

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ 2021 – 2022
ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟ

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Διάρκεια: 90 λεπτά

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες

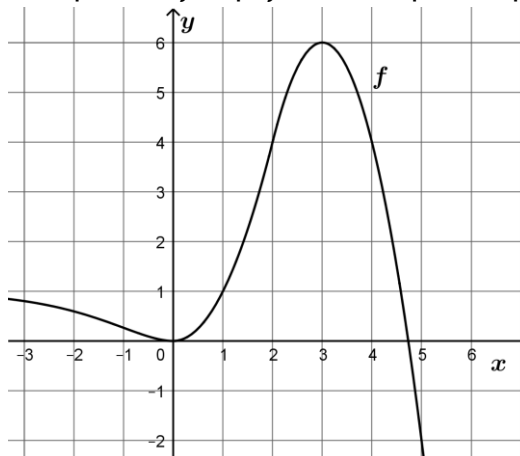
ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου απαντήσεων να συμπληρώσετε όλα τα κενά με τα στοιχεία που ζητούνται.
2. **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Έχετε τη δυνατότητα επιλογής ερωτήσεων για απάντηση. Να μελετήσετε προσεκτικά τις οδηγίες των μερών που αποτελούν το εξεταστικό δοκίμιο.
3. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο απαντήσεων.
4. Να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
5. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρη πένα ανεξίτηλης μελάνης**. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις κλπ.
6. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού και διορθωτικής ταινίας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
8. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις του Μέρους Α.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1 Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int \left(\frac{2}{x} - \sin 3x - 4\sqrt{x} + \pi \right) dx$

A2 Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και παρουσιάζει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 1$ στο $-\infty$.



- (α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f , τα τοπικά και ολικά ακρότατα της f και να τα χαρακτηρίσετε. (4 μον.)
- (β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 3$ (1 μον.)

A3 Δίνεται κύκλος με εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$.

- (α) Να βρείτε:
- i. Τις συντεταγμένες του κέντρου του.
 - ii. Το μήκος της ακτίνας του.
 - iii. Το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο $\Sigma(4,0)$ προς τον κύκλο.
- (β) Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση του σημείου $\Sigma(4,0)$ από τον κύκλο.
- (γ) Να γράψετε τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου.

- A4** (α) Να αποδείξετε ότι $(\operatorname{arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$. (2 μον.)
- (β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x-2}{x^2+2x+2} dx$$

(3 μον.)

- A5** (α) Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle. (1 μον.)
- (β) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle (1 μον.)
- (γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$. (3 μον.)

- A6** (α) Να δώσετε τον ορισμό της κοίλης συνάρτησης $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ στο Δ όπου $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα. (1 μον.)
- (β) Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα $\forall x \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$g'(x) = f^2(x) - \frac{1}{f(x)},$$

να εξετάσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (4 μον.)

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις του Μέρους Β.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να την παραστήσετε γραφικά.

B2 Δίνεται κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$ και σημείο του P στο πρώτο τεταρτημόριο. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο P η οποία τέμνει και τους άξονες Ox, Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα.

Να βρείτε:

- (α) Την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο P . (2 μον.)
- (β) Την τετμημένη του σημείου P του κύκλου ώστε το τρίγωνο OAB που σχηματίζεται από την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο P και τους άξονες των συντεταγμένων Ox, Oy να έχει το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν. (6 μον.)
- (γ) Το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν του τριγώνου OAB . (2 μον.)

B3 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$xf''(x) + f'(x) = 4x, \quad \forall x > 0$$

και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 3x - 2$. Να βρείτε:

- (α) Τις τιμές $f'(1)$ και $f(1)$ (2 μον.)
- (β) Τον τύπο της συνάρτησης f (5 μον.)
- (γ) Το ολοκλήρωμα: $\int e^{f(x)} dx$ (3 μον.)

ΤΕΛΟΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ