

# Πρόγραμμα PISA 2018 - Μαθηματικά

## Μαθηματικός Εγγραμματισμός

Επιθεώρηση Μαθηματικών  
Διεύθυνση Μέσης Εκπαίδευσης  
Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού

Δρ Ανδρέας Φιλίππου, Δρ Νικόλας Γιασουμής  
ΕΜΕ Μαθηματικών

12 Ιανουαρίου 2018

# Η αναζήτηση του εγγραμματισμού στα Μαθηματικά





- Στο πλαίσιο του Προγράμματος ΠΙΣΑ, ο εγγραμματισμός στα Μαθηματικά ορίζεται ως η ικανότητα του ατόμου:
  - ▣ να κατανοεί και να εντάσσει την επιστήμη των Μαθηματικών στην καθημερινότητα,
  - ▣ να αναπτύσσει τεκμηριωμένες κρίσεις πάνω σε προβλήματα που τίθενται εμπρός του και
  - ▣ να χρησιμοποιεί τη μαθηματική γνώση (και τις δεξιότητες που σχετίζονται με αυτή), για να αντιμετωπίζει με επιτυχία τις ανάγκες της καθημερινής ζωής του ως σκεπτόμενος, δημιουργικός και ενεργός πολίτης.

# Εγγραμματισμός στα Μαθηματικά

- \* Ο εγγραμματισμός στα Μαθηματικά δεν περιορίζεται στη γνώση των μαθηματικών όρων, διαδικασιών και μεθόδων που διδάσκονται στο σχολείο.
- \* Ο εγγραμματισμός στα Μαθηματικά αναφέρεται κυρίως στη **δυνατότητα δημιουργικής σύνθεσης και εφαρμογής τους**, ούτως ώστε, με αφετηρία την ίδια τη μαθηματική γνώση, να είναι στη συνέχεια σε θέση κάποιος να αντιμετωπίζει πρακτικά τα πιθανά καθημερινά προβλήματα.




## Μαθηματικό περιεχόμενο

Το μαθηματικό περιεχόμενο προσδιορίζει οτιδήποτε απαιτείται για τη λύση ενός προβλήματος και καθορίζεται από τέσσερις δεσπόζουσες κατηγορίες μαθηματικών εννοιών:

-  Χώρος και Σχήμα,
-  Μεταβολή και Σχέσεις,
-  Ποσότητα,
-  Αβεβαιότητα.

## Νοητικές διαδικασίες

\* Οι νοητικές διαδικασίες συνδέονται με τις αποκτημένες μαθηματικές ικανότητες και ομαδοποιούνται σε τρεις δέσμες:

-  τη δέσμη αναπαραγωγής,
-  τη δέσμη συνδέσεων και
-  τη δέσμη αναστοχασμού.

# PISA και Μαθηματικά

**ΔΕΝ αξιολογείται** η ικανότητα αναπαραγωγής της διδαχθείσας μαθηματικής γνώσης.

**Αξιολογείται:**

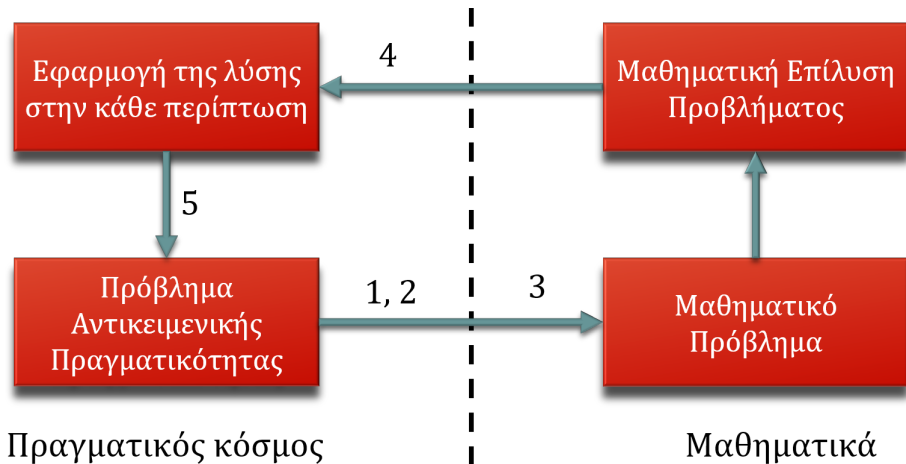
- Η ικανότητα της εφαρμογής της σε προβλήματα της καθημερινής ζωής, τα οποία διατυπώνονται με πολλαπλές διαφορετικές εκφράσεις και η επίλυσή τους ποικίλει και εξαρτάται από τον τρόπο σκέψης και την οξυδέρκεια των μαθητών.

Παραδοσιακά με τα παλιά αναλυτικά προγράμματα, με τη διδασκαλία των μαθηματικών οι μαθητές μαθαίνουν μεθόδους, που βασίζονται σε θεωρητικές μαθηματικές γνώσεις, και επιλύουν μαθηματικά προβλήματα, τα οποία δεν έχουν σχέση με την καθημερινή ζωή.

# Διαδικασία της “Μαθηματικοποίησης”

- 1 Εκκίνηση από ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζει κανείς σε πραγματικές καθημερινές συνθήκες.
- 2 Οργάνωση του προβλήματος με βάση μαθηματικές έννοιες και προσδιορισμός της περιοχής των Μαθηματικών που σχετίζεται με το πρόβλημα.
- 3 Σταδιακή απομάκρυνση από την πραγματική κατάσταση με διεργασίες όπως υποθέσεις, γενικεύσεις, μορφοποιήσεις, οι οποίες προάγουν τα μαθηματικά στοιχεία και μεταμορφώνουν το αντικειμενικό πρόβλημα σε μαθηματικό πρόβλημα, που όμως αναπαριστά πιστά την πραγματικότητα.
- 4 Επίλυση του μαθηματικού προβλήματος.
- 5 Διερεύνηση της λύσης του μαθηματικού προβλήματος στις πραγματικές συνθήκες.

# Διαδικασία της “Μαθηματικοποίησης”





# Παράδειγμα: Φωτισμός Πάρκου

**Το Δημοτικό Συμβούλιο αποφάσισε να φωτίσει ένα μικρό τριγωνικό πάρκο. Πού πρέπει να τοποθετηθεί το φως, ώστε να φωτίζεται ολόκληρο το πάρκο;**

Το πρόβλημα που αναφέρεται πιο πάνω, αν και «κοινωνικό», λύνεται μόνο αν ακολουθήσουμε την τακτική της “μαθηματικοποίησης”.

- ❶ *Εκκίνηση από πρόβλημα της πραγματικότητας.*
  - ➡ Οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν το σημείο όπου θα τοποθετηθεί το φως.
- ❷ *Οργάνωση και διάταξη του προβλήματος σύμφωνα με μαθηματικές έννοιες.*
  - ➡ Το πάρκο μπορεί να παρασταθεί σαν τρίγωνο και ο φωτισμός που προέρχεται από το φως μπορεί να παρασταθεί σαν ένας κύκλος που έχει ως κέντρο του το φως.
- ❸ *Σταδιακή αποσύνδεση των στοιχείων της πραγματικότητας με εικασίες, γενικεύσεις, τυποποιήσεις και διεργασίες, οι οποίες προάγουν τα χαρακτηριστικά των Μαθηματικών και μεταμορφώνουν το πρόβλημα σε μαθηματικό, το οποίο όμως απεικονίζει την πραγματικότητα με ακρίβεια.*
  - ➡ Στην περίπτωση του προβλήματος του φωτισμού του πάρκου, το πρόβλημα μετατίθεται από τον εντοπισμό του κατάλληλου σημείου όπου θα τοποθετηθεί το φως, στον εντοπισμό του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου.

# Παράδειγμα: Φωτισμός Πάρκου

## ④ Επίλυση του μαθηματικού προβλήματος.

Χρησιμοποιώντας το γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ότι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου βρίσκεται στο σημείο που τέμνονται οι μεσοκάθετες των πλευρών του, τις κατασκευάζουμε και έτσι ορίζουμε το ζητούμενο σημείο.

## ⑤ Εφαρμογή της μαθηματικής λύσης στα πλαίσια του προβλήματος.

- ➡ Η διερεύνηση της λύσης θα οδηγήσει το μαθητή στην απόρριψη της περίπτωσης του αμβλυγωνίου τριγώνου, αφού στην περίπτωση αυτή το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου θα βρίσκεται έξω από το τρίγωνο, οπότε και το φως, αντίστοιχα, τοποθετείται έξω από το πάρκο.
- ➡ Σημαντική παράμετρο, επίσης, αποτελεί η κατανόηση ότι η θέση και το ύψος των δέντρων στο πάρκο αποτελούν παράγοντες που θα μπορούσαν να επηρεάσουν τη λειτουργικότητα της μαθηματικής λύσης.

# Μαθηματικές Διεργασίες

- ➔ Οι ικανότητες που πρέπει να επιστρατεύσουν οι μαθητές, για να επιλύσουν τα προβλήματα του PISA, περιγράφονται πιο κάτω με τον όρο **Μαθηματικές Διεργασίες**.
- ➔ Η πρώτη διεργασία είναι η **μεταφορά του προβλήματος** από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των Μαθηματικών. Κατά τη μετάβαση αυτή γίνονται:
  - ➔ Προσδιορισμός των μαθηματικών εννοιών που εμπλέκονται στο πρόβλημα
  - ➔ Αναπαράσταση του προβλήματος με διαφορετικό τρόπο, διάρθρωσή του με γνώμονα τις μαθηματικές έννοιες και υποθέσεις
  - ➔ Συσχετισμός της γλώσσας του προβλήματος με μαθηματικά σύμβολα
  - ➔ Εντοπισμός κανονικοτήτων, σχέσεων, προτύπων
  - ➔ Αναγνώριση κάποιων πτυχών του προβλήματος που παραπέμπουν σε γνωστά προβλήματα
  - ➔ Μετάφραση του προβλήματος στη γλώσσα των Μαθηματικών, π.χ. μεταφορά των δεδομένων σε ένα μαθηματικό μοντέλο

# Μαθηματικές Διεργασίες

- Εφόσον το πρόβλημα αναχθεί σε μαθηματικό πρόβλημα, το επόμενο στάδιο ονομάζεται στάδιο συμπερασμάτων, κατά το οποίο λαμβάνουν χώρα διάφορες διεργασίες, όπως:
  - Χρήση διαφόρων τρόπων παρουσίασης του προβλήματος και μετάβαση από τον έναν τρόπο σε άλλον
  - Χρήση συμβόλων, τύπων, όρων και πράξεων
  - Προσαρμογή μαθηματικών μοντέλων, συνδυασμός και ενοποίηση των μοντέλων
  - Επιχειρηματολογία
  - Γενίκευση

# Μαθηματικές Διεργασίες

- ➡ Το τελευταίο στάδιο για την επίλυση του προβλήματος είναι η σκέψη πάνω σε όλη τη διαδικασία της μαθηματικοποίησης και τα αποτελέσματα.
- ➡ Εδώ ο μαθητής θεμελιώνει μαθηματικά την όλη διαδικασία, αναλύει και ερμηνεύει τα αποτελέσματα με κριτική σκέψη.
- ➡ Βεβαίως αυτό γίνεται σε όλα τα στάδια της διαδικασίας, αλλά είναι πολύ σημαντικό να επαναληφθεί και να ολοκληρωθεί στο στάδιο αυτό.

# Οι ικανότητες που είναι απαραίτητες

● Για την επιτυχία της μαθηματικοποίησης είναι απαραίτητες, σύμφωνα με το πρόγραμμα ΠΙΣΑ, οι παρακάτω ικανότητες:

- ① Ικανότητα μαθηματικής σκέψης και διατύπωσης συλλογισμών
- ② Ικανότητα ανάπτυξης επιχειρημάτων
- ③ Ικανότητα λήψης και μετάδοσης μηνυμάτων μαθηματικού περιεχομένου
- ④ Ικανότητα μορφοποίησης
- ⑤ Ικανότητα θέσης και επίλυσης του προβλήματος
- ⑥ Ικανότητα περιγραφής και παρουσίασης του μαθηματικού προβλήματος
- ⑦ Ικανότητα χρήσης συμβόλων, τύπων, μαθηματικών όρων και ικανότητα εκτέλεσης μαθηματικών πράξεων
- ⑧ Ικανότητα χρήσης βοηθητικών μεθόδων και εργαλείων

# Δέσμες Αξιολόγησης Ικανοτήτων

- Τα θέματα του προγράμματος ΠΙΣΑ συνήθως εστιάζουν στον έλεγχο πολλών ικανοτήτων ταυτόχρονα και οποιαδήποτε προσπάθεια αξιολόγησης μιας επιμέρους ικανότητας δεν θα είναι αποτελεσματική.
- Οι ικανότητες των μαθητών, προκειμένου να αξιολογηθούν με δημιουργικό τρόπο, έχουν ομαδοποιηθεί σε τρεις δέσμες:
  - **τη δέσμη ικανότητας αναπαραγωγής**
  - **τη δέσμη ικανότητας συσχετισμών**
  - **τη δέσμη ικανότητας στοχασμού**

# Δέσμη ικανότητας αναπαραγωγής

## Οι ικανότητες της δέσμης αναπαραγωγής είναι

- να γνωρίζουν οι μαθητές, από τη διδαχθείσα ύλη, τις γενικές αλήθειες των Μαθηματικών και τους συνηθισμένους τρόπους παρουσίασης των προβλημάτων,
- να μπορούν να θυμούνται μαθηματικές θεωρίες και ιδιότητες
- να εκτελούν συνηθισμένες πράξεις,
- να ακολουθούν διαδικασίες,
- να εφαρμόζουν καθιερωμένους αλγορίθμους,

- να χειρίζονται τύπους και
- να κάνουν υπολογισμούς.

π.χ.

- Να βρείτε το μέσο όρο των αριθμών 7, 12, 8, 14, 15, 9.
- Να γράψετε το 69% σε μορφή κλάσματος.
- Καταθέτουμε στο ταμειυτήριο 1.000,00 ευρώ με επιτόκιο 4%. Πόσα ευρώ συνολικά θα υπάρχουν στο λογαριασμό μας μετά από ένα χρόνο;



## Δέσμη Ικανότητας Συσχετισμών

- Η δέσμη της ικανότητας των συσχετισμών βασίζεται στην ικανότητα αντιμετώπισης προβλημάτων που δεν είναι απλώς εφαρμογή τύπων, παραπέμπουν όμως σε σχεδόν οικείες για το μαθητή διαδικασίες, οι οποίες αναπαράγουν τα προβλήματα αυτά.
- Στη δέσμη συσχετισμών εξετάζονται επιπρόσθετα η αφομοίωση, η ικανότητα σύνδεσης και η επέκταση της διδαχθείσας ύλης.

# Δέσμη Ικανότητας Συσχετισμών

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: ΑΠΟΣΤΑΣΗ

Η Μαίρη μένει 2 χιλιόμετρα μακριά από το σχολείο, ο Γιάννης μένει 5 χιλιόμετρα μακριά από το σχολείο. Πόσο μακριά μένει η Μαίρη από το Γιάννη;

- ➔ Κάποιοι: Το απέρριψαν με τη δικαιολογία ότι ήταν πολύ εύκολο και απάντησή του ήταν πολύ ξεκάθαρη
- ➔ Κάποιοι το θεώρησαν ότι δεν υπάρχει μόνο μια απάντηση, και συνεπώς το απέρριψαν και αυτοί.
- ➔ Κάποιοι ισχυρίστηκαν ότι επιδέχεται πάνω από μια λύσεις και οι πιθανές απαντήσεις είναι από 3 έως 7 χιλιόμετρα και φυσικά ήταν αποδεκτό ως θέμα του ΠΙΣΑ.
- ➔ Κάποιοι θεώρησαν ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι άριστο ως θέμα, διότι:
  - Αναδεικνύει την ανάγκη να καταλάβει κάποιος πρώτα - πρώτα την ερώτηση.
  - Δεν αντιμετωπίζεται με κάποια στρατηγική που να είναι γνωστή στο μαθητή.
  - Αποτελεί πραγματικά θέμα επίλυσης προβλήματος.
  - Είναι και θαυμάσιο από μαθηματική άποψη, παρ'Α όλο που δεν υπάρχει κάποια ένδειξη για το πώς θα επιλυθεί το πρόβλημα αυτό.
- ➔ Ακριβώς αυτή η τελευταία προσέγγιση συνδέει το συγκεκριμένο πρόβλημα με τη δέσμη ικανότητας συσχετισμών.

# Δέσμη Ικανότητας Συσχετισμών

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Η ΠΙΤΣΑ

Μια πιτσαρία σερβίρει δύο διαφορετικά είδη πίτσας. Και τα δύο έχουν σχήμα κυκλικό και το ίδιο πάχος. Η μικρότερη πίτσα έχει διάμετρο 30 εκ. και κοστίζει 30 ζεντ. Η μεγαλύτερη πίτσα έχει διάμετρο 40 εκ. και κοστίζει 40 ζεντ. Ποια από τις δύο πίτσες έχει την πιο συμφέρουσα τιμή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- \* Το πρόβλημα της καθημερινής ζωής ο μαθητής καλείται να τα εκφράσει στη γλώσσα των Μαθηματικών και να αναπτύξει ένα μαθηματικό μοντέλο που θα τον διευκολύνει να κάνει τις συγκρίσεις του και να καταλήξει σε ένα συμπέρασμα.
- \* Το συμπέρασμα αυτό θα το αιτιολογήσει από τα στοιχεία που περιγράφονται στην περίπτωση του προβλήματος.

## Δέσμη Ικανότητας Στοχασμού

- ▣▶ Η δέσμη αυτή απαιτεί από την πλευρά του μαθητή κάποιο στοχασμό για την επίλυση ενός προβλήματος.
- ▣▶ Η ικανότητα αυτή του μαθητή αφορά στη σχεδίαση της στρατηγικής που θα ακολουθήσει και που θα θέσει σε εφαρμογή. Αυτά τα προβλήματα τα οποία καλούνται να λύσουν οι μαθητές, είναι πιο αυθεντικά και σαφώς πιο απρόσιτα για αυτούς.
- ▣▶ Στη δέσμη ικανότητας στοχασμού εξετάζεται η αιτιολόγηση σε αυξημένο βαθμό, η τεκμηρίωση, η αφαίρεση, η γενίκευση και η εφαρμογή γνωστών μοντέλων σε νέα πλαίσια.

# Δέσμη Ικανότητας Στοχασμού

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΩΝ ΨΑΡΙΩΝ

Βάλαμε μερικά ψάρια σ' ένα ιχθυοτροφείο. Το γράφημα μάς δείχνει ένα μοντέλο της αύξησης του συνολικού τους βάρους. Υποθέτουμε ότι ένας ψαράς πρέπει να περιμένει μερικά χρόνια, πριν αρχίσει να ψαρεύει από το ιχθυοτροφείο. Πόσα χρόνια θα πρέπει να περιμένει, για να πιάνει τον ανώτατο δυνατό αριθμό κιλών κάθε

χρόνο, από την αρχική χρονιά κι έπειτα;

