

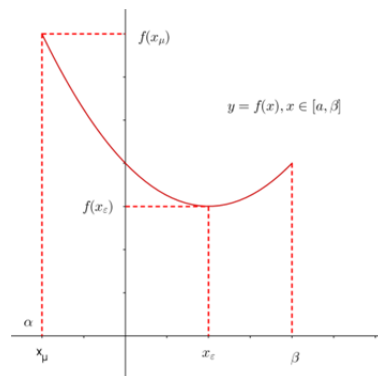
Θεώρημα (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

Θεώρημα (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

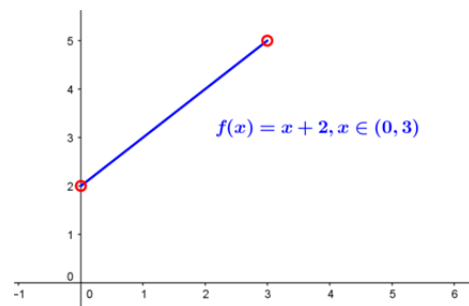
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $x_\varepsilon, x_\mu \in [a, \beta]$ στα οποία η f παίρνει την ελάχιστη τιμή $f(x_\varepsilon)$ και τη μέγιστη τιμή $f(x_\mu)$.

Από το πιο πάνω θεώρημα προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[f(x_\varepsilon), f(x_\mu)]$

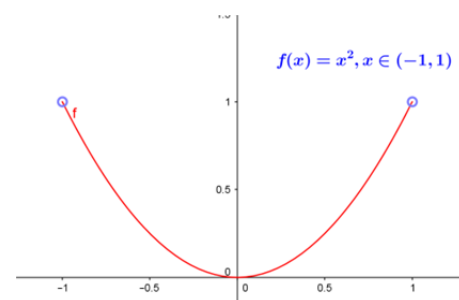
Είναι σημαντική η προϋπόθεση ότι η συνάρτηση f πρέπει να είναι συνεχής, αλλά και να ορίζεται σε κλειστό διάστημα. Αν μία τουλάχιστον από τις δύο συνθήκες δεν ισχύει, τότε δεν ισχύει το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής.



Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x + 2, x \in (0, 3)$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0, 3)$, αλλά αυτό δεν είναι κλειστό διάστημα. Μπορεί να δείξει κανείς, ότι η f δεν έχει ούτε μέγιστη, αλλά και ούτε ελάχιστη τιμή.



Όμως, η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in (-1, 1)$, η οποία ορίζεται πάλι σε ανοικτό διάστημα, έχει ελάχιστη τιμή στο $x_0 = 0$, αλλά δεν έχει μέγιστη τιμή.



Παρατηρήσεις

- ✓ Όταν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ανοικτό διάστημα (a, β) , η ύπαρξη μέγιστης ή ελάχιστης τιμής δεν προκαθορίζεται.
- ✓ Τα σημεία $(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon))$ και $(x_\mu, f(x_\mu))$ είναι και τοπικά και ολικά ακρότατα.

Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$

Να βρείτε τη μέγιστη, την ελάχιστη τιμή της και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

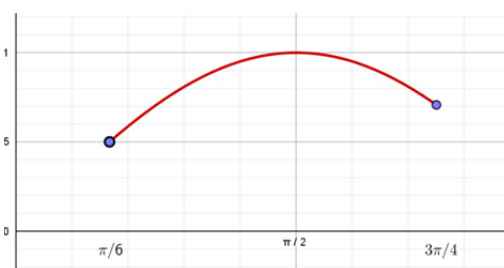
Λύση

Η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα και άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$

Παρατηρούμε ότι, στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$ η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της,

όταν $x_\mu = \frac{\pi}{2}$: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ και την ελάχιστη τιμή της όταν $x_\varepsilon = \frac{\pi}{6}$: $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Συνεπώς το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.



Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [2,4] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν m είναι η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της συνάρτησης να αποδείξετε ότι:

$$m \leq \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9} \leq M$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [2,4]$, γιατί m είναι η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της συνεχούς συνάρτησης στο $[2,4]$. Συνεπώς:

$$m \leq f(2) \leq M \Leftrightarrow 2m \leq 2f(2) \leq 2M$$

$$m \leq f(3) \leq M \Leftrightarrow 3m \leq 3f(3) \leq 3M$$

$$m \leq f(4) \leq M \Leftrightarrow 4m \leq 4f(4) \leq 4M$$

Προσθέτουμε τις πιο πάνω σχέσεις και παίρνουμε:

$$2m + 3m + 4m \leq 2f(2) + 3f(3) + 4f(4) \leq 2M + 3M + 4M \Leftrightarrow$$

$$9m \leq 2f(2) + 3f(3) + 4f(4) \leq 9M \Leftrightarrow$$

$$m \leq \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9} \leq M$$

Δραστηριότητες

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα της «μέγιστης και ελάχιστης τιμής συνάρτησης».
2. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $x \in [1, 5]$ παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Στη συνέχεια, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f στο διάστημα $[1, 5]$.
3. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, με ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M , τότε το σύνολο τιμών της $f(A)$ είναι:
(α) $f(A) = [\alpha, \beta]$
(β) $f(A) = [\beta, \alpha]$
(γ) $f(A) = [f(\alpha), f(\beta)]$
(δ) $f(A) = [m, M]$
(ε) $f(A) = [f(\beta), f(\alpha)]$
4. Να βρείτε το σύνολο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
(α) $f_1(x) = \ln x, x \in [1, 10]$
(β) $f_2(x) = 3x + 2, x \in [0, 3]$
(γ) $f_3(x) = x^2 + x + 1, x \in [-1, 4]$
(δ) $f_4(x) = \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
(ε) $f_5(x) = e^x, x \in [-1, 0]$
5. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [3, 7] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν m είναι η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της συνάρτησης να αποδείξετε ότι:
$$m \leq \frac{3f(3) + 7f(7)}{10} \leq M$$
6. Να αιτιολογήσετε, δίνοντας κατάλληλο παράδειγμα, γιατί μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό διάστημα δεν έχει πάντοτε σύνολο τιμών που να είναι ανοικτό διάστημα.