

ΣΕΜΙΝΑΡΙΑ ΕΜΕ-ΣΕΠ. 2019

Αποτελέσματα Π.Ε. (ΙΟΥΝΙΟΥ 2019)

Μαθηματικά(43)-Γ' κοινού κορμού

- Πίνακας προδιαγραφών
- Παρουσίαση αποτελεσμάτων
- Ανάλυση αποτελεσμάτων

Χατζηχρίστου Χ., ΕΜΕ-Μαθηματικών
(chchatzichristou@schools.ac.cy)

Πίνακας Προδιαγραφών

- Ο πίνακας προδιαγραφών μας βοηθά να καταγράψουμε τόσο τις έννοιες που αξιολογούμε όσο και το επίπεδο (Γνώση-Κατανόηση-Εφαρμογή-Ανάλυση-Σύνθεση) στο οποίο θα γίνει η αξιολόγηση.
- Με βάση αυτό τον πίνακα, μπορεί να καταχωρηθεί η κάθε άσκηση και στη συνέχεια να ελεγχτεί η αντιπροσωπευτικότητα του δοκιμίου αλλά και η σχέση του με τους σκοπούς της διδασκαλίας μιας ενότητας.
- Η έμφαση που δίνεται σε κάθε τμήμα του πίνακα προδιαγραφών να σχετίζεται με τη σημασία που αποδίδεται σε κάθε στόχο και με το χρόνο και την προσπάθεια που καταβλήθηκε για την επίτευξή του

Σύγκριση Πίνακα Προδιαγραφών ΠΕ_ 2018 & 2019

A/A	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ Γ΄ΤΑΞΗ	ΔΠ	ΜονάδεςΣύνολο		Α΄ Μέρος	Β΄ Μέρος	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	B1	B2	B3	B4	B5
							5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	10	10	10	10	10
1	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ	18	20.0	20	10	10															
0	Μονοτονία – Τοπικά ακρότατα συνάρτησης (Ορισμοί)	0	0.0										5								
0	Μονοτονία – Τοπικά ακρότατα συνάρτησης (Θεώρημα)	0	0.0									5						5			
0	Κυρτότητα – Σημεία καμπής συνάρτησης	0	0.0						5	5											
0	Μελέτη συνάρτησης – Γραφική παράσταση συνάρτησης	0	0.0															10		10	
0	Προβλήματα	0	0.0																10		10
2	ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ (ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ)	12	16.7	20	10	10															
0	Εισαγωγή	0	0.0																		
0	Κανόνες ολοκλήρωσης	0	0.0				5	5													
0	Εφαρμογές αόριστων ολοκληρωμάτων	0	0.0												5	5					
3	ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ	20	27.8	30	20	10															
0	Εισαγωγή στα σύνολα	0	0.0																		
0	Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού	0	0.0						5												
0	Εισαγωγή στη συνδυαστική - Αρχή απαρίθμησης	0	0.0					5						5							
0	Μεταθέσεις (απλές, κυκλικές, επαναληπτικές)	0	0.0								5								5		
0	Διατάξεις (απλές, επαναληπτικές)	0	0.0																		
0	Συνδυασμοί	0	0.0										5								
0	Έννοια της πιθανότητας	0	0.0						5										5		
0	Πιθανότητες συνδυασμένων ενδεχομένων	0	0.0												5						10
4	ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ	10	13.9	15	5	10															
0	Επανάληψη	0	0.0																		
0	Τεταρτημόρια-Ενδοτεταρτημοριακό εύρος	0	0.0					5											5		
0	Συσχέτιση δύο μεταβλητών και συντελεστής συσχέτισης	0	0.0				5			5								10			
5	ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ	12	16.7	15	5	10															
0	Στερεά από περιστροφή (Κύλινδρος, Κώνος, Κόλουμετρο κώνου)	0	0.0											5		5					
0	Περιστροφή σχημάτων γύρω από άξονα	0	0.0														10				10
0		0	0.0	100	50	50															
0	Σύνολο	72	100		0	0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	B1	B2	B3	B4	B5

2018

2019

Μέσος Όρος Βαθμολογιών Παγκυπρίων Εξετάσεων 2019 (2018)

Κωδικός Μαθήματος: (43)

Μάθημα: Μαθηματικά Κ.Κ.

Πλήθος Υποψηφίων : **2137** (1626)

Μέσος Όρος Βαθμολογιών : **7.89** (8.58)

Τυπική Απόκλιση βαθμολογιών : **6.04** (5.26)

Μέσος Όρος Βαθμολογιών Παγκύπριων Εξετάσεων 2019

ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ (ΜΓΔΕ & ΜΤΕΕΚ)

Κωδικός Μαθήματος: 43

Μάθημα: Μαθηματικά Κ.Κ.

Πλήθος Υποψηφίων :1990

Μέσος Όρος Βαθμολογιών : **8.30**

Τυπική Απόκλιση βαθμολογιών : **6.00**

Μέσος Όρος Βαθμολογιών Παγκύπριων Εξετάσεων 2019 ΑΠΟΛΥΣΗΣ (ΜΤΕΕΚ)

Κωδικός Μαθήματος: 43

Μάθημα: Μαθηματικά Κ.Κ.

Πλήθος Υποψηφίων : **147**

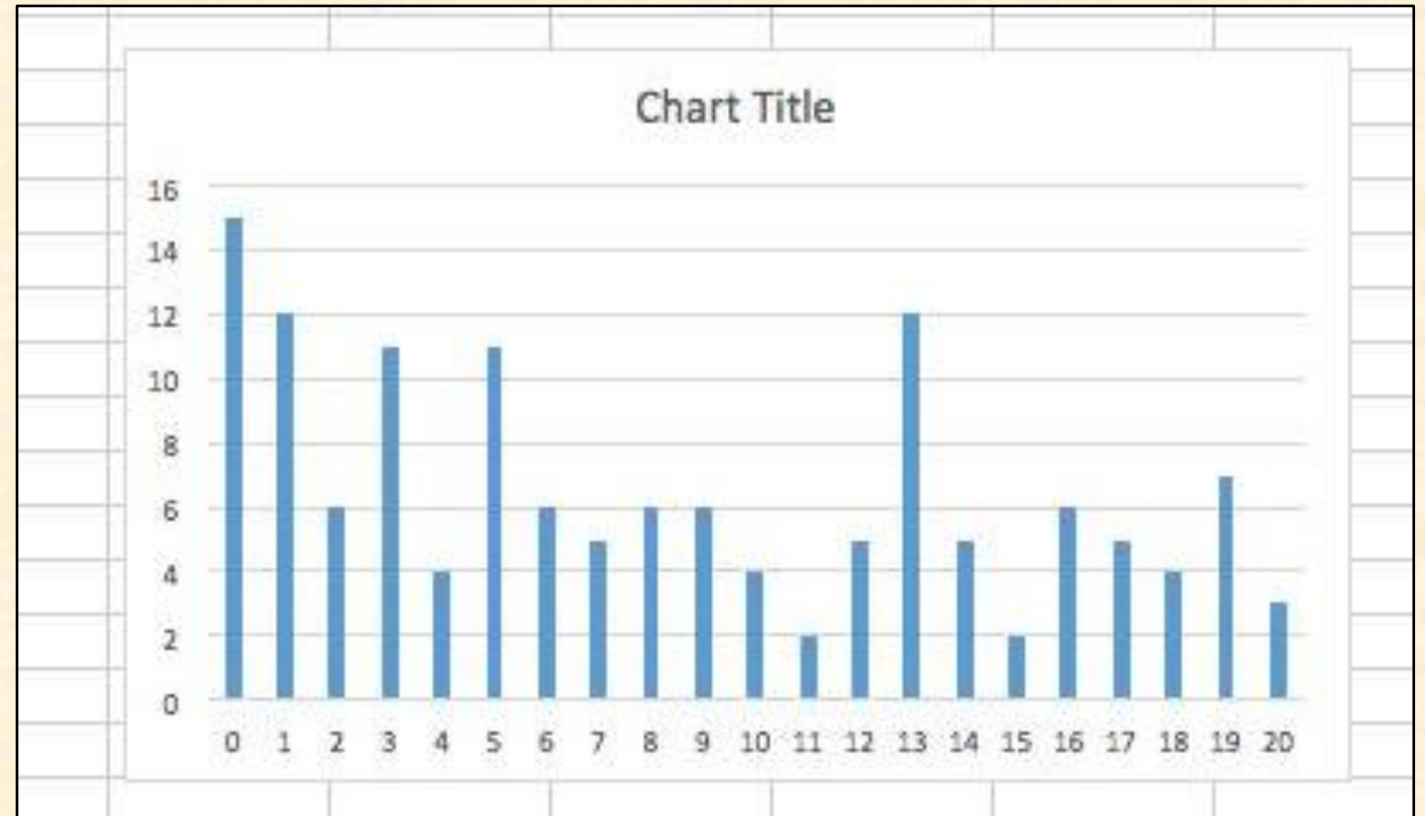
Μέσος Όρος Βαθμολογιών : **2,45**

Τυπική Απόκλιση βαθμολογιών : **3.12**

**Παρουσίαση αποτελεσμάτων
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (43)
Γκκ (ΠΕ 2018-19)**

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΕ _2018-19 ΣΕ ΤΥΧΑΙΟ ΔΕΙΓΜΑ ΜΑΘΗΤΩΝ

Βαθμός	Συχνότητα
0	15
1	12
2	6
3	11
4	4
5	11
6	6
7	5
8	6
9	6
10	4
11	2
12	5
13	12
14	5
15	2
16	6
17	5
18	4
19	7
20	3
Σύνολο	137



ΠΟΣΟΣΤΟ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΤΗ ΒΑΣΗ

59.85%

ΠΟΣΟΣΤΟ ΜΕ ΒΑΘΜΟ 19-20

7.3%

**ΣΤΟΧΟΣ Η ΜΕΙΩΣΗ ΤΟΥ ΠΟΣΟΣΤΟΥ ΚΑΤΩ
ΑΠΟ ΤΗ ΒΑΣΗ ΣΤΟ ΜΙΣΟ**

Παρουσίαση-Ανάλυση Αποτελεσμάτων ως προς τα Λάθη των εξεταζομένων στις ΠΕ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2018

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

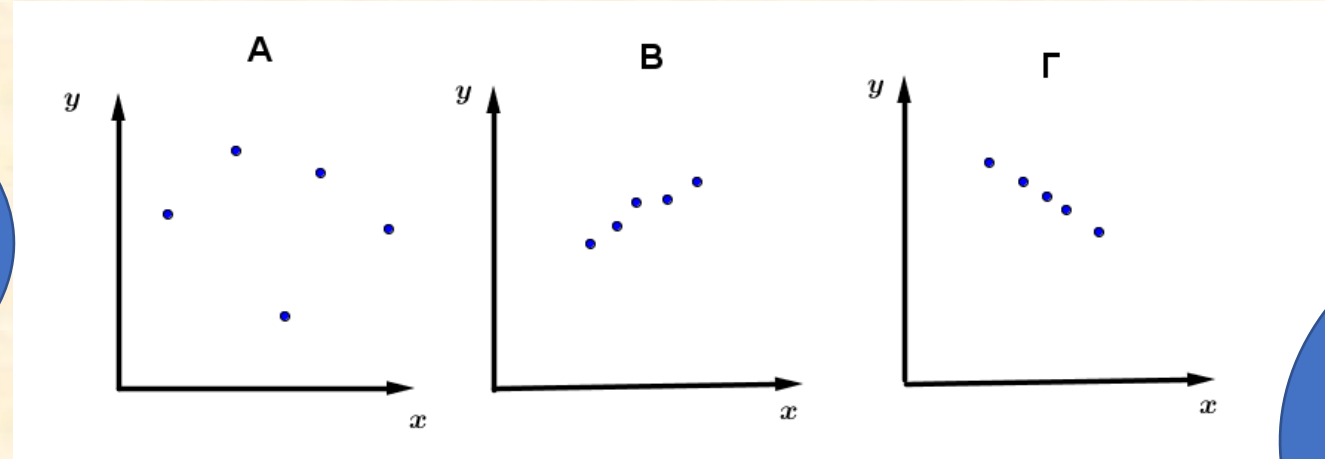
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΔΕΥΤΕΡΑ, 21 ΜΑΙΟΥ 2018 8:00 – 11:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

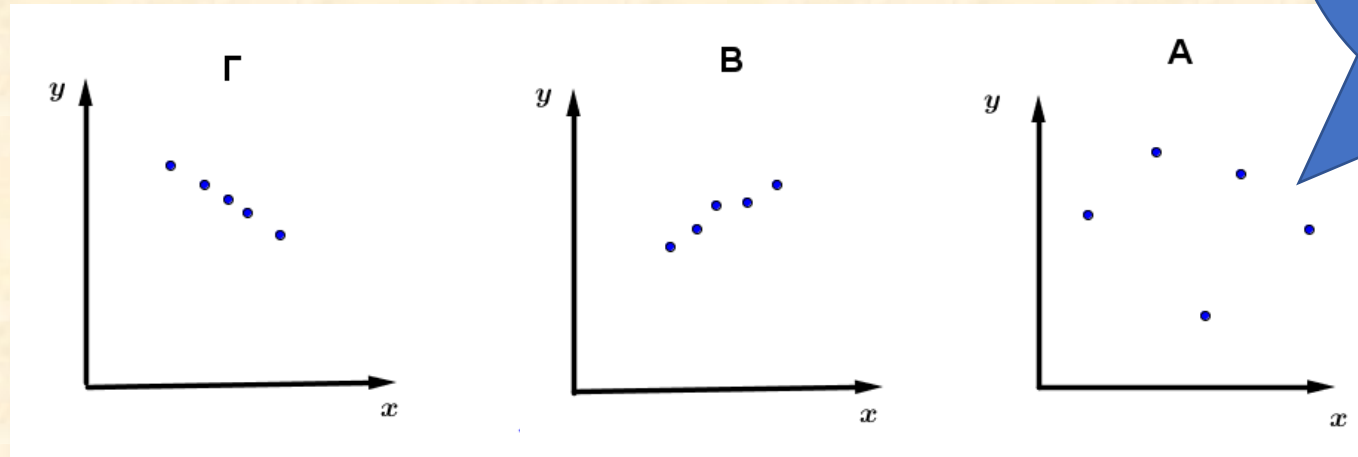
A1. Δίνονται τα πιο κάτω διαγράμματα διασποράς A, B και Γ. Να **ταξινομήσετε** τα διαγράμματα με βάση τη γραμμική συσχέτιση από την πιο ισχυρή στη πιο ασθενή.

Λάθος απάντηση Γ, A, B
Παρερμηνεία της έννοιας

Λύση: Γ, B, A



Λάθη μαθητών:
Πετύχαιναν μόνο ένα από τα τρία (το Γ ή το A).



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ...

Οι μαθητές έχουν παρανόηση όσον αφορά στη ερμηνεία:

**Θετική και Αρνητική συσχέτιση με την
Ασθενή και Ισχυρή συσχέτιση**

Παράδειγμα: Θεωρούν ότι η αρνητική γραμμική συσχέτιση ($r=-1$) δεν μπορεί να είναι ισχυρή/ισχυρότερη από την θετική γραμμική συσχέτιση (πχ $r=0.8$)

A2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ , λ ώστε να ισχύει:

$$\int \lambda x^{\kappa+2} dx = x^8 + c$$

Λύση:

A' τρόπος

$$(x^8)' = \lambda x^{\kappa+2}$$

$$8x^7 = \lambda x^{\kappa+2} \text{ ΤΟΤΕ } \lambda = 8 \text{ και } \kappa + 2 = 7 \text{ ΤΟΤΕ } \kappa = 5$$

Αδυναμία χρήσης
Ορισμού
ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ/ΑΡΧΙΚΗΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ, σελ. 65

$$F'(x) = f(x)$$

Β' τρόπος:

Παράλειψη
της
σταθεράς c

$$\int \lambda x^{\kappa+2} dx = x^8 + c \text{ τότε}$$

$$\int \lambda x^{\kappa+2} dx = \frac{\lambda}{\kappa+2+1} x^{\kappa+2+1} + c, \kappa \neq -3 \text{ τότε}$$

$$\frac{\lambda}{\kappa+2+1} x^{\kappa+2+1} + c = x^8 + c$$

$$\frac{\lambda}{\kappa+3} = 1 \text{ και } \kappa+3 = 8$$

$$\kappa = 5 \text{ και } \lambda = 8$$

Παράλειψη του
περιορισμού
 $\kappa \neq -3$

A3. Δίνονται τα ψηφία 1,3,6,7,8,9.

Να βρείτε το πλήθος των τετραψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω ψηφία χωρίς επανάληψη ψηφίου.

Λύση:

Το πλήθος των τετραψήφιων αριθμών από την αρχή της απαρίθμησης είναι:

Χ	Ε	Δ	Μ
6	5	4	3

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

αριθμοί

Αδυναμία χρήσης
τύπων
π.χ. Διατάξεων Δ_4^6

A4. Δίνονται οι μεταβλητές x, y . Με βάση τις ετήσιες μετρήσεις έντεκα χρόνων υπολογίστηκαν οι τυπικές τους αποκλίσεις, $S_x = 36,3, S_y = 18,27$ οι μέσοι όροι $\bar{x} = 34, \bar{y} = 22,5$ και το άθροισμα των γινομένων τους $\Sigma xy = 1444,24$.

α) Να υπολογίσετε το συντελεστή συσχέτισης (r) μεταξύ των μεταβλητών x και y .

β) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών.

Λύση:

(α) $n = 11$

$$r = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\bar{y}}{nS_xS_y} = \frac{1444,24 - 11 \cdot 34 \cdot 22,5}{11 \cdot 36,3 \cdot 18,27} = -0,95$$

(β) Ισχυρή αρνητική γραμμική συσχέτιση (ή σχεδόν τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση)

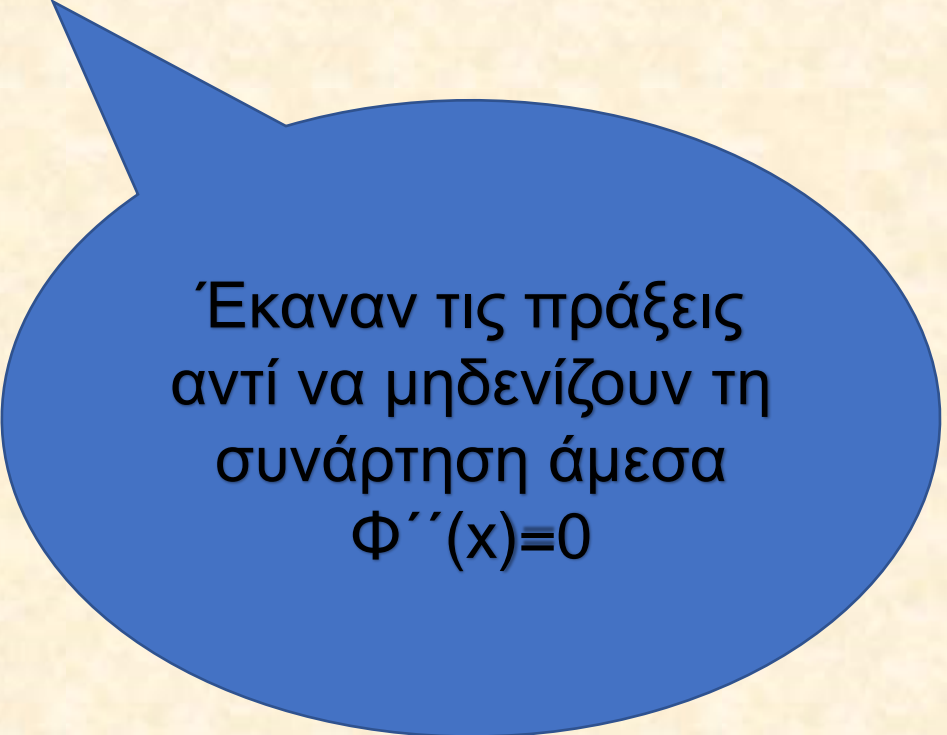
Αδυναμία εφαρμογής/ερμηνείας δεδομένων

Λάθη μαθητών:
Δεν αναφέρουν τη λέξη **γραμμική**.

A5. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\varphi''(x) = x(3-x)(x+4)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς την κυρτότητα.

β) Να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής της.



Έκαναν τις πράξεις
αντί να μηδενίζουν τη
συνάρτηση άμεσα
 $\varphi''(x)=0$





A5. Λύση:

$$\alpha) \varphi''(x) = 0$$

$$x(3-x)(x+4)^2 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = -4 \text{ διπλή ρίζα}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της φ''

x	$-\infty$	-4	0	3	$+\infty$		
φ''	-	0	-	0	+	0	-
φ			ΣΚ		ΣΚ		

Η συνάρτηση φ είναι :

κυρτή στο διάστημα $[0,3]$

κοίλη στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[3,+\infty)$

(β) Η γραφική παράσταση της φ παρουσιάζει σημεία καμπής

για $x = 0$ ή στο $(0, \varphi(0))$ και για $x = 3$ ή στο $(3, \varphi(3))$

Αδυναμία:

1. Ερμηνεία θεωρήματος κυρτής – κοίλης συνάρτησης (σελ.35)
2. Ερμηνεία /κατασκευή Πίνακα μονοτονίας

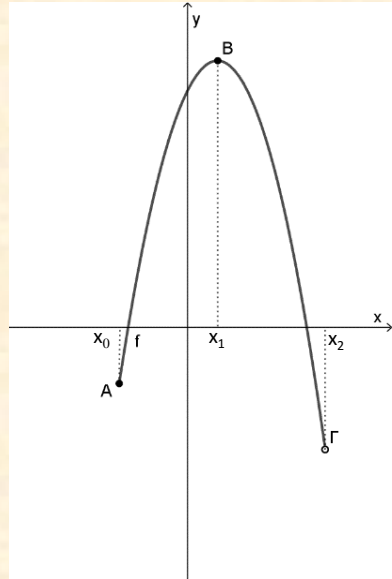
Εμπόδιο: πρόσημο στη διπλή ρίζα ($x=-4$) την οποία δεν αναγνώριζαν

Άγνοια εφαρμογής του Θεωρήματος (Σημείο Καμπής) σελ.36

Δεν έλεγχαν τα ΣΚ με Πίνακα Μονοτονίας

A6. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $[x_0, x_2)$.

Τα σημεία Α, Β, Γ έχουν τετμημένες x_0, x_1, x_2 αντίστοιχα και $f'(x_1) = 0$.



- α) Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα της συνάρτησης
- β) Να αναφέρετε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης
- γ) Να βρείτε το πρόσημο της παραγώγου στο διάστημα

A6. Λύση:

(α) Ολικό μέγιστο για $x = x_1$ (ή στο $(x_1, f(x_1))$)

Τοπικό ελάχιστο για $x = x_0$ (ή στο $(x_0, f(x_0))$)

(β) f γνησίως αύξουσα στο $[x_0, x_1]$

f γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2)$

(γ) $f'(x) < 0$ στο (x_1, x_2) διότι f γνησίως φθίνουσα στο (x_1, x_2)

Πρόβλημα στη χρήση διαστημάτων ανοικτών $(,)$ ή κλειστών $[,]$

Πρόβλημα μετάφρασης από γραφική σε συμβολική αναπαράσταση.

A7. Ένα μικρό καταφύγιο σκύλων φιλοξενεί οκτώ (8) αρσενικούς και έξι (6) θηλυκούς σκύλους. Μια μέρα φτάνει στο καταφύγιο μια φιλόζη οικογένεια η οποία θέλει να υιοθετήσει τέσσερις (4) σκύλους.

α) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των σκύλων που θα υιοθετήσει η οικογένεια.

β) Αν η οικογένεια επιλέξει τους τέσσερις (4) σκύλους στην τύχη, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των πιο κάτω ενδεχομένων:

i) A: να επιλέξει ακριβώς ένα αρσενικό σκύλο

ii) B: να επιλέξει το πολύ ένα θηλυκό σκύλο

iii) Γ: να **ΜΗΝ** επιλέξει σκύλους του ίδιου φύλου.

Λύση:

$$(α) \binom{14}{4} = \frac{14!}{10!4!} = 1001$$

$$(β) \text{ i) } P(A) = \frac{\binom{8}{1}\binom{6}{3}}{\binom{14}{4}} = \frac{160}{1001}$$

$$\text{ii) } P(A) = \frac{\binom{8}{4} + \binom{6}{4}\binom{8}{3}}{\binom{14}{4}} = \frac{406}{1001} = \frac{58}{143}$$

Σωστή
αντικατάσταση,
λάθος πράξεις

A8. Στο πλαίσιο της ανοικοδόμησης του καθεδρικού ναού της Παναγίας των Παρισίων μετά την καταστροφική πυρκαγιά, πρόκειται να κατασκευαστεί καμπαναριό με όγκο $792\pi \text{ m}^3$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το καμπαναριό θα αποτελείται από ημισφαίριο και κύλινδρο ίσης ακτίνας. Αν το ύψος του κυλίνδρου θα είναι τριπλάσιο από την ακτίνα του, να υπολογίσετε το ύψος (h) του καμπαναριού.

Λύση:

$$v = 3R$$

$$V_{\text{κυλ}} + V_{\text{ημ}} = 792\pi$$

$$\Rightarrow \pi R^2 v + \frac{2}{3}\pi R^3 = 792\pi$$

$$\Rightarrow R^2 \cdot 3R + \frac{2}{3}R^3 = 792$$

$$\Rightarrow 3R^3 + \frac{2}{3}R^3 = 792$$

$$\Rightarrow \frac{11}{3}R^3 = 792$$

$$\Rightarrow R^3 = 216 \Rightarrow R = 6m$$

$$\Rightarrow v = 3 \cdot 6 = 18m \Rightarrow h = v + R = 18 + 6 = 24m$$

**Παράλειψη
στις Μονάδες
μέτρησης**

A9. Η Αυγή κάθε βράδυ, είτε παρακολουθεί τηλεόραση είτε διαβάζει. Η πιθανότητα να παρακολουθεί τηλεόραση είναι $\frac{4}{5}$. Όταν παρακολουθεί τηλεόραση η πιθανότητα να αποκοιμηθεί στην πολυθρόνα είναι $\frac{3}{4}$, ενώ όταν διαβάζει η πιθανότητα να αποκοιμηθεί στην πολυθρόνα είναι $\frac{1}{3}$.

α) Να βρείτε την πιθανότητα κάποιο βράδυ η Αυγή να αποκοιμηθεί στην πολυθρόνα.

β) Δεδομένου ότι κάποιο βράδυ η Αυγή δεν αποκοιμήθηκε στην πολυθρόνα, να βρείτε την πιθανότητα να παρακολουθούσε τηλεόραση.

A9. Λύση:

Ορίζουμε τα πιο κάτω ενδεχόμενα:

$$T = \{H \text{ Αυγή παρακολουθεί τηλεόραση}\}$$

$$\Delta = \{H \text{ Αυγή διαβάζει}\}$$

$$K = \{H \text{ Αυγή να αποκοιμηθεί στην πολυθρόνα}\}$$

$$(\alpha) P(K) = P(T) \cdot P(K|T) + P(\Delta) \cdot P(K|\Delta) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(\beta) P(T|K) = \frac{P(T \cap K)}{P(K)} = \frac{\frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{10}$$

Πρόβλημα στην αποκωδικοποίηση /ερμηνεία των δεδομένων

Μη κατανόηση δεσμευμένης

A10. Η ποσότητα ενός φαρμάκου (σε mg), στον οργανισμό του ανθρώπου, δίνεται από τη συνάρτηση $\Pi(t)$, όπου t είναι ο χρόνος μετά τη λήψη του φαρμάκου (σε ώρες).

Δίνεται ότι $\Pi'(t)=12-6t$, $t \geq 0$. Μια ώρα μετά από τη λήψη του φαρμάκου υπάρχουν 9 mg φαρμάκου στον οργανισμό του ανθρώπου.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Π δίνεται από τον τύπο $\Pi(t)=12t-3t^2$, $t \geq 0$.

β) Να βρείτε:

i) σε πόσες ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου η μέγιστη δόση του φαρμάκου,

ii) τη μέγιστη δόση του φαρμάκου (σε mg), που υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου,

iii) σε πόσες ώρες μετά τη λήψη του το φάρμακο αυτό **ΔΕΝ** θα υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου.

A10. Λύση:

$$(α) \Pi(t) = \int \Pi'(t) dt = \int (12 - 6t) dt = 12t - 3t^2 + c$$

$$\Pi(1) = 9$$

$$\Rightarrow 12 - 3 + c = 9 \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \Pi(t) = 12t - 3t^2$$

$$(β) \text{ i) } \Pi'(t) = 0 \Rightarrow 12 - 6t = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ ώρες}$$

$$\text{ii) Μέγιστη δόση } \Pi(2) = 12 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = 12mg$$

$$\text{iii) } \Pi(t) = 0 \Rightarrow 12t - 3t^2 = 0 \Rightarrow 3t(4 - t) = 0$$

$$t = 0 \text{ ή } t = 4$$

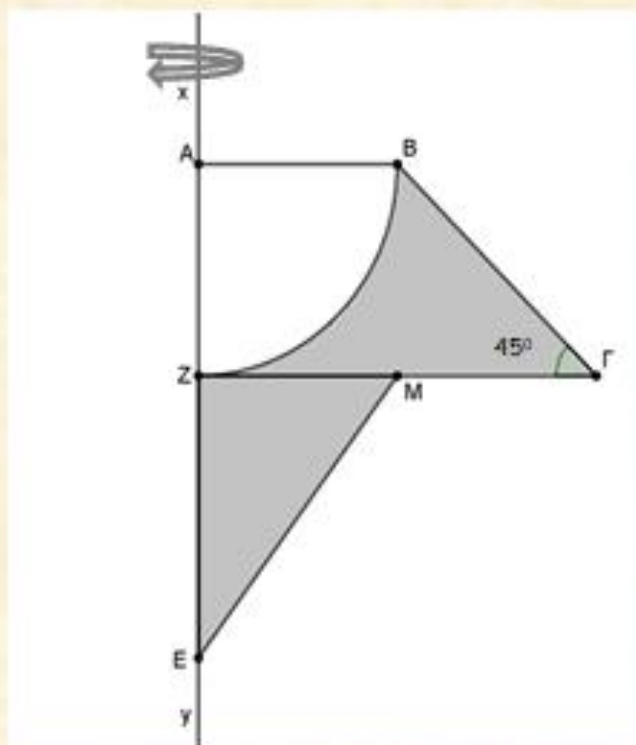
Παρανόηση:
Μηδένιζαν λάθος
τη συνάρτηση
 $\Pi'(t)=0$ αντί $\Pi(t)$

Παράλειψη της
σταθεράς c , άρα
άγνοια της
έννοιας ορισμού
του αορίστου
ολοκληρώματος,
σελ.65

Μη έλεγχος άρα
λάθος, παρόλο που
η τιμή $c=0$ δεν
επηρέαζε το
αποτέλεσμα στα δύο
ερωτήματα

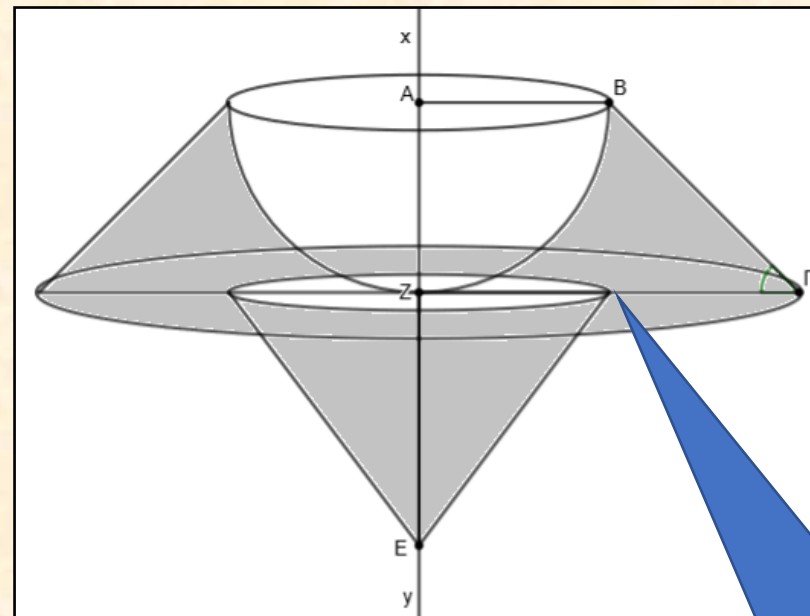
Δεν γινόταν
έλεγχος μεγίστου
στο (i) για $t=2$

- B1.** Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma Z$, με γωνίες $\angle BAZ = \angle AZ\Gamma = 90^\circ$, $\angle B\Gamma Z = 45^\circ$. Με κέντρο το A και ακτίνα $AB = 3\text{cm}$, γράφουμε τόξο BZ μέσα στο $AB\Gamma Z$. Το τρίγωνο ZME είναι ορθογώνιο, με $ZE = 4\text{cm}$ και M μέσο της $Z\Gamma$. Το σκιασμένο χωρίο $(B\Gamma M E Z B)$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (xy) . Να υπολογίσετε:
- το εμβαδόν της επιφάνειας και
 - τον όγκο του στερεού που παράγεται.



B1. Λύση:

Ημισφαίριο	Κολ. Κώνος	Κώνος
$R = 3\text{cm}$ $V = \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 3^3$ $= 18\pi$ $E = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 3^2$ $= 36\pi\text{cm}^2$	$R = 3\text{cm}$ $\rho = 6\text{cm}$ $\lambda = 3\sqrt{3}\text{cm}$ $v = 3\text{cm}$ $V = \frac{\pi v}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)$ $= \frac{\pi \cdot 3}{3}(3^2 + 3 \cdot 6 + 6^2)$ $= \pi(9 + 18 + 36)$ $= 63\pi\text{cm}^3$ $E_K = \pi(R + \rho)\lambda$ $= \pi(3 + 6) \cdot 3\sqrt{3}$ $\Rightarrow E_K = 27\pi\sqrt{3}\text{cm}^2$	$R = 3\text{cm}$ $v = 3\text{cm}$ $\lambda^2 = v^2 + R^2$ $\Rightarrow \lambda^2 = 9 + 16 = 25$ $\Rightarrow \lambda = 5\text{cm}$ $V = \frac{\pi R^2 v}{3} = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 4}{3}$ $\Rightarrow V = 12\pi\text{cm}^3$ $E_K = \pi R \lambda = \pi \cdot 3 \cdot 5$ $\Rightarrow E_K = 15\pi\text{cm}^2$



Αδυναμία
εφαρμογής
δεδομένων

$$V_{ολ} = V_{κ.κών} + V_{κών} - V_{ημσ}$$

$$V_{ολ} = 63\pi + 12\pi - 18\pi$$

$$V_{ολ} = 57\pi\text{cm}^3$$

$$E_{ολ} = E_{ημσ} + E_{κ.κών} + E_{\delta} + E_{κών}$$

$$E_{ολ} = 18\pi + 27\pi\sqrt{2} + 27\pi + 15\pi = 60\pi + 27\sqrt{2}\pi$$

$$E_{ολ} = (60 + 27\sqrt{2})\pi\text{cm}^2$$

Δεν
αιτιολογήθηκε
το μέσο του
ευθ. τμήματος
ΖΓ (βλ. [λύσεις](#))

B2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 6x^3 - ax^2 + \beta x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β , ώστε η f να έχει στη θέση $x_1 = 2$ σημείο καμπής και στη θέση $x_2 = 1$ τοπικό ακρότατο.

β) Για $\alpha = 36$ και $\beta = 54$, να βρείτε τη διάμεσο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των παρατηρήσεων $\alpha, \beta, f(x_1), f(x_2), 125$, όπου x_1 η θέση του σημείου -καμπής και x_2 η θέση του τοπικού ακρότατου της f .

Λύση:

$$(a) f(x) = 6x^3 - ax^2 + \beta x + 1 \Rightarrow f'(x) = 18x^2 - 2ax + \beta$$

$x_2 = 1$ τοπικό ακρότατο

$$\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 18 - 2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow -2\alpha + \beta = 18 \quad (1)$$

$f''(x) = 36x - 2\alpha$ $x_1 = 2$ σημείο καμπής

$$f''(2) = 0 \Rightarrow 72 - 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 36$$

$$(1) \Rightarrow -72 + \beta = 18 \Rightarrow \beta = 54$$

Δεν
ελέγχθηκε το
αντίστροφο
από κανένα
(βλ. λύσεις)

B2. Λύση, συνέχεια:

$$(\beta) f(1) = 6 - 36 + 54 + 1 = 25$$

$$f(2) = 6 \cdot 8 - 36 \cdot 4 + 54 \cdot 2 + 1 = 13$$

Κατατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά: 13, 25, 36, 54, 125

$$v = 5$$
$$\frac{v+1}{2} = 3 \Rightarrow x_{\delta} = x_3 = 36$$

$$\frac{v+1}{4} = 1,5 \Rightarrow Q_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{13 + 25}{2} = 19$$

$$\frac{3(v+1)}{4} = 4,5 \Rightarrow Q_3 = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{54 + 125}{2} = 89,5$$

$$\Rightarrow IQR = Q_3 - Q_1 = 89,5 - 19 = 70,5$$

B3. Δίνεται η λέξη ΔΙΑΜΑΝΤΙΑ

α) i) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

ii) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης, που έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις.

β) Αν πάρουμε στην τύχη ένα από τους αναγραμματισμούς της λέξης ΔΙΑΜΑΝΤΙΑ, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

i) A: Ο αναγραμματισμός να έχει τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις.

ii) B: Ο αναγραμματισμός να μην έχει τα A σε συνεχόμενες θέσεις.

Λύση:

$$\alpha) \text{ i) } n(\Omega) = \frac{9!}{3!2!} = 30240$$

$$\text{ii) } //A A A \Delta M N T \quad 5! \cdot \frac{5!}{2!3!} = 1200$$

$$\beta) \text{ i) } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1200}{30240} = \frac{5}{126}$$

$$\text{ii) } \boxed{A A A} \Delta I I M N T$$
$$n(B') = \frac{7!}{2!} = 2520$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{n(B')}{n(\Omega)} = 1 - \frac{2520}{30240} = \frac{11}{12}$$

B3. Λύση β) ii) με διαφορετική κατανοήση πλήρως σωστή:

$$\text{ii) } \underline{\Delta} \underline{I} \underline{M} \underline{N} \underline{T} \underline{I} \quad P(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{\binom{7}{3} \cdot \frac{6!}{2!}}{30240} = \frac{12600}{30240} = \frac{5}{12}$$

Παρερμηνεία **εκφώνησης**
άσκησης ([βλ. λύσεις](#))

B4. α) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $(1,0)$. Αν $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x, \forall x \in \mathbb{R}$$

β) Αφού βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης G_f της συνάρτησης f με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής της, τη συμπεριφορά της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της, να κάνετε την γραφική της παράσταση.

B4. Λύση:

$$\alpha) f(x) = \int f'(x)dx = \int (3x^2 - 4x + 1)dx = x^3 - 2x^2 + x + c$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow 0 = 1 - 2 + 1 + c \Rightarrow c = 0$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

$$\beta) f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

Σημεία τομής με τους άξονες:

$$\text{Για } x = 0: f(0) = 0, \quad (0, 0).$$

$$\text{Για } y = 0: x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Rightarrow x(x - 1)^2 = 0,$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 1 \quad (1, 0)$$

Μονοτονία και τοπικά ακρότατα:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (3x - 1)(x - 1) = 0$$

$$\text{τότε } x = 1 \text{ ή } x = \frac{1}{3}$$

Πρόβλημα
κατανόησης στην
εφαρμογή αορίστου
ολοκληρώματος
Παρ.1 (σελ.75)

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f	\nearrow	T.M	\searrow	T.E	\nearrow

B4. Λύση, συνέχεια:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27} \quad \text{τότε Τ.Μ}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right) \text{ και}$$

$$f(1) = 0 \quad \text{τότε Τ.Ε}(1,0)$$



Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, \frac{1}{3}]$ και $[1, +\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{1}{3}, 1]$

Κυρτότητα και Σημεία καμπής:

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
f''	-	0	+
f		ΣΚ	

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - 2 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{3} = \frac{8 - 24 + 18}{27} = \frac{2}{27} \Rightarrow \text{ΣΚ}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{27}\right)$$

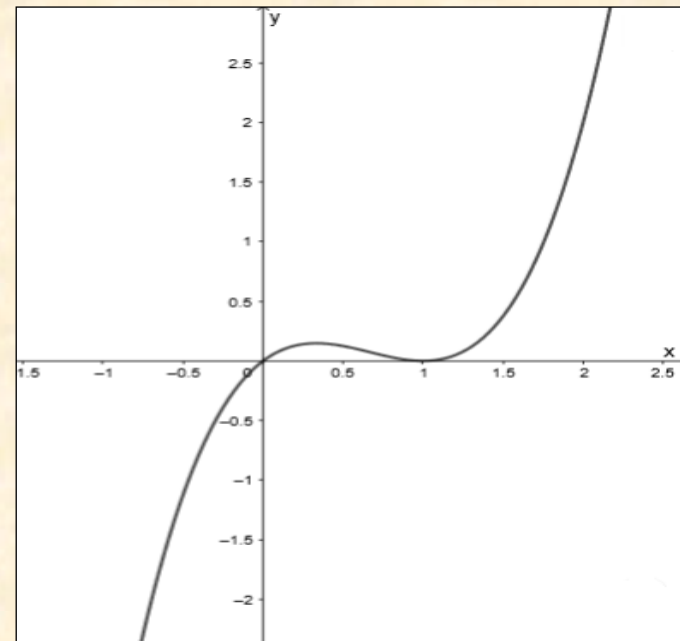
Η f είναι **κοίλη** στο διάστημα $(-\infty, \frac{2}{3}]$ και **κυρτή** στο διάστημα $[\frac{2}{3}, +\infty)$

Συμπεριφορά στα άκρα του Π.Ο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Μη
έλεγχος

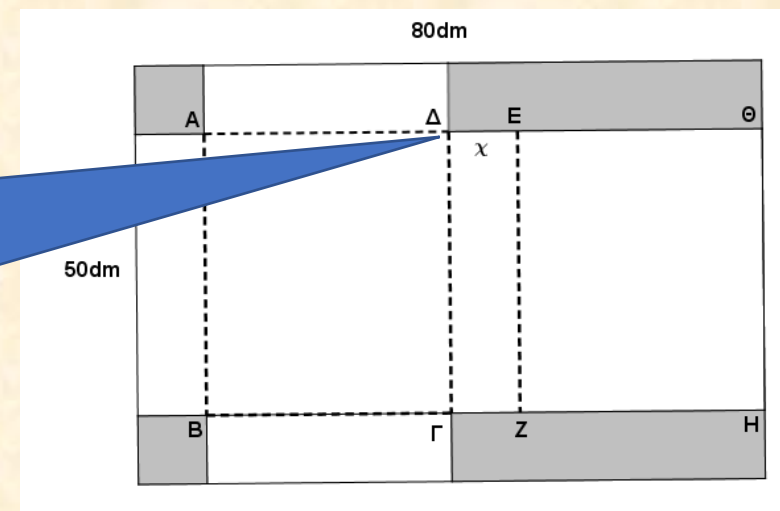


B5. Δίνεται ένα χαρτόνι σχήματος ορθογωνίου διαστάσεων 80dmx50dm.

Πρόκειται να κατασκευαστεί με αυτό ένα κλειστό κουτί, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου ύψους $\Delta E = x$ dm με βάσεις τα ορθογώνια $EZH\Theta$ και $AB\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σκιασμένα μέρη του σχήματος θα αφαιρεθούν. (Οι διπλώσεις θα γίνουν κατά μήκος των τμημάτων AB , $\Gamma\Delta$, EZ , $A\Delta$ και $B\Gamma$).

α) Να δείξετε ότι ο όγκος του κουτιού ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $V(x) = (2x^3 - 130x^2 + 2000x)$ dm³

β) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του κουτιού, ώστε ο όγκος του να είναι μέγιστος.



Δυσκολία κατανόησης στο ερώτημα
(α) **κατασκευής** συνάρτησης και
έλλειψη **βασικών γνώσεων**
γεωμετρίας (πχ αιτιολόγηση σημείου
 Δ μέσου του ευθ. Τμήματος μήκους
80dm

([βλ. λύσεις](#)).

B5. Λύση:

α) Έστω $AD = y$ και $DE = x$ και $AB = 50 - 2x$, $0 < x < 25$

τότε $2x + 2y = 80$ τότε $y = 40 - x$

$$V = E_{\beta}v = (AD)(AB)(DE)$$

$$V(x) = (40 - x)(50 - 2x)x \text{ τότε}$$

$$V(x) = 2x^3 - 130x^2 + 2000x$$

$$\beta) \quad V'(x) = 6x^2 - 260x + 2000$$

$$V'(x) = 0 \quad \text{τότε } 6x^2 - 260x + 2000 = 0$$

$$\text{τότε } (3x - 100)(x - 10) = 0 \text{ τότε}$$



$$x = 10 \quad \text{ή} \quad x = \frac{100}{3} \text{ απορρίπτεται εκτός Π.Ο.}$$

Α' τρόπος

$$V''(x) = 12x - 260$$

$$V''(10) = 12 \cdot 10 - 260 < 0 \text{ τότε στο } x = 10 \text{ όγκος γίνεται μέγιστος}$$

B5. Λύση, Β' τρόπος:

x	0	10	25	$\frac{100}{3}$
V''	+	0	-	0
V		T.M		

Στο $x = 10$ ο όγκος γίνεται μέγιστος

Άρα οι διαστάσεις του κουτιού είναι:

$$AD = 40 - 10 = 30dm$$

$$AB = 50 - 2 \cdot 10 = 30dm$$

$$\text{και } \Delta E = 10dm$$

Ευχαριστώ για την ιδροαχική σας

καλή συνέχεια...