύει $(KL) = R_1 + R_2$.
Η κοινή εφαπτομένη τους στο σημείο επαφής τους είναι $4x + 3y - 5 = 0$.

Μήκος εφαπτόμενου τμήματος – Δύναμη σημείου ως προς κύκλο – Θέση σημείου ως προς κύκλο

Δραστηριότητες σελίδας 59

1. Το σημείο A βρίσκεται εντός του κύκλου.
Το σημείο B βρίσκεται πάνω στον κύκλο.
Το σημείο Γ βρίσκεται εκτός του κύκλου.
2. Η μικρότερη απόσταση είναι $d_1 = (KA) - R = 1$ μονάδα.
Η μεγαλύτερη απόσταση είναι $d_2 = (KA) + R = 9$ μονάδες.

3. (α) Σκιαζουμε όλα τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται εντός του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 - 8x = 0$.
- (β) Σκιαζουμε όλα τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται είτε εκτός, είτε ανήκουν στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$.
- (γ) Σκιαζουμε όλα τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται εκτός του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$.
- (δ) Σκιαζουμε όλα τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται είτε εντός, είτε ανήκουν στον κύκλο με εξίσωση $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 40 = 0$.
4. Σκιαζουμε όλα τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται συγχρόνως εκτός του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x = 0$ και εντός ή πάνω στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 + 6y = 0$.
5. $\left(\frac{8}{11}, \frac{79}{22}\right)$
6. $\kappa = \frac{25}{7}$

Παραμετρικές εξισώσεις κύκλου

Δραστηριότητες σελίδας 65

1. (α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ
(γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΣΩΣΤΟ
2. (α) $x = 4\sigma\upsilon\nu\vartheta, y = 4\eta\mu\vartheta, \vartheta \in [0, 2\pi)$
(β) $x = 3 + 2\sigma\upsilon\nu\vartheta, y = -1 + 2\eta\mu\vartheta, \vartheta \in [0, 2\pi)$
(γ) $x = 2 + \sqrt{8}\sigma\upsilon\nu\vartheta, y = -3 + \sqrt{8}\eta\mu\vartheta, \vartheta \in [0, 2\pi)$
3. (α) $x^2 + y^2 = 9$
(β) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$
(γ) $x^2 + (y + 7)^2 = 4$
4. $x^2 + y^2 + 3x - 8y + 9 = 0$
8. (α) Το κέντρο του κύκλου είναι $K(\lambda, 0)$ και το μήκος της ακτίνας του $R = \sqrt{\lambda^2 + 1}$.
(β) $\lambda = 4$

Δραστηριότητες Ενότητας σελίδας 67

1. (α) $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq \frac{1}{2}$
(β) Αν το $(-1, 1)$ είναι το κέντρο του κύκλου, τότε $\lambda = \frac{1}{2}$ που είναι άτοπο.
2. Εφαρμόζουμε $d(K, \varepsilon) = R$.
3. (α) $y = -\frac{1}{3}x \pm \frac{10}{3}$
(β) $y = \pm\sqrt{10}$
(γ) $y = -3x + 10$ και $y = 3x + 10$
(δ) $y = x + 2\sqrt{5}$ και $y = x - 2\sqrt{5}$
4. (α) Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 1 = 0$ εφάπτεται του άξονα

των τετμημένων, αφού $d = 4 = R$.

5. (α) $K(2, 4)$, $R = 10$ μονάδες
(β) $a = 20$ ή $a = -40$
6. (α) $y = x + 1$ και $y = -7x + 1$
(β) $E_{AMBK} = 4$ τετραγωνικές μονάδες
7. $\Sigma_1(-10, 5)$ και $\Sigma_2(10, -5)$
8. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$
9. $y = -4x - 7$
10. Το μέσο M του AT είναι $M\left(\frac{\alpha + R\sigma\upsilon\nu\theta}{2}, \frac{\beta + R\eta\mu\theta}{2}\right)$.
11. $y = \frac{R}{2}$, $x \in \left(-\infty, -\frac{R}{2}\right] \cup \left[\frac{R}{2}, +\infty\right)$

Ενότητα 7: Παραβολή

Ορισμός – εξίσωση παραβολής

Δραστηριότητες σελίδας 81

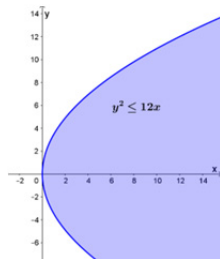
- (α) $4x^2 + 11y^2 + 24xy - 20x - 30y + 15 = 0$
(β) $y^2 = 8x$
(γ) $x^2 = -12y$
(δ) $y^2 = -20x$
- (α) $y^2 = -8x$
(β) $x^2 = 8y$
(γ) $x^2 = -16y$
(δ) $y^2 = -4x$
- (α) Εστία $E(3,0)$, Διευθετούσα (δ): $x = -3$
(β) Εστία $E(-2,0)$, Διευθετούσα (δ): $x = 2$
(γ) Εστία $E(0, \frac{5}{2})$, Διευθετούσα (δ): $y = -\frac{5}{2}$
(δ) Εστία $E(0,-1)$, Διευθετούσα (δ): $y = 1$
- $A(2,4)$ και $B(2,-4)$
- (α) $y^2 = 4x$
(β) Εστία $E(1,0)$, Διευθετούσα (δ): $x = -1$
(γ) $B(1,2)$
- $y = -x + 4$

Παραμετρικές εξισώσεις παραβολής – Θέση σημείου ως προς παραβολή Θέση ευθείας ως προς παραβολή

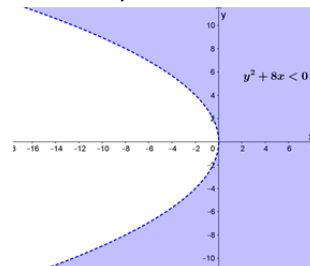
Δραστηριότητες σελίδας 87

- (α) Τα σημεία $(-1, 2)$ και $(-4, -2)$ βρίσκονται εκτός της παραβολής $y^2 = 6x$, ενώ τα σημεία $(2, -1)$ και $(4, 5)$ εντός της παραβολής.
(β) Τα σημεία $(-1, 2)$, $(-4, -2)$ και $(4, 5)$ βρίσκονται εκτός της παραβολής $x^2 = -4y$, ενώ το σημείο $(2, -1)$ ανήκει στην παραβολή.

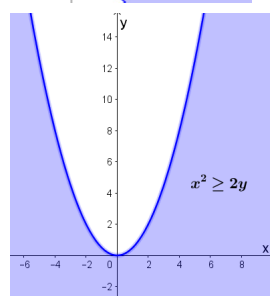
- (α)



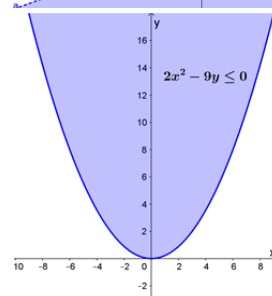
- (β)



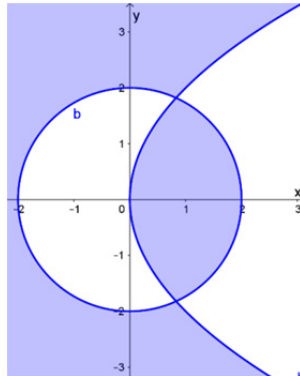
- (γ)



- (δ)



3. Γραφικά η λύση της ανίσωσης $(y^2 - 4x)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$ παριστάνεται από όλα τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται είτε εκτός των δύο καμπυλών, είτε εντός (παραβολή $y^2 = 4x$ και κύκλος $x^2 + y^2 = 4$).



4. (α) Η ευθεία $y = -x - 1$ είναι εξωτερική ως προς την παραβολή $y^2 = 2x$.
 (β) Η ευθεία $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$, είναι εφαπτομένη στην παραβολή $y^2 = 4x$.
 (γ) Η ευθεία $x - y = 2$ τέμνει την παραβολή $x^2 + y = 0$ σε δύο σημεία.
5. $A(1, -2), B(4, 4)$
6. (α) $\lambda = 1$
 (β) $\lambda < 1$
 (γ) $\lambda > 1$
7. (α) $B(a, 2a)$,
 (β) $\Gamma(4a, -4a)$

Εξίσωση εφαπτομένης και κάθετης σε σημείο της παραβολής Δραστηριότητες σελίδας 94

1. (α) Εξίσωση εφαπτομένης: $y = \frac{1}{2}(x + 1)$, Εξίσωση κάθετης: $y = -2x + 3$
 (β) Εξίσωση εφαπτομένης: $y = 2x + 4$, Εξίσωση κάθετης: $y = -\frac{1}{2}x + 9$
 (γ) Εξίσωση εφαπτομένης: $y + 2x + 16 = 0$, Εξίσωση κάθετης: $y = 2x + 4$
 (δ) Εξίσωση εφαπτομένης: $y = -16x - 32$, Εξίσωση κάθετης: $x - 16y + 259 = 0$
2. (α) $y = x + 1$
 (β) $x - 2y = 4 = 0$, $x + 2y + 4 = 0$
 (γ) $y = -x - 1$
 (δ) $y = x + 1$
4. (α) Εστία $E(0, 1)$, Διευθετούσα: $y = -1$
 (β) $(4, 4)$ και $(-8, 16)$
 (γ) Εξίσωση εφαπτομένης στο A : $y = 2x - 4$, Εξίσωση εφαπτομένης στο B :
 $y = -4x - 16$
 (δ) $E_{AB\Gamma} = 108$ τετραγωνικές μονάδες
5. $\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 = a(x + a)$
6. (α) $y^2 = 10x$
 (β) $y^2 = 6(x + y)$

7. (α) $x - 2y + 8 = 0$
 (β) $2x + y + 1 = 0$
8. (β) $y^2 = 2x - 4$
9. (α) ii. $y^2 = 4x + 2y - 20$
10. (β) $y^2 = \frac{(3x + 5)^2}{x = 2}$

Δραστηριότητες Ενότητας σελίδας 96

1. (α) Εστία $E(4, 0)$, Διευθετούσα (δ): $x = -4$
 (β) $y = 2x + 2$
 (γ) $x + 2y + 16 = 0$
4. $\left(\frac{a}{4}, a\right)$
7. $yy_1 = 2ax + y_1^2 - 2ax_1$
8. (α) $y\rho = x + \rho^2, yt = x + t^2$
 (β) $M(\rho t, \rho + t)$
 (ε) $\rho = \sqrt{2}, E_{PTM} = 8\sqrt{2}$

Ενότητα 8: Έλλειψη

Ορισμός – εξίσωση έλλειψης – Στοιχεία έλλειψης – Ιδιότητες έλλειψης Δραστηριότητες σελίδας 112

- (α) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(β) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

(γ) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$

(δ) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ ή $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{160} = 1$
- $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$
- (α) Εστίες: $(\pm 3, 0)$, Κορυφές: $(\pm 5, 0)$, $(0, \pm 4)$, Διευθετούσες: $x = \pm \frac{25}{3}$

(β) Εστίες: $(0, \pm 2)$, Κορυφές: $(\pm 3, 0)$, $(0, \pm 1)$, Διευθετούσες: $y = \pm 8$

(γ) Εστίες: $(\pm\sqrt{8}, 0)$, Κορυφές: $(\pm 5, 0)$, $(0, \pm 4)$, Διευθετούσες: $x = \pm \frac{9\sqrt{8}}{8}$
- (α) $\kappa = \sqrt{3}$

(β) $(TE) = (\sqrt{6} - 1)$, $(TE') = \sqrt{6} + 1$
- $(\pm \frac{12}{5}, \frac{13}{5})$
- $(TE) = \frac{1}{2}$, $(TE') = \frac{7}{2}$
- $\kappa = 2$, $\lambda = \pm 3$
- (α) $\lambda = \pm 4\sqrt{3}$

(β) $\Pi'_{KEE} = 32$ μονάδες

(γ) $E'_{KEE} = 24\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες

Θέση σημείου – Θέση ευθείας ως προς έλλειψη Δραστηριότητες σελίδας 121

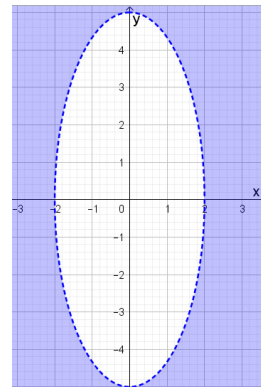
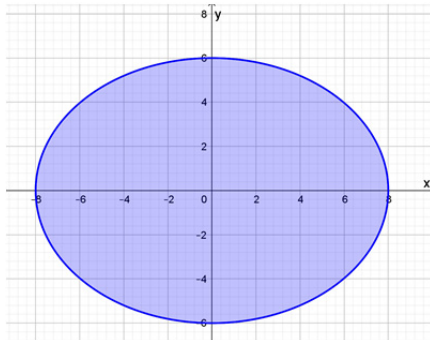
- Τα σημεία $E(0, \sqrt{5})$ και $Z(2, \frac{5}{3})$ ανήκουν στην έλλειψη.

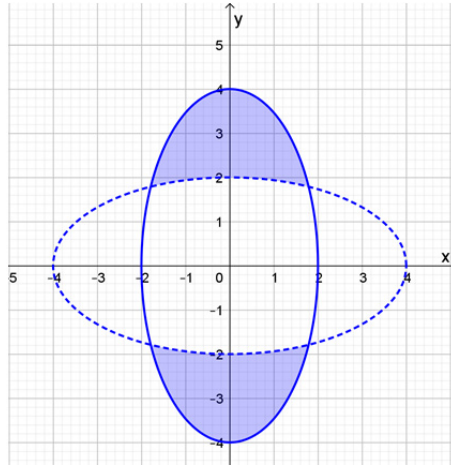
Τα σημεία $A(3, 1)$, $\Gamma(1, 6)$ και $\Delta(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ βρίσκονται εκτός της έλλειψης.

Το σημείο $B(-1, 1)$ βρίσκεται εντός της έλλειψης.

- (α)

(β)





3.

4. $\left(-\frac{32}{5}, \frac{9}{5}\right)$

5. (α) Η ευθεία τέμνει την έλλειψη.
 (β) Η ευθεία δεν τέμνει την έλλειψη.
 (γ) Η ευθεία εφάπτεται της έλλειψης.
 (δ) Η ευθεία τέμνει την έλλειψη.

6. (α) $\beta = \pm 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

(β) $a < -3$ ή $a > 3$

Παραμετρικές εξισώσεις έλλειψης – Εξίσωση εφαπτομένης και κάθετης σε σημείο της έλλειψης

Δραστηριότητες σελίδας 131

1. (α) Εξίσωση εφαπτομένης: $3x + 3y = 1$
 Εξίσωση κάθετης: $y = x + 2$
 (β) Εξίσωση εφαπτομένης: $2x - 3y = 12$
 Εξίσωση κάθετης: $3x + 2y - 5 = 0$
 (γ) Εξίσωση εφαπτομένης: $\sqrt{2}x - 2y + 4 = 0$
 Εξίσωση κάθετης: $x + \sqrt{2}y - 1 = 0$

3. $\sqrt{10}x + 4y = 12, \sqrt{10}x - 4y = -12$

5. $y = -\frac{3}{2}x + \sqrt{\frac{55}{2}}, y = -\frac{3}{2}x - \sqrt{\frac{55}{2}}$

7. (α) $\frac{25}{x^2} + \frac{9}{y^2} = 4$

Δραστηριότητες Ενότητας σελίδας 133

1. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

2. (α) $\Pi_{PEE'} = 36$ μονάδες
 (β) $P(5\sqrt{3}, 3)$ ή $P(-5\sqrt{3}, 3)$

3. $y = -x \pm \sqrt{5}$

5. $(\beta) \quad x^2 + 4y^2 + 8y = 0$
7. $x = 5, \quad 9x - 20y + 15 = 0$
8. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1, \quad \frac{x^2}{80} + \frac{4y^2}{5} = 1$